

Keplerova úloha

Kepler-2c.TEX

jan.obdrzalek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Článek řeší problém pohybu planety (Země) kolem Slunce.

1 Úplná úloha: co zanedbáme

Chceme vyšetřit pohyb planety, např. Země, v naší sluneční soustavě. Jako jedinou sílu budeme uvažovat gravitační interakci mezi Zemí a Sluncem. Úlohu budeme řešit klasicky (nerelativisticky) a zanedbáme řadu dalších okolností:

- ve sluneční soustavě jsou i jiné planety než Země a působí gravitačně na Zemi i na Slunce;
- Zemi obíhá Měsíc;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné objekty než Slunce a planety (kometry, asteroidy, meziplanetární hmota, ...);
- Slunce i Země jsou nepravidelná tělesa;
- Slunce i Země rotují kolem vlastních os;
- ani Slunce, ani Země nejsou tuhá tělesa: Slunce je celé plynné, Země je pokryta oceány a má tekutý vnitřek;
- ...

Budeme se zabývat nejjednodušším případem, a to soustavou složenou ze dvou bodových objektů – hmotných bodů B_1 , B_2 . Chování celé sluneční soustavy tedy v prvním přiblížení popíšeme jako soubor soustav typu [Slunce + jedna planeta], kde jak Slunce, tak i planeta jsou hmotné body. K tomu nás opravňují tyto skutečnosti:

- gravitační pole po vrstvách homogenní koule (ať je v klidu nebo ať rotuje) je stejné jako gravitační pole hmotného bodu;
- vzhledem k podstatně větší hmotnosti Slunce ($2 \cdot 10^{30}$ kg) než planet (Země $6 \cdot 10^{24}$ kg) je Slunce prakticky nehybné v těžišťové soustavě sluneční soustavy.

Prvním dalším krokem by bylo uvážit (slaboučkou) gravitační interakci planet navzájem jakožto *poruchu* a doplnit poruchové, tzv. sekulární členy (lat. saeculum = století, dlouhé pro člověka, ale přesto zanedbatelné oproti věčnosti). To však zde dělat nebudeme.

2 Problém dvou těles – Keplerova úloha

Vyšetříme pohyb dvou hmotných bodů B_1, B_2 o hmotnostech m_1, m_2 a polohových vektorech $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ pod vlivem vzájemného gravitačního přitahování. Vycházíme z Newtonových pohybových rovnic

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (2)$$

doplněných Newtonovým gravitačním zákonem

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3)$$

kde $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta a

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (4)$$

je relativní polohový vektor. Dosazením dostaneme

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (5)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = +G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (6)$$

(rozmyslete si znaménka obou výrazů – gravitace je přitažlivá).

Úloha je tedy trojrozměrná (3D) a hledáme 6 neznámých – složek vektorů $\mathbf{R}_k, \mathbf{r}_k, k = 1, 2$.

3 Těžišťová vztažná soustava

Zavedeme těžiště (hmotný střed) jakožto bod o souřadnicích

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Protože jde o soustavu uzavřenou (vnější síly jsou nulové), očekáváme, že se těžiště bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To skutečně snadno dokážeme součtem rovnic (5) + (6), při němž se vyruší pravá strana a po vydělení součtem $(m_1 + m_2)$ vyjde rovnou rovnice $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$. Tu můžeme snadno dvakrát integrovat

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_0, \quad (8)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}_0 t + \mathbf{R}_0, \quad (9)$$

kde integrační konstanty \mathbf{V}_0 , resp. \mathbf{R}_0 mají fyzikální význam rychlosti, resp. polohy těžiště soustavy v čase $t = 0$ (počáteční podmínky).

4 Redukovaná úloha

Přejdeme od 6 proměnných $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ k 6 proměnným \mathbf{R}, \mathbf{r} . Pro první 3 proměnné \mathbf{R} jsme už úlohu vyřešili (rov. 9). Pravé strany rov. 5 a rov. 6 obsahují jen \mathbf{r} . Zkombinujeme tedy obě rovnice tak, aby zbylo samotné \mathbf{r} i na levé straně: první rovnici vydělíme $-m_1$, druhou m_2 a sečteme. Dostaneme

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (10)$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \equiv \mu g \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (11)$$

s označením

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

$$g = G \frac{m_1 m_2}{\mu} = G(m_1 + m_2), \quad (13)$$

kde μ je tzv. *redukovaná hmotnost*. Všimněme si, že síla vyjádřená pravými stranami rov. 5, rov. 6 a rov. 11 je (až event. na znaménko) táž. Lze tedy říci, že eliminací pohybu těžiště jsme úlohu převedli na náhradní úlohu – pohyb tělesa s redukovanou hmotností μ v centrálním silovém poli. Naše „kvazislunce“ je nyní nehybné v počátku souřadnic, jako kdyby mělo setrvačnou hmotnost nekonečnou (nepohne se) a gravitační hmotnost $M = m_1 + m_2$. Kolem něj obíhá „kvaziplaneta“ o hmotnosti μ podle rov. 12.

Stejný trik se použije např. při vyšetřování harmonických kmitů soustavy navzájem pružně sprážených HB. Jejich polohy převedeme lineárními kombinacemi na polohy redukovaných částic – kvazičástic. Ty se chovají jako volné (nesprážené) a každá z nich koná harmonický pohyb nezávislý na ostatních kvazičásticích.

Z polohy \mathbf{r} kvaziplanety dostaneme polohy planety i Slunce jednoduchou lineární transformací

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (14)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (15)$$

5 Rovinný problém

Ukážeme, že náš problém je trojrozměrný jen zdánlivě. Ve skutečnosti se kvaziplaneta pohybuje pouze v jisté rovině procházející počátkem souřadnic (tj. centrem síly). Tato rovina je kolmá k momentu hybnosti \mathbf{L} kvaziplanety, přičemž vektor \mathbf{L} zůstává s časem neproměnný (vnější síly jsou nulové a mají tedy výsledný moment nulový): $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 = \mathbf{konst}$.

Dá se ukázat, že i původní Keplerova úloha (tedy se Sluncem a planetou, nejen s kvazisluncem a kvaziplanetou, a nejen v těžišťové soustavě) se odehrává v rovině procházející počáteční polohou Slunce, planety a jejich těžiště a pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí těžiště.

K důkazu vynásobíme rov. 11 zleva vektorově polohovým vektorem \mathbf{r} . Protože na pravé straně byl též vektor \mathbf{r} , dostaneme

$$\mathbf{r} \times \mu \ddot{\mathbf{r}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Dále použijeme vztah

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (17)$$

a z rov. 16 dostaneme zákon zachování momentu hybnosti (ZZMH) planety:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} \equiv \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

$$(\mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{L}_0 = \mathbf{konst}. \quad (19)$$

Vektor momentu hybnosti \mathbf{L}_0 tedy nemění svůj směr v prostoru. Protože je roven vektorovému součinu polohového vektoru \mathbf{r} (s rychlostí \mathbf{v}), leží polohový vektor kvaziplanety stále v rovině kolmé k \mathbf{L}_0 . Pohyb v centrálním poli je tedy rovinný.

Při odvození jsme nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti. Pohyb HB je tedy rovinný při libovolné závislosti síly na vzdálenosti.

6 Zákony zachování

ZZMH (platný pro libovolné centrální pole) jsme již odvodili a použili (rov. 18). Ukážeme, že pro libovolné centrální pole platí i zákon zachování mechanické energie (ZZE) a využijeme toho ke zjednodušení úlohy.

Rov. 11 vynásobíme skalárně rychlostí $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ a využijeme relací

$$\frac{d}{dt}(r^n) = nr^{n-2} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}. \quad (21)$$

Dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right) = \frac{d}{dt} \frac{\mu g}{r} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} \right) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{\mu g}{r} = \mathbf{konst} = E_0 \quad (24)$$

$$E_k + E_p = E_0, \quad (25)$$

což je odvození ZZE pro speciální případ síly (pro obecnou centrální sílu).

Ani zde jsme při odvození nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti.

7 Řešení rovinného problému

7.1 Polární souřadnice

Vzhledem k tomu, že uvažované pole je centrální a jeho velikost tedy závisí jen na vzdálenosti r od počátku souřadnic, budou jistě polární souřadnice výhodnější než kartézské.

Polární souřadnice jsou ortogonální. Proto je v nich vyjádření čtverce rychlosti jednoduché. Nejprve vyjádříme obecné posunutí ds pomocí přírůstku dr radiální souřadnice (vzdálenosti od počátku) a přírůstku $d\varphi$ úhlu; při změně o $d\varphi$ se poloha změní o $r d\varphi$. Vztah mezi přírůstky dostaneme z Pythagorovy věty:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\varphi)^2 \quad (26)$$

a vydělením $(dt)^2$

$$v^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (27)$$

V polárních souřadnicích má tedy ZZE tvar

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\mu g}{r} = E_0. \quad (28)$$

ZZMH zní velmi jednoduše:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{\mu} \equiv \lambda \quad (29)$$

a umožňuje nám odstranit $\dot{\varphi}$ z rov. 28. V této rovnici se pak vyskytuje jen \dot{r} , r a t . Můžeme ji tedy řešit samostatně. Upravíme ji do tvaru

$$\frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2} \right) - \frac{g}{r} = \frac{E_0}{\mu}, \quad (30)$$

odkud

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}. \quad (31)$$

Dále můžeme postupovat dvěma směry:

7.2 Výpočet závislosti vzdálenosti r a času t

Jedna možnost je upravit rov. 31 na tvar se separovanými proměnnými:

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} = dt \quad (32)$$

a přímo integrovat: dostaneme $t = t(r)$, tedy závislost, ve kterém čase se kvazi-planeta dostane do dané vzdálenosti r od centra.

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} + t_0. \quad (33)$$

Nás by ovšem zajímala spíše inverzní funkce $r = r(t)$, kterou bychom dále použili k řešení φ integrací z rov. 29. Proto se vrátíme k rov. 31 a budeme postupovat jinak.

7.3 Výpočet trajektorie kvaziplanety $r = r(\varphi)$

Druhá možnost řešení redukovaného problému je eliminovat čas a ponechat v rov. 28 a rov. 29 proměnné r a φ .

Výpočet lze vlastně provést jen v monotonní části trajektorie planety, ale na výsledku se toto omezení neprojeví.

Berme tedy $r = r(\varphi)$. Vyjádříme

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \dot{r} \frac{r^2}{\lambda} \quad (34)$$

dosadíme do rov. 31 a separujeme proměnné:

$$d\varphi = \frac{\lambda dr}{r^2 \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}}. \quad (35)$$

Integrace pravé strany je samozřejmě čistě záležitostí matematické analýzy (resp. kalkulu). Fyzika však může napomoci ideou: víme-li, že se planety pohybují po kuželosečkách v ohniskové poloze, budeme hledat řešení ve tvaru rovnice kuželosečky, tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \text{ resp. } \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (36)$$

kde parametr p určuje „velikost“ (měřítko) kuželosečky a $|\varepsilon|$ určuje její charakter:

- $|\varepsilon| = 0$: kružnice;
- $0 < |\varepsilon| < 1$: elipsa;
- $|\varepsilon| = 1$: parabola;
- $|\varepsilon| > 1$: hyperbola.

Tvar rov. 36 nás vede na vhodné substituce v rov. 35. Nejprve zavedeme $\rho = \frac{\lambda}{r}$, $d\rho = -\frac{\lambda}{r^2} dr$:

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + 2\frac{g}{\lambda}\rho - \rho^2}}. \quad (37)$$

Výraz pod odmocninou známým způsobem zbavíme lineárního členu: zavedeme $\sigma = \rho - \frac{g}{\lambda}$, $d\sigma = d\rho$, $K^2 = \frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2$,

$$d\varphi = \frac{-d\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2 - \left(-\frac{g}{\lambda} + \rho\right)^2}} = \frac{-d\sigma}{\sqrt{K^2 - \sigma^2}}. \quad (38)$$

a konečně zavedeme $s = \sigma/K$, $ds = d\sigma/K$:

$$d\varphi = \frac{-ds}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (39)$$

K této funkci již primitivní funkci známe. Do ní pak postupně dosazujeme všechny předchozí substituce.

$$\varphi = \arccos s + \varphi_0 \quad (40)$$

$$s = \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (41)$$

$$\sigma = K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (42)$$

$$\rho = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (43)$$

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{g}{\lambda} + K \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (44)$$

$$\frac{\lambda^2}{g} \frac{1}{r} = 1 + \frac{K\lambda}{g} \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (45)$$

Tato rovnice odpovídá plně druhé rov. 36, jestliže značíme

$$p = \frac{\lambda^2}{g} = \frac{L^2}{G\mu m_1 m_2}, \quad (46)$$

$$\varepsilon = \frac{K\lambda}{g} = \sqrt{\frac{2E_0 L^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2} + 1} \quad (47)$$

$$= \sqrt{\frac{2E_0 p}{G m_1 m_2} + 1} \quad (48)$$

7.4 Pohyb planety a slunce

Odvodili jsme, že kvaziplaneta se pohybuje po kuželosečce (rov. 36) s ohniskem v počátku souřadnic, tedy s rovnicí

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (49)$$

kde φ_0 určuje úhel hlavní osu trajektorie vůči ose x, a rov. 46 a další určují parametr p i excentricitu ε . Excentricita, a tím i charakter trajektorie, je zřejmě dána znaménkem energie E soustavy.

Z pohybu kvaziplanety odvodíme pohyb skutečné planety a skutečného Slunce dosazením výsledku redukované úlohy pro kvaziplanetu do vztahů rov. 14 a rov. 15 s tím, že obvykle předpokládáme těžiště soustavy v klidu, tedy $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Je tedy

$$\mathbf{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} = -\frac{\mu}{m_1} \mathbf{r} \quad (50)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} = \frac{\mu}{m_2} \mathbf{r} \quad (51)$$

Snadno nahlédneme, že i v tom případě zůstane charakter kuželosečky zachován a změní se jen parametry její trajektorie.

7.5 Shrnutí a diskuse

Vyřešili jsme pohybové rovnice pro sílu mezi hmotnými objekty danou Newtonovým gravitačním zákonem. Zjistili jsme, že trajektorii planety (i Slunce) je kuželosečka s ohniskem (nikoli středem!) v těžišti soustavy. Jde-li skutečně o soustavu [Slunce - planeta] s hmotností planety zanedbatelnou proti hmotnosti Slunce, pak Slunce prakticky stojí a jeho střed je i těžištěm soustavy. Naše řešení se však hodí i pro soustavu typu dvojhvězdy tvořené složkami se stejnou či srovnatelnou hmotností, opisujícími pak eliptické dráhy kolem společného těžiště.

Energie E soustavy zřejmě určuje charakter dráhy planety.

- pro $E < 0$ má planeta uzavřenou dráhu eliptickou (případně kruhovou),
- pro $E = 0$ má planeta dráhu parabolickou,
- pro $E > 0$ má planeta dráhu hyperbolickou.

Poslední dva případy odpovídají návštěvníkům typu komety s původem mimo Sluneční soustavu. (Pochopitelně u nich, chceme-li být v souladu s realitou, určitě nemůžeme zanedbat veškeré ostatní objekty kromě Slunce a uvažovaného návštěvníka.)

Poznámka: Tento text je pracovní. Určitě v něm budou překlapy, chyby, méně srozumitelná místa. Dále ještě doplním výslovně 2. Keplerův zákon (zákon ploch; je ekvivalentní ZZMH) a 3. Keplerův zákon (poměr a^3/T^2 pro délku a hlavní poloosy a dobu oběhu T je týž pro všechny planety).

Velice uvítám všechny kritické připomínky. J. O.