Funkce $f(x,y) = 1+x$ je spojitá na standardní množině $D = D_1 \cup D_2$, tedy:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} (1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1} (1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} (1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int\limits_{-4}^{0} \left(\int\limits_{x^2-4}^{-3x} (1+x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} \left(\int\limits_{x^2-4}^{0} (1+x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-4}^{0} (1+x)\Big(-3x-(x^2-4)\Big)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} (1+x)\Big(0-(x^2-4)\Big)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-4}^{0} (4+x-4x^2-x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (4+4x-x^2-x^3)\,\mathrm{d}x = -4\,. \qquad \heartsuit
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$ V následujících příkladech vypočtěte dvojné integrály

10.10. a) $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde D je trojúhelník ABC, který má strany na přímkách $y = x$, $y = -x$ a $y = -2x-3$.

b) $\iint\limits_D \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde D je lichoběžník s vrcholy $P = [-2,0]$, $Q = [-1,0]$, $R = [0,1]$, $S = [0,2]$.

10.3 Substituční metoda

Předpokládejme, že existuje dvojný integrál funkce $f(x,y)$ přes standardní množinu D a že $\Phi = (\varphi,\psi)$ je regulární zobrazení, které zobrazuje standardní množinu H na standardní množinu D. Pak můžeme použít substituci pro dvojný integrál

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_H f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot |J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kde $J(u,v)$ je Jacobián zobrazení $\Phi(u,v) = (\varphi(u,v),\psi(u,v))$. Nejčastěji používáme substituci do polárních souřadnic, tj.

$$\begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array}, \quad r \in (0,\infty\rangle,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi).$$

. V případě polárních souřadnic je Jacobián $J(u,v) = r$.

10.11. Vypočtěme dvojný integrál

$$I = \iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\}$.