

Feynmanovy diagramy v kvantové teorii pole

Jiří Hořejší, Ústav částicové a jaderné fyziky MFF UK

(přednáška 22. 11. 2018)

Kvantová teorie pole (velmi stručná historie)

Na koncept pole ve fyzice zřejmě poprvé narazil Isaac Newton v 17. století v souvislosti s (tehdy) šokujícím zjištěním, že dvě tělesa na sebe mohou silově působit i bez přímého vzájemného kontaktu. Mám samozřejmě na mysli gravitační zákon, ať už byl tento odhalen v důsledku onoho legendárního pádu jablka ze stromu na Newtonův nos, nebo při jiné příležitosti. Nad tím bezdotykovým vzájemným působením těles zřejmě i Newton žasnul, neboť v jednom dopise napsal, že „it is inconceivable that inanimate brute matter should, without the mediation of something else which is not material, operate upon and affect other matter without mutual contact“. K poznání gravitace jistě významně přispěl již dříve Galileo Galilei svými zákony volného pádu, ale jak všichni víme, Newton došel mnohem dál (i když pojem pole nepoužíval a vycházel z představy okamžitého silového působení na dálku). Vlastně je téměř s podivem, že gravitace jako příklad působení na dálku nebyla teoreticky zpracována již dříve, ale zřejmě je to tak, jak to vystihl Vítězslav Nezval ve své slavné básni Edison: „Tisíc jablek padlo na nos zeměkoule, ale jen Newton doved' těžít ze své boule“. Pokud jde o samotný termín „pole“, ten zavedl Michael Faraday v 19. století (1845) pro popis elektromagnetických jevů. Teorii klasického elektromagnetického pole pak brilantně zformuloval James Maxwell ve 2. polovině 19. století (své slavné rovnice publikoval v roce 1862) a byl přitom opuštěn starý koncept okamžitého silového působení na dálku ve prospěch interakce zprostředkované fyzikálním polem, jež se šíří prostorem rychlostí světla. Tak se také například optika stala součástí teorie elektromagnetického pole – fyzikové pochopili, že světlo je jen speciální případ elektromagnetického vlnění v určitém rozmezí frekvencí, resp. vlnových délek a podobně tomu bylo s interpretací tepelného záření těles.

Na začátku 20. století se pak začala rodit kvantová teorie (tady mám na mysli především planetární model atomu Nielse Bohra a jeho aplikace ve spektroskopii). Je ale pozoruhodné, že ještě dříve, než byl formulován plnohodnotný popis struktury atomů v rámci kvantové mechaniky, objevily se jasné indikace toho, že elektromagnetické záření má ve skutečnosti také korpuskulární (tj. částicovou) povahu, která je v některých situacích naprosto podstatná pro pochopení známých experimentálních dat. To přirozeně vedlo ke kvantovému popisu elektromagnetického pole, přičemž odpovídající částice jsou nehmotné fotony, jak dnes všichni víme. Cesta k tomuto poznání ale trvala nějaký čas a proto stručně připomenu hlavní experimentální fakta, jež byla původním empirickým základem pozdější kvantové teorie elektromagnetického pole. Nejprve se jednalo o teorii tepelného záření, kde klasická fyzika dávala předpovědi v naprostém rozporu s experimentem. Řešení našel Max Planck (1900), který předpokládal, že záření produkují atomy v podobě mikroskopických oscilátorů a energie je vyzařována nespojitě, tj. v kvantech konečné velikosti $\epsilon = h\nu$, kde ν je frekvence a

h je univerzální (Planckova) konstanta. Planck sice nemluvil o fotonech a kvantovaném elektromagnetickém poli, ale byl to zásadní první krok na cestě ke kvantové teorii mikrosvěta (poznamenejme, že termín foton zavedl v roce 1926 fyzikální chemik Gilbert Lewis, který byl za své práce pětadvacetkrát nominován na Nobelovu cenu, nikdy ji však nezískal). Za svou průkopnickou práci („... za zavedení kvant energie“) získal Max Planck Nobelovu cenu v roce 1918. Dalším problémem, na němž selhávala klasická fyzika, byl fotoelektrický jev (fotoefekt): Při ozáření povrchu vhodného materiálu (např. kovu) se uvolňují elektrony, ale zatímco podle klasické teorie by jejich energie měla být dána *intenzitou* ozáření, experiment ukazuje, že ve skutečnosti závisí jen na *frekvenci* dopadajícího záření. Tento pozoruhodný experimentální fakt vysvětlil Albert Einstein (1905) na základě představy kvant záření (s výše zmíněnou závislostí na frekvenci) a zákona zachování energie: elektron emitovaný při fotoefektu má energii danou rozdílem původní energie fotonu a výstupní práce potřebné na uvolnění elektronu z kovu – jednoduchá závislost energie fotoelektronu na frekvenci záření je pak jasná. Za tuto práci získal Einstein Nobelovu cenu v roce 1921 (poněkud překvapivě tedy nikoli za teorii relativity). Asi nejpřesvědčivějším experimentálním argumentem ve prospěch existence fotonů (a tedy kvantové povahy elektromagnetického záření) byl nakonec tzv. Comptonův rozptyl, tj. rozptyl elektromagnetického záření na nabitých částicích (elektronech). Podle představ klasické elektrodynamiky by rozptýlené záření mělo mít stejnou vlnovou délku jako záření dopadající. Ukázalo se však, že pro dostatečně tvrdé (např. rentgenovské) záření dochází při rozptylu ke změně vlnové délky, která navíc závisí specifickým způsobem na směru rozptýleného záření. Konkrétně, při rozptylu na volném elektronu, který je původně v klidu, je ten posun vlnové délky dán vztahem

$$\lambda' - \lambda = h/mc (1 - \cos \vartheta) \quad (1)$$

kde h je Planckova konstanta, m je hmota elektronu, c je rychlost světla a ϑ je úhel rozptylu (tj. úhel mezi směry rozptýleného a dopadajícího záření). Veličina h/mc se nazývá Comptonova vlnová délka (pro elektron je její numerická hodnota přibližně 2.4×10^{-10} cm). Vztah (1) lze snadno odvodit ze zákonů zachování energie a hybnosti, pokud proces chápeme jako pružnou srážku fotonu s energií $E = hc/\lambda$ s elektronem v klidu, v analogii např. se srážkou kulečnickových koulí (pouze přitom použijeme vztahů známých ze speciální teorie relativity). Je jasné, že pro nízké frekvence (např. pro viditelné světlo) je posun vlnové délky relativně zanedbatelný a lze pak očekávat souhlas s klasickou teorií (tzv. Thomsonův rozptyl). Tak tomu opravdu je a Comptonův efekt se pozoruje, jak už bylo řečeno, jen pro dostatečně tvrdé záření. Za svůj fundamentální objev a jeho interpretaci získal Arthur Compton Nobelovu cenu v roce 1927. Poznamenejme ještě, že pomocí energií dopadajícího a rozptýleného fotonu lze vztah (1) přepsat jako

$$E' = E / [1 + (E/mc^2)(1 - \cos \vartheta)] \quad (2)$$

(z čehož je obzvláště zřejmé, že pro $E \ll mc^2$ je relativní změna energie fotonu nepatrná).

Základní principy kvantové teorie byly odhaleny v polovině dvacátých let 20. století a kromě kvantové mechaniky částic (např. elektronů a atomů) zároveň vznikla také matematická formulace kvantování elektromagnetického pole. První takový příspěvek je zřejmě obsažen v poslední části fundamentální práce z roku 1926, jejímiž autory jsou Max Born, Werner Heisenberg a Pascual Jordan a jež se často cituje jako "Dreimännerarbeit". Hlavní zásluhu na tom má nejspíš posledně jmenovaný, který i v pozdějších letech dále významně přispěl k rozvoji kvantové teorii pole (i když je jeho jméno asi méně známé než jména jeho spoluautorů). Od kvantování elektromagnetického pole pak vývoj vedl k obecnější teorii kvantovaných polí, ale než se k tomu dostaneme, je třeba stručně připomenout ještě jeden zásadní moment v historii kvantové teorie.

Diracova rovnice

Základní rovnice kvantové mechaniky, slavná Schrödingerova rovnice, se obvykle vztahuje k situacím, kdy je možno ignorovat zákony speciální teorie relativity (tj. tehdy, kdy charakteristické rychlosti částic jsou mnohem menší než rychlost světla). V takovém případě mluvíme o nerelativistické teorii a příslušná Schrödingerova rovnice pak např. pro volnou částici s hmotou m reprodukuje jednoduchý vztah mezi energií E a vektorem hybnosti \mathbf{p} ,

$$E = \mathbf{p}^2/2m \quad (3)$$

Pro částici pohybující se v nějakém vnějším silovém poli (např. elektron v atomu) se do Schrödingerovy rovnice přidá příslušná potenciální energie a při jejím řešení se pak hledají "vlnové funkce" částice a spektrum možných energií. Celkem přirozeně však současně s formulací Schrödingerovy rovnice vyvstala otázka, jak napsat relevantní *relativistickou* rovnici kvantové mechaniky, která by pro volnou částici reprodukovala Einsteinův vztah mezi energií a hybností

$$E^2 = c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4 \quad (4)$$

Přímočaré propojení matematického formalismu kvantové teorie se vztahem (4) vede k rovnici, kterou navrhli Oskar Klein a Walter Gordon v roce 1926 (a nezávisle na nich také někteří další autoři). Klein – Gordonova rovnice má své omezené použití, ale má také závažné interpretační nedostatky a navíc se brzy ukázalo, že pro popis elektronu se nehodí, zejména proto, že v sobě přirozeně nezahrnuje **spin** (tj. vnitřní moment hybnosti, o němž se v případě elektronu vědělo už od poloviny dvacátých let). Skutečně průlomovou práci přinesl rok 1928, kdy Paul Dirac publikoval svůj naprosto originální a téměř šokující přístup k danému problému. Nejprve svérázným způsobem odmocnil vztah (4) ve tvaru

$$E = c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3) + \beta mc^2 \quad (5)$$

a následně použil matematický formalismus kvantové teorie v přímočaré analogii se Schrödingerovou rovnicí. Bylo přitom prakticky hned jasné, že koeficienty $\alpha_j, j = 1, 2, 3$ a β nemohou být obyčejná čísla. Ve skutečnosti jsou to matice 4×4 a Diracova vlnová funkce

elektronu pak má 4 komponenty! (Zatímco Newtona napadl gravitační zákon snad po pádu jablka na jeho nos, Dirac říkal, že svou rovnici uhodl, když v Cambridge, v koleji sv. Jana, zádumčivě hleděl do plamenů v krbu.) Po některých dalších algebraických úpravách se dá Diracova rovnice napsat tak, jak ji lze spatřit na jeho symbolickém náhrobku ve Westminster Abbey v Londýně:

$$i\gamma \cdot \partial\psi = m\psi \quad (6)$$

To je asi nejstručnější zápis a hodí se ideálně pro epitaf, ale obvykle tuto geniálně jednoduchou rovnici píšeme poněkud podrobněji ve tvaru

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (7)$$

Symbol ψ představuje vlnovou funkci částice (elektronu), ∂_μ označuje derivace vůči prostoročasovým souřadnicím a koeficienty γ_μ jsou čtyři matice 4×4 , které jednoduše souvisí s maticemi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a β . V rovnici (7) se sčítá přes čtyři hodnoty indexu μ (což je právě dimenze prostoročasu). Poznamenejme ještě, že zde užíváme tzv. přirozené soustavy jednotek, v níž jsou redukována Planckova konstanta $\hbar = h/2\pi$ i rychlost světla c rovny jedné. (takové jednotky jsou velmi praktické pro účely relativistické kvantové teorie). Analýza fyzikálního obsahu Diracovy rovnice vede k závěru, že **automaticky zahrnuje správnou hodnotu spinu elektronu** ($1/2$ v jednotkách \hbar) a čtyřkomponentní vlnová funkce ψ připouští analogickou interpretaci jako řešení nerelativistické Schrödingerovy rovnice. Do rovnice pro volnou částici lze také celkem snadno přidat člen popisující interakci elektronu s vnějším elektromagnetickým polem (způsobem osvědčeným v případě Schrödingerovy rovnice) a to vede k dalším úspěšným předpovědím: je tak možno přirozeně odvodit drobné korekce k hladinám energie atomu vodíku (jejich tzv. jemnou strukturu, která se skutečně pozoruje) a v případě interakce s vnějším statickým homogenním magnetickým polem Diracova teorie predikuje existenci spinového (tj. vnitřního) magnetického momentu elektronu o velikosti jednoho "Bohrova magnetonu", tj.

$$\mu_{\text{spin}} = \mu_B = e/2m \quad (8)$$

(v přirozené soustavě jednotek), kde e je náboj elektronu. Tato predikce se velmi dobře (i když ne zcela přesně) shoduje s výsledky měření. Je přitom ovšem třeba zdůraznit, že uvedená úspěšná predikce není "neprůstřelná": je totiž založena na předpokladu o tzv. "minimální" elektromagnetické interakci elektronu - v zásadě je přípustné přidat další interakční člen, který by dal magnetickému momentu prakticky libovolnou hodnotu. (Předeslaná zmínka o malé odchylce Diracovy predikce od experimentální hodnoty je důležitá právě v souvislosti s naší pozdější diskusí kvantové elektrodynamiky jakožto modelu kvantové teorie pole.) V každém případě Diracova rovnice zaznamenala ohromující úspěch a s určitou nadsázkou by se její pozice ve fundamentální fyzice dala charakterizovat kulinární analogií hutné a vydatné polévky uvařené z čisté vody (tím mám na mysli ono troufalé odmocnění vztahu pro energii (4)). Lze tedy pochopit původ slavné historky o konverzaci

mezi Diracem a Feynmanem sedícími vedle sebe na nějakém konferenčním banketu, kdy Dirac se po dlouhém mlčení představí takto: "Jsem Dirac, mám rovnici. Máte také nějakou?"

Kromě těch skvělých úspěchů však má Diracova rovnice také jeden závažný nedostatek, který je ostatně společný všem rovnicím relativistické kvantové mechaniky, ať už popisují částice s jakýmkoli spinem. Jde o to, že pro volnou částici má rovnice nejen "správná" řešení s určitou hybností a kladnou energií splňující vztah (4), ale také "patologická" řešení se *zápornou energií*, která nelze jen tak ignorovat (to je fakticky hlavní důvod toho, proč se nakonec ukázalo, že relativistická kvantová *mechanika* popisující stavy *jedné dané částice* nepředstavuje z hlubšího pohledu plně konzistentní teoretické schéma, ačkoli v řadě situací dává pozoruhodně dobré výsledky v souladu s experimentem). Záporné energie jsou skutečně problematické na první pohled: pokud by totiž příslušné stavy byly neobsazené, elektron by měl tendenci spontánně spadnout na nějakou takovou nižší hladinu energie (a přitom třeba vyžářit foton). Taková nestabilita světa je samozřejmě nepřijatelná a Dirac se proto pokusil zachránit situaci předpokladem, že vakuum odpovídá plně obsazeným stavům se zápornou energií (obvykle se tomu říká Diracovo moře), což představuje jakési nepozorovatelné pozadí. Když je pak nějaký elektron z moře excitován, vznikne ve spektru záporných energií díra, která ovšem znamená, že energie moře se zvýší (odečtení záporné hodnoty je jako přidání hodnoty kladné) a rovněž náboj moře se zvýší o opačnou hodnotu, než je hodnota náboje elektronu. Taková díra v Diracově moři se pak dá interpretovat jako přítomnost částice s kladnou energií, ale s opačným nábojem než má elektron (a přitom ovšem se stejnou hmotou). Tak byla tedy předpovězena antičástice elektronu – pozitron. Dirac si původně myslel, že by takovou kladně nabitou částici mohl nějak ztotožnit s protonem (sic!), ale to bylo zcela neprůchodné. Pozitron byl objeven nedlouho po této předpovědi a dá se říci, že to byla první elementární částice předpovězená na základě čistě teoretických úvah. Je ovšem nutno poznamenat, že představa takového zaplněného moře má jeden fatální nedostatek: Zatímco pro částice se spinem $\frac{1}{2}$ jako je elektron (tj. fermiony) platí tzv. Pauliho vylučovací princip, podle něhož v daném stavu může být jen jedna částice, pro částice s celočíselným spinem (což jsou bosony) může být počet částic ve stejném stavu *libovolně velký* a takové hypotetické moře tak nelze *nikdy* zaplnit - Diracova idea je tedy v tomto případě zcela nepoužitelná a uvedený obraz je proto obecně nekonzistentní. Na druhou stranu, své antičástice mají i bosony, takže musí existovat nějaké lepší vysvětlení (to nakonec dala právě teorie *kvantovaných polí*). Lze tedy vlastně říci, že Dirac správně předpověděl existenci pozitronu na základě nesprávného argumentu. Přesto však je třeba uznat, že predikce antičástic nepochybně patřila mezi převratné události fyziky 20. století. Jen ještě připomeňme, že Dirac dostal Nobelovu cenu za fyziku spolu s Erwinem Schrödingerem v roce 1933.

Vraťme se nyní opět k teorii pole. Jak už bylo řečeno, první (zjednodušená) verze kvantování elektromagnetického pole byla obsažena už ve slavné „Dreimännerarbeit“ Borna, Heisenberga a Jordana. Kvantování pole znamená popis a interpretaci jeho stavů pomocí částic, v daném případě fotonů. Jde tedy obecně o mnohočásticové stavy a jejich případné

superpozice. V matematickém popisu kvantovaného pole hrál od začátku klíčovou roli pojem operátoru (v Hilbertově prostoru stavů), stejně jako v kvantové mechanice (formulace kvantové teorie pole pomocí Feynmanova funkcionálního integrálu se objevila později). Základním stavem kvantovaného pole je vakuum (bezčásticový stav) a korespondence mezi polem a částicemi je formálně dána tzv. kreačními a anihilačními operátory: působením kreačního operátoru dostaneme z vakua jednočásticový stav, atd. a anihilační operátor naopak “likviduje” jednu částici – např. z jednočásticového stavu tak udělá vakuum a z vakua pak pouhou nulu. Zatím tedy šlo jen o elektromagnetické pole, které má prvotně zcela jasnou klasickou podobu. Pascual Jordan (1902 – 1980) byl zřejmě první, kdo se pokusil zobecnit vztah pole – částice na další případy. To znamená výraznou abstrakci a pozoruhodný skok v myšlení, protože kvantovaná pole odpovídající částicím jiným než fotony nemají žádný klasický protějšek. Jordan tedy uvažoval o kvantování “polí matérie”, pro něž odpovídající částice jsou např. elektrony. První práci na toto téma publikoval ještě před vznikem Diracovy rovnice a o něco později napsal spolu s Eugenem Wignerem fundamentální práci o kvantování Diracova pole, která se stala trvalou součástí pozdějších učebnicových textů. Modely kvantovaných polí mají proti relativistické kvantové mechanice nesmírnou výhodu v tom, že nás zbavují obtížného problému s negativními energiemi a antičástice se zde objevují naprosto přirozeně, bez dodatečné obskurní hypotézy zaplněného “moře”. (Biografická poznámka: Eugen Wigner se později stal Diracovým švagrem – Wignerova sestra Margit se za Diraca provdala v roce 1937). Na rozvoji teorie kvantovaných polí mají podstatnou zásluhu také Wolfgang Pauli a Werner Heisenberg, kteří ve dvou článcích publikovaných v roce 1929 formulovali obecnou teorii (založenou na lagrangeovském formalismu) prakticky v dnešní “učebnicové” podobě. Raná historie kvantové teorie pole je zajímavá koncepčně i personálně a prakticky všechny podstatné detaily lze najít např. v monografii Silvana Schwebera *QED and the men who made it*. Pokud jde o rozhodující osobnosti, Schweber konstatuje, že Pascual Jordan je poněkud opomíjený hrdina této historie (“*unsung hero*”), jehož jméno jistě není tak všeobecně známé jako jména jeho “nobelovských” kolegů (společensky mu také pravděpodobně uškodil jeho příklon k německému nacismu, možná právě kvůli tomu mu unikla Nobelova cena). Pro úplnost dodejme, že Heisenberg získal (sólově) Nobelovu cenu v roce 1932, Pauli v roce 1945, Born v roce 1954 a Wigner v roce 1963.

Kvantová elektrodynamika (QED)

Souhrnně lze říci, že pojmové základy teorie kvantovaných polí byly formulovány do poloviny třicátých let a byly použitelné pro konkrétní výpočty týkající se fyzikálních procesů v mikrosvětě. Sám Dirac obecné kvantování “polí matérie” dlouho nepřijímal a držel se svých představ v rámci relativistické kvantové mechaniky částic (a eventuelně kvantovaného elektromagnetického pole). Ačkoli je tedy považován za “otce” kvantové elektrodynamiky (je také autorem tohoto názvu), formulace této teorie v podobě, kterou známe dnes, je spíše dílem jiných jeho souputníků. Kromě již zmíněných slavných jmen zde výrazně přispěl také Enrico Fermi, který je jinak považován za experimentátora (ve skutečnosti to byl zřejmě

poslední univerzální fyzik, brilantní jak v oblasti experimentu, tak i teorie). Základem každého modelu relativistické kvantové teorie pole je, jak už jsme se zmínili, příslušný "lagrangián". Přesněji řečeno, pracujeme obvykle s (prostorovou) hustotou lagrangiánu, která se skládá z členů popisujících volná (neinteragující) pole a z interakčních členů. V případě QED elektronů, pozitronů a fotonů má interakční člen tvar

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (9)$$

V uvedeném výrazu ψ reprezentuje Diracovo (electron-pozitronové) pole, A_μ je "čtyřpotenciál" elektromagnetického pole a e je "vazbová konstanta", bezrozměrný parameter vytvořený z náboje elektronu, Planckovy konstanty a rychlosti světla. Tento parametr jednoduše souvisí s tzv. "konstantou jemné struktury" α , platí $\alpha = e^2/4\pi$. Numerická hodnota α je přibližně 1/137. Při výpočtech týkajících se fyzikálních procesů rozptylu, anihilace a produkce částic hledáme příslušné "amplitudy pravděpodobnosti" (obsažené v tzv. S -matici). Takové amplitudy (maticové elementy S -matice) se dají přibližně spočítat pomocí "poruchového rozvoje", který vychází z představy, že interakce je dostatečně slabá a je tedy jen "poruchou" k pohybu volných částic. Technicky znamená realizace poruchového rozvoje iteraci působení interakčního členu na uvažovaný počáteční stav a posléze extrakci hledaného finálního stavu na základě obvyklých pravidel kvantové teorie (počáteční a koncové stavy jsou ovšem dány působením příslušných kreačních operátorů na vakuum). Přítomnost faktoru e v interakčním lagrangiánu ovšem také znamená, že poruchový rozvoj je zároveň rozvojem v mocninách této (malé) vazbové konstanty. To je tedy v kostce základní algoritmus výpočtu relevantních amplitud pravděpodobnosti. Z nich pak dostaneme celkem snadno fyzikálně měřitelné pravděpodobnosti uvažovaných procesů – relevantní veličinou je přitom fakticky "účinný průřez" dané reakce (vhodně normalizovaná pravděpodobnost s rozměrem plochy). Od konce 20.let a během 30.let dvacátého století byly publikovány výsledky výpočtů pro fyzikální procesy s účastí elektronů, pozitronů a fotonů (Mott, Bhabha, Møller, Klein a Nishina, dvoufotonová anihilace electron-pozitronového páru (Dirac)). Tady je ovšem na místě následující poznámka: Ačkoli v té době byl již plně rozvinut aparát kvantové teorie pole, většina autorů stejně používala relativistickou *kvantovou mechaniku částic* à la Dirac (včetně představy moře stavů s negativní energií pro popis pozitronů). Takový přístup také dává správné výsledky, ale z dnešního hlediska je už zastaralý; vrátíme se však k tomu právě v souvislosti prací R.Feynmana po 2.světové válce.

Výpočty pro zmíněné procesy byly úspěšně provedeny v nejnižším netriviálním řádu poruchového rozvoje (což konkrétně znamená, že příslušné amplitudy byly řádu e^2 (tzn. α). První pokusy jít s výpočty do vyšších řádů v mocninách e však narazily na fundamentální problem: většina relevantních výrazů vedla na divergující integrály (jedním z prvních teoretiků, kteří se tímto problémem zabývali, byl Robert Oppenheimer, známý později spíše jako "otec americké atomové bomby", ale do diskuse přispěli i mnozí další). Pro některé původní tvůrce kvantové teorie to bylo signálem k úvahám o možné zásadní revizi celého

konceptu kvantové elektrodynamiky a kvantové teorie pole vůbec. Nakonec se však ukázalo, že přijatelné je poměrně konzervativní řešení problému těchto "ultrafialových divergencí": jedná se o metodu "renormalizace", formulovanou v období velké konjunktury QED po 2. světové válce, zejména na přelomu 40. a 50. let. Do rozvoje metod a výpočetních technik QED v té době nejvýrazněji zasáhli (v abecedním pořadí) Freeman Dyson (*1923), Richard Feynman (1918 – 1988), Julian Schwinger (1918 – 1994) a Sin-Itiro Tomonaga (1906 – 1979); přispěly ovšem i další významné osobnosti teoretické fyziky, jako např. Hans Bethe. Rozvoj QED byl stimulován jak teoretickými problémy spojenými se zmíněnými nekonečny, tak novými pozoruhodnými experimentálními daty (šlo především o magnetický moment elektronu a tzv. Lambovo posunutí atomárních hladin energie). Historie příspěvků „klasiků QED“ je velmi podrobně popsána v již zmíněné knize Silvana Schwebera, zde jen velmi stručná charakteristika jejich koncepčních přístupů: Feynman nepoužíval kvantovou teorii pole, nýbrž v zásadě jen relativistickou kvantovou mechaniku à la Dirac (Schweber píše, že Feynman „zdědil Diracův kabát“), ale veden brilantní intuicí přitom objevil své „obrázkové písmo“, slavné Feynmanovy diagramy. Schwinger a Tomonaga vycházeli důsledně z kvantové teorie pole, ale techniku diagramů neodhalili. Dyson provedl velkolepou syntézu metod kvantové teorie pole a techniky Feynmanových diagramů a fakticky právě jeho fundamentální příspěvky se staly trvalou součástí učebnic kvantové teorie pole, které se používají ve všech univerzitních kursech po celém světě. Jak známo, Feynman, Schwinger a Tomonaga dostali v roce 1965 společně Nobelovu cenu – na Dysona už tedy cena nevyšla, protože ji mohou získat nejvýše tři lidé současně (S. Weinberg: „He was fleeced“). V tomto ohledu je tedy Freeman Dyson také „unsung hero“ kvantové elektrodynamiky (ale snad je absence nobelovského ocenění kompenzována jeho trvalou přítomností v učebnicích – podle mého názoru má tímto zajištěnu vědeckou nesmrtelnost, podobně jako Feynman prostřednictvím svých diagramů). Ještě pár biografických poznámek: Nobelova cena sice Dysonovi unikla, ale získal asi tucet jiných významných medailí a měl doživotní permanentní pozici v Ústavu pokročilých studií (Institute of Advanced Studies) v Princetonu. A ještě jedna kuriozita: Dyson nikdy formálně nezískal doktorát, tj. Ph.D. (sic!), naštěstí to nebylo potřeba pro jeho skvělou kariéru (původně přijel z Británie do USA, aby dělal doktorát a jeho školitelem měl být Hans Bethe, ale pak potkal Feynmana a šel svou cestou k objasnění původu jeho diagramů v kvantové teorii pole).

Feynmanovy diagramy v QED

Hlavním smyslem celé této přednášky není analyzovat myšlenkový pochod a metody, které Feynmana vedly k jeho diagramům. Kdo je dostatečně fascinován Feynmanovou osobností a dílem, může odkazy na jeho dva relevantní články z roku 1949 snadno najít na internetu. Z mého pohledu nejsou příliš srozumitelné (což je nejspíš moje chyba), ale hlavně, jak už jsem konstatoval, svět celkem brzy přijal do svého „kánonu“ přehlednější Dysonovy metody. Za zmínku ale přece jen stojí pedagogický výklad Feynmanových postupů v jedné ze stěžejních učebnic 60. let dvacátého století, a sice James Bjorken & Sidney Drell: *Relativistic Quantum Mechanics* (1964). V této knize autoři praví, že se budou snažit „oddalovat tak

dlouho, jak jen je možné, ohromný úkol implementace formalismu teorie kvantovaných polí ...“ a že místo toho budou nejprve používat Feynmanův „propagátorový přístup“ v rámci Diracovy teorie elektronů a pozitronů pro výpočty týkající se konkrétních rozptylových a anihilačních procesů. Avizovaný ohromný úkol formulace metod a technik kvantové teorie pole Bjorken a Drell realizovali ve své druhé knize *Relativistic Quantum Fields* (která vyšla o rok později). Dovolím si tedy uvést pro ilustraci několik příkladů Feynmanových diagramů v QED, včetně pravidel (v poněkud zjednodušené podobě) pro výpočet jejich příspěvků. Nejprve bych ale rád připomněl jeden mimořádně důležitý výsledek, v jehož případě patří prvenství Julianu Schwingerovi. Jde o QED korekci k magnetickému momentu elektronu, o níž už tady padla stručná zmínka. Pro tuto veličinu Schwinger svými metodami odvodil následující predikci

$$\mu_e = \mu_B (1 + \alpha/2\pi + \dots) \quad (10)$$

Ta korekce k původnímu Diracovu výsledku je numericky zhruba 0.001 a ve své době byla ve skvělém souhlasu s tehdy čerstvými experimentálními daty (jedná se o roky 1947 a 1948). Schwingerova korekce je tak slavná, že si ji její autor nechal napsat na svůj náhrobek. Prakticky současně a nezávisle dospěl ke stejnému výsledku také Feynman. Mimochodem, „anomální magnetický moment“ elektronu, jak se daná veličina rovněž nazývá, je i v rámci QED konečná, tj. prostá ultrafialových divergencí (v takovém případě také říkáme, že daná veličina je „spočitatelná“).

Desatero pravidel pro Feynmanovy diagramy v QED

V této přednášce jsem uvedl ilustrativní příklady Feynmanových diagramů pro procesy pružného elektron-pozitronového rozptylu ve druhém a čtvrtém řádu, foton – fotonového rozptylu ve čtvrtém řádu a nakonec také jednosmyčkový diagram odpovídající Schwingerově korekci k magnetickému momentu; obrázky diagramů lze najít v závěru textu. Na poslední stránce jsem sumarizoval základní pravidla pro výpočet příspěvků Feynmanových diagramů v QED a uspořádal jsem je tak, aby jich bylo rovných deset (Desatero pravidel QED). Vizualizace amplitud pravděpodobnosti procesů v QED (a jiných modelech kvantové teorie pole) v podobě diagramů umožňuje také jejich názorný slovní popis: vnější linie odpovídají reálným počátečním a koncovým částicím, vnitřní linie odpovídají „virtuálním částicím“, které zprostředkovávají interakce a vrcholy diagramů kopírují strukturu příslušného interakčního lagrangiánu. Výsledkem je tedy názorná grafická reprezentace poměrně složitých algebraických výrazů, které by jinak byly špatně stravitelné mimo okruh hluboce zasvěcených teoretiků. Občas se proto zdůrazňuje, že „obrázkové písmo“ Feynmanových diagramů zpřístupnilo kvantovou teorii pole i experimentátorům (což neznamená nějaké podceňování experimentátorů). Mezi uvedenými příklady si zvláštní zmínku zaslouží proces foton – fotonového rozptylu (někdy se mu také říká rozptyl světla na světle – „light-by-light scattering“). Individuální čtvercový („box“) diagram je sám o sobě divergentní, ale po přidání všech dalších permutací vnějších fotonových linií je výsledek konečný a jedná se tedy o spočitatelný proces. Je to samozřejmě efekt čistě kvantové povahy, v klasické teorii

elektromagnetického pole žádný rozptyl světla na světle není možný. Pro fotony s dostatečně nízkou energií (mnohem menší než klidová energie elektronu) se tak indukují "efektivní samointerakce" fotonů, kterou lze zapsat pomocí vhodného interakčního lagrangiánu. Výsledek odvozený z QED vypadá takto:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = 2\alpha^2/45m^4 [(E^2 - B^2)^2 + 7(E \cdot B)^2] \quad (11)$$

kde E a B označují intenzity elektrického a magnetického pole (které souvisí se čtyřpotenciálem A_μ dobře známými vztahy). Efektivní Feynmanův diagram popisující rozptyl světla na světle pak sestává pouze z vrcholu se čtyřmi vnějšími fotonovými liniemi a jeho příspěvek je úměrný vazbové konstantě ve vztahu (11). Tento proces nepochybně existuje, ale v dostupných experimentálních podmínkách dosud nebyl pozorován, neboť pro nízké energie fotonů je příslušný účinný průřez velmi malý. Byl ale pozorován proces tohoto typu s účastí "málo virtuálních" (tj. téměř reálných) fotonů.

Kvantová elektrodynamika znamenala ohromný úspěch fyziky dvacátého století a výrazný stimul především pro rozvoj fyziky elementárních částic. Kvantová teorie pole však dlouho nenacházela zcela přesvědčivé aplikace v oblasti jiných fundamentálních interakcí, zejména pro silné interakce ("jaderné síly"). Koncem padesátých let a během let šedesátých prošla kvantová teorie pole "existenční krizí", někteří významní teoretici (např. Lev Landau) dokonce navrhovali tuto metodu zcela opustit. Pro slabé interakce ("slabé jaderné síly") však model efektivní kvantové teorie pole celkem fungoval a snaha připodobnit popis slabých interakcí úspěšné kvantové elektrodynamice vedla na konci šedesátých let ke vzniku jednotné teorie elektromagnetických a slabých interakcí, která se dnes nazývá "standardní model". (Formulace standardního modelu výrazně přispěla k celkové renesanci kvantové teorie pole a "krize šedesátých let" je dnes prakticky zapomenuta.) Do historie teorie slabých interakcí se významně zapsal také Feynman a proto bych nyní rád stručně popsal jeho příspěvek.

Slabé interakce

Je třeba začít ve třicátých letech 20. století, kdy Enrico Fermi formuloval první kvantitativní teorii radioaktivního rozpadu beta, v jehož základu je rozpad neutronu na proton, elektron a další částici (kterou dnes podle Fermiho nazýváme (anti)neutrino). Důvodem pro Fermiho hypotézu o nějaké třetí částici v koncovém stavu byl prokázaný fakt *spojitého* spektra energií elektronu (kdyby se neutron rozpadal jen na elektron a proton, byla by možná vždy jen jedna energie). Fermi použil v té době nový formalismus teorie kvantovaných polí a napsal jednoduchou *přímou* interakci polí neutronu, protonu, elektronu a neutrina (všechna se berou jako pole Diracova typu)

$$\mathcal{L}_\beta = G(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) \quad (12)$$

Motivace pro takovou formu je celkem zřejmá: Potřebujeme anihilační operátor neutronu, kreační operátory protonu a elektronu a pak už zbývá prostor jen pro kreační operátor

antineutrína. Přítomnost Diracových matic γ_μ Fermi motivoval žádoucí analogií (alespoň částečnou) s kvantovou elektrodynamikou. Pro popis rozpadu beta by se ale jistě hodila i jiná detailní algebraická struktura, podstatná je jen konfigurace polních operátorů. Je ovšem třeba ještě jednou zdůraznit, že se zde na rozdíl od QED uvažuje přímá interakce bez dalšího zprostředkujícího pole. Použijeme-li Fermiho interakci (12) v nejnižším řádu poruchového rozvoje (kde relevantní Feynmanův diagram sestává pouze ze čtyř vnějších linií zúčastněných částic), lze celkem snadno získat různé měřitelné veličiny, především tvar energetického spektra elektronů. Výsledek je, až na numerický faktor,

$$dw(E)/dE = \text{const.} \times G^2 E (E^2 - m^2)^{1/2} (E_{\text{max}} - E)^2 \quad (13)$$

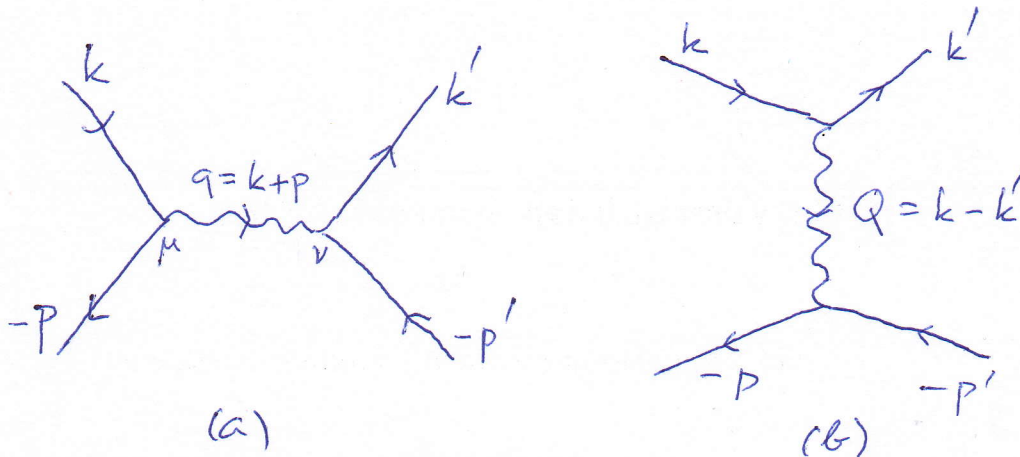
kde veličina na levé straně je pravděpodobnost emise elektronu s danou energií (za jednotku času), m je hmota (klidová energie) elektronu a E_{max} je maximální možná energie elektronu v uvažovaném rozpadu (numericky, $E_{\text{max}} \approx m_n - m_p \approx 1.3 \text{ MeV}$). Teoreticky odvozený výraz (12) velmi dobře souhlasí s experimentálními daty a tuto úspěšnou predikci Fermiho modelu lze proto považovat za jeden z raných triumfů kvantové teorie pole (jak ostatně také zdůrazňuje například S. Weinberg ve své známé učebnici *The Quantum Theory of Fields I*). Z výrazu (13) lze integrací přes energii E dostat rovněž celkovou pravděpodobnost rozpadu za jednotku času ("rozpadovou šířku") a následně tedy také příslušnou střední dobu života. Srovnáním s experimentálními daty pak získáme hodnotu Fermiho vazbové konstanty $G \approx 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. Během zhruba dvou dekád po publikaci Fermiho teorie byla realizována řada měření charakteristik jaderného beta rozpadu a vyšlo najevo, že původní forma (12) nemůže popsat všechna data (jednalo se převážně o jemnější pozorovatelné než samotné spektrum energií, především o úhlové korelace elektronu a neutrína). Navíc, některé experimentální výsledky byly protichůdné a tak koncem padesátých let nepanovala shoda o tom, jaká je vlastně správná algebraická struktura interakce Fermiho typu. Kromě toho ale také v roce 1957 došlo k jednomu naprosto zásadnímu průlomovému objevu: Nade vši pochybnost bylo prokázáno, že slabá interakce narušuje "zákon parity", tj., populárně řečeno, že slabá interakce na fundamentální úrovni rozlišuje mezi levým a pravým. V této situaci přišli Murray Gell-Mann a Richard Feynman (a nezávisle na nich Robert Marshak a George Sudarshan) s jednoduchým nápadem, který byl motivován specifickou pozicí neutrína mezi ostatními částicemi. Experimenty totiž od začátku ukazovaly, že neutrino je extrémně lehká částice (i ve srovnání s elektronem) a tak bylo přijatelné pro jednoduchost předpokládat, že je prostě nehmotné. Pokud by tomu tak bylo, pak jeho nejpřirozenějším teoretickým popisem by byla rovnice jednodušší než Diracova, tzv. Weylova rovnice. Ta má ovšem právě tu charakteristickou vlastnost, že narušuje paritu! Dalo by se tedy říci, že narušení parity je tu kvůli nehmotnému neutrínu. Nápad výše uvedených autorů pak spočíval v dalším kroku a sice v rozšíření matematické formulace "Weylova mechanismu" i na elektron. To byla čirá spekulace, ale ukázala se nakonec jako velmi úspěšná. V matematické řeči znamená, že v původní Fermiho teorii dané formulí (12) se v části obsahující elektronové a neutrinové pole matice γ_μ nahradí výrazem $\gamma_\mu(1 - \gamma_5)$, kde γ_5 je dána součinem všech čtyř Diracových matic. V nukleonové části je třeba vzít v úvahu to, že proton a neutron jsou kompozitní objekty, takže

místo γ_μ tam nakonec bude obecnější forma $\gamma_\mu(1 - f\gamma_5)$, přičemž koeficient f je třeba určit experimentálně. Slovně se to obvykle vyjadřuje tak, že slabé interakce v rozpadu beta se účastní jen (chirální) levý elektron a levé neutrino a mluví se proto “maximálním narušení parity”. Feynman si této úspěšné hypotézy cenil možná víc než svých diagramů, měl totiž pocit, že uhodl jeden z fundamentálních zákonů přírody. Ve své práci z roku 1957 šli Feynman a Gell-Mann ještě o krok dál a sjednotili popis tehdy známých slabých reakcí do jedné univerzální formy, která pak navíc předpovídala existenci dalších dosud nepozorovaných procesů. Vznikla tak elegantní teorie slabých interakcí, jež se o deset let později stala jedním ze základů standardního modelu elektromagnetických a slabých interakcí. Je ale také nutno poznamenat, že z dnešního pohledu šlo vlastně o další příklad šťastně uhodnutého (téměř) *správného* výsledku na základě *nesprávných* argumentů: Dnes totiž již dobře víme, že ani neutrino není nehmotné a Weylova rovnice tak pro jeho popis není relevantní. Dodnes tak není jasné, jaký je vlastně hlubší původ onoho “maximálního narušení parity”, matematicky jednoduše zabudovaného do relevantní části současného standardního modelu.

Ať už je to jak chce, vynikající Feynmanovy výkony ve fyzice svědčí o jeho pronikavé intuici a skvělém daru jít vždy k podstatě věci. Ačkoli tedy své slavné diagramy v kvantové elektrodynamice odhalil mimo rámec striktních metod kvantové teorie pole, lze přesto konstatovat, že se o rozvoj kvantové teorie pole mimořádně zasloužil – prostě proto, že zavedl univerzální jazyk, který už téměř sedmdesát let v dané oblasti všichni používáme a myslím, že nám vydrží ještě hodně dlouho.

Příklady Feynmanových diagramů v QED (1)

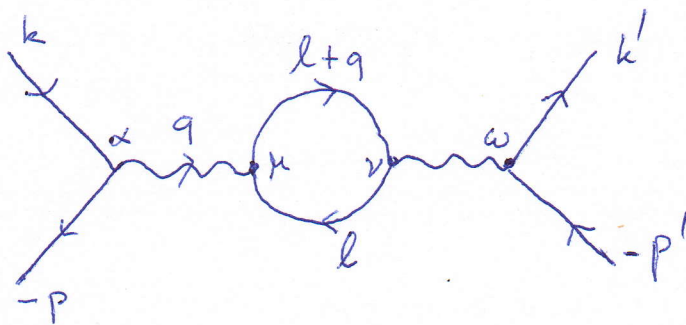
Pružný rozptyl elektron – pozitron („Bhabha scattering“) ve 2. řádu



Příspěvek diagramu (a) (diagram „anihilačního typu“):

$$i M_a = i^3 e^2 \bar{v}(p) \gamma_\mu u(k) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(k') \gamma_\nu v(p')$$

Příklad diagramu 4. řádu pro daný proces:

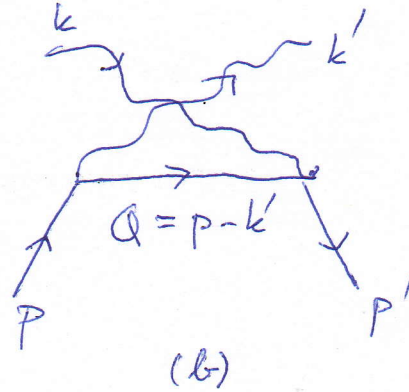
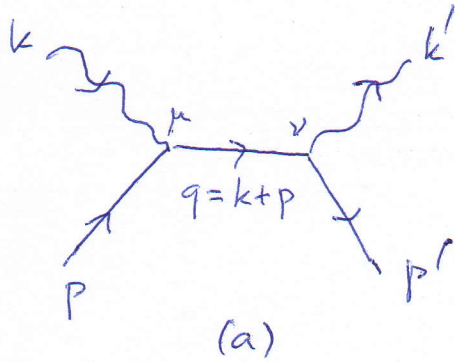


Příspěvky vnějších linií a vnitřních fotonových linií jsou zde stejné jako v diagramu 2. řádu, novým prvkem je uzavřená čistě fermionová smyčka, jejíž příspěvek je

$$-i \Pi_{\mu\nu}(q) = (-1) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{l} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{l} + \not{q} - m} \right)$$

Příklady Feynmanových diagramů v QED (2)

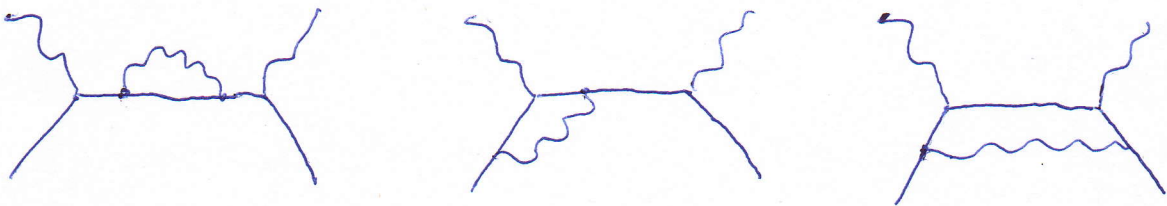
Comptonův rozptyl ve 2. řádu



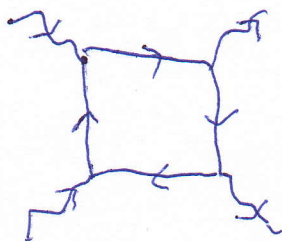
Příspěvek diagramu (a):

$$iM_a = i^3 e^2 \bar{u}(p') \gamma_\nu \frac{1}{\not{q} - m} \gamma_\mu u(p) \epsilon^\mu(k) \epsilon^{*\nu}(k')$$

Příklady diagramů 4. řádu pro daný proces:



Rozptyl foton – foton („rozptyl světla na světle“) ve 4. řádu



+ permutace vnějších linií

Příklady Feynmanových diagramů v QED (3)

Diagramy pro výpočet spinového magnetického momentu elektronu:

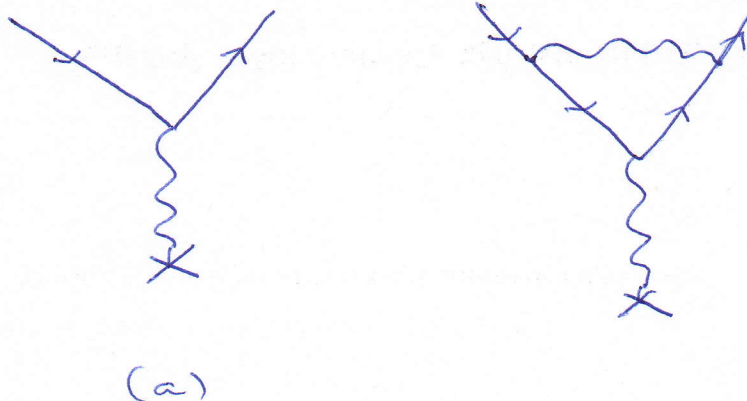

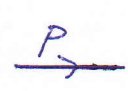
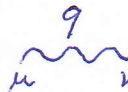

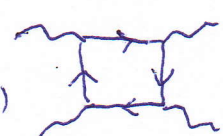


Diagram (a) reprodukuje původní Diracův výsledek $\mu_e = \mu_B = e/2m$, diagram (b) dává Schwingerovu korekci $\alpha/2\pi$. Vlnitá vnější linie ukončená křížkem graficky znázorňuje vnější elektromagnetické pole.

Desatero pravidel pro Feynmanovy diagramy v QED

- 1) jediný interakční vrchol  = $ie\gamma_\mu$
 - 2) zachování energie a hybnosti ve vrcholech
 - 3) $u(p), \bar{u}(p)$ pro elektrony,
 - 4) $v(p), \bar{v}(p)$ pro pozitrony
 - 5) $\varepsilon(k), \varepsilon^*(k)$ pro fotony
- } menší linie $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$
- $(\not{p} - m)u(p) = 0, (\not{p} + m)v(p) = 0,$
- 6) vnitřní linie  = $\frac{i}{\not{p} - m}$
 - 7) vnitřní linie  = $i \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2}$, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$
 - 8) v uzavřených smyčkách se integruje
 - 9) $(-1) \text{Tr}$ (maticová stopa) pro  ,  , $\leftarrow \text{td.}$
 - 10) rudimentární znalost řecké abecedy nutná