Keplerova úloha

Kepler-2d.TEX

jan.obdrzalek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Článek řeší problém pohybu planety (Země) kolem Slunce.

1 Úplná úloha: co zanedbáme

Chceme vyšetřit pohyb planety, např. Země, v naší sluneční soustavě. Jako jedinou sílu budeme uvažovat gravitační interakci mezi Zemí a Sluncem. Úlohu budeme řešit klasicky (nerelativisticky) a zanedbáme řadu dalších okolností:

- ve sluneční soustavě jsou i jiné planety než Země a působí gravitačně na Zemi i na Slunce;
- Zemi obíhá Měsíc;
- ve sluneční soustavě jsou i jiné objekty než Slunce a planety (komety, asteroidy, meziplanetární hmota,. . .) ;
- Slunce i Země jsou nepravidelná tělesa;
- Slunce i Země rotují kolem vlastních os;
- ani Slunce, ani Země nejsou tuhá tělesa: Slunce je celé plynné, Země je pokryta oceány a má tekutý vnitřek;
- . . .

Budeme se zabývat nejjednodušším případem, a to soustavou složenou ze dvou bodových objektů – hmotných bodů B_1, B_2. Chování celé sluneční soustavy tedy v prvním přiblížení popíšeme jako soubor soustav typu [Slunce + jedna planeta], kde jak Slunce, tak i planeta jsou hmotné body. K tomu nás opravňují tyto skutečnosti:

- gravitační pole po vrstvách homogenní koule (ať je v klidu nebo ať rotuje) je stejné jako gravitační pole hmotného bodu;
- vzhledem k podstatně větší hmotnosti Slunce ($2{\cdot}10^{30}$ kg) než planet (Země $6{\cdot}10^{24}$ kg) je Slunce prakticky nehybné v těžišťové soustavě sluneční soustavy.

Dalším krokem by bylo uvážit gravitační interakci planet navzájem (včetně pohybu kolem společného těžiště a nikoli Slunce) jakožto *poruchu* a doplnit poruchové, tzv. sekulární členy (lat. saeculum = století, dlouhé pro člověka, ale přesto zanedbatelné oproti věčnosti). To však zde dělat nebudeme.

2 Problém dvou těles – Keplerova úloha

Vyšetříme pohyb dvou hmotných bodů B_1, B_2 o hmotnostech m_1, m_2 a polohových vektorech $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ pod vlivem vzájemného gravitačního přitahování. Vycházíme z Newtonových pohybových rovnic

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \boldsymbol{F}_{12} \qquad (1)\\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= \boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} \qquad (2)\end{aligned}$$

doplněných Newtonovým gravitačním zákonem

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (3)$$

kde $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$ je gravitační konstanta a

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \qquad (4)$$

je relativní polohový vektor. Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -\,G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \qquad (5)\\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= +\,G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \qquad (6)\end{aligned}$$

(rozmyslete si znaménka obou výrazů – gravitace je přitažlivá).

Úloha je tedy trojrozměrná (3D) a hledáme 6 neznámých – složek vektorů $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2$.

3 Těžišťová vztažná soustava

Zavedeme těžiště (hmotný střed) jakožto bod o souřadnicích

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (7)$$

Protože jde o soustavu uzavřenou (vnější síly jsou nulové), očekáváme, že se těžiště bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. To skutečně snadno dokážeme součtem rovnic (5) + (6), při němž se vyruší pravá strana a po vydělení součtem $(m_1 + m_2)$ vyjde rovnou rovnice $\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$. Tu můžeme snadno dvakrát integrovat

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{V}_0, \qquad (8)\\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{V}_0 t + \boldsymbol{R}_0, \qquad (9)\end{aligned}$$

kde integrační konstanty $\boldsymbol{V}_0$, resp. $\boldsymbol{R}_0$ mají fyzikální význam rychlosti, resp. polohy těžiště soustavy v čase $t = 0$ (počáteční podmínky).

4 Redukovaná úloha

Přejděme od 6 proměnných $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ k 6 proměnným $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$. Pro první 3 proměnné $\boldsymbol{R}$ jsme už úlohu vyřešili (rov. 9). Pravé strany rov. 5 a rov. 6 obsahují jen $\boldsymbol{r}$. Zkombinujeme tedy obě rovnice tak, aby zbylo samotné $\boldsymbol{r}$ i na levé straně: první rovnici vydělíme $-m_1$, druhou m_2 a sečteme. Dostaneme

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{10}$$

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \equiv \mu g\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{11}$$

s označením

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{12}$$

$$g = G\frac{m_1 m_2}{\mu} = G(m_1 + m_2), \tag{13}$$

kde μ je tzv. *redukovaná hmotnost*. Všimněme si, že síla vyjádřená pravými stranami rov. 5, rov. 6 a rov. 11 je (až event. na znaménko) táž. Lze tedy říci, že eliminací pohybu těžiště jsme úlohu převedli na náhradní úlohu – pohyb tělesa s redukovanou hmotností μ v centrálním silovém poli. Naše „kvazislunce“ je nyní nehybné v počátku souřadnic, jako kdyby mělo setrvačnou hmotnost nekonečnou (nepohne se) a gravitační hmotnost $M = m_1 + m_2$. Kolem něj obíhá „kvaziplaneta“ o hmotnosti μ podle rov. 12.

Stejný trik se použije např. při vyšetřování harmonických kmitů soustavy navzájem pružně spřažených HB. Jejich polohy převedeme lineárními kombinacemi na polohy redukovaných částic – kvazičástic. Ty se chovají jako volné (nespřažené) a každá z nich koná harmonický pohyb nezávislý na ostatních kvazičásticích.

Z polohy $\boldsymbol{r}$ kvaziplanety dostaneme polohy planety i Slunce jednoduchou lineární transformací

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}. \tag{15}$$

5 Rovinný problém

Ukážeme, že náš problém je trojrozměrný jen zdánlivě. Ve skutečnosti se kvaziplaneta pohybuje pouze v jisté rovině procházející počátkem souřadnic (tj. centrem síly). Tato rovina je kolmá k momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ kvaziplanety, přičemž vektor $\boldsymbol{L}$ zůstává s časem neproměnný (vnější síly jsou nulové a mají tedy výsledný moment nulový): $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{konst}$.

Dá se ukázat, že i původní Keplerova úloha (tedy se Sluncem a planetou, nejen s kvazisluncem a kvaziplanetou, a nejen v těžišťové soustavě) se odehrává v rovině procházející počáteční polohou Slunce, planety a jejich těžiště a pohybující se rovnoměrně přímočaře rychlostí těžiště.

K důkazu vynásobíme rov. 11 zleva vektorově polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$. Protože na pravé straně byl týž vektor $\boldsymbol{r}$, dostaneme

$$\boldsymbol{r} \times \mu \ddot{\boldsymbol{r}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{0}. \tag{16}$$

Dále použijeme vztah

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = (\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{17}$$

a z rov. 16 dostaneme zákon zachování momentu hybnosti (ZZMH) planety:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \mu \dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0}, \tag{18}$$

$$(\boldsymbol{r} \times \mu \dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{konst}. \tag{19}$$

Vektor momentu hybnosti $\boldsymbol{L}_0$ tedy nemění svůj směr v prostoru. Protože je roven vektorovému součinu polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ (s rychlostí $\boldsymbol{v}$), leží polohový vektor kvaziplanety stále v rovině kolmé k $\boldsymbol{L}_0$. Pohyb v centrálním poli je tedy rovinný.

Při odvození jsme nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti. Pohyb HB je tedy rovinný při libovolné závislosti síly na vzdálenosti.

6 Zákony zachování

ZZMH (platný pro libovolné centrální pole) jsme již odvodili a použili (rov. 18). Ukážeme, že pro libovolné centrální pole platí i zákon zachování mechanické energie (ZZE) a využijeme toho ke zjednodušení úlohy.

Rov. 11 vynásobíme skalárně rychlostí $\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$ a využijeme relací

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^n) = n r^{n-2} \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{21}$$

Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu v^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mu g}{r} \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\mu g}{r}\right) = 0 \tag{23}$$

$$\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{\mu g}{r} = konst = E_0 \tag{24}$$

$$E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = E_0, \tag{25}$$

což je odvození ZZE pro speciální případ síly (pro obecnou centrální sílu).

Ani zde jsme při odvození nevyužili závislosti síly na čtverci vzdálenosti.

7 Řešení rovinného problému

7.1 Polární souřadnice

Vzhledem k tomu, že uvažované pole je centrální a jeho velikost tedy závisí jen na vzdálenosti r od počátku souřadnic, budou jistě polární souřadnice výhodnější než kartézské.

Polární souřadnice jsou ortogonální. Proto je v nich vyjádření čtverce rychlosti jednoduché. Nejprve vyjádříme obecné posunutí $\mathrm{d}s$ pomocí přírůstku $\mathrm{d}r$ radiální souřadnice (vzdálenosti od počátku) a přírůstku $\mathrm{d}\varphi$ úhlu; při změně o $\mathrm{d}\varphi$ se poloha změní o $r\ \mathrm{d}\varphi$. Pak dostaneme vztah mezi přírůstky z Pythagorovy věty:

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\ \mathrm{d}\varphi)^2 \tag{26}$$

a odtud vydělením $(\mathrm{d}t)^2$ přímo čtverec rychlosti:

$$v^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\varphi})^2 \equiv \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{27}$$

V polárních souřadnicích má tedy ZZE tvar

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\mu g}{r} = E_0. \tag{28}$$

ZZMH zní velmi jednoduše:

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{L_0}{\mu} \equiv \lambda \tag{29}$$

a umožňuje nám odstranit $\dot{\varphi}$ z rov. 28. V ní se pak vyskytuje jen $\dot{r}$, r a t. Můžeme ji tedy řešit samostatně. Upravíme ji do tvaru

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{\lambda^2}{r^2}\right) - \frac{g}{r} = \frac{E_0}{\mu}, \tag{30}$$

odkud

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}. \tag{31}$$

Dále můžeme postupovat dvěma směry:

7.2 Výpočet závislosti vzdálenosti r a času t

Jedna možnost je upravit rov. 31 na tvar se separovanými proměnnými:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} = \mathrm{d}t \tag{32}$$

a přímo integrovat: dostaneme $t = t(r)$, tedy závislost, ve kterém čase se kvaziplaneta dostane do dané vzdálenosti r od centra.

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}} + t_0. \tag{33}$$

Nás by ovšem zajímala spíše inverzní funkce $r = r(t)$, kterou bychom dále použili k řešení φ integrací z rov. 29. Proto se vrátíme k rov. 31 a budeme postupovat jinak.

7.3 Výpočet trajektorie kvaziplanety $r = r(\varphi)$

Jiná možnost řešení redukovaného problému je eliminovat čas a ponechat v rov. 28 a rov. 29 proměnné r a φ.

Výpočet lze vlastně provést jen v monotonní části trajektorie planety, ale na výsledku se toto omezení neprojeví.

Berme tedy $r = r(\varphi)$. Vyjádříme

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \dot{r}\frac{r^2}{\lambda} \tag{34}$$

dosadíme do rov. 31 a separujeme proměnné:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\lambda\ \mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \frac{2g}{r} - \frac{\lambda^2}{r^2}}}. \tag{35}$$

Integrace pravé strany je samozřejmě čistě záležitostí matematické analýzy (resp. kalkulu). Fyzika však může napomoci ideou: víme-li, že se planety pohybují po kuželosečkách v ohniskové poloze, budeme hledat řešení v tomto tvaru rovnice kuželosečky, tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}\quad \text{, resp.}\quad \frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0), \tag{36}$$

kde p určuje „velikost“ (měřítko) kuželosečky a $|\varepsilon|$ určuje její charakter:

- $|\varepsilon| = 0$: kružnice;
- $0 < |\varepsilon| < 1$: elipsa, ε je její relativní výstřednost (excentricita);
- $|\varepsilon| = 1$: parabola;
- $|\varepsilon| > 1$: hyperbola.

Tvar rov. 36 nás vede na vhodné substituce v rov. 35. Nejprve zavedeme $\rho = \frac{\lambda}{r}$, $\mathrm{d}\rho = -\frac{\lambda}{r^2}\ \mathrm{d}r$:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{-\ \mathrm{d}\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + 2\frac{g}{\lambda}\rho - \rho^2}}. \tag{37}$$

Výraz pod odmocninou známým způsobem zbavíme lineárního členu: zavedeme $\sigma = \rho - \frac{g}{\lambda}$, $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\rho$, $K^2 = \frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2$,

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{-\ \mathrm{d}\rho}{\sqrt{\frac{2E_0}{\mu} + \left(\frac{g}{\lambda}\right)^2 - \left(-\frac{g}{\lambda} + \rho\right)^2}} = \frac{-\ \mathrm{d}\sigma}{\sqrt{K^2 - \sigma^2}}. \tag{38}$$

a konečně zavedeme $s = \sigma/K,\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}\sigma/K$:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{-\ \mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}}\ . \tag{39}$$

K této funkci již primitivní funkci známe. Do ní pak postupně dosazujeme všechny předchozí substituce.

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arccos s\ + \varphi_0 && (40)\\
s &= \cos(\varphi - \varphi_0) && (41)\\
\sigma &= K\ \cos(\varphi - \varphi_0) && (42)\\
\rho &= \frac{g}{\lambda} + K\ \cos(\varphi - \varphi_0) && (43)\\
\frac{\lambda}{r} &= \frac{g}{\lambda} + K\ \cos(\varphi - \varphi_0) && (44)\\
\frac{\lambda^2}{g}\frac{1}{r} &= 1 + \frac{K\lambda}{g}\cos(\varphi - \varphi_0). && (45)
\end{aligned}$$

Tato rovnice odpovídá plně druhé rov. 36, jestliže značíme

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\lambda^2}{g} = \frac{L^2}{G\mu m_1 m_2}, && (46)\\
\varepsilon &= \frac{K\lambda}{g} = \sqrt{\frac{2E_0 L^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2} + 1} && (47)\\
&= \sqrt{\frac{2E_0 p}{G m_1 m_2} + 1} && (48)
\end{aligned}$$

7.4 Pohyb planety a slunce

Odvodili jsme, že kvaziplaneta se pohybuje po kuželosečce (rov. 36) s ohniskem v počátku souřadnic, tedy s rovnicí

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}, \tag{49}$$

kde φ_0 určuje úhel hlavní osy trajektorie vůči ose x, a rov. 46 a další určují parametr p i excentricitu ε. Excentricita, a tím i charakter trajektorie, je zřejmě dána znaménkem energie E soustavy.

Z pohybu kvaziplanety odvodíme pohyb skutečné planety a skutečného Slunce dosazením výsledku redukované úlohy pro kvaziplanetu do vztahů rov. 14 a rov. 15 s tím, že obvykle předpokládáme těžiště soustavy v klidu, tedy $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$. Je tedy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \frac{-\ m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} = -\frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{r} && (50)\\
\boldsymbol{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r} = \frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{r} && (51)
\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že i v tom případě zůstane charakter kuželosečky zachován a změní se jen parametry její trajektorie.

7.5 Shrnutí a diskuse

Vyřešili jsme pohybové rovnice pro sílu mezi hmotnými objekty danou Newtonovým gravitačním zákonem. Zjistili jsme, že v těžišťové soustavě je trajektorií planety (i Slunce) kuželosečka s ohniskem (nikoli středem!) v těžišti soustavy.

Jde-li skutečně o soustavu [Slunce - planeta] s hmotností planety zanedbatelnou proti hmotnosti Slunce, pak Slunce prakticky stojí a jeho střed je i těžištěm soustavy. Naše řešení se však hodí i pro soustavu typu dvojhvězdy tvořené složkami se stejnou či srovnatelnou hmotností, opisujícími pak eliptické dráhy kolem společného těžiště.

Energie E soustavy zřejmě určuje charakter dráhy planety.

- pro $E < 0$ má planeta uzavřenou dráhu eliptickou (případně kruhovou),
- pro $E = 0$ má planeta dráhu parabolickou,
- pro $E > 0$ má planeta dráhu hyperbolickou.

Poslední dva případy odpovídají návštěvníkům typu komety s původem mimo Sluneční soustavu. (U nich, chceme-li být v souladu s realitou, zřejmě nemůžeme zanedbat veškeré ostatní objekty kromě Slunce a uvažovaného návštěvníka.)

Poznámka: Tento text je pracovní. Určitě v něm budou překlepy, chyby, méně srozumitelná místa. Dále ještě doplním výslovně 2. Keplerův zákon (zákon ploch; je ekvivalentní ZZMH) a 3. Keplerův zákon (poměr a^3/T^2 pro délku a hlavní poloosy a dobu oběhu T je týž pro všechny planety).

Velice uvítám všechny kritické připomínky. J. O.