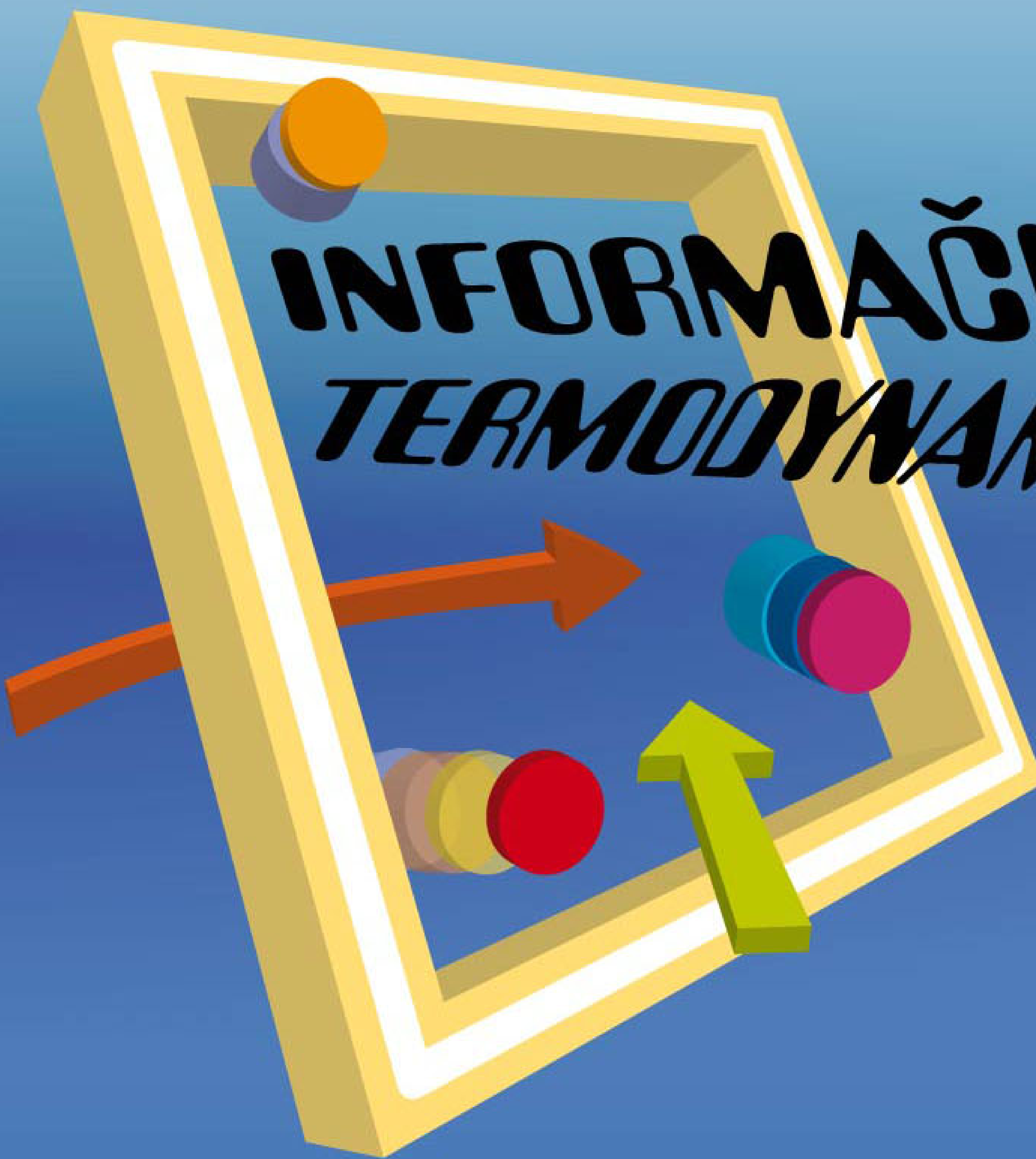
VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE

Bohdan Hejna

INFORMAČNÍ TERMODYNAMIKA



II.

Fyzikální systémy přenosu informace

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

VYSOKÁ ŠKOLA
CHEMICKO-TECHNOLOGICKÁ
V PRAZE

INFORMAČNÍ TERMODYNAMIKA II.

Fyzikální systémy přenosu informace

Bohdan Hejna

Vydavatelství VŠCHT Praha
2011

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.

Publikace úzce navazuje na předcházející publikaci "Informační termodynamika I.". Rozpracováavá matematické modely fyzikalních systémů užívaných v přenosu informace. V rámci uvedeného matematického popisu definuje informační entropie měření a následně stanovuje informační kapacity měření na těchto systémech. Jedná se o fyzikální systémy Bose-Ensteinův, Fermi-Diracův a Maxwell-Boltzmanův v jejich úzkopásmové i širokopásmové modifikaci. Publikace detailně rozpracovává entropické (informační) vlastnosti Carnotova cyklu. Předchozí výsledky jsou použity pro detailní analýzu širokopásmového fotonového kanálu. Je respektována uzavřenost systému s tímto kanálem a tak se dochází ke korekci kapacitní formule pro tento kanál stanovené původně Lebedevem a Levitinem. Ačkoliv tato korekce nemusí ovlivnit praktické návrhy s těmito kanály, je výsledkem autorova systematičtějšího přístupu; je gnozeologického charakteru. Práce je doplněna rozsáhlými a edukativně hodnotnými dodatky.

Práce vznikla v rámci výzkumného záměru MŠMT 6046137307.

Recenzent: prof. Ing. Radomír Adamovský, DrSc.

ISBN 978-80-7080-774-3

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Obsah

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

1. Úvod

Cílem tohoto, již druhého dílu projektu ***Informační termodynamika***, *Informační termodynamika II.*, je aplikovat informační přístup ke stacionárním stochastickým kvantovým systémům a také k systémům klasické (rovnovážné) termodynamiky (rovnovážným, ekvilibriálním systémům) jakož i k fyzikálním veličinám, které jsou s těmito systémy asociovány.

Základní fakt kvantové mechaniky, že systém se nachází v *pravděpodobnostní superpozici* svých *čistých* stavů přímo vede k definici hodnoty měřené fyzikální veličiny jako hodnoty *střední (smíšené)* a k aplikaci pojmu pravděpodobnostní prostor a s ním spojených veličin *informace, I-divergence, transinformace, informační entropie a informační kapacita.*

V kapitolách 2 - 5 využíváme formální matematický model systémů kvantové fyziky jak byl definován von Neumannem [17, 97] a sledujeme zavedení konceptu Shannonovy informační teorie do kvantové mechaniky [41, 13]. Tento matematický model využíváme ve zjednodušené, konečně-dimenzionální podobě a společně s nezbytnými matematickými pojmy a jejich základními vlastnostmi je uveden v kapitolách 2 - 4. Využíváme jej k demonstraci Boltzmanovy entropie, $\mathcal{H}$-teorému a Gibbsova teorému. Zavádíme pravděpodobnostní distribuce na fyzikálních systémech a stanovujeme jejich I-divergenci jako veličinu vyjadřující přírůstek informace (shannonovské entropie) při *měření* na těchto systémech. Speciálně, v kapitole 4 zavádíme pojem přenosu informace (měření) ve studovaných systémech a definujeme Shannonovu informaci o stavu a informační kapacitu systému (jako maximální Shannonovu informaci o stavu).

V kapitole 5 stanovujeme informační kapacity *úzkopásmových* i *širokopásmových* variant fyzikálních systémů *Bose–Einsteinových (B–E), Fermi–Diracových (F–D)* a *Maxwell–Boltzmanových (M–B)*. Výsledky pro systémy M–B jsou uvedeny pro úplnost i pro možné použití tam, kde je M–B aproximace vhodná.
Stanovujeme zde také středně-hodnotové podmínky platnosti těchto vztahů, tedy *podmínky existence přenosu informace.*

Na základě analogie informačních popisů měření jak na kvantových tak na klasických fyzikálních (termodynamických) systémech, postulujeme rovnovážný stav klasických termodynamických systémů jako *analog* čistého stavu systémů kvantověmechanických a naopak.

Zajímavá je také souvislost veličin informační kapacita a tepelná účinnost vyjevující se ve studovaných (speciálně širokopásmových) systémech.
Analýza této souvislosti nás přivádí ke *korigovanému vzorci* pro informační kapacitu *širokopásmového fotonového* přenosového kanálu uvažuje-li se jeho *cyklické použití v rámci izolované soustavy.*

Tomuto výsledku kapitoly 9 ale předchází analýza chování tepelných cyklů v kapitolách 7 a 8.

V kapitole 7 je dokázána *elementárnost, nedělitelnost Carnotova cyklu*, v kapitole 8 studujeme tepelný cyklus s proměnnými pracovními teplotami.

Kapitoly 8 a 9 jsou inspirovány tvarem kapacitních formulí získaných v kapitole 5 a navazují bezprostředneě na práci Informační termodynamika I. ([38]).

V kapitole 9 pak ukazujeme, že v literatuře [31, 67] je stanovována jen *informační kapacita jednorázového přenosu informace* a tedy to, že se zde *nutnost přechodu přenosového media, kanálu, do počátečního stavu*, jakožto podmínky opakovatelného přenosu zpráv, *neuvažuje*.
Nebo, že se tento návrat uvažuje být realizován otevřením celého přenosového řetězce, tedy *energetickým pokrytím z okolí přenosového řetězce*, nikoliv v jeho rámci jak to činíme my (používáme reverzního carnotovského modelu).
Stanovujeme korigovanou kapacitu jak jednorázového přenosu informace tak i přenosu cyklicky organizovaného. I když se korigované informační kapacity liší od kapacity původně stanovené [67] považuje autor přístup k problému vyložený v kapitole 9 (spíše 'filisofický') i dosažený výsledek za exaktnější.

Kapitoly 2 - 5 seznamují čtenáře s hlavními výsledky práce [31], byť některé jsou uvedeny ve zjednodušené podobě (druhá část kapitoly 5) a o některých se zde zmiňujeme jen odkazem (informační *kapacita pod kritickou hodnotou vstupu* a *zobecněná kapacitní formule*).

Podstatné předběžné znalosti nutné ke studiu knihy jsou uvedeny v Dodatcích, kapitola 10.

Autor věří, že uvedené výsledky, zvláště výsledky kapitoly 5 ale nejvíce závěrečný výsledek kapitoly 9 (*korigovaná informační kapacita* širokopásmového fotonového kanálu ale i zní plynoucí korekce pro kanály F–D a M–B typu), jsou vhodnými příspěvky ke konstrukci opto-elektronických zařízení, zejména při určování prakticky dosažitelných hodnot informačních kapacit.

Poděkování patří prof. RNDr. Aloisi Klíčovi, CSc. a Doc. RNDr. Danielu Turzíkovi, CSc., vedoucím Ústavu matematiky, dále prof. Ing. Karlu Volkovi, CSc. z Ústavu analytické chemie a prof. RNDr. Petru Voňkovi, CSc. z Ústavu fyzikální chemie na VŠCHT Praha, kteří mi umožnili pracovat na tomto zajímavém tematu. Děkuji i prof. Ing. Anatolu Malijevskému, CSc. a Doc., Ing. Ivanu Samohýlovi, CSc. z VŠCHT Praha, a zvláště recenzentovi prof. Ing. Radomíru Adamovskému, Dr.Sc. z ČZU za stálý zájem o téma publikace. Děkuji také paní Ing. Evě Dibuszové, Ph.D. z Vydavatelství VŠCHT Praha za pečlivý návrh redakčních úprav jakož i panu Janu Žaludovi za vkusný návrh obálky.

Poděkování patří mé ženě Soně, dětem Terezce a Tomáškovi a celé mé rodině za jejich trpělivost a podporu.

Ing. Bohdan Hejna, Ph.D. Praha, Jičín, Kosobody u Rakovníka 2011

2. Reprezentace elementárních fyzikálních systémů

Elementární fyzikální systémy[1] budeme reprezentovat *lineárními operátory*[2]. Motivací pro to je *axiomatická teorie algebraické reprezentace fyzikálních systémů* [17].

Odtud víme, že nejjednodušším způsobem matematické reprezentace *stacionárního* fyzikálního systému[3] je *eukleidovský* prostor.
Taková reprezentace fyzikálního systému nám umožňuje *matematicky* formulovat pojem (*fyzikální*) *veličina* a pojem (*fyzikální*) *stav*. !elementární

2.1 Lineární operátory a elementární fyzikální systémy

Fyzikální veličiny, asociované s fyzikálním systémem $\boldsymbol{\Psi}$, reprezentovaným eukleidovským prostorem Ψ jsou reprezentovány *symetrickými* operátory $\boldsymbol{\alpha}$ [17],

$$\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A} \subset L(\Psi)$$

Přitom předpokládáme, že každá fyzikální veličina může nabývat pouze ty *reálné* hodnoty $\alpha \in R$, které jsou *vlastními* hodnotami jí příslušného symetrického operátoru ($\boldsymbol{\alpha}$).
Vzhledem k tomu, že existuje jedno-jednoznačný vztah mezi fyzikálními veličinami a symetrickými operátory, které tyto veličiny reprezentují, budeme symetrické operátory nazývat *(fyzikální) veličiny* $\boldsymbol{\alpha}$.[4] Hodnoty α fyzikálních veličin $\boldsymbol{\alpha}$ měřených na systému $\boldsymbol{\Psi}$ závisí na (vnitřních) stavech $\boldsymbol{\theta}$ tohoto systému.

Základní stavy systému, *čisté stavy* reprezentujeme *vektory* $\psi \in \Psi$ takovými, že

$$(\psi, \psi) = 1$$

Takové vektory se v (kvantové) fyzice nazývají *normované vlnové funkce*.
Kromě čistých stavů systému uvažujeme i stavy *smíšené* - nezáporné veličiny $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{A}$ takové, že, pro jejich stopu $\mathrm{Tr}(\cdot)$, viz (10.55), platí

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}) = 1$$

Jelikož *symetrický projektor* $\boldsymbol{\pi}$, viz (10.37),

$$\boldsymbol{\pi}\{\psi\} = \boldsymbol{\pi}[\Psi(\{\psi\})]$$

na jednorozměrný podprostor $\Psi(\{\psi\}) \subset \Psi$ je nezáporná veličina a protože platí

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\pi}\{\psi\}) = 1$$

---

[1] Za elementární fyzikální systém považujeme buňku fázového prostoru popsanou B–E, M–B nebo F–D statistikou, viz Dodatky 10.4

[2] Viz Dodatky 10.1

[3] Viz Dodatky 10.2 a 10.3

[4] Ale ne každý operátor $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ má fyzikální význam (1. a 2. ***von Neumannův*** *postulát* v [17]).

a dále, protože existuje jedno-jednoznačný vztah mezi projektory na podprostory $\Psi(\{\psi\})$ a čistými stavy $\psi \in \Psi$, můžeme projektor $\boldsymbol{\pi}\{\psi\}$ považovat za reprezentaci čistého stavu ψ systému $\mathbf{\Psi}$ na množině veličin $\mathbf{A} \subset L(\Psi)$.

Je tedy zřejmé, že stavy, čisté nebo smíšené, (elementárního) fyzikálního systému $\mathbf{\Psi}$ lze definovat nezápornou veličinou $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{A}$ takovou, že

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}) = 1$$

Čistý stav[5] $\boldsymbol{\theta}$ je pak stavem s vlastností

$$\boldsymbol{\theta}^2 = \boldsymbol{\theta}$$

Stavový prostor systému $\mathbf{\Psi}$ definujeme jako množinu $\mathbf{\Theta}$ všech stavů $\boldsymbol{\theta}$ systému $\mathbf{\Psi}$,

$$\mathbf{\Theta} \subset \mathbf{A}$$

Poznámka:

Ze všech fyzikálně releventních (symetrických) operátorů, fyzikálních veličin asociovaných se systémem $\mathbf{\Psi}$, nás mohou zajímat jen některé. Potom místo třídy operátorů $L(\Psi)$ stačí uvažovat její nejmenší pod-$*$-algebru L_*,

$$L_* \subset L(\Psi)$$

obsahující jen ty operátory (veličiny), které jsou předmětem našeho zájmu.
Někdy nás může zajímat jen jediná veličina, například energie $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Je proto přiléhavější definovat stacionární fyzikální systém ne jen eukleidovským prostorem Ψ, ale uspořádanou dvojicí (Ψ, L_*)

$$\mathbf{\Psi} \stackrel{\triangle}{=} (\Psi, L_*)$$

kde L_* je některá pod-$*$-algebra $*$-algebry $L(\Psi)$.

Množina $\mathbf{A}_*$ těchto veličin je pak dána jako množina všech symetrických operátorů z L_* a stavový prostor $\mathbf{\Theta} \subset \mathbf{A}_*$ je dán jako množina všech nezáporných veličin s jednotkovou stopou.

Někdy se fyzikální systém $\mathbf{\Psi}$ definuje jako obecná $*$-algebra L_* a pak jistá množina

$$\mathbf{A}_* \subset L_*$$

symetrických prvků reprezentuje fyzikální veličiny asociované s fyzikálním systémem a jistá množina

$$\mathbf{\Theta}_* \subset \mathbf{A}_*$$

reprezentuje jeho stavy.
V dalším budeme pod pojmem fyzikální systém $\mathbf{\Psi}$ rozumět prostor Ψ, resp. uspořádanou dvojici[6] $[\Psi, L(\Psi)]$ resp. $[\Psi, L_*(\Psi)]$,

$$\mathbf{\Psi} \stackrel{\triangle}{=} \Psi \quad \text{resp.} \quad \mathbf{\Psi} \stackrel{\triangle}{=} [\Psi, L(\Psi)] \quad \text{resp.} \quad [\Psi, L_*(\Psi)]$$

[5] Všechny fyzikální charakteristiky závislé na stavu systému se cestou přenáší z čistých na smíšené stavy [17].

[6] Díky **Gelfand–Najmark–Segalově (Najmarkově)** větě o kanonické reprezentaci $*-algeber$ je systém $\mathbf{\Psi}$, za předpokladů stanovených 9. axiomem o struktuře, ekvivalentní některé dvojici (Ψ, L_*) resp. prostoru Ψ. Modifikace našich úvah pro případ $L_* \neq L(\Psi)$ je jednoduchá a většinu výsledků lze převést bez podstatné změny [17].

2.2 Pravděpodobnosti elementárního fyzikálního systému

Nechť X je náhodná veličina, která nabývá hodnot x_i, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ ze svého výběrového prostoru $\mathcal{X}$ s rozdělením pravděpodobnosti $[p(1),\ ...,\ p(n)] \stackrel{\triangle}{=} p(\cdot)$,

$$p(a) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p(a) = 1.$$

Střední hodnota $E(X)$ veličiny X se v teorii pravděpodobnosti definuje vztahem

$$E(X) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(a) \tag{2.1}$$

Teorém 2.1. Ke každému stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ existují čisté stavy $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}$ a čísla $q(i|\boldsymbol{\theta})$ tak, že platí[7]

$$q(i|\boldsymbol{\theta}) \geq 0,\ \boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\theta}_i \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) = 1 \tag{2.2}$$

Stav $\boldsymbol{\theta}$ je čistý stav právě tehdy, když pro některé i platí

$$q(i|\boldsymbol{\theta}) = 1$$

Důkaz. Nechť

$$D(\boldsymbol{\theta}) = \{D_\theta : \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\}$$

je disjunktní dekompozice na množině indexů $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ báze $\{\psi_1, \psi_2,\ ...,\ \psi_n\}$ prostoru Ψ.

Množina $\{\psi_i : i \in D_\theta\}$ je báze prostoru $\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \subset \Psi$ operátoru $\boldsymbol{\theta}$ příslušného jeho vlastní hodnotě $\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$. Potom

$$\text{card}\ D_\theta = \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \geq 1 \ \text{ a } \ \boldsymbol{\pi}[\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})] = \sum_{i \in D_\theta} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \ \text{ pro všechna } \ \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$$

Položme $q(i|\boldsymbol{\theta}) = \theta$ pro všechna $i \in D_\theta,\ \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$. Potom, podle vztahu (10.40), je

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta} = \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta\, \boldsymbol{\pi}_\theta &= \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \boldsymbol{\pi}[\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})] = \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \sum_{i \in D_\theta} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \\
\text{Tr}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot \text{Tr}(\boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) = 1
\end{aligned}$$

[7]Tato věta odůvodňuje termíny čistý a smíšený stav; vyplývá z ní totožnost fyzikálního a statistického pojetí pojmu *směs*.

Veličina $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ tedy představuje *rozdělení pravděpodobnosti* do jednotlivých *čistých (kanonických) komponent* $\boldsymbol{\theta}_i$ stavu $\boldsymbol{\theta}$; nazýváme jej

- *kanonické rozdělení (q-rozdělení)* příslušné stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$.

Při přechodu k jiné bázi $\{\tilde{\psi}_1, \ ..., \ \tilde{\psi}_n\}$ dostaneme rozdělení $\tilde{q}(i|\boldsymbol{\theta})$, které se liší od $q(i|\boldsymbol{\theta})$ pouze permutací souřadnic.

Další rozdělení, kterými se budeme zabývat jsou vesměs definována na spektrech veličin $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ resp. stavů $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{A}$. Jde o dvě rozdělení,

- *dimenzionální rozdělení* (krátce *d-rozdělení*) stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$,

$$d(\theta|\boldsymbol{\theta}) \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{\dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})}{\dim \Psi} = \frac{\dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})}{n}, \quad \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.3}$$

- *rozdělení měření* (*pozorování*, krátce *p-rozdělení*) veličiny $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$,

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \stackrel{\text{Def}}{=} \text{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{2.4}$$

kde $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})\}$ je *spektrální rozklad* (10.43) *jednotkového operátoru* $\mathbf{1}$ *ve spektrální relaci s* $\boldsymbol{\alpha}$.
Spektrální rozklad v definici (2.4) je jednoznačně určen veličinou $\boldsymbol{\alpha}$.
Dále, operátor

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha$$

je nezáporný a tudíž také

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \text{Tr}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\pi}_\alpha) \geq 0$$

Podle podmínky (c) v definici spektrálního rozkladu $\mathbf{1}$ a díky linearitě stopy $\text{Tr}(\cdot)$,

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \text{Tr}\left(\boldsymbol{\theta} \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\pi}_\alpha\right) = \text{Tr}(\boldsymbol{\theta}\mathbf{1}) = 1 \tag{2.5}$$

takže vztah (2.4) definuje rozdělení pravděpodobnosti na spektru $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$.

Speciálním případem p-rozdělení při $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ je *p-rozdělení* (měření) stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$,

$$p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) = \text{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\theta) = \theta \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}), \quad \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.6}$$

S definicí rozdělení měření (2.4) souvisí definice *měření veličiny* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ *v systému* $\boldsymbol{\Psi}$, který je ve stavu $\boldsymbol{\theta}$. To se v případě $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ redukuje přímo na *měření samotného stavu* $\boldsymbol{\theta}$. ***Měřením*** **se tedy rozumí právě spektrální rozklad $\mathbf{1}$ ve spektrální relaci s $\boldsymbol{\alpha}$** [13, 41].

Jelikož (10.43) zaručuje, že tento rozklad je jednoznačně určen veličinou $\boldsymbol{\alpha}$ (nebo stavem $\boldsymbol{\theta}$), je měření veličin i stavů určeno jednoznačně.

Podle (2.4), vede tedy měření veličiny $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ k hodnotám α ze spektra $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ s pravděpodobnostmi

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha)$$

Jelikož platí, že

$$\sum_{\mathcal{S}(\alpha)} p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mathcal{S}(\alpha)} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha) = 1$$

hodnoty $u \notin \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ nemohou při měření nastat.

Jinými slovy, ***měřená* veličina $\boldsymbol{\alpha}$ se ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ jeví jako *náhodná* veličina nabývající hodnot z výběrového prostoru, spektra** $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ [s rozdělením pravděpodobnosti $p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$].
Její střední hodnota [ve smyslu definice teorie pravděpodobnosti (2.1)] je, vzhledem k (10.40) a vzhledem k linearitě stopy $\mathrm{Tr}(\cdot)$ [viz (10.57)], dána výrazem

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha \, \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha) = \mathrm{Tr}\left(\boldsymbol{\theta} \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha \boldsymbol{\pi}_\alpha\right) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha}) \tag{2.7}$$

Střední hodnota $E(\boldsymbol{\alpha})$ veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve (smíšeném) stavu $\boldsymbol{\theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$ je pak definovatelná rovností

$$E(\boldsymbol{\alpha}) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha})$$

a speciálně, střední hodnota $E(\boldsymbol{\alpha})$ (měřené a tedy náhodné) veličiny $\boldsymbol{\alpha} \in A$ v čistém stavu $\psi \in \Psi$ je pak definovtelná skalárním součinem,

$$E(\boldsymbol{\alpha}) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} (\boldsymbol{\alpha}(\psi), \psi) \quad [= \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha})]$$

V čistém stavu $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}$ ale měříme hodnoty $i = \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$; pro čistý stav $\boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\pi}\{\psi\}$) platí

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha}\psi, \psi)$$

Zvolíme v Ψ bázi $\{\psi_1, \psi_2, \ ..., \ \psi_n\}$ a pak lze snadno nahlédnout, že, např.

$$\mathrm{Tr}((\boldsymbol{\pi}\{\psi\})\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_{11}$$

kde (α_{ij}) je matice operátoru $\boldsymbol{\alpha}$ v této bázi,

$$\alpha_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}(\psi_i), \psi_j)$$

Je tedy $\alpha_{11} = (\boldsymbol{\alpha}(\psi), \psi)$.
Veličina $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha})$ je tedy střední hodnotou náhodné veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ na jejím výběrovém prostoru $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$[8] [při rozdělení (2.4) ve smíšeném stavu systému $\boldsymbol{\theta}$].

Shrňme nyní vztahy mezi q-rozdělením $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ a p-rozděleními $p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ resp. $p(\cdot|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta})$.

[8]Tato střední hodnota patří do množiny $\mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathcal{N}(\boldsymbol{\alpha})$ je *konvexní obálka* spektra $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$.

Teorém 2.2. Pro vzájemně komutující veličinu $\boldsymbol{\alpha}$ a stav $\boldsymbol{\theta}$ ($\boldsymbol{\alpha\theta} = \boldsymbol{\theta\alpha}$), existují rozklady

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \{D_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})\} \quad \text{a} \quad D(\boldsymbol{\theta}) = \{D_\theta : \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\}$$

množiny $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ a báze $\{\psi_1, \psi_2,\ ...,\ \psi_n\}$, pro které

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha \sum_{i \in D_\alpha} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}, \quad \boldsymbol{\theta} = \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \sum_{i \in D_\theta} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \tag{2.8}$$

a také

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta}), \quad p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in D_\theta} q(i|\boldsymbol{\theta}) \tag{2.9}$$

pro všechna $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ resp. $\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$, viz[31].

Důkaz. Ze vztahu (10.49) vyplývá, že existuje $\boldsymbol{\alpha}' \in \mathbf{A}$ spektrálně ekvivalentní rozkladu $\{\boldsymbol{\pi}_{\alpha'} : \alpha' \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}')\}$ operátoru $\mathbf{1}$ a funkce f, f', pro které $\boldsymbol{\alpha} = f(\boldsymbol{\alpha}')$, $\boldsymbol{\theta} = f'(\boldsymbol{\alpha}')$. Nechť

$$D(\boldsymbol{\alpha}') = \{D_{\alpha'} : \alpha' \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}')\}$$

je rozklad množiny $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, pro který

$$\mathrm{card} D_{\alpha'} = \dim \Psi(\alpha'|\boldsymbol{\alpha}') \geq 1$$

a $\{\psi_i : i \in D_{\alpha'}\}$ nechť je báze v $\Psi(\alpha'|\boldsymbol{\alpha}')$. Pak množiny

$$D_\alpha = \sum_{\alpha' : f(\alpha') = \alpha} D_{\alpha'}, \quad D_\theta = \sum_{\alpha' : f'(\alpha') = \theta} D_{\alpha'}$$

definují rozklady $D(\boldsymbol{\alpha})$, $D(\boldsymbol{\theta})$. Pro tyto rozklady platí následující teorém.

Teorém 2.3. Pro libovolnou veličinu $\boldsymbol{\alpha}$ a stav $\boldsymbol{\theta}$ existují rozklady $D(\boldsymbol{\alpha})$, $D(\boldsymbol{\theta})$ množiny $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, báze $\{\psi_1, \psi_2,\ ...,\ \psi_n\}$, $\{\psi'_1, \psi'_2,\ ...,\ \psi'_n\}$ a stav $\boldsymbol{\theta}' \in \boldsymbol{\Theta}$ komutující s $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha\theta}' = \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\alpha}$), pro které platí

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha \sum_{i \in D_\alpha} \boldsymbol{\pi}\{\psi'_i\}, \quad \boldsymbol{\theta} = \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \sum_{i \in D_\theta} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \tag{2.10}$$

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta}') = p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}') \tag{2.11}$$

kde

$$q(i|\boldsymbol{\theta}') = \sum_{j=1}^{n} p(i|j)\, q(j|\boldsymbol{\theta}) \quad \text{pro} \quad p(i|j) = (\psi'_i, \psi_j)^2 = u_{ji}^2 \tag{2.12}$$

je kanonické rozdělení stavu

$$\boldsymbol{\theta}' = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}')\, \boldsymbol{\pi}\{\psi'_i\} \tag{2.13}$$

a $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ je kanonické rozdělení příslušné rozkladu $D(\boldsymbol{\theta})$, viz [31].

Důkaz. Existence rozkladů a bází, pro které platí (2.10), byla definována výše. Protože podle (10.16) platí, že $\sum_{i=1}^{n} p(i|j) = 1$ a tedy $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}')$ je rozdělení pravděpodobnosti a operátor $\boldsymbol{\theta}'$ definovaný ve (2.13) je stav s kanonickým rozdělením $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}')$. Dále, podle (10.15) a (10.16) a podle (2.10) je

$$(\alpha'_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{ki}\, q(k|\boldsymbol{\theta})\, u_{kj} \right)$$

maticí operátoru $\boldsymbol{\theta}$ v bázi ψ'_1, ..., ψ'_n a tedy

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha) = \sum_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta}') = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\pi}_\alpha)$$

kde

$$\left\{ \boldsymbol{\pi}_\alpha = \sum_{i \in D_\alpha} \boldsymbol{\pi}\{\psi'_i\} : \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \right\}$$

je rozklad $\mathbf{1}$ spektrálně ekvivalentní $\boldsymbol{\alpha}$ ve smyslu (2.10) [platí tedy také (2.11)].

Teorém 2.4. (Směšovací teorém) Pro p-rozdělení veličiny $\boldsymbol{\alpha} \in A$ a pro libovolné stavy $\boldsymbol{\theta}_i \in \boldsymbol{\Theta}$ platí, viz [31],

$$p\left(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{\theta}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i\, p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) \quad \text{pokud} \quad u_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} u_i = 1 \tag{2.14}$$

Důkaz. Podle vlastností (c) a (d) stopy operátoru v (10.57) platí pro každé $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$

$$\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{\theta}_i\right)\boldsymbol{\pi}_\alpha\right] = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}_i \boldsymbol{\pi}_\alpha)$$

a věta tedy plyne z definice (2.4).

2.3 Entropie a informace elementárního fyzikálního systému

Nechť $\boldsymbol{\Psi}$ je libovolný fyzikální systém a $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{A}$ libovolný jeho stav. Pak *fyzikální entropií systému* ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ nazýváme veličinu

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta} \ln \boldsymbol{\theta}) \tag{2.15}$$

Jestliže $\{\boldsymbol{\pi}_\theta : \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\}$ je rozklad $\mathbf{1}$ spektrálně ekvivalentní $\boldsymbol{\theta}$, pak podle (10.48)

$$\boldsymbol{\theta} \ln \boldsymbol{\theta} = \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \ln \theta\, \boldsymbol{\pi}_\theta$$

takže podle vlastnosti (f) stopy operátoru v (10.57)

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \ln \theta \cdot \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \tag{2.16}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Teorém 2.5. Pro fyzikální systém v každém stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ platí, viz [31, 97],[9]

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln q(i|\boldsymbol{\theta}) = H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) &= \ln n - \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln \frac{p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta})}{d(\theta|\boldsymbol{\theta})} \\ &= \ln n - I[p(\cdot|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) \,\|\, d(\cdot|\boldsymbol{\theta})]\end{aligned} \tag{2.18}$$

$H(\cdot)$ je *Shannonova entropie*
$I(\cdot\|\cdot)$ je *informační divergence*
$p(\cdot|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta})$ je rozdělení měření stavu $\boldsymbol{\theta}$
$q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ je kanonické rozdělení stavu $\boldsymbol{\theta}$ a
$d(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ je dimenzionální rozdělení stavu $\boldsymbol{\theta}$ $n = \dim \Psi$

Důkaz. Vztah ve (2.17) plyne ze vztahu (2.16) a z definice (2.2) kanonického rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$. Z definic (2.3) a (2.6) zbývajících dvou rozdělení vyplývá, že

$$I[p(\cdot|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) \,\|\, d(\cdot|\boldsymbol{\theta})] = \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln \frac{n\theta \cdot \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})}{\dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}))}$$

$$= \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln n - \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = \ln n - \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$$

Statistická (Shannonova, informační) entropie $H(\cdot)$ je tedy zobecněním fyzikální entropie $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$ a rovněž tak i informační I-divergence $I(\cdot\|\cdot)$ je [podle (2.18)] zobecněním (fyzikální) veličiny

$$I(p\|d) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^+) - \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$$

kde !stavu

$$\boldsymbol{\theta}^+ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\theta}_i \in \boldsymbol{\Theta} \quad \text{pro} \quad \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n \tag{2.19}$$

je *ekvilibriální (rovnovážný, panenský) stav* systému.
Rozdělení pravděpodobnosti do kanonických komponent $\boldsymbol{\theta}_i$ stavu $\boldsymbol{\theta}^+$ je rovnoměrné,

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^+) = \ln n = \ln \dim (\Psi)$$

[9] Teorém 2.5 (statisticky) interpretuje fyzikální entropii $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$ jako Shannonovu (*informační*) entropii $H(q)$ q-rozdělení ale také i jako I-divergenci ("anti-I-divergenci' $I[p(\cdot|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) \,\|\, d(\cdot|\boldsymbol{\theta})]$ p-rozdělení a d-rozdělení [nepočítáme-li konstantu ln n (nezávislou na $\boldsymbol{\theta}$)], podle toho jaký přístup k fyzikálnímu systému [(statistický) popis jeho stavu) zvolíme.
Také dovoluje přenést na fyzikální entropii (lépe řečeno *extenzitu* [29, 38]) všechny vlastnosti odvozované v teorii informace jak pro informační entropii tak pro I-divergenci.
Ukážeme to na příkladu II. hlavní věty termodynamické (Boltzmanův $\mathcal{H}$-teorém) a na příkladu Gibbsova teorému.

Informační divergence $I(p\|d)$ (≥ 0) vyjadřuje *vzdálenost* rozdělení pravděpodobnosti

$$q(\cdot|\boldsymbol{\theta}) \text{ a } q(\cdot|\boldsymbol{\theta}^+)$$

náhodných veličin, stavů

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{S}, q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] \text{ a } \boldsymbol{\theta}^+ = [\mathbf{S}, q(\cdot|\boldsymbol{\theta}^+)]$$

Ve fyzikálním smyslu je $I(p\|d)$ (≥ 0) *mírou nerovnovážnosti* stavu $\boldsymbol{\theta}$ (fyzikálního) systému $\boldsymbol{\Psi}$. Je maximální pro počáteční (nerovnovážný) stav (časového) vývoje systému.

Poznámka:
Zatím jsme vysvětlili, jak se na stacionárním (*bezčasovém*) fyzikálním systému, jehož reprezentací je prostor Ψ, definuje množina veličin $\mathbf{A}$ a stavový prostor $\boldsymbol{\Theta} \subset \mathbf{A}$.
Stacionární stav systému (stacionární systém) je popsán vlnovou funkcí ψ vyhovující *bezčasové Schroedingerově rovnici*

$$\boldsymbol{\varepsilon}\psi = \varepsilon\psi$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon} \in A$ je nezáporný *Hamiltonův* operátor energie a $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$ nezáporné číslo.
Řešit tuto rovnici pak znamená hledat vlastní hodnoty ε operátoru energie $\boldsymbol{\varepsilon}$, tj. hledat symetrické spektrum $S(\boldsymbol{\varepsilon})$ daného systému.
Evoluci fyzikálního systému v čase explicitně do našich úvah vtahovat nebudeme. Řekneme si jen, že zákon časové evoluce lze zadat trojím způsobem:

- na eukleidovském prostoru Ψ (tam je vyjádřen časově závislým tvarem Schroedingerovy rovnice)
- na stavovém prostoru $\boldsymbol{\Theta}$ ve *Schroedingerově smyslu*, kde pro střední hodnotu veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ v čase $t \geq t_0$ platí

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha}_{t_0}\boldsymbol{\theta}_t),\ \boldsymbol{\theta}_t = \mathbf{u}'(t)\boldsymbol{\theta}_{t_0}\mathbf{u}(t)$$

- na množině A v *Heisenbergově smyslu*, kde pro střední hodnotu veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ v čase t platí

$$E(\boldsymbol{\alpha}_t) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha}_t\boldsymbol{\theta}_{t_0}),\ \boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{u}(t)\boldsymbol{\alpha}_{t_0}\mathbf{u}'(t)$$

viz [3, 7].
V obou případech jsou

$$\mathbf{u}(t) = e^{i\frac{\boldsymbol{\varepsilon}t}{\hbar}}, \mathbf{u}'(t) = e^{-i\frac{\boldsymbol{\varepsilon}t}{\hbar}}$$

unitární operátory na *komplexním* ***Hilbertově*** *prostoru*, $\boldsymbol{\varepsilon}$ je **hamiltonián** systému

$$(\Psi, L_*)$$

a $\hbar = h/2\pi,\ h$ je ***Planckova*** *konstanta*. Jejich matice $(u_{i,j}),\ (u'_{i,j})$ mají vlastnosti (10.13)-(10.22).

I když je věc složitější, můžeme si tedy představit, že prostým násobením vektorů ψ periodickou funkcí času obdržíme v explicitním tvaru popis dynamiky systému.
Tedy, časový vývoj fyzikálního systému (Ψ, L_*) ze stavu $\boldsymbol{\theta}$ do stavu $\boldsymbol{\theta}'$, píšeme $(\boldsymbol{\theta} \longrightarrow \boldsymbol{\theta}')$, např. ve Schroedingerově smyslu, lze vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{u}'(t)\boldsymbol{\theta}\mathbf{u}(t)$$

Veličina $\boldsymbol{\theta}$ je stav systému v okamžiku $t_0 = 0, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_{t_0}$ a t je čas, za který systém přejde do stavu $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta}_t$. Unitární operátor $\mathbf{u}(t)$ je generován hamiltoniánem $\boldsymbol{\varepsilon}$ systému a pro obecný konzervativní fyzikální systém platí

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}^{-1}(t) = e^{-i\frac{\boldsymbol{\varepsilon}t}{\hbar}}$$

Pro rovnovážný (ekvilibriální) stav systému platí

$$\boldsymbol{\theta}^{+} = \lim_{t \longrightarrow \infty} \boldsymbol{\theta}_t$$

Pro stav $\boldsymbol{\theta}^{+}$ platí, že

$$\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}^{+} \quad \text{pro všechna } \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$$

a proto jej také nazýváme *terminálním* (*absorbujícím*) stavem nebo *atraktorem* (časového vývoje, evoluce) systému (Ψ, L_*).

Entropie (2.18) tak určují směr tzv. termodynamické *šipky času*, viz [11],

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') - \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})}{\Delta t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \geq 0, \quad \Delta t = t_{\boldsymbol{\theta}'} - t_{\boldsymbol{\theta}} > 0.$$

Rovnost nastává v *ekvilibriálním*, rovnovážném stavu $\boldsymbol{\theta}^{+}$ ze vztahu (2.19) systému (Ψ, L_*) a jeho okolí. Jedná se o stav ("v průměru") bez interakce systému s okolím ("vstupem"), viz [3], v tomto smyslu intaktní a tak, v rámci fyzikálního pohledu, lze vysvětlit někdy používaný pojem *panenský stav (the virgin state).*

2.4 $\mathcal{H}$-teorém – II. hlavní věta termodynamická – zákon růstu extenzity

I když jsme do našeho modelu fyzikálního systému $\boldsymbol{\Psi} \cong \Psi$ časovou proměnnou explicite nezahrnuli (uvažujeme stacionární systémy), lze i tak uvažovat reprezentacích jeho časového vývoje. Je možné někdy připustit a jindy vyloučit možnost přechodu ze stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ do stavu $\boldsymbol{\theta}' \in \boldsymbol{\Theta}$. V případě, že přechod možný je, říkáme, že $\boldsymbol{\theta}'$ je *ekvivokantem* (následníkem) $\boldsymbol{\theta}$.
Říkáme, že je-li stav

$$\boldsymbol{\theta}' = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}')\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i'\} \in \boldsymbol{\Theta} \tag{2.20}$$

následníkem stavu

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \in \boldsymbol{\Theta} \tag{2.21}$$

(píšeme $\boldsymbol{\theta} \longrightarrow \boldsymbol{\theta}'$) platí, že

$$q(i|\boldsymbol{\theta}') = \sum_{j=1}^{n} p(i|j)\, q(j|\boldsymbol{\theta}) \quad \text{pro} \quad p(i|j) = (\psi_i', \psi_j)^2 = u_{ji}^2 \tag{2.22}$$

Tedy z relace $\boldsymbol{\theta} \longrightarrow \boldsymbol{\theta}'$ plyne existence matice $(u_{i,j})$ transformace báze prostoru $\Psi = \{\Psi\}_{i=1}^{n}$ do báze $\{\Psi'\}_{i=1}^{n}$.[10]

Platí-li vztah (2.22) platí pro jistou dvojici $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$, $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}')$, pak permutací řádků

[10] Tato matice je maticí *unitárního operátoru* $\mathbf{u}(t)$, jímž vyjadřujeme časový vývoj systému.

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

a sloupců matice (u_{ij}) docílíme platnost vztahu (2.22) i pro libovolné permutace pravděpodobností

$$[q(1|\boldsymbol{\theta}),\ ...,\ q(n|\boldsymbol{\theta})] \ \text{ a } \ [q(1|\boldsymbol{\theta}'),\ ...,\ q(n|\boldsymbol{\theta}')]$$

Tudíž (2.22) pak platí pro libovolně specifikovanou dvojici kanonických rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$, $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}')$ příslušných danému páru $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}')$.

Z definice relace $\boldsymbol{\theta} \longrightarrow \boldsymbol{\theta}'$ je také dobře vidět, že se jedná o reflexivní a tranzitivní relaci mezi stavy, a tudíž na $\boldsymbol{\Theta}$ definuje (částečné) uspořádání.

Terminálním, maximálním stavem vzhledem k tomuto uspořádání je rovnovážný stav $\boldsymbol{\theta}^+$ systému $\boldsymbol{\Psi}$: rovnovážný stav $\boldsymbol{\theta}^+$ je tedy následníkem libovolného stavu. Následníkem stavu $\boldsymbol{\theta}^+$ je ale pouze stav $\boldsymbol{\theta}^+$.

Vzniká otázka, kdy je $\boldsymbol{\theta}'$ následníkem stavu $\boldsymbol{\theta}$ a naopak, kdy $\boldsymbol{\theta}$ je následníkem $\boldsymbol{\theta}'$. Je to tedy otázka **mezi kterými (různými) stavy systému jsou možné *reverzibilní přechody***.

Teorém 2.6. ($\mathcal{H}$-teorém) Nechť pro stavy $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta}' \in \boldsymbol{\Theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$ platí $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}'$. Potom

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') \geq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \tag{2.23}$$

a rovnost nastává jen pro $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}'$, viz [31, 97].

Důkaz. (a) Funkce $f(u) = u \cdot \ln u$ je *ryze konvexní* a platí pro ni tedy **Jensenova** *nerovnost*

$$f\left[\sum_{j=1}^{n} p(i|j)\, q(j|\boldsymbol{\theta})\right] \leq \sum_{j=1}^{n} p(i|j)\, f[q(j|\boldsymbol{\theta})], \quad i = 1,\ 2\ ,\ ...,\ n$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f\left[\sum_{j=1}^{n} p(i|j)\, q(j|\boldsymbol{\theta})\right] &\leq \sum_{i=1}^{n} p(i|j) \sum_{j=1}^{n} f[q(j|\boldsymbol{\theta})] \\
= \ \sum_{j=1}^{n} f[q(j|\boldsymbol{\theta})] &= \sum_{j=1}^{n} q(j|\boldsymbol{\theta}) \ln q(j|\boldsymbol{\theta}) \\
= \ -H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] &= -\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{neboť} \quad \sum_{i=1}^{n} p(i|j) = 1
\end{aligned}$$

Pro distribuce určené vztahy (2.22) pak platí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f\left(\sum_{j=1}^{n} p(i|j)\, q(j|\boldsymbol{\theta})\right) &= \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}') \ln q(i|\boldsymbol{\theta}') = -\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') \leq -\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \\
\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') &\geq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}$$

(b) Rovnost v relaci (2.23) nastává právě tehdy když existuje permutace

$$[i(1),\ i(2),\ ...,\ i(n)]\ \text{ indexů }\ \{1,\ 2,\ ...,\ n\},\ p(i|j) = \delta[i|i(j)],\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

Za této podmínky platí

$$q[i(j)|\boldsymbol{\theta}'] = q(j|\boldsymbol{\theta}),\ j = 1,\ 2,\ ...$$

Nechť je dáno pevné j. Když pak platí

$$0 = p(i|j) = (\psi_i', \psi_j)^2 \quad \text{pro všechna } i \neq i(j)$$

znamená to, že

$$\Psi(\psi_j|\boldsymbol{\psi}_j)\perp\left[\bigoplus_{i\neq i(j)}\Psi(\psi_i'|\boldsymbol{\psi}_i')\right], \quad \boldsymbol{\psi}_j = \boldsymbol{\pi}\{\psi_j\} = \boldsymbol{\theta}_j, \quad \boldsymbol{\psi}_i' = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i'\} = \boldsymbol{\theta}_i'$$

a tedy

$$\psi_j \in \Psi[\psi_{i(j)}'|\boldsymbol{\psi}_{i(j)}'],\ p[i(j)|j] = (\psi_{i(j)}', \psi_j)^2 = 1$$

Proto $\psi_j = \psi_{i(j)}'$.

Tím je prokázáno, že $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$ implikuje rovnost

$$q(j|\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{\pi}\{\psi_j\} = q[i(j)|\boldsymbol{\theta}]\,\boldsymbol{\pi}\{\psi_{i(j)}'\}$$

a tedy je $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}'$.

$\mathcal{H}$-teorém tedy říká, že **reverzibilní přechod není možný mezi žádnými dvěma různými stavy $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}'$**.

(Z fyzikálního hlediska se zřejmě jedná o otázku, jaký tvar může mít operátor časového vývoje, *propagátor* systému.)

Z nerovnosti (2.23) také plyne, že každý stav $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$ je následníkem sebe sama, $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}$, a že **reverzibilita vztahu $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}'$ (přechod $\boldsymbol{\theta}' \to \boldsymbol{\theta}$) není, pouze v rámci tohoto systému, bez jeho otevření, možná**.

Je-li počáteční stav jednoprvkový, tedy je

$$d(\theta|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n},\ \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_i,\ \theta = q(i|\boldsymbol{\theta}) = 1$$

pro pevně zvolené $i \in \mathbf{S}$, je

$$I(p\|d) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^+) = \ln n$$

Je-li $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^+$ je

$$\theta = \frac{1}{n},\ d(\theta|\boldsymbol{\theta}) = 1 \ \text{ a } \ I(p\|d) = \ln 1 = 0$$

Rozdíl

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^+) - \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = \max_{\boldsymbol{\theta}'\in\boldsymbol{\Theta}} \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') - \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = H\left[q(\cdot|\boldsymbol{\theta}^+)\right] - H\left[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})\right] \qquad (2.24)$$

je tedy svého druhu 'antientropií' systému $\boldsymbol{\Psi}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$. Vztah (2.24) představuje informačně teoretické vyjádření **Brillouinova** *(maximálního) defektu entropie* ΔH (Brillouinova *negentropického principu informace*, [11, 67]).

3. Měření na elementárním fyzikálním systému

3.1 Informační entropie měření veličiny a stavu

Entropií měření (pozorování) veličiny $\boldsymbol{\alpha} \in A$ ve stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$ (krátce *p-entropií*) rozumíme Shannonovu entropii p-rozdělení ze vztahu (4.3), indexentropie!-p

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = H[p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})] = -\sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \tag{3.1}$$

Pro $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$ získáváme z entropie (3.1) speciální případ entropie měření (pozorování) stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$ jako Shannonovu (informační) entropii p-rozdělení ze vztahu (2.6),

$$H(\boldsymbol{\theta}\|\boldsymbol{\theta}) = H[p(\cdot|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta})] = H(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\theta\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}) \tag{3.2}$$

Entropie měření stavu (3.2) se od fyzikální entropie $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$ ve vztahu (2.17) liší.

Teorém 3.1. Pro všechny stavy $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ systému (Ψ, L_*) platí, viz [31],

$$H(\boldsymbol{\theta}) \leq H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] \tag{3.3}$$

a rovnost nastává právě tehdy když $\dim\,\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) = 1$ pro všechna $\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$.

Důkaz. Podle rovnosti (2.6) platí pro entropii (5.2) rozdělení $p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta})$ rovnost

$$H(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\theta\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \dim\,\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln[\theta \dim\,\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})]$$

a podle (2.16) pro entropii $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$ je

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\theta\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \cdot \dim\,\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln \dim\,\Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \geq 0$$

a proto $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \geq H(\boldsymbol{\theta})$ a podle teorému 2.5 teorém 3.1 platí.

Teorém 3.2. Pro veličinu $\boldsymbol{\alpha} \in A$ a stav $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$, které komutují ($\alpha\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\alpha}$), platí, viz [31]

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.4}$$

a rovnost nastává pro $\operatorname{card}\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) = n = \dim\,\Psi$.

Důkaz. Jestliže platí, že $\boldsymbol{\alpha\theta} = \boldsymbol{\theta\alpha}$, pak existují báze $\{\psi_1,\ \psi_2,\ ...,\ \psi_n\}$ na prostoru Ψ a disjunktní dekompozice množiny $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ jejích indexů,

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \{D_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})\},\ D(\boldsymbol{\theta}) = \{D_\theta : \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\}$$

tak, že podle rozkladu operátoru (10.40) a důkazu terému 2.1 je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha\, \boldsymbol{\pi}_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha \sum_{i \in D_\alpha} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \\ \boldsymbol{\theta} &= \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta\, \boldsymbol{\pi}_\theta = \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \sum_{i \in D_\theta} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \sum_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \end{aligned}$$

Při použití (2.4), (2.5) a (2.9) vidíme, že vztahy

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \sum_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta}) = 1 \\ \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha) &= p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

znamenají, že $p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ je redukcí $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ definovanou na obecně hrubším rozkladu

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \{D_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})\} \ \text{ množiny } \ \{1,\ 2,\ ...,\ n\} \text{ s card}\, D_\alpha \geq 1$$

pro všechna $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ než je nejjemnější možný rozklad s card $D_\alpha = 1$ pro všechna

$$\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}),\ \text{card}\, \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) = n = \dim \Psi$$

Shannonova entropie $H(\cdot)$ je striktně konkávní funkcí distribucí a proto

$$H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] \geq H(p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})).$$

Protože platí (2.17) a (3.1), věta platí.

Nerovnost v teorému 3.2 ale nemusí platit pro nekomutující $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\theta}$.
Uvažujme vztahy (2.8), (2.11), (2.12) a rozklad

$$D(\boldsymbol{\alpha}) = \{D_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})\},\ \text{card}\, D_\alpha = 1$$

pro všechna $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ a entropii

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = H(q(\cdot|\boldsymbol{\theta}'))$$

Pro $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}'$ a stav $\boldsymbol{\theta}'$ kumutující s $\boldsymbol{\alpha}$ je $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}'$ a podle (4.23) máme

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') \geq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$$

a tedy platí

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta}')] = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') > \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})]$$

a proto

$$H[p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})] > H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})]$$

3.2 Gibbsův teorém

Teorém 3.3. (Gibbsův teorém) Pro všechna $\boldsymbol{\theta}, \tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{\Theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$ platí

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \leq -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta} \ln \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \tag{3.5}$$

a rovnost nastává jen pro $\boldsymbol{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ [97].

Důkaz. Nechť pro $\boldsymbol{\theta}$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{\Theta}$ platí

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}, \quad \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^{n} q(i|\tilde{\boldsymbol{\theta}})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i'\}$$

a nechť $\boldsymbol{\theta}'$ je ekvivokant $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}'$ a platí rovnosti (2.11) a (2.12).

Podle II. věty hlavní termodynamické (2.23) $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') \geq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$.
Podle (10.15) a (10.22) pro matici (α_{ij}) operátoru $\boldsymbol{\theta}$ v bázi $\{\psi_1', \ \psi_2', \ ..., \ \psi_n'\}$ platí

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ki}\, u_{kj}\, q(k|\boldsymbol{\theta})$$

Pro stopu operátoru (10.56), (10.57) a pro

$$\ln \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \sum_{i=1}^{n} \ln q(i|\tilde{\boldsymbol{\theta}})\, \boldsymbol{\pi}\{\psi_i'\}$$

píšeme

$$\begin{aligned} -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta} \ln \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= -\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} u_{ki}^2\, q(k|\boldsymbol{\theta}) \right] \ln q(i|\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}') \ln q(i|\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned}$$

Pro informační divergenci rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}')$ a $q(\cdot|\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ platí

$$I[q(\cdot|\boldsymbol{\theta}') \| q(\cdot|\tilde{\boldsymbol{\theta}})] = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}') \ln \frac{q(i|\boldsymbol{\theta}')}{q(i|\tilde{\boldsymbol{\theta}})} \geq 0$$

a tedy

$$-\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') \geq \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}') \ln q(i|\tilde{\boldsymbol{\theta}}).$$

Podle (2.23) pro $\boldsymbol{\theta} \to \boldsymbol{\theta}'$ píšeme

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') \leq -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta} \ln \tilde{\boldsymbol{\theta}}).$$

Podle (2.23) a (3.5) platí i nerovnosti

$$-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\theta}' \ln \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \geq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') \geq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$$

kde první rovnost nastává pro

$$
\begin{aligned}
&I[q(\cdot|\boldsymbol{\theta}')\|q(\cdot|\tilde{\boldsymbol{\theta}})] = 0\\
&\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}') = \mathcal{H}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}),\\
&q(i|\boldsymbol{\theta}') = q(i|\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n,\\
&\boldsymbol{\theta}' = \tilde{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}
$$

a druhá rovnost platí pro $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta}$.
Gibbsův teorém vyjadřuje matematicko-logicky (deduktivně) **fenomén Gibbsova paradoxu** jehož informačně-fyzikální, (gnozeologické) zdůvodnění lze nalézt v literatuře [38] (IT I.).

4. Elementární fyzikální systém a přenosový kanál

Reprezentace Ψ elementárních fyzikálních systémů $\boldsymbol{\Psi}$ slouží jako modely *pracovních látek (medií, transformátorů)* $\mathcal{L}$, *přenosových, informačních kanálů* $\mathcal{K}$[11], krátce kanálů $\mathcal{K}$, pro přenos zpráv (informace) realizovaný právě skrze takové systémy $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{L}$.[12]

Pojem entropie měření, $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$, čili *spektrální* entropie veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ umožňuje *kvantifikovat informaci v měření* fyzikální veličiny $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ konaném na systému $\boldsymbol{\Psi}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$.

Předpokládejme systém $\boldsymbol{\Psi}$ modelovaný lineárním prostorem Ψ s bází vlnových funkcí $\{\psi_1,\ \psi_2,\ ...,\ \psi_n\}$ a s čistými stavy $\boldsymbol{\theta}_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ pro něž platí (2.2).
Dále předpokládejme, že na vstupu přenosového kanálu (systému) $\boldsymbol{\Psi}$ působí kódovací procedura, která jej při výskytu vstupní zprávy $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ (kódového slova s tímto indexem) uvádí do čistého stavu $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}$.
Jsou-li $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n$ pravděpodobnosti vstupních zpráv $1,\ 2,\ ...,\ n$ kódovaných stavy $\boldsymbol{\theta}_1,\ \boldsymbol{\theta}_2,\ ...,\ \boldsymbol{\theta}_n \in \Psi$, platí pro *vstupní stav* kanálu (systému) $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} q_i\, \boldsymbol{\theta}_i, \quad \text{kde} \quad q_i = q(i|\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \tag{4.6}$$

Nechť je dále na výstupu kanálu (systému) $\boldsymbol{\Psi}$ přijímač výstupních zpráv α provádějící měření veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ a dekodér, který na základě naměřené hodnoty α rozhoduje o neznámém čistém stavu $\boldsymbol{\theta}_i$ (kódujícím zprávu i) na jeho vstupu.
Měření veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ je přitom 'obecně' prováděno ve smíšeném stavu $\boldsymbol{\theta}$,

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\theta}_i$$

V čistém stavu $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}$ měříme hodnoty $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ s pravděpodobnostmi $p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i)$.

Transinformace[13] $T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$, *průměrná informace přenesená fyzikálním systémem* $\boldsymbol{\Psi}$,

$$T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) \tag{4.7}$$

stanovuje průměrné množství informace obsažené ve veličině $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ o stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ (přenosopvého) systému (kanálu) $\boldsymbol{\Psi}$.

[11] viz Dodatky 10.5

[12] Například optická komunikace užívá fotonových částic, *bosonů*, které podléhají *Bose–Einsteinově statistice*, B–E. Podobně paměťová média používají elektronů, *fermionů*, řídících se *Fermi–Diracovou statistikou*, F–D. Ta zohledňuje ***Pauliho** vylučovací princip*, neplatný v případě bosonů. Jedná se o případy tzv. *kvantových kanálů*. Uvažujeme i *klasický kanál*, systém, Maxwell–Boltzmanův, M–B. Ten je statistickým souborem klasických, *boltzmanovských částic* řídících se *Maxwell–Boltzmanovou statistikou.*

[13] viz Dodatky 10.5

Rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ a operátory $\boldsymbol{\theta}_i$ jsou uvedeny vvztahy (2.2), entropie $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$ a $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i)$ jsou definovány v (3.1).
Suma na pravé straně (4.7) je podmíněná Shannonova entropie $H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$.

Teorém 4.1. Pro každý symetrický operátor $\boldsymbol{\alpha} \in A$ a stav $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$ platí, viz [31]

$$0 \leq T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \tag{4.8}$$

Levá rovnost platí pro čistý stav $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\},\ i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$.
Pravá rovnost platí když $\boldsymbol{\alpha}$ kumutuje s $\boldsymbol{\theta}$ a $\operatorname{card}\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) = n = \dim\, \Psi$ [12, 13].

Důkaz. (a) Protože je Shannonova entropie $H(\cdot)$ ryze konkávní, platí pro všechna $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\theta}$ Jensenova nerovnost i pro $H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$,

$$H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot H[p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i)] \leq H\left[\sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i)\right]$$

kde rovnost nastává právě tehdy když

$$p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i),\ q(i|\boldsymbol{\theta}) \geq 0 \ \text{ pro všechna } \ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$$

Protože $\boldsymbol{\theta}$ vyhovuje vztahům (4.7) a podle definice (2.4) rozdělení $p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ platí, že

$$\begin{aligned} p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) &= \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\pi}_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\theta}_i\boldsymbol{\pi}_\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) \quad \text{pro všechna } \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

je podle (4.7) prokázáno, že $T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) \geq 0$ a že $T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = 0$ pro čistý vstupní stav $\boldsymbol{\theta} \in \Psi$.

(b) Jestliže $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\theta}$ komutují, pak komutují i $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\theta}_i$ ze vztahů (4.6) pro všechna uvažovaná $\boldsymbol{\theta}_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Potom podle (3.4)

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}_i)$$

a tedy podle (4.7)

$$T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) \leq H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$$

kde nerovnost plyne z (3.4) a rovněž tak podmínka pro rovnost.

Teorém 4.2. Pro libovolnou spojitou funkci $f : R \to R$ stavu $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ platí, viz [31]

$$0 \leq I(f(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta}) \leq H(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{pro všechna } \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \tag{4.9}$$

Levá rovnost nastává právě tehdy když $\boldsymbol{\theta}$ je čistý stav.
Pravá rovnost nastává právě tehdy když

$$f(\theta) \neq f(\theta') \ \text{ pro všechna } \ \theta, \theta' \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}), \ \theta \neq \theta'$$

[f je jedno-jednoznačná, izomorfismus na $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$].

Důkaz. $\boldsymbol{\alpha} = f(\boldsymbol{\theta})$ komutuje se stavem $\boldsymbol{\theta}$ neboť

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &= \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} f(\theta) \sum_{i \in D_\theta} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} = \sum_{\alpha \in f[\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})]} \alpha \sum_{i \in D_\alpha} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\} \\
\boldsymbol{\theta} &= \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \sum_{i \in D_\theta} \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}
\end{aligned}$$

přičemž

$$D(\boldsymbol{\theta}) = \{D_\theta : \theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\} \ \text{ a } \ D(\boldsymbol{\alpha}) = \{D_\alpha : \alpha \in f[\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})]\}$$

jsou disjunktní rozklady na množině $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ $[\boldsymbol{\alpha} = f(\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A} \subset L(\Psi)]$,

$$D_\alpha = \bigcup_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} D_\theta, \quad \alpha \in f[\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})]$$

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in D_\alpha} p(\alpha|i)\, q(i|\boldsymbol{\theta}), \quad p(\alpha|i) = p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \delta(i|D_\alpha)$$

$$p(i|\alpha) = \frac{q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i)}{p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})} = \delta(i|D_\alpha)\, \frac{q(i|\boldsymbol{\theta})}{\sum\limits_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta})}$$

$$\sum_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \theta \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})$$

$q(i|\boldsymbol{\theta}) = \theta$ pro $i \in D_\theta \subset D_\alpha$ a tedy

$$\begin{aligned}
\frac{q(i|\boldsymbol{\theta})}{\sum\limits_{i \in D_\alpha} q(i|\boldsymbol{\theta})} &= \frac{\theta}{\sum\limits_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \theta \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})} \\
H(\boldsymbol{\theta}|\alpha) &= -\sum_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \frac{\theta \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})}{\sum\limits_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \theta \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})} \cdot \ln \frac{\theta \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})}{\sum\limits_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \theta \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})} \\
&\geq \frac{1}{\sum\limits_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \theta \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})} \cdot \sum_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \theta \cdot \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln \dim\, \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) &\geq \sum_{\alpha \in f[\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})]} \sum_{\theta \in f^{-1}(\alpha)} \theta \cdot \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \\
&= \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \cdot \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}
$$

Podle vztahů (2.6), (2.18), (3.2), a (4.7) platí

$$
I[f(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta}] = H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] - H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha})
$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
I[f(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\theta}] &\leq -\sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \ln \theta \cdot \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) - \sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \cdot \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \\
&= -\sum_{\theta \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \theta \cdot \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta}) \cdot [\ln \theta + \ln \dim \Psi(\theta|\boldsymbol{\theta})] = H(p(\theta|\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta})) = H(\boldsymbol{\theta})
\end{aligned}
$$

Rovnost platí právě tehdy když $f^{-1}(\alpha)$ je pro všechna $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ jednoprvková množina, tj. když $f : R \to R$ je na $\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$ prostá (jedno-jednoznačná).

4.1 Informační kapacita elementárního fyzikálního systému

Informační kapacita (stacionárního stochastického) fyzikálního systému $\boldsymbol{\Psi}$ realizujícího přenosový kanál $\mathcal{K}$, $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{K}$, je nezáporná veličina

$$
C(\boldsymbol{\Psi}) = \sup_{\boldsymbol{\alpha} \in A,\, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} T(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\theta}) \tag{4.11}
$$

tj. *maximální* transinformace (4.7), charakterizující maximální rychlost přenosu informace kanálem (systémem) $\boldsymbol{\Psi}$.
Podle vztahu (4.11) je kapacita $C(\boldsymbol{\Psi})$ největší transinformace

$$
T(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) \triangleq I[p(\cdot), d(\cdot)]
$$

a musí tedy, podle (4.7) a (2.17), (2.18), platit

$$
0 \leq C(\boldsymbol{\Psi}) \leq \ln n = \ln \dim \Psi \tag{4.12}
$$

Maximální kapacity

$$
C^{\max} = \max[C(\boldsymbol{\Psi})] = \ln n
$$

dosahujeme, podle rovností (2.19) a (2.24), kódováním, které uvádí kanál, systém $\boldsymbol{\Psi}$ do ekvilibriálního stavu $\boldsymbol{\theta}^+$. V něm pak pozorujeme libovolnou veličinu $\boldsymbol{\alpha}^+$ komutující se stavem $\boldsymbol{\theta}^+$, která v něm dosahuje n různých čistých hodnot. Kanál $\boldsymbol{\Psi}$ se pak jeví vzhledem k možnosti jednoznačného určení jeho stavu $\boldsymbol{\theta}^+$ na základě pozorované hodnoty veličiny $\boldsymbol{\alpha}^+$ jako *bezšumový*.[14]

Minimální kapacity

$$C(\boldsymbol{\Psi}) = 0$$

dosahujeme v případě, že je možné pouze kódování do některého čistého stavu

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_i,\ q(i|\boldsymbol{\theta}) = 1$$

pro dané

$$i \in \mathcal{S},\ q(j|\boldsymbol{\theta}) = 0 \ \text{ pro všechna } \ j \neq i,\ j \in \mathcal{S}$$

Pak

$$C(\Psi) \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}_i) = 0 \Rightarrow C(\Psi) = 0$$

Kódování do jediného možného stavu $\boldsymbol{\theta}_i$ je ekvivalentní komunikaci příjemce zpráv se zdrojem zpráv generujícím právě jednu vstupní zprávu s pravděpodobností 1. *Není tak splněna podmínka sdělování zpráv, spočívající v neurčitosti příjemce o tom, která zpráva (z n možných) byla zdrojem zpráv skutečně vyslána.*

V běžném případě, $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_i$, trvá neurčitost příjemce až do skončení příjmu zprávy a zmenšuje se příjmem jejích částí.
Po přijetí celé zprávy je tato neurčitost, *v průměru*, snížena o hodnotu transinformace $T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$ na zbytkovou (ztrátovou, zbývá k přenešení pro úplné odstranění pozorovatelovy neurčitosti) entropii

$$H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) - T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$$

Na počátku komunikace zdroje $\boldsymbol{\theta}$ a příjemce, provádějícího měření výstupních zpráv $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$, je tato neurčitost největší a je tedy rovna $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$, pokud příjemce zná rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$, je ale rovna $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^+)$, pokud mu rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ známo není [52].
Maximálně tedy může být $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^+)$. Stav $\boldsymbol{\theta}^+$ je tak 'nejkrajnějším' *počátečním stavem* komunikace na straně příjemce a tak lze vysvětlit, v rámci komunikačního pohledu, pojem panenský stav $\boldsymbol{\theta}^+$.
Informační divergence $I(p\|d)$ - transinformace $T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$ - maximální defekt entropie má v tomto případě význam snížení neurčitosti na straně příjemce zpráv příjmem první zprávy, je-li vysílána zdrojem $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^+$. Předpokládanému zdroji $\boldsymbol{\theta}^+$ odpovídá neurčitost $\ln n$.
Jedná se o první snížení neurčitosti příjemce zpráv o rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$,

$$I(p;d) = T^{(1)}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$$

V dalších krocích komunikace je tato neurčitost snižována o transinfomaci

$$T^{(l)}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = H^{(l-1)}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) - H^{(l)}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}),\ l \geq 2$$

[14] Dvojice $(\boldsymbol{\theta}^+, \boldsymbol{\alpha}^+)$ těchto vlastností však nemusí obecně v systému $\boldsymbol{\Psi}$ existovat.

Výchozí neurčitosti příjemce jsou tedy zbytkové entropie $H^{(l-1)}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha})$.
Zřejmě platí

$$H^{(0)}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}),\ \max H^{(0)}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^{+})$$

V důsledku existence ztrát a rušení v kanálu není neurčitost přijaté zprávy úplně odstraněna nikdy.
Pro kanál $\boldsymbol{\Psi}$ _beze ztrát_ je $H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) = 0$ a tedy

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) + H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}), \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$$

Pro kanál $\boldsymbol{\Psi}$ _bez rušení_ je $H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = 0$ a tedy

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) + H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}), H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$$

Pro kanál $\boldsymbol{\Psi}$ _bez šumu a ztrát_ je

$$T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$$

Pro kanál $\boldsymbol{\Psi}$ _absolutně zašuměný_ [ve stavu $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_i,\ q(i|\boldsymbol{\theta}) = 1$ pro některé $i \in \mathbf{S}$] a také pro kanál _izolovaný od zdroje zpráv_ [$q(0|\boldsymbol{\theta}) = 1$] nebo i _přerušený_ je

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}),\ H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$$

a tedy, podle (4.7),

$$T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = 0$$

Relativní informační kapacity $C(\boldsymbol{\Psi}|A_0, \boldsymbol{\Theta}_0)$ dosahuje systém $\boldsymbol{\Psi}$ na množině měření 'přípustných' operátorů $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}_0 \subset \mathbf{A}_*$ a podmnožině $\boldsymbol{\Theta}_0 \subset \boldsymbol{\Theta}$ kódovatelných stavů.

Množinu stavů $\boldsymbol{\Theta}_0$ dále chápeme jako *kódovací proceduru* spojenou s průměrnou hodnotou $\sum\limits_i iq(i|\boldsymbol{\theta})$ vstupní zprávy $i \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n\}$. Je to množina *zdrojů zpráv* $\boldsymbol{\theta}$ vnucujících systému $\boldsymbol{\Psi}$, přenosovému kanálu $\mathcal{K}$, čisté stavy $\boldsymbol{\theta}_i$ s pravděpodobnostmi $q(i|\boldsymbol{\theta})$. Jejich entropie jsou $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})]$.

Teorém 4.3. Pro všechna $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{A}$ a $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi} \cong \Psi$ s bází $\{\psi_1,\ \psi_2,\ ...\psi_n\}$ prostoru Ψ platí

$$T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) \leq H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] \tag{4.13}$$

Důkaz. Podle rovnosti (2.18) platí $H[q(\cdot|\boldsymbol{\theta})] = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$ a podle nerovností (4.8) je $T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) \leq \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$; je tedy nerovnost (4.13) zřejmá.

Dosud odvozené vztahy v přenosovém kanálu $\mathcal{K} \cong \boldsymbol{\Psi}$ jsou vztahy (10.99)[15] kde

$$X \triangleq \boldsymbol{\theta},\ Y \triangleq \boldsymbol{\alpha}\ \text{ resp. }\ Y \triangleq (\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}),\ (X|Y) \triangleq (\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha})\ \text{ a }\ (Y|X) \triangleq (\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$$

[15] viz Dodatky 10.5

Tedy, při této korespondenci píšeme

$$
\begin{aligned}
H(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) &= H(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta}) \\
\equiv \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) + H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) &= H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) + H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) &= H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \\
\equiv T(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\alpha}) &= T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Vztahy ve (4.15) nazýváme *zákon zachování entropie (informace)* v přenosovém kanále resp. *zákon symetrie transinformace (I-divergence).*

Zřejmě platí i to, že

$$
\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) + H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\alpha}) = H\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) + H(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha}) - H(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\theta}) \tag{4.16}
$$

Poznámka. Shannonův teorém o kapacitě kanálu[16] říká: *Zprávu x ze zdroje X lze informačním kanálem $\mathcal{K}$ přenášet s libovolně malou pravděpodobností chyby přenosu β (maximální průměrnou), $\beta > 0$, pokud pro entropii zdroje platí $H(X) < C_{\mathcal{K}}$.*
Tehdy existuje přirozené číslo $m_0 \in \mathbf{N}$, $m_0 = m_0(\beta)$, takové, že pokud pro počet znaků m, $m \in \mathbf{N}$ zprávy x ze zdroje zpráv X s abecedou o mohutnosti M_m, $X = (M_m)^+$ rostoucí s m, $m = m(\beta)$, platí, že pro

$$m \geq m_0(\beta) \;\; [\; m_0(\beta) \to \infty,\; \beta \to 0 \;]$$

je

$$p(\cdot|\cdot) \leq \beta \;\; [\; p_{Y|X}(\cdot|\cdot) \to 0,\; \beta \to 0 \;]$$

Platí-li nerovnost $H(X) \geq C_{\mathcal{K}}$, nelze chybovost β přenosu, a tedy i chyby $p(\cdot|\cdot)$ libovolně stlačit k hodnotě nula.

Máme-li tedy možnost přivádět jistý kvantový systém[17] $\mathcal{L}$ postupně do libovolných, předem zvolených čistých stavů $\boldsymbol{\theta}_{i_1}, \boldsymbol{\theta}_{i_2}, \;\ldots,\; \boldsymbol{\theta}_{i_m}$, které jsou realizacemi (vstupní) náhodné veličiny $\boldsymbol{\theta}$, můžeme předat pozorovateli, který naměří při m pozorováních hodnoty $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \;\ldots,\; \alpha_{k_m}$ (náhodné) veličiny $\boldsymbol{\alpha}$, přes kterou pozoruje veličinu $\boldsymbol{\theta}$, jistou informaci (obsaženou v posloupnosti vstupních stavů, tedy zprávě $\boldsymbol{\theta}_{i_1}, \boldsymbol{\theta}_{i_2}, \;\ldots,\; \boldsymbol{\theta}_{i_m}$). Zajímá nás, jaká je maximální možná (průměrná) hodnota informace, kterou lze takto předat při jednom pozorování, měření. Předpokládejme, že chceme pozorovateli sdělit jednu ze zpráv zdroje $\mathcal{Z}_m = \{1,\, 2,\; \ldots,\; M_m\}$, jehož mohutnost M_m roste s počtem pozorování m jako celá část čísla $\mathrm{e}^{\mathcal{R}m}$, kde $\mathcal{R} > 0$ je určitá konstanta zvaná *informační vydatnost* zdroje. Ze Shannonova *kódovacího teorému kanálu* [14] vyplývá, že zprávu ze zdroje $\mathcal{Z}_m$ lze předat pozorovateli s libovolně malou pravděpodobností chyby, $\beta > 0$, při dostatečně velkém rozsahu pozorování m, pokud $\mathcal{R} < C_{\mathcal{K}}$, kde

$$C_{\mathcal{K}} = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta},\; \mathcal{L}} T(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{\alpha})$$

[16] viz Dodatky 10.5 a [14, 27, 84, 92, 95]

[17] Z obdobné poznámky v [38] (I.T. I.) pro klasický termodynamický systém a rovnováážný stav plyne postulát, že **čistý stav kvantové fyziky je analogem rovnovážného stavu klasické termodynamiky a naopak**

je informační kapacita systému $\mathcal{L}$. Dále z téhož teorému vyplývá, že pokud $\mathcal{R} > C_{\mathcal{K}}$, nelze zprávu ze zdroje $\mathcal{Z}_m$ při žádném rozsahu pozorování m předat s libovolně malou pravděpodobností chyby $p(\cdot|\cdot) \leq \beta$. *'Předat zprávu pozorovateli'* znamená zvolit zobrazení k_m (*kodér* zdroje zpráv),

$$k_m : \mathcal{Z}_m \to \{0, 1, 2, \ldots\}^m$$

seznámit s ním pozorovatele a v případě, že se jedná o zprávu $x \in \mathcal{Z}_m$ a $k_m(x) = (i_1, \ ..., \ i_m) \in \{0, 1, \ldots\}^m$, transformovat systém $\mathcal{L}$ postupně do čistých stavů $\boldsymbol{\theta}_{i_1}, \ ..., \ \boldsymbol{\theta}_{i_m}$, přičemž v každém stavu $\boldsymbol{\theta}_{i_k}$ nechat pozorovatele, aby změřil náhodnou hodnotu α_{i_k} výstupní veličiny $\boldsymbol{\alpha}$. Shannonův teorém za těchto podmínek zaručuje, že pro libovolné $\beta > 0$ existuje m_{m_β} takové, že při všech $m > m_\beta$ lze zvolit kodér k_m tak aby pozorovatel měl k dispozici zobrazení d_m (dekodér svých pozorování),

$$d_m : \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})^m \to \mathcal{Z}_m$$

s vlastností

$$\max_{z \in \mathcal{Z}_m} Pr[d_m(\alpha_{i_1}, \ ..., \ \alpha_{i_m}) \neq x] = p(\cdot|\cdot) < \beta$$

Toto je přesný význam slov *'pozorovateli lze předat zprávu s libovolně malou pravděpodobností chyby'*.

Pojem *'nelze předat'* pak znamená logickou negaci pojmu *'lze předat'*.

Kapacita[18] $C_{\mathcal{K}}$ představuje maximální (průměrné) množství informace, které lze tímto ovlivňováním systému $\mathcal{L}$ (kódováním) předat pozorovateli veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ při jednom pozorování.

[18] V jednotkách např. *nat*, kde $1\,nat \doteq 1,44\,bit$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

5. Elementární fyzikální přenosové systémy s aditivním šumem

V dalším textu budeme elementární fyzikální systémy $\mathbf{\Psi}$, B–E, F–D a M–B typu[19], pojednávat jako přenosové (informační) kanály $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \cong \mathbf{\Psi}$, s jednoprvkpvou *šířkou přenosového pásma* [79].
Budeme je nazývat *úzkopásmové (přenosové, informační) kanály.*

Budeme uvažovat i nekonečnou šířku přenosového pásma a pak budeme o takových fyzikálních systémech hovořit jako *širokopásmových přenosových kanálech.*

5.1 Úzkopásmové kanály s aditivním šumen

Uvažujme symetrický operátor $\boldsymbol{\varepsilon}$ energie částic (kvantových nebo klasických) se spektrem $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$ vlastních hodnot (energií, energetických hladin částice) ε_i.
Předpokládáme ekvidistantní hladiny energií v tom smyslu, že v čistém stavu $\boldsymbol{\theta}_i$ měřeného (pozorovaného) systému $\mathbf{\Psi}$ je vlastní hodnota energie $\varepsilon_i = i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ je daná konstantní hodnota energie.
Dále předpokládáme, že je k dispozici veličina $\boldsymbol{\alpha}$, výstupní veličina našeho pozorování (měření na) systému $\mathbf{\Psi}$ (buňce fázového prostoru[20]), se spektrem změřených (jejích *vlastních*) hodnot $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) = \{\alpha_0,\ \alpha_1,\ ...,\ \}$. Přitom

$$p(\alpha_k|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \begin{cases} p(k-i) & \text{pro} \quad k \geq i \\ 0 & \qquad\quad\; k < i \end{cases}$$

kde

$$\{p(0),\ p(1),\ p(2),\ ...\} = \Pr(\cdot)$$

je rozdělení pravděpodobnosti na množině indexů $\{0,\ 1,\ ...\}$.
Tato situace nastane například když částice s ekvidistantními hladinami energií ε_i je excitována náhodným zásahem z vnějšího prostředí z energetické hladiny ε_i na hladinu ε_{i+j}, $i + j = k$, přičemž energetický přeskok j je náhodný, s rozdělením

$$\Pr(j),\ j \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$$

a na výstupu kanálu se měří energie ε_{i+j} této excitované částice.
K excitaci může dojít i kolizí s jinou částicí téhož prostředí. Například po kolizi s j částicemi s energiemi ε a adsorbování jejich energie $j\varepsilon$ dojde také k energetickému přeskoku částice z hladiny ε_i na hladinu ε_k.

Ve výše uvedeném případě tedy hraje klíčovou roli rozdělení $\Pr(j)$ počtu narážejících částic, závisící na charakteru prostředí, jímž jsou emitovány.

[19] viz Dodatky 10.4
[20] viz Dodatky 10.4

Uvažujeme úzkopásmové systémy $\boldsymbol{\Psi}$ B–E, F–D a M–B typu, dále označované symboly $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E},\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{F-D},\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{M-B},\varepsilon}$.

V B–E systému, *bosonovém* např. *fotonovém plynu* [64] platí B–E rozdělení

$$\Pr(j) = (1-p)\cdot p^j, \quad j \in \{0,\ 1,\ ...\},\ p \in (0,1).$$

Ve F–D systému, *fermionovém* resp. *elektronovém plynu* [64], platí F–D rozdělení

$$\Pr(j) = \frac{p^j}{1+p}, \quad j \in \{0,1\},\ p \in (0,1)$$

V M–B systému, *(Boltzmanově) ideálním plynu* platí M–B rozdělení

$$\Pr(j) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^j \cdot (1-p), \quad j \in \{0,1\},\ p \in (0,1)$$

Parametry uvedených rozdělení jsou proměnná $p \in (0,1)$,

$$p \stackrel{\mathrm{Def}}{=} e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}\Theta}} \tag{5.1}$$

resp. je to proměnná $\Theta > 0$ (absolutní teplota) a Boltzannova konstanta k.

V našich algebraických modelech (Ψ) fyzikální komunikace (přes komunikační, informační, přenosový kanál $\mathcal{K}$, $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{K}$) se nyní omezíme jen na *aditivní* přenosové systémy; výstupní (měřená) veličina $\boldsymbol{\alpha}$ je monotónní *stochastickou* funkcí stavu $\boldsymbol{\theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$.
Jinými slovy, předpokládáme, že čisté stavy $\boldsymbol{\theta}_i$ v místě, kde se *kóduje* vstupní zpráva (informace) - na vstupu kanálu $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{K}$, i možné měřitelné hodnoty veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ pozorované v místě kde se informace *dekóduje* - na výstupu kanálu $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{K}$, lze uspořádat tak, že v i-tém čistém stavu $\boldsymbol{\theta}_i$ systému $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{K}$ lze naměřit pouze hodnoty $\alpha_k \in \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha}),\ k = i + j$, přičemž pravděpodobnost, že se naměří k-tá hodnota je

$$\Pr(j) = Pr(k-i)$$

Rozdělení pravděpodobnosti $\Pr(j)$ popisuje aditivní šum v daném fyzikálním kanálu. Udává 'chvost neurčitosti' na spektru $\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$ veličiny $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha}) = \{\alpha_i,\ \alpha_{i+1},\ ...\}$$

Pouze tehdy, kdy $\Pr(0) = 1$ tato neurčitost zcela vymizí. Pak *jistě* naměříme hodnotu α_i z níž *jednoznačně* rekonstruujeme čistý stav $\boldsymbol{\theta}_i$. Jinak vždy evidujeme aditivní (kvantový) šum, který do dekódování (dešifrování) stavu $\boldsymbol{\theta}_i$ nejistotu.[21]

[21]Naše omezení na kanály s aditivním šumem souvisí s tím, že jejich teorie je v teorii informace nejlépe propracovaná [14] a to pro jejich technické aplikace (např. přenosové a záznamové optické a elektromagnetické systémy).

Čistě fenomenologicky lze čistých stavů s energií $\varepsilon_i = i\varepsilon$ dosáhnout vysláním i částic z nichž každá má energii ε. Jestliže prostředí, kterým tyto částice procházejí spontánně a nezávisle generuje j částic s pravděpodobností $\Pr(j)$, pak se s toutéž pravděpodobností na přijímací straně pozorovatele detekuje energie $\varepsilon_{i+j} = k{\cdot}\varepsilon$.

Jistou licencí je, že pokládáme za možný případ nekonečný počet stavů $\boldsymbol{\theta}_i$ resp. nekonečné spektrum $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ měřené veličiny $\boldsymbol{\alpha}$. Bez újmy na obecnosti budeme pak předpokládat, ž pro rozklady na množině indexů platí

$$D(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) = \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$$

přičemž zavedeme označení

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{S},\ \ \alpha_k \stackrel{\triangle}{=} \alpha$$

Střední hodnota W indexu i je určena q-rozdělením $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ s partiční funkcí Z,

$$\left\{ q(i|\boldsymbol{\theta}) = \frac{e^{-\frac{i\cdot\varepsilon}{\mathrm{k}\Theta}}}{Z} \right\}$$

kde $\Theta = T_W$ je absolutní teplota vstupního signálu.
Podle výše popsaného fenomenologického přístupu totiž uvažujeme, že prostřednictvím $\boldsymbol{\Psi}$ (např. B–E systému $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E}}$ - fotonového plynu) se přenášejí signály o amplitudách $i \in \mathcal{S}$ (např. monochromatické impulsy) generované z prostředí téhož druhu ale při teplotě T_W, $T_W > T_0$ a T_0 je teplota přenosového systému $\boldsymbol{\Psi}_{[\mathrm{B-E}]}$.

V rámci zmíněného fenomenologického přístupu definujeme úzkopásmový fyzikální přenosový kanál takto:

Úzkopásmovým fyzikálním kanálem, bezpaměťovým, s aditivním šumem (kvantovým nebo klasickým), pracujícím na energetické hladině $\varepsilon \in \mathcal{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$, rozumíme uspořádanou trojici

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \{[\mathcal{S}, q(i|\boldsymbol{\theta})],\ p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i),\ [\mathcal{S},\ p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})]\}.$$

5.1.1 Kapacita Bose–Einsteinova úzkopásmového kanálu

Nechť nyní

$$\boldsymbol{\theta}_i \equiv i,\ \ i = 0, 1,\ ...\ \in \mathcal{S}$$

jsou čisté stavy systému $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{K}$, $\boldsymbol{\alpha}$ je výstupní veličina nabývající v těchto stavech vlastních hodnot $\alpha \in \mathbf{S}$ s pravděpodobnostmi entropie!podmíněné

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = (1-p)\, p^{\alpha-i} \tag{5.2}$$

Rozdělení $p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i)$ je tedy určeno stavem $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\pi}\{\psi_i\}$ představujícím kódovanou energii $\varepsilon_i = i\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}),\ \varepsilon = \text{konst.}$
Pro střední hodnotu $\mathcal{W}$ vstupního i platí

$$\mathcal{W} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q(i|\boldsymbol{\theta}) = E(\boldsymbol{\theta}) \tag{5.3}$$

Veličina $\varepsilon \cdot W$ má pak význam *střední energie kódování* vstupního signálu.

Pro *střední hodnotu* $E(\boldsymbol{\alpha})$ počtu částic $j = \alpha - i \geq 0$ s B–E statistikou platí 4

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot (1-p)\, p^j \\ &= (1-p) \cdot p \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j\, p^{j-1} = (1-p) \cdot p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{1}{1-p}\right] = \frac{p}{1-p} \end{aligned} \tag{5.4}$$

kde $p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ je pravděpodobnost [z p-rozdělení (4.3)] změření vlastní hodnoty $\alpha = k$ výstupní veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ určené stavem $\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\theta}_i$ systému $\boldsymbol{\Psi} \cong \mathcal{K}$,

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = (1-p) \cdot \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot p^{\alpha-i} \tag{5.5}$$

Sestavíme diferenční rovnici

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = p(\alpha-1|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \cdot p + (1-p) \cdot q(\alpha|\boldsymbol{\theta}), \ \forall \alpha \geq 1 \tag{5.6}$$

s okrajovou podmínkou pro $\alpha = 0$

$$p(0|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = (1-p) \cdot q(0|\boldsymbol{\theta})$$

a z ní určíme střední hodnotu

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\alpha \geq 1} \alpha \cdot p(\alpha-1|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \cdot p + \sum_{\alpha \geq 1} \alpha \cdot (1-p) \cdot q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) \tag{5.7}$$

$$= \sum_{\alpha \geq 1} \alpha \cdot p(\alpha-1|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \cdot p + \mathcal{W} \cdot (1-p) \tag{5.8}$$

$$= p \cdot E(\boldsymbol{\alpha}) + p \cdot \sum_{\alpha \geq 1} p(\alpha-1|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{W} \cdot (1-p) \tag{5.9}$$

Další úpravou levé a pravé strany (5.7) získáme vztah

$$E(\boldsymbol{\alpha}) \cdot (1-p) = p + \mathcal{W} \cdot (1-p)$$

a tedy

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p}{1-p} + \mathcal{W} \tag{5.10}$$

Veličina $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i)$ je p-entropie měření veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ pro vstup $i \in \mathbf{S}$ reprezentovaný čistým stavem $\boldsymbol{\theta}_i$ systému $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E}}$,

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) = -\sum_{j \in \mathbf{S}} (1-p)\, p^j \cdot \ln[(1-p)\, p^j] \tag{5.11}$$

$$
\begin{aligned}
&= -(1-p)\cdot\ln(1-p)\cdot\sum_j p^j - (1-p)\cdot p\cdot\ln p\cdot\sum_j j\,p^{j-1} && (5.12)\\
&= -\ln(1-p) - (1-p)\cdot p\cdot\ln p\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{1}{1-p}\right]\\
&= \frac{-(1-p)\cdot\ln(1-p) - p\cdot\ln p}{1-p} = \frac{h(p)}{1-p},\ \forall i\in\mathbf{S} && (5.13)\\
h(p) &\overset{\triangle}{=} -(1-p)\cdot\ln(1-p) - p\cdot\ln p
\end{aligned}
$$

kde $h(p)$ je Shannonova entropie bernoulliovského s rozdělení pravděpodobnosti $\{p,\,1-p\}$.

Veličina $H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ je podmíněná Shannonova entropie náhodné veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ definovaná vztahem

$$
H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\cdot H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta})\cdot\frac{h(p)}{1-p} = \frac{h(p)}{1-p} \tag{5.14}
$$

Vidíme, že tato enetropie nezávisí na stavu $\boldsymbol{\theta}$.

Pro (relativní) kapacitu $C_{\mathrm{B-E}}$ kanálu $\mathcal{K}\cong\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E}}$ platí podle (4.11), že

$$
C_{\mathrm{B-E}} \;=\; C(\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E}}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\Theta}_0) = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0}\left[H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})\right]
$$

a tedy

$$
C_{\mathrm{B-E}} = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - \frac{h(p)}{1-p} \tag{5.15}
$$

kde množina stavů

$$
\boldsymbol{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta},\ E(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{W}\geq 0\}
$$

představuje *kódovací proceduru* vstupního $i\in\mathbf{S}$ (s průměrnou energií kódování $W=\varepsilon\cdot\mathcal{W}$).

Veličina $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = H(p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}))$ je p-entropie výstupní veličiny $\boldsymbol{\alpha}$. Její supremum (maximum) hledáme metodou ***Lagrangeových*** *multiplikátorů.*

$$
H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})\cdot\ln p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} p_\alpha\cdot\ln p_\alpha \tag{5.16}
$$

kde $p_\alpha = p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$. Podmínky pro určení vázaného extrému jsou

$$
\sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} p_\alpha = 1,\qquad \sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha\cdot p_\alpha = E(\boldsymbol{\alpha}) = \text{konst.} \tag{5.17}
$$

Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$
L = -\sum_\alpha p_\alpha\cdot\ln p_\alpha - \lambda_1\cdot\sum_\alpha p_\alpha + \lambda_1 - \lambda_2\cdot\sum_\alpha \alpha\cdot p_\alpha + \lambda_2\,E(\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.18}
$$

Dostaneme podmínku pro extrém

$$\frac{\partial L}{\partial p_\alpha} = -\ln p_\alpha - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \cdot \alpha = 0$$

ze které plyne

$$p_\alpha = e^{-1-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2 \alpha} = p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$$

Z podmínek (6.12) dostaneme

$$\sum_\alpha p_\alpha = \sum_\alpha \frac{e^{-1-\lambda_1}}{e^{\lambda_2 \alpha}} = \frac{e^{-1-\lambda_1}}{1-e^{-\lambda_2}} = 1$$

a tedy

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_\alpha \alpha \cdot p_\alpha = \sum_\alpha \alpha \cdot e^{-1-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2 \alpha} = \\ &= -e^{-1-\lambda_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \sum_\alpha e^{-\lambda_2 \alpha} = -e^{-1-\lambda_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left[\frac{1}{1-e^{-\lambda_2}}\right] = \frac{e^{-1-\lambda_1}}{(1-e^{-\lambda_2})^2} \cdot e^{-\lambda_2} \end{aligned}$$

Tedy platí

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{e^{-\lambda_2}}{1-e^{-\lambda_2}} \tag{5.19}$$

Podle (5.1) a (5.10) $E(\boldsymbol{\alpha})$ je (pro $p =$ konst.; $\varepsilon =$ konst. $\Theta =$ konst.) funkcí $\mathcal{W}$.
Pro $\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}$ položíme $e^{-\lambda_2} = p(\mathcal{W})$ a máme střední hodnotu

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} \tag{5.20}$$

náhodné veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ s geometrickým rozdělením pravděpodobnosti

$$p(\cdot) = p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = [1-p(\mathcal{W})] \cdot p(\mathcal{W})^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.21}$$

a tedy $E(\boldsymbol{\alpha})$ závisí jen na $\dfrac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}$ resp. jen na T_W.

Rozdělení pravděpodobnosti (5.21) maximalizuje entropii $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$ při *efektivní teplotě kódování* T_W vstupních zpráv.

Z rovnic (5.6) a (5.21) plyne stav $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0$ resp. q-rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ v němž je $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$ maximální [a stav, ve kterém $\boldsymbol{\alpha}$ dosahuje rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}) = p(\cdot)$],

$$\begin{aligned} q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1-p(\mathcal{W})}{1-p}, \quad \alpha = 0 \qquad (5.22) \\ q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1-p(\mathcal{W})}{1-p}\,[p(\mathcal{W})-p] \cdot p(\mathcal{W})^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

Po dosazení (5.20) do (5.10) vidíme, shodně se [67], že hodnota $p(\mathcal{W})$ resp. teplota T_W je jediným řešením rovnice

$$\frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} = \frac{p}{1-p} + \mathcal{W}, \text{ resp. } \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}} + \mathcal{W} \tag{5.23}$$

Pro p-entropii veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ s rozdělením (5.21) platí

$$\begin{aligned}
\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) &= -\sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} [(1-p(\mathcal{W}))\cdot p(\mathcal{W})^{\alpha}]\cdot\ln[(1-p(\mathcal{W}))\cdot p(\mathcal{W})^{\alpha}] \\
&= -\sum_{j\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} (1-p(\mathcal{W}))\,p(\mathcal{W})^{j}\cdot\ln[(1-p(\mathcal{W}))\,p(\mathcal{W})^{j}] \\
&= -(1-p(\mathcal{W}))\cdot\ln(1-p(\mathcal{W}))\cdot \\
&\quad \cdot\sum_j p(\mathcal{W})^j - (1-p(\mathcal{W}))\cdot p(\mathcal{W})\cdot\ln p(\mathcal{W})\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p(\mathcal{W})}\sum_j p(\mathcal{W})^j \\
&= -\ln(1-p(\mathcal{W})) - \frac{p(\mathcal{W})\cdot\ln p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})}
\end{aligned}$$

a tedy

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = \frac{h[p(\mathcal{W})]}{1-p(\mathcal{W})} \tag{5.24}$$

Po dosazení tohoto výsledku do (5.15) získáme pro kapacitu $C_{\mathrm{B-E}}$ úzkopásmového kanálu $\mathcal{K} \cong \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E}}$, shodně s [31, 92] vztah

$$C_{\mathrm{B-E}} = \frac{h[p(\mathcal{W})]}{1-p(\mathcal{W})} - \frac{h(p)}{1-p} \tag{5.25}$$

Pro střední hodnotu $\mathcal{W}$ resp. pro průměrnou energii $W = \varepsilon\cdot\mathcal{W}$ kódování vstupní zprávy $i \in \mathcal{S}$ platí podmínka určující její minimální hodnotu.

Ze vztahů (5.10) a (5.20) získáme

$$\mathcal{W} = \frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} - \frac{p}{1-p} \tag{5.26}$$

a podle (5.3) máme

$$\mathcal{W} \geq 0 \quad \text{resp.} \quad W = \varepsilon\cdot\mathcal{W} \geq 0, \quad \varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{5.27}$$

tj. podmínku pro minimální průměrnou energii potřebnou pro zakódování vstupní zprávy $i \in \mathbf{S}$ ($W \geq W_{Krit}$, $W_{Krit} = 0$). Ze vztahů (5.10), (5.20) a (5.27) plyne, že

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} \geq \frac{p}{1-p} \tag{5.28}$$

a tedy

$$p(\mathcal{W}) \geq p, \; 1 - p(\mathcal{W}) \leq 1 - p \tag{5.29}$$

Ze vztahů (5.23), (5.29) plyne, že pro daný směr přenosu signálu při teplotě T_W jeho vyslání a dekódování, platí

$$\begin{aligned} \frac{p(\mathcal{W})}{1 - p(\mathcal{W})} &> \frac{p}{1-p}, \; p(\mathcal{W}) > p, \; \mathcal{W} > 0 \qquad (5.30) \\ p(\mathcal{W}) = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}} &\geq e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}} = p \\ T_W &\geq T_0 \end{aligned}$$

Poznámka. Pro předpoklad $W < 0$ bychom získali nerovnost

$$T_W < T_0 \text{ a } p(\mathcal{W}) < p$$

a to je spor s (5.10) a (5.23).
Jednalo by se o situci, kdy *je přenášena jiná informace, v jiném směru a jiným způsobem.* Naše setrvání v názoru o původní organizaci přenosu, tj. pro $T_W > T_0$, pak vede ke sporu s *Ekvivalenčním principem termodynamiky* [38] (IT I.).
Tento spor ale jen vyjadřuje naše mylné přesvědčení o aktuálním směru přenosu informace .

Pro případ $T_W = T_0$ pro B–E kapacitu $C_{\mathrm{B-E}}$ ze vztahu (5.25) platí

$$C_{\mathrm{B-E}} = 0$$

Tehdy $W = W_{Krit}$ [= 0] neboť $p(\mathcal{W}) = p$.

5.1.2 Kapacita Fermi–Diracova úzkopásmového kanálu

Stejně jako v případě B–E systému, uvažujme i nyní čisté stavy

$$\boldsymbol{\theta}_i \equiv i$$

systému $\boldsymbol{\Psi}$ kódující vstupní zprávy $i \in \mathcal{S} = \{0, 1, ...\}$, výstupní náhodnou veličinu $\boldsymbol{\alpha}$ s výběrovým prostorem $\mathbf{S}$.
Na $\mathbf{S}$ na jsou definovány pravděpodobnosti realizace $\alpha \in \mathbf{S}$,

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{p^{\alpha - i}}{1+p}, \quad p \in (0,1), \; i = 0, 1, ... \tag{5.31}$$

aditivní stochastické transformace vstupního i na výstupní α tak, že platí $\alpha = i$ nebo $\alpha = i + 1$ podle *Pauliho vylučovacího principu* pro *fermiony* a energetickou hladinu $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Uvažujeme $\varepsilon =$ konst.
Veličina $W = \varepsilon \cdot \mathcal{W}$ je střední hodnota energie kódování vstupního signálu , kde

$$\mathcal{W} = \sum_{i \in \mathbf{S}} i \cdot q(i|\boldsymbol{\theta}) = E(\boldsymbol{\theta}) \tag{5.32}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Střední hodnota náhodné veličiny podléhající F–D statistice je

$$\sum_{j\in\{0,1\}} j \cdot \frac{p^j}{1+p} = \frac{p}{1+p} \tag{5.33}$$

Veličina $E(\boldsymbol{\alpha})$ je střední hodnota výstupní veličiny $\boldsymbol{\alpha}$,

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \tag{5.34}$$

kde $p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ opět označuje pravděpodobnost realizace (změření) hodnoty $\alpha \in \mathbf{S}$ veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$,

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i\in\mathbf{S}} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\theta}_i$$

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{1}{1+p} \cdot \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot p^{\alpha-i} \tag{5.35}$$

Pro toto rozdělení pravděpodobnosti sestavíme diferenční rovnici

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{q(\alpha-1|\boldsymbol{\theta}) \cdot p + q(\alpha|\boldsymbol{\theta})}{1+p}, \quad \alpha \geq 1 \tag{5.36}$$

s okrajovou podmínkou pro $\alpha = 0$

$$p(0|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{1+p} \cdot q(0|\boldsymbol{\theta})$$

Pro střední hodnotu (5.34) pak máme

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{p}{1+p} \cdot \sum_{\alpha\geq 1} \alpha \cdot q(\alpha-1|\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{1+p} \cdot \sum_{\alpha\geq 1} \alpha \cdot q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{p}{1+p} \cdot \sum_{\alpha\geq 1} (\alpha-1) \cdot q(\alpha-1|\boldsymbol{\theta}) + \frac{p}{1+p} \cdot \sum_{\alpha\geq 1} q(\alpha-1|\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{1+p} \cdot \mathcal{W} \\ &= \frac{p}{1+p} \cdot \mathcal{W} + \frac{p}{1+p} + \frac{1}{1+p} \cdot \mathcal{W} \end{aligned}$$

a tedy

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p}{1+p} + \mathcal{W}, \quad \mathcal{W} = E(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0 \tag{5.37}$$

Omezujeme se na stavy z množiny $\boldsymbol{\Theta}_0$, kde

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} : E(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{W} > 0\}$$

je kódovací procedura.
Veličina $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i)$ je entropie p-rozdělení $p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i)$ vzniku $\alpha - i = j \in \{0,1\}$ částic

při vstupu $i \in \mathbf{S}$, tj. p-entropie měření $\boldsymbol{\alpha}$ pro vstup i reprezentovaný čistým stavem $\boldsymbol{\theta}_i$ systému $\boldsymbol{\Psi}$,

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) &= -\sum_{j=0}^{1} \frac{p^j}{1+p} \cdot \ln \frac{p^j}{1+p} = -\frac{1}{1+p} \cdot \ln \frac{1}{1+p} - \frac{p}{1+p} \cdot \ln \frac{p}{1+p} \\ &= -\left(1 - \frac{p}{1+p}\right) \cdot \ln \left(1 - \frac{p}{1+p}\right) - \frac{p}{1+p} \cdot \ln \frac{p}{1+p} \\ &= h\left(\frac{p}{1+p}\right), \quad \forall i \in \mathbf{S} \end{aligned} \tag{5.38}$$

Veličina $H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ je podmíněná Shannonova entropie náhodné veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$,

$$H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) = \sum_{i} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot h\left(\frac{p}{1+p}\right) = h\left(\frac{p}{1+p}\right) \tag{5.39}$$

Entropie (5.39) je tedy nezávislá na stavu $\boldsymbol{\theta}$.

Pro relativní kapacitu $C_{\mathrm{F-D}}$ kanálu $\mathcal{K} \cong \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{F-D}}$ platí, podle (4.11), že

$$C_{\mathrm{F-D}} = C(\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{F-D}|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\Theta}_0)} = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} [H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})]$$

Tedy

$$C_{\mathrm{F-D}} = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - h\left(\frac{p}{1+p}\right) \tag{5.40}$$

Veličina

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = H(p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}))$$

je p-entropie náhodné veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ systému $\boldsymbol{\Psi}$,

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i\in\mathbf{S}} q(i|\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{\theta}_i$$

Její supremum určíme (jako v B–E případě) metodou Lagrangeových multiplikátorů.

Podle definice p-entropie položíme

$$H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\alpha\in\mathbf{S}} p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \cdot \ln p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\alpha} p_\alpha \cdot \ln p_\alpha, \tag{5.41}$$

a určíme vazební podmínky,

$$\sum_{\alpha} p_\alpha = 1, \quad \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha \cdot p_\alpha = E(\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.42}$$

Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L = -\sum_\alpha p_\alpha \cdot \ln p_\alpha - \lambda_1 \cdot \sum_\alpha p_\alpha + \lambda_1 - \lambda_2 \cdot \sum \alpha \cdot p_\alpha + \lambda_2 E(\boldsymbol{\alpha})$$

a stanovíme podmínku pro extrém

$$\frac{\partial L}{\partial p_\alpha} = -\ln p_\alpha - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \cdot \alpha = 0$$

kde

$$p_\alpha = e^{-1-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2 \alpha}, \quad \sum_\alpha p_\alpha = \frac{e^{-1-\lambda_1}}{1-e^{-\lambda_2}} = 1$$

Potom

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_\alpha \alpha \cdot p_\alpha = -e^{-1-\lambda_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \sum_\alpha e^{-\lambda_2 \alpha} = \frac{e^{\lambda_2}}{1-e^{-\lambda_2}}$$

a tedy platí

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{e^{\lambda_2}}{1-e^{-\lambda_2}} \tag{5.43}$$

Podle (5.1) a (5.37) je $E(\boldsymbol{\alpha})$ funkcí $\mathcal{W}$ (pro $p = \text{konst.}$; $\varepsilon = \text{konst.}$, $\Theta = \text{konst.}$).
Pro $\lambda_2 = \dfrac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}$, položíme $p(\mathcal{W}) = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}$ a

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} \tag{5.44}$$

je střední hodnota náhodné veličiny s geometrickým rozdělením pravděpodobnosti

$$p(\cdot) = p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = [1-p(\mathcal{W})] \cdot p(\mathcal{W})^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.45}$$

Rozdělení pravděpodobnosti (5.45) maximalizuje p-entropii $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$.
Po dosazení za $E(\boldsymbol{\alpha})$ do (5.37) vidíme, shodně s l [67], že hodnota $p(\mathcal{W})$ resp. efektivní teplota kódování T_W je jediným řešením rovnice

$$\frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} = \frac{p}{1+p} + \mathcal{W}, \quad \text{resp.} \quad \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}}{1-e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1+e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}} + \mathcal{W} \tag{5.46}$$

Stavy $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0$ resp. q-rozdělení $q(\cdot|\boldsymbol{\theta})$, pro které platí vztah (5.45) a stavy, pro které platí $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}) = p(\cdot)$, získáme ze (5.36) a (6.41) řešením rovnice

$$\frac{q(\alpha-1|\boldsymbol{\theta}) \cdot p + q(\alpha|\boldsymbol{\theta})}{1+p} = [1-p(\mathcal{W})] \cdot p(\mathcal{W})^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{S}$$

Platí, že

$$\begin{aligned}
q(0|\boldsymbol{\theta}) &= (1+p) \cdot [1-p(\mathcal{W})] \\
q(1|\boldsymbol{\theta}) &= (1+p) \cdot [1-p(\mathcal{W})] \cdot [p(\mathcal{W}) - p] \\
q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) &= (1+p) \cdot [1-p(\mathcal{W})] \cdot \left[\left(\sum_{i=0}^{\alpha-1} (-1)^i \cdot p(\mathcal{W})^{\alpha-i} \cdot p^i \right) + (-1)^\alpha \cdot p^\alpha \right], \quad \alpha > 1
\end{aligned}$$

Pro p-entropii veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ s rozdělením (5.45) platí, stejně jako v (5.24),

$$\begin{aligned} \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) &= -\sum_{\alpha\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \cdot[1-p(\mathcal{W})]\cdot p(\mathcal{W})^\alpha \cdot \ln\left\{[1-p(\mathcal{W})]\cdot p(\mathcal{W})^\alpha\right\} \\ &= \frac{-(1-p(\mathcal{W}))\cdot\ln(1-p(\mathcal{W})) - p(\mathcal{W})\cdot\ln p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} \end{aligned}$$

Tedy

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = \frac{h[p(\mathcal{W})]}{1-p(\mathcal{W})} \tag{5.47}$$

Pro kapacitu $C_{\mathrm{F-D}}$ systému $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{F-D}}$ pak dosazením (5.47) do (5.40), podobně jako ve vztahu (5.25), získáme, shodně s [31, 92], vztah

$$C_{\mathrm{F-D}} = \frac{h[p(\mathcal{W})]}{1-p(\mathcal{W})} - h\left(\frac{p}{1+p}\right) \tag{5.48}$$

Pro střední hodnotu W vstupního $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ platí omezení zdola. Ze vztahů (5.32) a (5.46) získáme

$$\mathcal{W} = \frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} - \frac{p}{1+p} \geq 0 \tag{5.49}$$

Platí tedy

$$\mathcal{W} \geq \frac{2p^2}{1-p^2}, \quad \text{resp.} \quad W = \varepsilon\cdot\mathcal{W} \geq \varepsilon\cdot\frac{2e^{-2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1-e^{-2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}} \tag{5.50}$$

pro střední hodnotu vstupního $i \in \mathcal{S}$, resp. pro střední energii kódování, když systém $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E}}$ pracuje na uniformní energetické hladině ε ($W \geq W_{Krit},\ \mathcal{W}_{Krit} = \dfrac{2p^2}{1-p^2}$).
Lze tedy u F–D kanálu hovořit o ***efektu nenulové kapacity při nulovém rozdílu teplot kódování*** T_W ***a šumu*** **(resp.** *měření***)** T_0.[22]

Ze vztahů (5.50) a (5.37) plyne, že

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} \geq \frac{p}{1-p} \tag{5.51}$$

a tedy

$$\begin{aligned} p(\mathcal{W}) = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}} &\geq e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}} = p \\ T_W &\geq T_0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Skutečně, ze vztahů (5.46) a (5.50) plyne, že

$$\frac{p(\mathcal{W})}{1-p(\mathcal{W})} \geq \frac{p}{1+p},\ p(\mathcal{W}) \geq p \tag{5.53}$$

[22] Vztahy (5.50) a tento z nich plynoucí závěr opravují tvrzení o nenulové kapacitě při nulovém vstupním výkonu [92].

Poznámka Pro předpoklad $\mathcal{W} < \dfrac{2p^2}{1-p^2}$ získáme nerovnost

$$T_W < T_0 \;\text{ a }\; p(\mathcal{W}) < p$$

a to je spor s (5.46).[23]

Pro případ $T_W = T_0$ pro kapacitu $C_{\mathrm{F-D}}$ ze (5.48) platí

$$C_{\mathrm{F-D}} = \frac{h(p)}{1-p} + \frac{p}{1+p} \cdot \ln p - \ln(1+p)$$

Tyto jevy jsou nutně dány (vlastnostmi buněk fázového prostoru s) F–D statistikou.

5.1.3 Kapacita Maxwell–Boltzmanova úzkopásmového kanálu

Stejně jako v případě B–E a F–D systému uvažujeme kódování vstupních zpráv $i \in \mathcal{S} = \{0, 1, \ ..., \ \}$ čistými stavy $\boldsymbol{\theta}_i \equiv i$.

Pravděpodobnost změření $\alpha \in \mathbf{S}$ při daném i definující aditivní stochastickou transformaci i na α, $\alpha - i \geq 0$ probíhající v kanále $\mathcal{K} \cong \boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{M-B}}$, je

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\alpha-i} \cdot (1-p), \quad \alpha - i = j \in \{0, 1\} \tag{5.54}$$

podrobněji

$$\begin{array}{lll} & j = \alpha - i = 0 & p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \Pr(j)_{j=0} = 1-p, \; p \in (0,1) \\ & j = \alpha - i = 1 & p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \Pr(j)_{j=1} = p \\ \text{jinak} & & p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = 0 \end{array} \tag{5.55}$$

kde $p = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}$, $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$.
Výrazem

$$\mathcal{W} = \sum_{i \in \mathbf{S}} i \cdot q(i|\boldsymbol{\theta}) \tag{5.56}$$

je určena střední hodnota vstupního $i \in \mathcal{S}$.
Výrazem

$$\sum_{j=0}^{1} j \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^{j} \cdot (1-p) = p \tag{5.57}$$

je dána střední hodnota náhodné veličiny s M–B rozdělením.
Dále,

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$$

[23] Nicméně kapacita $C_{\mathrm{F-D}}$ pro tento případ kdy $W < W_{\mathrm{Krit}}$ je stanovena ve [31], viz poslední **Poznámka** této podkapitoly.

je střední hodnota výstupní veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ kde $p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ je pravděpodobnost výskytu vlastní hodnoty $\alpha \in \mathbf{S}$, je-li systém $\boldsymbol{\Psi}_{M-B}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$,

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i \in \mathbf{S}} q(i|\boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{\theta}_i$$

Platí, že

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_i) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\alpha - i} \cdot (1-p) \tag{5.58}$$

Pro (5.58) sestavíme diferenční rovnici,

$$p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = q(\alpha - 1|\boldsymbol{\theta}) \cdot p + q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) \cdot (1-p), \quad \alpha \geq 1 \tag{5.59}$$

s okrajovou podmínkou pro $\alpha = 0$

$$p(0|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = q(0|\boldsymbol{\theta}) \cdot (1-p)$$

pomocí které vyjádříme střední hodnotu veličiny $\boldsymbol{\alpha}$.

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha \cdot p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \\ &= \sum_{\alpha} \alpha \cdot p \cdot q(\alpha - 1|\boldsymbol{\theta}) + \sum_{\alpha} \alpha \cdot (1-p) \cdot q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) \\ &= p \cdot \sum_{\alpha} (\alpha - 1) \cdot q(\alpha - 1|\boldsymbol{\theta}) + p \cdot \sum_{\alpha} q(\alpha - 1|\boldsymbol{\theta}) + (1-p) \cdot \mathcal{W} \\ &= p \cdot \mathcal{W} + p + (1-p) \cdot \mathcal{W} = p + \mathcal{W} \end{aligned}$$

Tedy

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = p + \mathcal{W} \tag{5.60}$$

Výraz (5.60) (pro $p =$ konst.; $\varepsilon =$ konst., $\Theta =$ konst.) závisí jen na $\mathcal{W}$.
Pro p-entropii veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}_i$, $i \in \mathcal{S}$, platí

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) &= -\sum_{j=0}^{1} \left(\frac{p}{1+p}\right)^{j} \cdot (1-p) \cdot \ln\left[\left(\frac{p}{1+p}\right)^{j} \cdot (1-p)\right] \\ &= -(1-p) \cdot \ln(1-p) - p \cdot \ln p = h(p) \end{aligned} \tag{5.61}$$

Podmíněná Shannonova entropie náhodné veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ je

$$H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^{n} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}_i) = \sum_{i} q(i|\boldsymbol{\theta}) \cdot h(p) = h(p) \tag{5.62}$$

a je nezávislá na stavu $\boldsymbol{\theta}$.
Pro (relativní) kapacitu $C_{\mathrm{M-B}}$ systému $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{M-B}} \cong \mathcal{K}$ platí podle (4.11) vztah

$$C_{\mathrm{M-B}} = C(\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{M_B}}|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Theta}_0) = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}_0} [H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - h(p)] \tag{5.63}$$

kde

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}; E(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{W} > 0\}$$

je kódovací procedura.

Shodně s předcházejícími případy B–E a F–D systémů určíme metodou Lagrangeových multiplikátorů hustotu pravděpodobnosti výstupní (měřené) veličiny $\boldsymbol{\alpha}$, kterou je maximalizována její entropie $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$ při průměrné amplitudě W vstupů i,

$$p(\alpha) = p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = [1 - p(\mathcal{W})] \cdot p(\mathcal{W})^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.64}$$

Dále určíme střední hodnotu veličiny $\boldsymbol{\alpha}$,

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p(\mathcal{W})}{1 - p(\mathcal{W})}$$

Po dosazení za $E(\boldsymbol{\alpha})$ do (5.60) vidíme, že $p(\mathcal{W}) = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}$ resp. T_W, efektivní teplota kódování, je jediné řešení rovnice

$$\frac{p(\mathcal{W})}{1 - p(\mathcal{W})} = p + \mathcal{W}, \text{ resp. } \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}} = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}} + \mathcal{W} \tag{5.65}$$

Pro stavy $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0$ v nichž platí (5.64) [a pro stavy, pro které platí $q(\cdot|\boldsymbol{\theta}) = p(\cdot)$] řešíme rovnici (5.59),

$$q(\alpha|\boldsymbol{\theta}) = \frac{[1 - p(\mathcal{W})] \cdot p(\mathcal{W})^{\alpha} - q(\alpha - 1|\boldsymbol{\theta}) \cdot p}{1 - p}, \quad \alpha \in \mathbf{S}.$$

Stejně jako v předchozích případech je

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{\alpha}[1 - p(\mathcal{W})] \cdot p(\mathcal{W})^{\alpha} \cdot \ln\{[1 - p(\mathcal{W})] \cdot p(\mathcal{W})^{\alpha}\} \tag{5.66}$$

a tedy

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = \frac{h[p(\mathcal{W})]}{1 - p(\mathcal{W})} \tag{5.67}$$

Pro kapacitu $C_{\mathrm{M-B}}$ systému $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{M-B}}$, pracujícího na energetické hladině ε pak podle (5.63) platí

$$C_{\mathrm{M-B}} = C(\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{M-B}}) = \frac{h[p(\mathcal{W})]}{1 - p(\mathcal{W})} - h(p) \tag{5.68}$$

Ze vztahů (5.56), (5.60) a (5.65) získáme

$$\mathcal{W} = \frac{p(\mathcal{W})}{1 - p(\mathcal{W})} - p \geq 0 \tag{5.69}$$

a tedy platí podmínka pro (minimální) střední hodnotu vstupního $i \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{W} \geq \frac{p^2}{1-p} \;=\; \frac{e^{-2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}} \tag{5.70}$$

Pro střední hodnotu energie vstupního $i \in \mathbf{S}$ při energetické úrovni $\varepsilon =$ konst. máme

$$W = \varepsilon \cdot \mathcal{W} \geq \varepsilon \cdot \frac{e^{-2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}} \tag{5.71}$$

$(W{\geq}W_{Krit},\ \mathcal{W}_{Krit} = \dfrac{p^2}{1-p^2})$.

Lze tedy i u M–B kanálu hovořit o ***efektu nenulové kapacity při nulovém rozdílu teplot kódování*** T_W ***a šumu*** (*měření*) T_0.

Ze vztahů (5.60) a (5.70) plyne, že

$$E(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{p(\mathcal{W})}{1 - p(\mathcal{W})} \geq \frac{p}{1-p} \tag{5.72}$$

Ze vztahu (5.65) plyne, že

$$\begin{aligned} \frac{p(\mathcal{W})}{1 - p(\mathcal{W})} &\geq p,\ p(\mathcal{W}){\geq}p \\ T_W &\geq T_0 \end{aligned} \tag{5.73}$$

stejně jako v předchozích případech.

Poznámka. Předpoklad $\mathcal{W} < \frac{p^2}{1-p}$ vede k nerovnosti

$$T_W < T_0 \;\text{ a }\; p(\mathcal{W}) < p$$

což je spor s (5.65). [24]

Pro případ $T_W = T_0$ pro M–B kapacitu $C_{\text{M–B}}$ ze vztahu (5.68) platí

$$C_{\text{M–B}} = \frac{p}{1-p} \cdot h(p)$$

Tyto jevy jsou nutně dány (vlastnostmi buněk fázového prostoru s) M–B statistikou.

[24] Nicméně kapacita $C_{\text{M–B}}$ pro tento případ kdy $W < W_{\text{Krit}}$ je stanovena ve [31], viz následují **Poznámka.**

Poznámka. Ve [31] je uveden tvar *horního a dolního odhadu* informační kapacity $C(\mathcal{K}_{\mathrm{F-D|M-B}})$ pro případ $0 < W < W_{\mathrm{Krit}}$;[25]

$$
\begin{aligned}
C^*(\mathcal{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) &= \frac{h(x)}{1-x} - h\left(\frac{p}{1+p}\right) \quad \text{a} \quad C_*(\mathcal{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) = \frac{h(x_*)}{1-x_*} \\
C^*(\mathcal{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) &= \frac{\mathcal{W}}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{\mathcal{W}}\right) + \ln\left(1 + \frac{\mathcal{W}}{2}\right) \\
x &= \frac{p(1-c) + (1-p)\mathcal{W}}{1 - pc + (1-p)\mathcal{W}}, \quad x_* = \frac{\mathcal{W}}{2+\mathcal{W}}, \quad c = \frac{(r+1)p^r(1-p)}{1-p^{r+1}} \in (0,1)
\end{aligned}
$$

[25] Ve [31, 32] je také uvedena *zobecněná kapacitní formule* pro všechny tři typy kanálů,

$$
\begin{aligned}
C(p, r|\mathcal{W}) &= \frac{h(x)}{1-x} - \frac{h(p)}{1-p} + \frac{h(p^{r+1})}{1-p^{r+1}}, \quad x = \frac{p(1-c) + (1-p)\mathcal{W}}{1 - pc + (1-p)\mathcal{W}} \\
\mathcal{W} \geq \mathcal{W}_{\mathrm{Krit}} &= \frac{(r+1)p^{r+1}}{1-p^{r+1}} = \frac{pc}{1-p}, \quad c = \frac{(r+1)p^r(1-p)}{1-p^{r+1}} \in (0,1)
\end{aligned}
$$

kde $r = 1$ pro F–D a M–B, $r = \infty$ pro B–E. Pro M–B klademe $p = \frac{e^{-\frac{\mathcal{E}}{k\Theta}}}{1-e^{-\frac{\mathcal{E}}{k\Theta}}}$.

5.2 Širokopásmové kanály s aditivním šumen

5.2.1 Vícepásmový kanál

Na rozdíl od úzkopásmové varianty přenosového kanálu $\mathcal{K}_\varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}),\ \operatorname{card}\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1$, uvažujeme nyní symetrický operátor $\boldsymbol{\varepsilon}$ energie částice se spektrem vlastních hodnot

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \left\{0,\ \frac{h}{\tau},\ \frac{2h}{\tau},\ ...,\ \frac{nh}{\tau},\ ...\right\} = \left\{\frac{rh}{\tau}\right\}_{r=0,\ 1,\ ...,\ n},\ \operatorname{card}\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = n+1 \tag{5.74}$$

kde symbol $\tau,\ \tau > 0$ označuje dobu trvání vstupního signálu a symbol h označuje Planckovu konstantu.
V rámci dříve zmiňovaného fenomenologického přístupu definujeme i *širokopásmový fyzikální přenosový kanál*; tomuto přístupu odpovídá i častější použití pojmu vstupní, výstupní a šumová částice.

Nejprve si však zavedeme jeden pomocný pojem. Na spektru energií (5.74) si definujme *vícepásmový (diskrétní) fyzikální přenosový kanál.*

Vícepásmový fyzikální kanál, bezpaměťový, s aditivním šumem, kvantový nebo klasický definujeme jako (uspořádanou) množinu, systém $\mathbf{K}$, úzkopásmových, nezávislých komponent $\mathcal{K}_\varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$,

$$\mathbf{K} = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \mathcal{K}_\varepsilon = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \{\boldsymbol{i}_\varepsilon,\ p(\alpha_\varepsilon|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon,i_\varepsilon}),\ \boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\} = \{\boldsymbol{i},\ p(\overline{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_{\overline{i}}),\ \boldsymbol{\alpha}\} \tag{5.75}$$

Platí tedy, že symbol

$$\boldsymbol{i} = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{i}_\varepsilon = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} [\mathbf{S},\ q_\varepsilon(i_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)],\ i_\varepsilon \in \mathbf{S} = \{0,\ 1,\ 2,\ ...\} \tag{5.76}$$

označuje vstupní veličinu a symbol

$$\boldsymbol{\alpha} = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\alpha}_\varepsilon = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} [\mathbf{S},\ p(\alpha_\varepsilon|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)]\alpha_\varepsilon \in \mathbf{S} = \{0,\ 1\ ,2,\ ...\} \tag{5.77}$$

označuje výstupní veličinu.

Protože úzkopásmové komponenty $\mathcal{K}_\varepsilon$ pracují nezávisle, jsou $\boldsymbol{i}_\varepsilon,\ \boldsymbol{\alpha}_\varepsilon,\ \boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ a také šum $\boldsymbol{j}_\varepsilon$ nezávislými náhodnými veličinami.
Dále, symbol

$$\prod_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} q_\varepsilon(i_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = q(\overline{i}|\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon, \quad \overline{i} \in \mathbf{S}(\boldsymbol{i}) \tag{5.78}$$

označuje simultánní *q-pravděpodobnost* vstupů i_ε jednotlivých úzkopásmových komponent $\mathcal{K}_\varepsilon,\ \varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$ a symbol

$$\prod_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} p(\alpha_\varepsilon|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = p(\overline{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} = \bigotimes_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon, \quad \overline{\alpha} \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{5.79}$$

označuje simultánní *p-pravděpodobnost* měření výstupních hodnot α_ε úzkopásmových komponent $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Přitom

$$i' = \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} i_\varepsilon$$

je celkový počet částic na vstupu a dále

$$\alpha' = \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \alpha_\varepsilon$$

je celkový počet částic na výstupu vícepásmového kanálu **K**.

V vícepásmovém kanálu probíhá transformace vstupního i' na výstupní α' určená aditivními stochastickými transformacemi vstupních i_ε na výstupní α_ε jednotlivých úzkopásmových komponent $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$,

$$\sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \alpha_\varepsilon = \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} j_\varepsilon + \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} i_\varepsilon \tag{5.80}$$

Dále,

$$j' = \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} j_\varepsilon$$

je celkový počet aditivních (šumových) částic,

$$j_\varepsilon = \alpha_\varepsilon - i_\varepsilon \geq 0, \ \forall \varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{5.81}$$

Platí, že

$$\overline{j} \in \mathbf{S}(\boldsymbol{j}) = \bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \mathbf{S}(\boldsymbol{j}_\varepsilon) = \mathbf{S}(\bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{j}_\varepsilon) = \bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} [\mathbf{S}, \Pr(j_\varepsilon)]$$

Dále

$$\prod_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} p(\alpha_\varepsilon | \boldsymbol{\alpha}_\varepsilon | \boldsymbol{\theta}_{\varepsilon, i_\varepsilon}) = p(\overline{\alpha} | \boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\theta}_{\overline{i}}) \tag{5.82}$$

je pravděpodobnost aditivní stochastické transformace vstupního $\overline{i} \in \mathbf{S}(\boldsymbol{i})$ na výstupní $\overline{\alpha} \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ a

$$\overline{\alpha} = \overline{j} + \overline{i}$$

Systém náhodných veličin $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ (stavů úzkopásmových komponent $\mathcal{K}_\varepsilon$) je stav $\boldsymbol{\theta}$ vícepásmového systému **K**,

$$\boldsymbol{\theta} = \bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon$$

Ve stavu $\boldsymbol{\theta}$ je definována (*kanonická*) *q-distribuce* systému **K** [simultánní 'vstupní' pravděpodobnost (5.78), jejíž hodnoty si můžeme označit i symbolem $q_{\overline{\theta}}$].

Realizacemi systémů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{j}$ náhodných veličin $\boldsymbol{i}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$, $\boldsymbol{j}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$ jsou tedy posloupnosti resp. *vektory* $\bar{i}$, $\bar{\alpha}, \bar{\theta}$, $\bar{j}$ dimenze card $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) > 1$,

$$\bar{i} = (i_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}, \quad \bar{\alpha} = (\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}, \quad \bar{\theta} = (\theta_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}, \quad \bar{j} = (j_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}$$

$$i_\varepsilon,\ \alpha_\varepsilon,\ j_\varepsilon \in \mathbf{S} \quad \text{a samozřejmě} \quad \bar{i},\ \bar{\alpha},\ \bar{j} \in \bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \mathbf{S}$$

$$\theta_\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon), \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \sum_{i_\varepsilon \in \mathbf{S}} \theta_\varepsilon\, \boldsymbol{\theta}_{\varepsilon, i_\varepsilon} \text{a} \quad \bar{\theta} \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})$$

Symbolem $\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon,i_\varepsilon}$ označujeme čistý stav, kódující vstup $i_\varepsilon \in \mathbf{S}$ úzkopásmové komponenty $\mathcal{K}_\varepsilon$ a symbol $\boldsymbol{\theta}_{\bar{i}}$,

$$\boldsymbol{\theta}_{\bar{i}} = \bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \boldsymbol{\theta}_{\varepsilon, i_\varepsilon}$$

pak kóduje vstupní $\bar{i}$,

$$\bar{i} = (i_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})},\ q(\bar{i}|\boldsymbol{\theta}) = q_{\bar{\theta}} = \prod_\varepsilon q_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$$

Tedy, kódovací procedura $\overline{\boldsymbol{\Theta}}_0$ na vstupu $\mathbf{K}$,

$$\overline{\boldsymbol{\Theta}}_0 = \bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \{\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \in \Theta_\varepsilon;\ E(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = W_\varepsilon \geq 0\}$$

transformuje $\bar{i}$ na $\boldsymbol{\theta}_{\bar{i}}$ resp. transformuje vstupní i_ε na na stavy $\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon,i_\varepsilon}$, $\forall \varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$. Použitím řetězcového pravidla pro výpočet simultánní pravděpodobnosti zjistíme, že pro informační entropii systému nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2,\ ...,\ X_n$ platí

$$H(X_1, X_2,\ ...,\ X_n) = \sum_i H(X_i|X_1, ...X_{i-1}) = \sum_i H(X_i)$$

Tedy i fyzikální entropie $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$ definovaná na systému $\boldsymbol{\theta}$ nezávislých náhodných veličin $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ je součtem entropií $H_\varepsilon(q(\cdot|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)$. Proto, ve shodě s předcházejícími kapitolami, definujeme i pro vícepásmový kanál $\mathbf{K} = \bigotimes_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \mathcal{K}_\varepsilon$;

- výstupní p-entropii $H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$,
- podmíněnou entropii $H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$,
- transinformaci $T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta})$ a
- kapacitu $C(\mathbf{K})$.

Tedy, pro p-entropii výstupu $\boldsymbol{\alpha}$ vícepásmového kanálu $\mathbf{K}$ platí, že

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \\ &= -\sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \sum_{\alpha_\varepsilon \in \mathbf{S}} p(\alpha_\varepsilon|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \ln p(\alpha_\varepsilon|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \\ &\leq \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \sup_{\boldsymbol{\theta}_\varepsilon} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.83}$$

Z výsledků (5.24), (5.47), (5.67) pro výstup úzkopásmové komponenty $\mathcal{K}_\varepsilon$ plyne, že B–E, F–D a M–B vícepásmový systém fungující jako přenosový kanál **K** platí

$$\begin{aligned}\sup_{\boldsymbol{\theta}} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) &= \sup_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \sup_{\boldsymbol{\theta}_\varepsilon} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \\ &= \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\end{aligned} \tag{5.84}$$

Dále, podle (5.11), (5.14) a (5.38), (5.39) a (5.62) je entropie vícepásmového B–E, F–D a M–B šumu[26]

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \\ &= \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\sum_{i\in\mathbf{S}} q(i|\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon,i})\cdot H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon,i}) \\ &= \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \left[\frac{h(p_\varepsilon)}{1-p_\varepsilon} \mid h\left(\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\right) \mid h(p_\varepsilon)\right]\end{aligned} \tag{5.85}$$

kde $p_\varepsilon(W) = e^{-\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{k}T_{0W}}}$, $p_\varepsilon = e^{-\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{k}T_0}}$, $T_W \geq T_0 > 0$, $h(p) = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p)$.

Pro kapacitu vícepásmového B–E, F–D a M–B kanálu **K**, podle vztahů (4.7), (4.11), (5.85), (5.84), získáváme

$$\begin{aligned}C(\mathbf{K}) &= \sup_{\boldsymbol{\theta}} T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = \sup_{\boldsymbol{\theta}}\left[H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})\right] \\ &= \sup_{\boldsymbol{\theta}} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) \\ &= \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})} - \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\left[\frac{h(p_\varepsilon)}{1-p_\varepsilon} \mid h\left(\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\right) \mid h(p_\varepsilon)\right]\end{aligned} \tag{5.86}$$

5.2.2 Kanály se spojitým spektrem energie

Definice kanálu se *spojitým, konečným spektrem - intervalem energií* $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) \subset R^+$ částic účastnících se přenosu informace a definice *širokopásmového přenosového kanálu* (jeho spektrem je *nekonečný* interval energií $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = R^+$) jsou pak formálně shodné se vztahy (5.75)-(5.79), právě až na spojitá spektra energií $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) \subseteq R^+$.

V obou případech ale uvažujeme *diskrétní počty* všech částic účastnících se přenosu informace kanálem; z hlediska typu zpráv (přenášené , výstupní, a rušivé) a tedy se v tomto smyslu jedná o *kanály diskrétní*, podobně jako ve vícepásmovém případě.

[26]Výrazy $[\cdot|\cdot|\cdot]$ mají význam *gramatického, vylučovacího nebo* a znamenají použití výsledků pro B–E, F–D a M–B úzkopásmový systém v tomto pořadí.

Uvažujme tedy konečný interval hodnot energie,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \{\varepsilon_r\}_{r=0,\ 1,\ \dots,\ n} = \left\{\frac{rh}{\tau}\right\}_{r=0,\ 1,\ \dots,\ n}, \quad \Delta\varepsilon = \frac{h}{\tau},\ \varepsilon_r = \frac{rh}{\tau} = r\cdot\Delta\varepsilon, \\ \mathrm{card}\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{\varepsilon_n}{\Delta\varepsilon} = n+1,\ n\cdot\Delta\varepsilon = n\cdot\frac{h}{\tau} = \varepsilon_n,\ \frac{\tau}{n} = \frac{h}{\varepsilon_n} = \text{konst.} \end{aligned}$$

a tedy závislost mezi n a τ je pro dané ε_n lineární.

Pro přenosový kanál se spojitým spektrem energií částic a s *šířkou přenosového pásma* card $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_n}{h}$, píšeme

$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to\infty} \varepsilon_r &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{rh}{\tau} = \lim_{\tau\to\infty} r\cdot\Delta\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} r\,\mathrm{d}\,\varepsilon \ \text{ resp.} \\ \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} &= \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{h}, \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \langle 0, \varepsilon_n) \end{aligned} \tag{5.87}$$

Budeme ale uvažovat nekonečnou šířku přenosového pásma a nekonečný počet částic ($\tau\to\infty,\ \ n\to\infty$) a pak máme

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \{\varepsilon_r\}_{r=0,\ 1,\ \dots} = \left\{\frac{rh}{\tau}\right\}_{r=0,\ 1,\ \dots} \\ \lim_{\tau\to\infty} \varepsilon_r &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{rh}{\tau} = \lim_{\varepsilon\to 0} r\,\Delta\varepsilon = r\,\mathrm{d}\,\varepsilon \end{aligned}$$

a tudíž máme i *širokopásmové spektrum energií*,

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{h}, \quad \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \langle 0, \infty) \tag{5.88}$$

Dále tedy[27]

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) &= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \\ &= \lim_{\tau\to\infty} -\frac{1}{\tau} \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \sum_{\alpha_\varepsilon\in\mathbf{S}} p(\alpha_\varepsilon|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)\cdot\ln p(\alpha_\varepsilon|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{h}\int_0^\infty \left[\sum_{\alpha\in\mathbf{S}} p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)\cdot\ln p(\alpha|\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)\right]\mathrm{d}\varepsilon \end{aligned} \tag{5.89}$$

je p-entropie výstupu $\boldsymbol{\alpha}$ širokopásmového kanálu $\mathbf{K}$ B–E, F–D nebo M–B typu.

[27] Pro vlastní hodnoty $\alpha_\varepsilon \in \mathbf{S}$ používáme dále označení α a shodným způsobem je zavedeno označení $i \stackrel{\triangle}{=} i_\varepsilon,\ j \stackrel{\triangle}{=} j_\varepsilon,\ i_\varepsilon,\ \ j_\varepsilon \in \mathbf{S}$ pro všechna $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$.

Podle vztahu (5.84) je entropie!podmíněné

$$\sup_{\boldsymbol{\theta}} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\max_{\boldsymbol{\theta}}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\max_{\boldsymbol{\theta}_\varepsilon} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \quad (5.90)$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\,\mathrm{d}\varepsilon$$

a dále, (podmíněná) entropie širokopásmového šumu (nezávislá na stavu $\boldsymbol{\theta}$) je

$$H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\sum_{i\in\mathbf{S}} q(i|\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon,i})\cdot H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon\|\boldsymbol{\theta}_{\varepsilon,i})$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty H(\boldsymbol{\alpha}_\varepsilon|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$$

Tedy, podle (5.85)

$$H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{h}\int_0^\infty \left[\frac{h(p_\varepsilon)}{1-p_\varepsilon} \mid h\left(\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\right) \mid h(p_\varepsilon)\right]\mathrm{d}\varepsilon \quad (5.91)$$

Pro kapacitu širokopásmového kanálu **K** (B–E, F–D, M–B) pak podle (5.86) platí

$$C(\mathbf{K}) = \sup_{\boldsymbol{\theta}} T(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\theta}) = \max_{\boldsymbol{\theta}}[H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) - H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})] \quad (5.92)$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left\{\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})} - \sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\left[\frac{h(p_\varepsilon)}{1-p_\varepsilon} \mid h\left(\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\right) \mid h(p_\varepsilon)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\,\mathrm{d}\varepsilon - \frac{1}{h}\int_0^\infty\left[\frac{h(p_\varepsilon)}{1-p_\varepsilon} \mid h\left(\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\right) \mid h(p_\varepsilon)\right]\mathrm{d}\varepsilon$$

Jako $\mathcal{W}_\varepsilon$ označíme průměrný počet částic na vstupu úzkopásmové komponenty $\mathcal{K}_\varepsilon$,

$$\mathcal{W}_\varepsilon = \sum_{i\in\mathbf{S}} i\cdot q(i|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \quad (5.93)$$

a pak, podle (5.27), (5.50), (5.70), platí, že

$$\mathcal{W}_\varepsilon \geq \left[0 \mid \frac{2p_\varepsilon^2}{1-p_\varepsilon^2} \mid \frac{p_\varepsilon^2}{1-p_\varepsilon}\right] \quad (5.94)$$

Dále

$$\mathcal{W}' = \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathcal{W}_\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon \quad (5.95)$$

je *celkový počet částic na vstupu* širokopásmového kanálu **K**,

$$W = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\,\mathcal{W}_\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon \quad (5.96)$$

je *celková vstupní energie* a T_W je (efektivní) *teplota kódování* u níž předpokládáme

$$T_W = T_{W_\varepsilon},\ \forall\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

5.2.3 Kapacita Bose–Einsteinova širokopásmového kanálu

Podle vztahů (5.86) platí (viz také [31])

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) = \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\,\mathrm{d}\varepsilon - \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{h(p_\varepsilon)}{1-p_\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon$$

Položíme $\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}\Theta} = x, p_\varepsilon(W) = e^{-x}$ a pro první a druhý integrál máme

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{k}T_W}{h}\int_0^\infty \frac{h(e^{-x})}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ = & \frac{\mathrm{k}T_W}{h}\int_0^\infty x\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{k}T_W}{h}\int_0^\infty \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

při substituci $1-e^{-x} = t$

$$\begin{aligned} = & \frac{-\mathrm{k}T_W}{h}\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{k}T_W}{h}\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt \\ = & 2\cdot\frac{\mathrm{k}T_W}{h}\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t\frac{\pi^2\mathrm{k}\Theta}{3h} \end{aligned}$$

Pro první resp. druhý integrál zřejmě platí

$$\frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(W)}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\pi^2\mathrm{k}T_W}{3h} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{h(p_\varepsilon)}{1-p_\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\pi^2\mathrm{k}T_0}{3h} \tag{5.97}$$

Pro kapacitu širokopásmového B–E kanálu tedy platí

$$\begin{aligned} C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) &= \frac{\pi^2\mathrm{k}}{3h}(T_W - T_0) && (5.98) \\ &= \frac{\pi^2\mathrm{k}T_W}{3h}\cdot\frac{T_W-T_0}{T_W} \triangleq \frac{\pi^2\mathrm{k}T_W}{3h}\cdot\eta_{\max},\ T_W \geq T_0 \end{aligned}$$

Pro *celkový výstupní výkon platí*

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\varepsilon\frac{p_\varepsilon(\mathcal{W})}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})} = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\frac{p_\varepsilon(\mathcal{W})}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\,\mathrm{d}\varepsilon$$

při substitucích $p_\varepsilon(\mathcal{W}) = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}$, $\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W} = x$ a $1-e^{-x} = t$

$$= -\frac{\mathrm{k}^2T_W^2}{h}\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2\mathrm{k}^2T_W^2}{6h} \tag{5.99}$$

Pro *celkový výkon* B–E *šumu* pak zřejmě platí

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\varepsilon\frac{p_\varepsilon}{1-p_\varepsilon} = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\frac{p_\varepsilon}{1-p_\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\pi^2\mathrm{k}^2{T_0}^2}{6h} \tag{5.100}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Ze vztahu výkonů výstupu α', šumu j' a vstupu i',

$$\frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 T_W^2}{6h} = \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}{6h} + W \tag{5.101}$$

určíme efektivní teplotu kódování

$$T_W = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} \tag{5.102}$$

Dosazením T_W do vztahu pro kapacitu (5.98) získáme vztah

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \left(\sqrt{1 + \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - 1 \right) \tag{5.103}$$

Pro $T_0 \to 0$ získáme "*kvantovou aproximaci*" kapacity $C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}})$, nezávislou na výkonu tepelného šumu (zaniká v blízkosti absolutní 0° K)

$$\lim_{T_0 \to 0} C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) = \lim_{T_0 \to 0} \left(\sqrt{\frac{\pi^4 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}{9h^2} + \pi^2 \frac{2W}{3h}} - \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \right) = \pi \sqrt{\frac{2W}{3h}} \tag{5.104}$$

"Klasickou" aproximaci kapacity $C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}})$ získáme pro $T_0 \gg 0$ (resp. $T_0 \to \infty$). Je blízká $\frac{W}{\mathrm{k}T_0}$, Shannonově kapacitě širokopásmového gaussovského kanálu s výkonem tepelného šumu $\mathrm{k}T_0$ a s celkovým průměrným vstupním výkonem W.

Důkaz. Pro $|x| < 1$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \doteq 1 + \frac{1}{2}x$,

$$x = \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2} < 1$$

pro dostatečně velká T_0 ze vztahu pro kapacitu (5.103) získáme

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) \doteq \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \left(\frac{3hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2} \right) = \frac{W}{\mathrm{k} T_0} \tag{5.105}$$

5.2.4 Kapacita Fermi–Diracova širokopásmového kanálu

Podle vztahů (5.86), (5.92) a (5.97) platí (viz také [31]) kapacita!kanálu

$$\begin{aligned} C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}) &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1 - p_\varepsilon(\mathcal{W})} \mathrm{d}\varepsilon - \frac{1}{h} \int_0^\infty h \left(\frac{p_\varepsilon}{1 + p_\varepsilon} \right) \mathrm{d}\varepsilon \qquad (5.106) \\ &= \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} - \frac{1}{h} \int_0^\infty h \left(\frac{p_\varepsilon}{1 + p_\varepsilon} \right) \mathrm{d}\varepsilon \end{aligned}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Následuje série standardních úprav pro druhý integrál,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_0^\infty h\left(\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}\varepsilon \\
= \quad &-\frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\ln p_\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon - \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\ln\frac{1}{1+p_\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon - \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{1}{1+p_\varepsilon}\ln\frac{1}{1+p_\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon
\end{aligned}
$$

při substitucích $p_\varepsilon = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}$, $\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0} = x$

$$
= \quad \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty x\,\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\ln(1+e^{-x})\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty \frac{1}{1+e^{-x}}\ln(1+e^{-x})\,\mathrm{d}x
$$

při substituci $e^{-x} = t$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_1^0 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_1^0 \frac{\ln(t+1)}{t+1}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_1^0 \frac{\ln(t+1)}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \quad -2\cdot\frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi^2\mathrm{k}T_0}{6h}
\end{aligned}
$$

Pro druhý integrál zřejmě platí

$$
\frac{1}{h}\int_0^\infty h\left(\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\pi^2\mathrm{k}T_0}{6h} \tag{5.107}
$$

Dosazením do (5.106) získáme vztah pro kapacitu širokopásmového F–D kanálu, kapacita!kanálu

$$
\begin{aligned}
C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}) &= \frac{\pi^2\mathrm{k}}{3h}\left(T_W - \frac{T_0}{2}\right) && (5.108) \\
\text{a pro } T_W > T_0, \quad C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}) &= C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}})\cdot\frac{2T_W - T_0}{2T_W - 2T_0}
\end{aligned}
$$

Pro celkový výstupní výkon, shodně s (5.99), platí

$$
\frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\,\frac{p_\varepsilon(\mathcal{W})}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\pi^2\mathrm{k}^2T_W^2}{6h} \tag{5.109}
$$

Pro celkový výkon F–D širokopásmového šumu odvozujeme,
při substitucích $\varepsilon = \mathrm{k}T_0x$ a $e^{-x} = t$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\varepsilon\frac{p_\varepsilon}{1+p_\varepsilon} \quad &= \quad \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1+e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}\,\mathrm{d}\varepsilon && (5.110) \\
= \frac{\mathrm{k}^2{T_0}^2}{h}\int_0^\infty x\,\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x \quad &= \quad -\frac{\mathrm{k}^2{T_0}^2}{h}\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{\pi^2\mathrm{k}^2{T_0}^2}{12h}
\end{aligned}
$$

Ze vztahu mezi výstupním, vstupním a šumovým výkonem,

$$
\frac{\pi^2\mathrm{k}^2T_W^2}{6h} = \frac{\pi^2\mathrm{k}^2{T_0}^2}{12h} + W \tag{5.111}
$$

určíme efektivní teplotu kódování kapacita!kanálu

$$T_W = T_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} \tag{5.112}$$

Dosazením T_W do vztahu (5.108) pro kapacitu máme (srovnej s [47])

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - \frac{1}{2} \right) \tag{5.113}$$

Pro $T_0 \to 0$ získáme 'kvantovou' aproximaci kapacity $C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}})$ nezávislou na výkonu tepelného šumu $\mathrm{k}T_0$, shodně s B–E případem (5.104),

$$\lim_{T_0 \to 0} C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}) \;=\; \lim_{T_0 \to 0} \left(\sqrt{\frac{\pi^4 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}{9h^2} \cdot \frac{1}{2} + \pi^2 \frac{2W}{3h}} - \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \cdot \frac{1}{2} \right) = \pi \sqrt{\frac{2W}{3h}} \tag{5.114}$$

'Klasickou' aproximaci kapacity $C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}})$ získáme pro $T_0 \gg 0$;
při použití $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x,\ |x| < 1,\ x = \frac{12hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}$,

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}) \;=\; \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{12hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - \frac{1}{2} \right] \doteq \tag{5.115}$$

$$\doteq \; \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2} \right) - \frac{1}{2} \right] = \tag{5.116}$$

$$= \; \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{6h} \left(\sqrt{2} - 1 \right) + \sqrt{2} \frac{W}{\mathrm{k} T_0} \underset{T_0 \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{6h} \left(\sqrt{2} - 1 \right) \tag{5.117}$$

Podle (7.16) je $\mathcal{W}_\varepsilon \geq \dfrac{2p_\varepsilon^2}{1 - p_\varepsilon^2}$ podmínka pro střední hodnotu počtu vstupních částic úzkopásmové komponenty $\mathcal{K}_\varepsilon$ kanálu $\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}},\ \varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$ a z ní stanovíme podmínku pro celkový vstupní výkon širokopásmového kanálu $\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}$.
Podle vztahu (5.96) platí

$$W \;=\; \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \varepsilon \mathcal{W}_\varepsilon \geq \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})} \varepsilon \frac{2p_\varepsilon^2}{1 - p_\varepsilon^2} \doteq \frac{2}{h} \int_0^\infty \varepsilon \frac{e^{-2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1 - e^{2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}} \, \mathrm{d}\varepsilon$$

při substituci $e^{-2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}} = x$

$$= \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{2h} \cdot \int_0^1 \frac{\ln x}{x - 1} = \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{2h} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

a tedy, v souladu se (5.113) a s podmínkou $T_W \geq T_0$,

$$W \geq \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}{12h} \tag{5.118}$$

5.2.5 Kapacita Maxwell–Boltzmanova širokopásmového kanálu

Opět podle vztahů (5.86), (5.92) a (5.97) platí (viz také [31])

$$
\begin{aligned}
C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}}) &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \frac{h[p_\varepsilon(\mathcal{W})]}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\,\mathrm{d}\varepsilon - \frac{1}{h}\int_0^\infty h(p_\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon \\
&= \frac{\pi^2 \mathrm{k}T_W}{3h} - \frac{1}{h}\int_0^\infty h(p_\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon
\end{aligned}
\tag{5.119}
$$

Dále provádíme standardní úpravy.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_0^\infty h(p_\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^\infty p_\varepsilon \ln p_\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon - \frac{1}{h}\int_0^\infty (1-p_\varepsilon)\ln(1-p_\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon
\end{aligned}
$$

při substituci $p_\varepsilon = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}$, $\varepsilon = \mathrm{k}T_0 x$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty (1-e^{-x})\ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 \\
I_1 &= \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

při per partes $\left\{\begin{array}{ll} u' = e^{-x}, & u = -e^{-x} \\ v = x, & v' = 1 \end{array}\right\}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{k}T_0}{h}, \\
I_2 &= -\frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^\infty (1-e^{-x})\ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

při substituci $1 - e^{-x} = z$

$$
= \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_1^0 \frac{z}{1-z}\ln z\,\mathrm{d}z
$$

při per partes $\left\{\begin{array}{l} u' = \frac{z}{1-z}, \quad u = \int \frac{z}{1-z}\,\mathrm{d}z = -\ln(1-z) + (1-z) \\ v = \ln z, v' = \frac{1}{z} \end{array}\right\}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\left[\ln z \cdot [-\ln(1-z) + (1-z)]\right]_1^0 - \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_1^0 \frac{1}{z}[-\ln(1-z) + (1-z)]\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\ln[0] + \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_1^0 \frac{\ln(1-z)}{z}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\int_0^1 \frac{1-z}{z}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{k}T_0}{h}[\ln 0] + \frac{\pi^2 \mathrm{k}T_0}{6h} - \frac{\mathrm{k}T_0}{h}\ln[0] - \frac{\mathrm{k}T_0}{h}
\end{aligned}
$$

Použitím předchozích mezivýsledků získáváme hodnotu druhého výrazu v (5.119)

$$
H(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathrm{k}T_0}{h} + \frac{\pi^2 \mathrm{k}T_0}{6h} - \frac{\mathrm{k}T_0}{h} = \frac{\pi^2 \mathrm{k}T_0}{6h}
$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}}) &= \frac{\pi^2 \mathrm{k}}{3h}\left(T_W - \frac{T_0}{2}\right) &(5.120)\\
\text{a pro } T_W > T_0, \quad C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}}) &= C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}})\cdot\frac{2T_W - T_0}{2T_W - 2T_0}
\end{aligned}
$$

je kapacita M–B širokopásmového kanálu, formálně shodná s F–D případem.

Celkový výstupní výkon je určen shodně s případy B–E a F–D širokopásmových kanálů, (5.99) a (5.109) kapacita!kanálu

$$\frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\,\frac{p_\varepsilon(\mathcal{W})}{1-p_\varepsilon(\mathcal{W})}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_W}^2}{6h} \tag{5.121}$$

Pro celkový výkon širokopásmového M–B šumu odvozujeme zcela obdobně s předchozími případy, B–E a F–D,

při substitucích $\varepsilon = \mathrm{k}T_0 x$ a $e^{-x} = t$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{\varepsilon\in\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})}\varepsilon\,p_\varepsilon &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\,p_\varepsilon\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon\,e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x &(5.122)\\
&= -\frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}[t\ln t - t]_0^1 = \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}
\end{aligned}
$$

Ze vztahu pro výstupní, vstupní a šumový výkon,

$$\frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 T_W^2}{6h} = \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h} + W \tag{5.123}$$

opět určujeme efektivní teplotu kódování

$$T_W = T_0\frac{\sqrt{6}}{\pi}\cdot\sqrt{1+\frac{hW}{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}} \tag{5.124}$$

Dosazením T_W do vztahu (5.120) pro kapacitu máme

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k}T_0}{3h}\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{1+\frac{hW}{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - \frac{1}{2}\right) \tag{5.125}$$

Pro $T_0 \to 0$ získáme "kvantovou" aproximaci $C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}})$ pro nízké ('neklasické') teploty, nezávislou na výkonu tepelného šumu, $\mathrm{k}T_0$, (viz B–E a F–D případy),

$$
\begin{aligned}
\lim_{T_0\to 0} C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}}) &= \lim_{T_0\to 0}\left(\sqrt{\frac{2\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}{3h^2} + \pi^2\frac{2W}{3h}} - \frac{\pi^2 \mathrm{k}T_0}{6h}\right) &(5.126)\\
&= \pi\sqrt{\frac{2W}{3h}}
\end{aligned}
$$

'Klasickou' aproximaci kapacity $C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}})$ získáme pro $T_0 \gg 0$ resp. $T_0 \to \infty$; při použití $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}\,x$ pro $|x| < 1,\ x = \frac{hW}{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}$,

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}}) \doteq \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h}\left[\frac{\sqrt{6}}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{hW}{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}\right) - \frac{1}{2}\right] = \tag{5.127}$$

$$= \frac{\pi \mathrm{k} T_0}{3h}\left(\sqrt{6} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\pi\,\frac{W}{\mathrm{k} T_0} \xrightarrow[T_0 \to \infty]{} \frac{\pi \mathrm{k} T_0}{3h}\left(\sqrt{6} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.128}$$

Podmínka pro velikost vstupní energie M–B širokopásmového kanálu (za jednotku času) podle vztahů (5.94) a (5.96) je

$$W \geq \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon \cdot \frac{p_\varepsilon^2}{1 - p_\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varepsilon \cdot \frac{e^{-2\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}}\,\mathrm{d}\varepsilon$$

při substituci $e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}} = x$

$$= \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}\int_1^0 \frac{x}{1-x}\ln x\,\mathrm{d}x$$

při per partes $\left\{\begin{array}{l} u' = \frac{x}{1-x}, \quad u = (1-x) - \ln(1-x) \\ v\ = \ln x, v' = \frac{1}{x} \end{array}\right\}$

$$= \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}\left\{[\ln x[(1-x) - \ln(1-x)]]_1^0 - \int_1^0 \left[\frac{1-x}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}\right]\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}\left\{-1 + \int_1^0 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right\} = \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$$

a tedy, v souladu se (7.47) a s $T_W \geq T_0$,

$$W \geq \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) \tag{5.129}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

6. Tabulka informačních kapacit B–E, F–D, M–B fyzikálních systémů

Systém	Informační kapacita: úzkopásmový kanál	Informační kapacita: širokopásmový kanál
B–E	$\frac{h[p(\mathcal{W})]}{1-p(\mathcal{W})} - \frac{h(p)}{1-p}$ pro $W \geq 0$	$\frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - 1 \right)$ pro $W \geq 0$
		a tak
	0 pro $T_W \to T_0$	$\frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} \cdot \eta_{\max}$
		$\pi \cdot \sqrt{\frac{2W}{3h}}$ pro $T_0 \to 0$
		$\frac{W}{\mathrm{k} T_0}$ pro $T_0 \to \infty$
F–D	$\frac{h[p(\mathcal{W})]}{1-p(\mathcal{W})} - h\left(\frac{p}{1+p}\right)$ pro $W \geq \frac{2p^2}{1-p^2}$	$\frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{6hW}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - \frac{1}{2} \right)$ pro $W \geq \frac{\pi^2 \mathrm{k} {T_0}^2}{12h}$
		a tak
	$\frac{h(p)}{1-p} + \frac{p}{1+p} \cdot \ln p - \ln(1+p)$ pro $T_W \to T_0$	$\frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h} \cdot (1 + \eta_{\max})$
		$\pi \cdot \sqrt{\frac{2W}{3h}}$ pro $T_0 \to 0$
		$\frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{6h} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$ pro $T_0 \to \infty$
M–B	$\frac{h[p(\mathcal{W})]}{1-p(\mathcal{W})} - h(p)$ pro $W \geq \frac{p^2}{1-p}$	$\frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \sqrt{1 + \frac{hW}{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - \frac{1}{2} \right)$ pro $W \geq \frac{\mathrm{k}^2 {T_0}^2}{h} \cdot \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right.$
		a tak
	$\frac{p}{1-p} \cdot h(p)$ pro $T_W \to T_0$	$\frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h} \cdot (1 + \eta_{\max})$
		$\pi \cdot \sqrt{\frac{2W}{3h}}$ pro $T_0 \to 0$
		$\frac{\pi \mathrm{k} T_0}{3h} \cdot \left(\sqrt{6} - \frac{\pi}{2}\right)$ pro $T_0 \to \infty$

$h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x),\ x \in (0, 1\rangle$

W je průměrná energie kódování vstupních zpráv

$p = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}}$, $p(\mathcal{W}) = e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}}$, $\varepsilon = h\nu$ je energie částic, ν je frekvence (pásmo)

T_0 je teplota šumu (měření) v kanále, T_W je efektivní teplota k**u**dování vstupních zpráv

$\eta_{\max} = \frac{T_W - T_0}{T_W}$ je maximální tepelná účinnost, $T_W \geq T_0$, h je Planckova konstanta

7. Elementárnost Carnotova cyklu

Uvažujme dva Carnotovy cykly. Cyklus $\mathcal{C}_1$ s teply ΔQ_1, ΔQ_2 a s pracovními teplotami T_1, T_2, $T_1 > T_2$ a cyklus $\mathcal{C}_2$ s teply ΔQ_3, ΔQ_4 a s teplotami T_3, T_4, $T_3 > T_4$. Zaveďme označení $T_1 \triangleq \Theta_1$, $T_2 \triangleq \Theta_2$, $T_4 \triangleq \Theta_3$. Současně položme $T_2 = T_3$. Oba cykly mají tedy splečnou teplotu Θ_2. Výrazy $\Delta Q_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$ označují tedy absolutní hodnoty těmito cykly přímo vyměněných tepel.
Podle II. hlavní věty termodynamické platí

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2}, \quad \frac{\Delta Q_3}{T_3} = \frac{\Delta Q_4}{T_4} \tag{7.1}$$

Pro cyklus s pracovními teplotami $T_1 > T_4$ a s teply ΔQ_1 a ΔQ_4 musí platit

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_4}{T_4} \tag{7.2}$$

Vznikne-li tento cyklus sjednocením cyklů $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ do složeného cyklu $\mathcal{C}_{1,2}$ s pracovními teplotami T_1 a T_4, platí

$$\frac{\Delta Q_2}{T_2} = \frac{\Delta Q_4}{T_4} \quad \text{ale také} \quad \frac{\Delta Q_4}{T_4} = \frac{\Delta Q_3}{T_3} \tag{7.3}$$

Tedy

$$\frac{\Delta Q_2}{T_2} = \frac{\Delta Q_3}{T_3} \tag{7.4}$$

a protože $T_2 = T_3$, musí platit, že

$$\Delta Q_2 = \Delta Q_3 \tag{7.5}$$

Potom, při našem označení,

$$\frac{\Delta Q_1}{\Theta_1} = \frac{\Delta Q_2}{\Theta_2} = \left[\frac{\Delta Q_3}{\Theta_2}\right] = \frac{\Delta Q_4}{\Theta_3} \tag{7.6}$$

Tedy celé 'odpadní' teplo ΔQ_2 cyklu $\mathcal{C}_1$ je, ve složeném cyklu $\mathcal{C}_{1,2}$, vstupním teplem ΔQ_3 cyklu $\mathcal{C}_2$ (při 'vnitřní' teplotě $\Theta_2 \equiv T_2 \equiv T_3$ složeného cyklu).
Položme

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}, \ \eta_{\max 1} = 1 - \beta_1 \\ \beta_2 &= \frac{T_4}{T_3} = \frac{T_4}{T_2} = \frac{\Theta_3}{\Theta_2}, \ \eta_{\max 2} = 1 - \beta_2 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Pro složený cyklus $\mathcal{C}_{1,2}$ platí

$$\beta = \frac{\Theta_3}{T_1} = \frac{\Theta_3}{\Theta_1} = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} \cdot \frac{\Theta_3}{\Theta_2} = \beta_1\beta_2, \quad \eta_{\max 1} = 1 - \beta_1\beta_2 = 1 - \beta \tag{7.8}$$

Hejna, B. Informační systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Uvažujme nyní tepelný cyklus $\mathcal{C}_{1,n}$ s pracovními teplotami T_W a T_0, $T_W > T_0$ vzniklý složením (sjednocením) tepelných (Carnotových) cyklů

$$\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2,\ ...,\ \mathcal{C}_{k-1},\ \mathcal{C}_k,\ ...,\ \mathcal{C}_{n-1},\ \mathcal{C}_n$$

V těchto cyklech platí:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1: \quad T_W &= \Theta_{W1},\ \Delta Q_W = \Delta Q_{W1},\ \Delta A_1 = \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{01} \\
\mathcal{C}_2: \quad \Theta_{01} &= \Theta_{W2},\ \Delta Q_{01} = \Delta Q_{W2},\ \Delta A_2 = \Delta Q_{W2} - \Delta Q_{02} \\
\mathcal{C}_3: \quad \Theta_{02} &= \Theta_{W3},\ \Delta Q_{02} = \Delta Q_{W3},\ \Delta A_3 = \Delta Q_{W3} - \Delta Q_{03} \\
..... \quad ... & .... \\
\mathcal{C}_{k-1}: \quad \Theta_{0k-2} &= \Theta_{Wk-1},\ \Delta Q_{0k-2} = \Delta Q_{Wk-1},\ \Delta A_{k-1} = \Delta Q_{Wk-1} - \Delta Q_{0k-1} \\
\mathcal{C}_k: \quad \Theta_{0k-1} &= \Theta_{Wk},\ \Delta Q_{0k-1} = \Delta Q_{Wk},\ \Delta A_k = \Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k} \\
..... \quad ... & .... \\
\mathcal{C}_{n-1}: \quad \Theta_{0n-2} &= \Theta_{Wn-1},\ \Delta Q_{0n-2} = \Delta Q_{Wn-1},\ \Delta A_{n-1} = \Delta Q_{Wn-1} - \Delta Q_{0n-1} \\
\mathcal{C}_n: \quad \Theta_{0n-1} &= \Theta_{Wn},\ \Delta Q_{0n-1} = \Delta Q_{Wn},\ \Delta A_n = \Delta Q_{Wn} - \Delta Q_{0n} \\
\Theta_{0n} &= T_0,\ \Delta Q_{0n} = \Delta Q_0
\end{aligned} \tag{7.9}$$

V cyklu $\mathcal{C}_{1,n}$ má platit

$$\begin{aligned}
\Delta A &= \Delta Q_W - \Delta Q_0, \text{ kde} \\
\Delta Q_W &\equiv \Delta Q_{W1},\ T_W \equiv \Theta_{W1} \\
\Delta Q_0 &\equiv \Delta Q_{0n},\ T_0 \equiv \Theta_{0n}
\end{aligned} \tag{7.10}$$

Skutečně

$$\begin{aligned}
\Delta A &= \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} (\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}) \\
&= (\Delta Q_{W1} - \Delta Q_{01}) + (\Delta Q_{W2} - \Delta Q_{02}) + \ .. \\
&... +(\Delta Q_{Wn-1} - \Delta Q_{0n-1}) + (\Delta Q_{Wn} - \Delta Q_{0n}) \\
&= (\Delta Q_{W1} - \Delta Q_{01}) + (\Delta Q_{01} - \Delta Q_{02}) + \ .. \\
&... +(\Delta Q_{0n-2} - \Delta Q_{0n-1}) + (\Delta Q_{0n-1} - \Delta Q_{0n}) = \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{0n} \\
&= \Delta Q_W - \Delta Q_0
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Součet prací ΔA_k, $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$ je prací celkového, sjednoceného cyklu $\mathcal{C}_{1,n}$,

$$\mathcal{C}_{1,n} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k,\ \mathcal{C}_{1,n} \triangleq \mathcal{C} \tag{7.12}$$

V tomto sjednocení každé 2 po sobě jdoucí cykly $\mathcal{C}_k$, $\mathcal{C}_{k+1}$ 'komunikují' přes odpadní teplo ΔQ_{0k} tak, že $\Delta Q_{0k} = \Delta Q_{Wk+1}$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ n-1$. Pro účinnost k-tého cyklu $\mathcal{C}_k$ platí

$$\eta_{\max k} = 1 - \beta_k = 1 - \frac{Q_{0k}}{Q_{Wk}} = \frac{\Theta_{Wk} - \Theta_{0k}}{\Theta_{Wk}} \triangleq \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}},\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n \tag{7.13}$$

Celkový cyklus $\mathcal{C}_{1,n} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{C}_k$ přijímá pouze teplo Q_W při T_W a vydává odpadní teplo ΔQ_0 při teplotě T_0 a tedy jeho účinnost

$$\eta_{\max} = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{\Delta Q_W} = \frac{T_W - T_0}{T_W} = 1 - \frac{T_0}{T_W} = 1 - \beta,\ \beta = \frac{T_0}{T_W} \tag{7.14}$$

Cyklus $\mathcal{C}_{1,n}$ je tak ekvivalentní jednomu Carnotovu cyklu $\mathcal{C}$ jehož pracovní teploty jsou právě pracovními (extremálními) teplotami T_W a T_0.

Prozkoumejme vztah mezi účinnostmi $\eta_{\max}$ a $\eta_{\max k}$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$.

$$\begin{array}{rcl}
\eta_{\max 1} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{01}}{\Theta_{W1}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{W2}}{\Delta Q_{W1}} = 1 - \beta_1,\ \beta_1 = \dfrac{\Theta_{W2}}{T_W} \\
\eta_{\max 2} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{02}}{\Theta_{W2}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{W2}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{W3}}{\Delta Q_{W2}} = 1 - \beta_2,\ \beta_2 = \dfrac{\Theta_{W3}}{\Theta_{W2}} \\
\eta_{\max 3} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{03}}{\Theta_{W3}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{W3}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{W4}}{\Delta Q_{W3}} = 1 - \beta_3,\ \beta_3 = \dfrac{\Theta_{W4}}{\Theta_{W3}} \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{\max k-1} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{0k-1}}{\Theta_{Wk-1}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{0k-1}}{\Delta Q_{Wk-1}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{Wk}}{\Delta Q_{Wk-1}} = 1 - \beta_{k-1},\ \beta_{k-1} = \dfrac{\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk-1}} \\
\eta_{\max k} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{0k}}{\Theta_{Wk}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{Wk+1}}{\Delta Q_{Wk}} = 1 - \beta_k,\ \beta_k = \dfrac{\Theta_{Wk+1}}{\Theta_{Wk}} \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{\max n-1} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{0n-1}}{\Theta_{Wn-1}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{0n-1}}{\Delta Q_{Wn-1}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{Wn}}{\Delta Q_{Wn-1}} = 1 - \beta_{n-1},\ \beta_{n-1} = \dfrac{\Theta_{Wn}}{\Theta_{Wn-1}} \\
\eta_{\max n} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{0n}}{\Theta_{Wn}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_{0n}}{\Delta Q_{Wn}} = 1 - \dfrac{\Delta Q_0}{\Delta Q_{Wn}} = 1 - \beta_n,\ \beta_n = \dfrac{T_0}{\Theta_{Wn}} \\
\eta_{\max} & = & 1 - \dfrac{\Theta_{0n}}{\Theta_{W1}} = 1 - \dfrac{\Theta_{0n}}{T_W} = 1 - \dfrac{T_0}{T_W} = 1 - \beta
\end{array} \tag{7.15}$$

Je zřejmé, že platí

$$\beta = \frac{\Theta_{0n}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Theta_{W2}}{T_W} \cdot \frac{\Theta_{W3}}{\Theta_{W2}} \cdot \frac{\Theta_{W4}}{\Theta_{W3}} \cdot ... \cdot \frac{\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk-1}} \cdot \frac{\Theta_{Wk+1}}{\Theta_{Wk}} \cdot ... \cdot \frac{\Theta_{Wn}}{\Theta_{Wn-1}} \cdot \frac{T_0}{\Theta_{Wn}} = \frac{T_0}{T_W} \tag{7.16}$$

Tedy pro transformační poměr β cyklu $\mathcal{C}_{1,n}$ platí

$$\beta = \prod_{k=1}^{n} \beta_k \tag{7.17}$$

a pro účinnost $\eta_{\max}$ cyklu $\mathcal{C}_{1,n}$ platí

$$\eta_{\max} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \beta_k = 1 - \frac{T_0}{T_W} \tag{7.18}$$

Pro práci ΔA_k každého 'elementárního' cyklu $\mathcal{C}_k,\ k \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$, platí

$$\Delta A_k = \Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k} = \frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}} \cdot \Delta Q_{Wk} \tag{7.19}$$

a tedy

$$\Delta A_k = \frac{\Theta_{Wk} - \Theta_{0k}}{\Theta_{Wk}} \cdot \Delta Q_{Wk} = \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \cdot \Delta Q_{Wk} = \Delta Q_{Wk} \cdot \eta_{\max k}$$

kde $\Delta\Theta_{Wk} > 0$ a $\Delta\Theta_{Wk} \in < 0, T_W - T_0 >$, je rozdíl pracovních teplot k-tého elementárního cyklu.
Celkový cyklus $\mathcal{C}_{1,n}$ je posledním cyklem z konečné posloupnosti cyklů

$$\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_{1,2},\ \mathcal{C}_{1,3},\ ...,\ \mathcal{C}_{1,n} \tag{7.20}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \bigcup_{k=1}^{1} \mathcal{C}_k \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{C}_{1,1} \qquad (7.21)\\
\mathcal{C}_{1,2} &= \bigcup_{k=1}^{2} \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2\\
\mathcal{C}_{1,3} &= \bigcup_{k=1}^{3} \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_1 \bigcup \left(\bigcup_{k=2}^{3} \mathcal{C}_k\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{2} \mathcal{C}_k\right) \bigcup \mathcal{C}_3\\
\dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathcal{C}_{1,n} &= \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathcal{C}_k = \mathcal{C}_1 \bigcup \left(\bigcup_{k=2}^{n} \mathcal{C}_k\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\right) \bigcup \mathcal{C}_n = \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Jednotlivé členy posloupnosti cyklů $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_{1,2}, \mathcal{C}_{1,3},\ ...,\ \mathcal{C}_{1,k},\ ...,\ \mathcal{C}_{1,n}$ postupně přeměňují původní celkové vstupní teplo $\Delta Q_{W1} \stackrel{\triangle}{=} \Delta Q_W$ v mechanické práce

$$\Delta A_1 \stackrel{\triangle}{=} \Delta A_{1,1},\ \Delta A_{1,2},\ \Delta A_{1,3},\ ...\ , \Delta A_{1,k},\ ...,\ \Delta A_{1,n} = \Delta A \tag{7.22}$$

'Odpadní' tepla těchto cyklů tvoří posloupnost

$$\Delta Q_{01},\ \Delta Q_{02},\ \Delta Q_{03},\ ...,\ \Delta Q_{0k},\ ...,\ \Delta Q_{0n} = \Delta Q_0 \tag{7.23}$$

Platí

$$\begin{aligned}
\Delta A_{1,1} &= \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{01} = \Delta Q_W - \Delta Q_{01} = \Delta A_1 \qquad (7.24)\\
\Delta A_{1,2} &= \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{02} = \Delta Q_W - \Delta Q_{02}\\
\Delta A_{1,3} &= \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{03} = \Delta Q_W - \Delta Q_{03}\\
\dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta A_{1,k} &= \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{0k} = \Delta Q_W - \Delta Q_{0k}\\
\dots\dots\dots & \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta A_{1,n} &= \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{0n} = \Delta Q_W - \Delta Q_{0n} = \Delta Q_W - \Delta Q_0 = \Delta A
\end{aligned}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Pro účinnosti cyklů (7.20) platí

$$\begin{aligned}
\eta_{\max 1} &= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_{01}}{\Delta Q_W} = 1 - \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_W} = 1 - \beta_1,\ \beta_1 = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_W} = \frac{\Theta_{01}}{T_W} \qquad (7.25)\\
\eta_{\max 1,1} &\triangleq \eta_{\max 1},\ \beta_1 \triangleq \beta_{1,1}\\
\eta_{\max 1,2} &= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_{02}}{\Delta Q_W} = 1 - \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_W} = 1 - \beta_{1,2},\ \beta_{1,2} = \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_W} = \frac{\Theta_{02}}{T_W}\\
\eta_{\max 1,3} &= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_{03}}{\Delta Q_W} = 1 - \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_W} = 1 - \beta_{1,3},\ \beta_{1,3} = \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_W} = \frac{\Theta_{03}}{T_W}\\
\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{\max 1,k} &= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_W} = 1 - \frac{\Delta Q_{0k}}{\Delta Q_W} = 1 - \beta_{1,k},\ \beta_{1,k} = \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_W} = \frac{\Theta_{0k}}{T_W}\\
\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{\max 1,n} &= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_{0n}}{\Delta Q_W} = 1 - \frac{\Delta Q_{0n}}{\Delta Q_W} = 1 - \beta_{1,n},\ \beta_{1,n} = \frac{\Delta Q_{0n}}{\Delta Q_W} = \frac{\Theta_{0n}}{T_W}\\
\eta_{\max 1,n} &= \eta_{\max},\ \beta_{1,n} = \beta = \frac{T_0}{T_W} \ \text{neboť}\ \ \Theta_{0n} = T_0
\end{aligned}$$

Pro $l \le r,\ l, r \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ zřejmě platí

$$\eta_{\max l,r} = \frac{\Delta Q_{Wl} - \Delta Q_{0r}}{\Delta Q_{Wl}} = 1 - \frac{\Delta Q_{0r}}{\Delta Q_{Wl}} = 1 - \beta_{l,r},\ \beta_{l,r} = \frac{\Delta Q_{0r}}{\Delta Q_{Wl}} = \frac{\Theta_{0r}}{\Theta_{Wl}} \qquad (7.26)$$

Pro transformační poměry složených cyklů platí

$$\begin{aligned}
\beta_{1,1} &= \frac{\Theta_{01}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} = \beta_1 \quad \left[= \frac{\Theta_{01}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Theta_{W2}}{\Theta_{W1}}\right] \qquad (7.27)\\
\beta_{1,2} &= \frac{\Theta_{02}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{W2}} = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{01}} = \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{W1}}\\
&= \beta_1 \beta_2\\
\beta_{1,3} &= \frac{\Theta_{03}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{W2}} \cdot \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{W3}} = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{01}} \cdot \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{02}} = \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{W1}}\\
&= \beta_1 \beta_2 \beta_3\\
\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta_{1,k} &= \frac{\Theta_{0k}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{W2}} \cdot \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{W3}} \cdot\ ...\ \cdot \frac{\Delta Q_{0k-1}}{\Delta Q_{Wk-1}} \cdot \frac{\Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}}\\
&= \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{01}} \cdot \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{02}} \cdot\ ...\ \cdot \frac{\Delta Q_{0k-1}}{\Delta Q_{0k-2}} \cdot \frac{\Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{0k-1}} = \frac{\Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{W1}}\\
&= \beta_1 \beta_2 \beta_3\ ...\ \beta_{k-1} \beta_k\\
\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta_{1,n} &= \frac{\Theta_{0n}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{W2}} \cdot \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{W3}} \cdot\ ...\ \cdot \frac{\Delta Q_{0n-1}}{\Delta Q_{Wn-1}} \cdot \frac{\Delta Q_{0n}}{\Delta Q_{Wn}}\\
&= \frac{\Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{02}}{\Delta Q_{01}} \cdot \frac{\Delta Q_{03}}{\Delta Q_{02}} \cdot\ ...\ \cdot \frac{\Delta Q_{0n-1}}{\Delta Q_{0n-2}} \cdot \frac{\Delta Q_{0n}}{\Delta Q_{0n-1}} = \frac{\Delta Q_{0n}}{\Delta Q_{W1}}\\
&= \beta_1 \beta_2 \beta_3\ ...\ \beta_{n-1} \beta_n = \beta
\end{aligned}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Tedy lze psát

$$\begin{aligned}\beta_{1,l} &= \prod_{k=1}^{l} \beta_k = \frac{\Theta_{0l}}{T_W},\ l \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\} \\ \beta_{l,r} &= \prod_{k=l}^{r} \beta_k = \frac{\Theta_{0r}}{\Theta_{Wl}},\ l \leq r,\ l,r \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}\end{aligned} \tag{7.28}$$

Při označení

$$\beta_{k,k} \stackrel{\triangle}{=} \beta_k,\ \eta_{\max k,k} \stackrel{\triangle}{=} \eta_{\max k},\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n \tag{7.29}$$

lze psát matice účinností a transformačních poměrů

$$\mathbf{N} = \begin{Vmatrix} \eta_{\max 1,1} & \eta_{\max 1,2} & \eta_{\max 1,3} & \cdots & \cdots & \eta_{\max 1,n} \\ 0 & \eta_{\max 2,2} & \eta_{\max 2,3} & \cdots & \cdots & \eta_{\max 2,n} \\ 0 & 0 & \eta_{\max 3,3} & \cdots & \cdots & \eta_{\max 3,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \eta_{\max .,.} \\ 0 & \cdots & 0 & \eta_{\max k,k} & \cdots & \eta_{\max k,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{\max .,.} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \eta_{\max n-1,n-1} & \eta_{\max n-1},n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \eta_{\max n,n} \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \cdots & \cdots & \beta_{1,n} \\ 0 & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \cdots & \cdots & \beta_{2,n} \\ 0 & 0 & \beta_{3,3} & \cdots & \cdots & \beta_{3,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{.,.} \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{k,k} & \cdots & \beta_{k,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{.,.} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n,n} \end{Vmatrix}$$

$$\beta_{1,n} = \beta = \prod_{k=1}^{n} \beta_{k,k},\ \eta_{\max 1,n} = \eta_{\max} \tag{7.30}$$

Nechť symbol $\mathbf{E}*$ označuje horní trojúhelníkovou čtvercovou matici řádu n,

$$\mathbf{E}* = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

potom lze pro matice $\mathbf{N}$ a $\mathbf{B}$ psát

$$\mathbf{N} = \mathbf{E}* - \mathbf{B} \tag{7.31}$$

Protože pro všechna n platí

$$\eta_{\max}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\mathcal{C}_k\right) \stackrel{\triangle}{=} \eta_{\max} = \eta_{\max 1,n} = 1-\beta_{1,n} = 1-\prod_{k=1}^{n}\beta_{k,k} = 1-\beta \tag{7.32}$$

lze psát

$$\eta_{\max} = \det \mathbf{E}* - \det \mathbf{B} = \det \mathbf{E} - \det \mathbf{B} \tag{7.33}$$

kde $\mathbf{E}$ je čtvercová jednotková matice řádu n.
Protože

$$\begin{aligned} \eta_{\max} &= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{\Delta Q_W} = \frac{\Delta Q_{W1} - \Delta Q_{0n}}{\Delta Q_{W1}} = \eta_{\max 1,n} \\ \eta_{\max k,k} &= \frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}} = \frac{\Theta_{Wk} - \Theta_{0k}}{\Theta_{Wk}} = \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}},\ k = 1,\ 2,\ ..., n \end{aligned} \tag{7.34}$$

pro celkovou práci ΔA lze psát

$$\begin{aligned} \Delta A &= \Delta Q_W - \Delta Q_0 = \Delta Q_{W1} - \Delta Q_{0n} \\ &= \frac{\Delta Q_{W1} - \Delta Q_{0n}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \Delta Q_{W1} = \Delta Q_{W1} \cdot \eta_{\max} \\ \Delta A &= \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} (\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}} \Delta Q_{Wk} = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{Wk} \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{Wk}\eta_{\max k,k} \end{aligned} \tag{7.35}$$

Potom

$$\begin{aligned} \Delta Q_{W1} \cdot \eta_{\max} &= \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{Wk}\eta_{\max k,k} \\ \eta_{\max} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Delta Q_{W1}}\eta_{\max k,k} \\ &= \eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Delta Q_{W1}}\eta_{\max k,k} \\ &= \eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\Delta Q_{0k-1}}{\Delta Q_{W1}}\eta_{\max k,k} \\ &= \eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} \beta_{1,k-1}\eta_{\max k,k} \end{aligned} \tag{7.36}$$

Předchozí výsledek dále upravíme,

$$\eta_{\max} = \eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} \eta_{\max k,k} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} \tag{7.38}$$

$$
\begin{aligned}
&= \eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} (1-\beta_{k,k}) \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} \\
&= (1-\beta_{1,1}) + \sum_{k=2}^{n} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} - \sum_{k=2}^{n} \beta_{k,k} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j}
\end{aligned}
$$

Proveďme kontrolu výsledku (7.36).

Pro $n = 1$ (7.39)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{1} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} &\overset{\text{Def}}{=} 0, \quad \sum_{k=2}^{1} \beta_{k,k} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} \overset{\text{Def}}{=} 0 \\
\eta_{\max} &= \eta_{\max 1,1}
\end{aligned}
$$

pro $n = 2$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{2} \eta_{\max k,k} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} &= \beta_{1,1} \cdot \eta_{\max 2,2} = \beta_{1,1} \cdot (1-\beta_{2,2}) \\
\eta_{\max} &= (1-\beta_{1,1}) + \beta_{1,1} \cdot (1-\beta_{2,2}) \\
&= 1 + \beta_{1,1} \cdot [-1 + (1-\beta_{2,2})] = 1 - \beta_{1,1}\beta_{2,2} \\
&= 1 - \beta_{1,2} = \eta_{\max 1,2}
\end{aligned}
$$

pro $n = 3$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{3} \eta_{\max k,k} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} &= \prod_{j=1}^{1} \beta_{j,j} \eta_{\max 2,2} + \prod_{j=1}^{2} \beta_{j,j} \eta_{\max 3,3} \\
&= \beta_{1,1} \cdot (1-\beta_{2,2}) + \beta_{1,1}\beta_{2,2} \cdot (1-\beta_{3,3}) \\
&= \beta_{1,1} - \beta_{1,1}\beta_{1,2} + \beta_{1,1}\beta_{1,2} - \beta_{1,1}\beta_{1,2}\beta_{3,3} \\
\eta_{\max} &= (1-\beta_{1,1}) + \beta_{1,1} - \beta_{1,1}\beta_{2,2} + \beta_{1,1}\beta_{2,2} - \beta_{1,1}\beta_{2,2}\beta_{3,3} \\
&= 1 - \beta_{1,3} = \eta_{\max 1,3} \\
\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{k=2}^{n} \eta_{\max k,k} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{j,j} &= \prod_{j=1}^{1} \beta_{j,j} \eta_{\max 2,2} + \prod_{j=1}^{2} \beta_{j,j} \eta_{\max n,n} \\
\eta_{\max} &= 1 - \beta_{1,n} = \eta_{\max 1,n}
\end{aligned}
$$

Celkový cyklus $\mathcal{C}$, který je výše uvedeným sjednocením (7.21) 'elementárních' cyklů $\mathcal{C}_k$ a jehož extremální teploty jsou T_W a T_0, $T_W > T_0 > 0$, je tedy z hlediskska účinnosti ekvivalentní jedinému tepelnému (Carnotovu) cyklu pouze se dvěma teplotami T_W a T_0.

Pro teplotně redukovaná tepla (termodynamické entropie) musí platit

$$
\frac{\Delta Q_W}{T_W} \equiv \frac{\Delta Q_{W1}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Delta Q_{W2}}{\Theta_{W2}} = \ \ldots \ = \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \ \ldots \ = \frac{\Delta Q_{Wn-1}}{\Theta_{Wn-1}} = \frac{\Delta Q_{Wn}}{\Theta_{Wn}} \tag{7.40}
$$

kde $\dfrac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \text{konst.}, \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$; dále

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta Q_W}{T_W} \equiv \frac{\Delta Q_{W1}}{\Theta_{W1}} &= \frac{\Delta Q_{01}}{\Theta_{01}} = \frac{\Delta Q_{W2}}{\Theta_{W2}} \\
\frac{\Delta Q_{W2}}{\Theta_{W2}} &= \frac{\Delta Q_{02}}{\Theta_{02}} = \frac{\Delta Q_{W3}}{\Theta_{W3}} \\
\cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} &= \frac{\Delta Q_{0k}}{\Theta_{0k}} = \frac{\Delta Q_{Wk+1}}{\Theta_{Wk+1}} \\
\cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\Delta Q_{Wn-1}}{\Theta_{Wn-1}} &= \frac{\Delta Q_{0n-1}}{\Theta_{0n-1}} = \frac{\Delta Q_{Wn}}{\Theta_{Wn}} \\
\frac{\Delta Q_{Wn}}{\Theta_{Wn}} &= \frac{\Delta Q_{0n}}{\Theta_{0n}} \equiv \frac{\Delta Q_0}{\Theta_0}
\end{aligned}
\tag{7.41}
$$

Pro teplotně redukované práce podle (7.40) platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta A_1}{\Theta_{W1}} &= \frac{\Delta Q_{W1} - \Delta Q_{01}}{\Theta_{W1}} = \frac{\Delta Q_{W1} - \Delta Q_{01}}{\Delta Q_{W1}} \cdot \frac{\Delta Q_{W1}}{\Theta_{W1}} \\
&= \frac{\Delta Q_{W1}}{\Theta_{W1}} \cdot \eta_{\max 1,1} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \eta_{\max 1,1} \quad \left[= \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \frac{\Delta \Theta_{W1}}{\Theta_{W1}}\right] \\
\frac{\Delta A_2}{\Theta_{W2}} &= \frac{\Delta Q_{W2} - \Delta Q_{02}}{\Theta_{W2}} = \frac{\Delta Q_{W2} - \Delta Q_{02}}{\Delta Q_{W2}} \cdot \frac{\Delta Q_{W2}}{\Theta_{W2}} \\
&= \frac{\Delta Q_{W2}}{\Theta_{W2}} \cdot \eta_{\max 2,2} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \eta_{\max 2,2} \quad \left[= \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \frac{\Delta \Theta_{W2}}{\Theta_{W2}}\right] \\
\cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\Delta A_k}{\Theta_{Wk}} &= \frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Theta_{Wk}} = \frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}} \cdot \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \\
&= \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \cdot \eta_{\max k,k} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \eta_{\max k,k} \quad \left[= \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \frac{\Delta \Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}}\right] \\
\cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\Delta A_{n-1}}{\Theta_{Wn-1}} &= \frac{\Delta Q_{Wn-1} - \Delta Q_{0n-1}}{\Theta_{Wn-1}} = \frac{\Delta Q_{Wn-1} - \Delta Q_{0n-1}}{\Delta Q_{Wn-1}} \cdot \frac{\Delta Q_{Wn-1}}{\Theta_{Wn-1}} \\
&= \frac{\Delta Q_{Wn-1}}{\Theta_{Wn-1}} \cdot \eta_{\max n-1,n-1} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \eta_{\max n-1,n-1} \quad \left[= \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \frac{\Delta \Theta_{Wn-1}}{\Theta_{Wn-1}}\right] \\
\frac{\Delta A_n}{\Theta_{Wn}} &= \frac{\Delta Q_{Wn} - \Delta Q_{0n}}{\Theta_{Wn}} = \frac{\Delta Q_{Wn} - \Delta Q_{0n}}{\Delta Q_{Wn}} \cdot \frac{\Delta Q_{Wn}}{\Theta_{Wn}} \\
&= \frac{\Delta Q_{Wn}}{\Theta_{Wn}} \cdot \eta_{\max n,n} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \eta_{\max n,n} \quad \left[= \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \frac{\Delta \Theta_{Wn}}{\Theta_{Wn}}\right] \\
\frac{\Delta A}{T_W} &= \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{T_W} = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{\Delta Q_0} \cdot \frac{\Delta Q}{T_W} \equiv \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \eta_{\max}
\end{aligned}
\tag{7.42}
$$

a také platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta A}{T_W} &= \frac{1}{T_W}\sum_{k=1}^{n}(\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}) \qquad (7.43)\\
&= \frac{1}{T_W}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}}\Delta Q_{Wk} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{T_W}\frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{T_W}\eta_{\max k,k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{T_W}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \qquad \left[= \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{T_W}(1-\beta_{k,k})\right]
\end{aligned}
$$

Musí tedy platit

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta A}{T_W} &= \frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\eta_{\max} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{T_W}\eta_{\max k,k} \qquad (7.44)\\
\eta_{\max} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Delta Q_W}\eta_{\max k,k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Theta_{Wk}}{T_W}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{T_W}
\end{aligned}
$$

a tedy

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta A}{T_W} &= \frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta Q_{Wk}}{T_W} = \frac{\Delta Q_W}{{T_W}^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta\Theta_{Wk}\\
\sum_{k=1}^{n}\Delta\Theta_{Wk} &= T_W - T_0
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že

$$
\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{T_W} \neq \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \eta_{\max k,k},\ k > 2 \qquad (7.45)
$$

a tedy i

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{T_W} \neq \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \quad \text{a také} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{T_W} \neq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}}
$$

Pro teplotně redukované práce ΔA_k při teplotách ohříváku Θ_{Wk} platí

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta A_k}{\Theta_{Wk}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Theta_{Wk}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}}{\Delta Q_{Wk}}\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \qquad (7.46)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{{\Theta_{Wk}}^2}\Delta\Theta_{Wk} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}}\eta_{\max k,k}
\end{aligned}
$$

Tedy podle (7.40) pak platí

$$
\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta A_k}{\Theta_{Wk}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{{\Theta_{Wk}}^2}\Delta\Theta_{Wk} = \frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\sum_{k=1}^{n}\eta_{\max k,k} \qquad (7.47)
$$

kde $\Delta\Theta_{Wk}$ velikost intervalu pracovních teplot k-tého cyklu.

Teplu ΔQ_{Wk} dodanému do systému $\mathcal{L}$ při teplotě Θ_{Wk} odpovídá změna jeho termodynamické entropie $\Delta S_{\mathcal{L}}(\Theta_{Wk})$,

$$\Delta S_{\mathcal{L}}(\Theta_{Wk}){=}\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \tag{7.48}$$

a potom máme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta A_k}{\Theta_{Wk}}=\sum_{k=1}^{n}\Delta S_{\mathcal{L}}(\Theta_{Wk})\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \tag{7.49}$$

Prozkoumejme nyní podrobněji výraz (7.46) a jeho limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}}\eta_{\max k,k} \quad \left[=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta A_{Wk}}{\Theta_{Wk}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta S_{\mathcal{L}}(\Theta_{Wk})\frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}}\right] \tag{7.50}$$

Ptáme se kdy platí

$$\frac{\Delta A}{T_W}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta A_k}{\Theta_{Wk}} \tag{7.51}$$

tedy ptáme se kdy platí

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{T_W}\eta_{\max k,k}=\frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\sum_{k=1}^{n}\eta_{\max k,k} \tag{7.52}$$

tedy, kdy platí [podle (7.42) a (7.47)], že

$$\begin{aligned}\frac{\Delta Q_W}{T_W}\eta_{\max} &= \frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\sum_{k=1}^{n}\eta_{\max k,k} \qquad (7.53)\\ \eta_{\max} &= \sum_{k=1}^{n}\eta_{\max k,k}\end{aligned}$$

resp.

$$1-\prod_{k=1}^{n}\beta_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}(1-\beta_{k,k})$$

a tedy kdy

$$1-\prod_{k=1}^{n}\beta_{k,k} = n-\sum_{k=1}^{n}\beta_{k,k}$$

V maticovém zápisu bychom psali

$$\det\mathbf{E}-\det\mathbf{B}=\mathrm{Tr}\mathbf{E}-\mathrm{Tr}\mathbf{B} \tag{7.54}$$

Triviálně jsou rovnosti (7.47), (7.52), (7.53) a (7.54) splněny pro jediné konečné n, $n=1$.
Prozkoumejme možnost splnění rovnosti (7.54) v limitním případě pro $n\to\infty$.
Již jsme uvedli, že v našem rozkladu Carnotova cyklu platí

$$\frac{\Delta Q_W}{T_W}=\frac{\Delta Q_{W1}}{\Theta_{W1}}=\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}}=\text{konst.},\ k=1,\ ...,\ n$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

a tedy platí

$$\Delta Q_{Wk}=\frac{\Theta_{W_k}}{\Theta_{W1}}\cdot\Delta Q_{W1}=\frac{\Theta_{0k-1}}{\Theta_{W1}}\cdot\Delta Q_{W1}=\beta_{1,k-1}\cdot\Delta Q_{W1},\ k=1,\ ...,\ n \tag{7.55}$$

Lze tedy uvažovat (konečnou) posloupnost

$$\left(\frac{\Theta_{Wk}}{\Theta_{W1}}\right)_{k=1}^{n}=\beta_{1,0},\beta_{1,1},\beta_{1,2},\beta_{1,3},\ ...,\ \beta_{1,k-1},\beta_{1,k},\ ...,\ \beta_{1,n-1},\ \beta_{1,0}\overset{\text{Def}}{=}1 \tag{7.56}$$

a tedy i posloupnost

$$\begin{aligned}&(\Delta Q_{W1},\ \beta_{1,1}\cdot\Delta Q_{W1},\ \beta_{1,2}\cdot\Delta Q_{W1},\ ...,\ \beta_{1,k}\cdot\Delta Q_{W1},\ ...,\ \beta_{1,n-1}\cdot\Delta Q_{W1})\\&=\Delta Q_{W1}\cdot(1,\ \beta_{1,1},\ \beta_{1,2},\ \beta_{1,3},\ ...,\ \beta_{1,k-1},\beta_{1,k},\ ...,\ \beta_{1,n-1})\\&\triangleq(\beta_{1,k-1}\cdot\Delta Q_{W1})_{k=1}^{n}=(\beta_{1,k-1})_{k=1}^{n}\cdot\Delta Q_{W1}\end{aligned} \tag{7.57}$$

Provedením jednoduchých úprav ze vztahu (7.55) získáváme

$$\begin{aligned}\frac{\Delta A}{T_W}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{W1}}\eta_{\max k,k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Theta_{W1}}\frac{\Theta_{Wk}}{\Theta_{W1}}\Delta Q_{W1}\eta_{\max k,k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta Q_{W1}}{\Theta_{W1}}\frac{\Theta_{Wk}}{\Theta_{W1}}\eta_{\max k,k}=\frac{\Delta Q_{W}}{T_W}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\Theta_{Wk}}{\Theta_{W1}}\eta_{\max k,k}\\&=\frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\left(\eta_{\max 1,1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{\Theta_{Wk}}{\Theta_{W1}}\eta_{\max k,k}\right)\\&=\frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\left(\eta_{\max 1,1}+\sum_{k=2}^{n}\beta_{1,k-1}\eta_{\max k,k}\right)\end{aligned} \tag{7.58}$$

Rovnosti (7.47) a požadavky (7.51)-(7.54) lze tedy zapsat i takto

$$\frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\sum_{k=1}^{n}\eta_{\max k,k}=\frac{\Delta Q_W}{T_W}\cdot\left(\eta_{\max 1,1}+\sum_{k=2}^{n}\beta_{1,k-1}\eta_{\max k,k}\right) \tag{7.59}$$

Tedy má platit $\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_{\max k,k}=\eta_{\max}$ a tedy

$$\frac{\dfrac{\frac{\Delta A}{T_W}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\Delta A_k}{\Theta_{Wk}}}=\eta_{\max 1,1}+\sum\limits_{k=2}^{n}\beta_{1,k-1}\eta_{\max k,k}}{\eta_{\max}=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\eta_{\max k,k}}{\eta_{\max}}=1} \tag{7.60}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} \beta_{1,k-1} \eta_{\max k,k} &= \sum_{k=1}^{n} \eta_{\max k,k} \\
\eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} \beta_{1,k-1} \eta_{\max k,k} &= \eta_{\max 1,1} + \sum_{k=2}^{n} \eta_{\max k,k} \\
\sum_{k=2}^{n} \eta_{\max k,k} \left(1 - \beta_{1,k-1}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{7.61}
$$

Ale platí, že výraz $\sum_{k=2}^{n} \eta_{\max k,k} \left(1 - \beta_{1,k-1}\right) > 0$ pro všechna $n > 1$ a proto rovnost (7.51) platí, z konečných n, jen pro $n = 1$. Pro konečná $n \geq 2$ je totiž $\frac{\Theta_{Wk-1}}{\Theta_{Wk}} \neq 1$. Dále platí i v limitě pro $n \to \infty$ neboť $\beta_{k,k} \to 1$ a potom $\eta_{\max k,k} \to 0$, pokud $T_W > T_0$. Platí tedy, že

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{T_W} \frac{\Theta_{k-1}}{\Theta_k} = \int_{T_0}^{T_w - \mathrm{d}\Theta} \frac{\mathrm{d}\Theta}{T_W} 1 = \frac{T_W - \mathrm{d}\Theta - T_0}{T_W} \tag{7.62}
$$

ale protože $\eta_{\max 1,1} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{T_W}$, $n \to \infty$, v (7.61) platí, že

$$
\frac{\mathrm{d}\Theta}{T_W} + \frac{T_W - \mathrm{d}\Theta - T_0}{T_W} = \eta_{\max} \tag{7.63}
$$

Tedy platí

$$
\oint_{\mathcal{C}} \frac{\delta A(\Theta)}{\Theta} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta A(\Theta_k)}{\Theta_k} = \frac{\Delta A}{T_W} \tag{7.64}
$$

(Při $T_W = T_0$ ale platí pro všechna n včetně $n = \infty$ neboť platí identicky $\beta_{k,k} = 1$ a $\eta_{\max k,k} = 0$).

Prokázali jsme tedy *elementárnost*, *nedělitelnost* Carnotova cyklu *na konečný počet podcyklů* vzhledem k teplotně redukované práci (termodynamické entropii).

8. Obecný tepelný cyklus

8.1 Obecný vratný cyklus s diskrétně proměnnými teplotami

V obecném tepelném cyklu, označme jej $\mathcal{G}$, přichází termodynamická soustava, pracovní látka $\mathcal{L}$, do styku s $n,\ n \in N,\ n \geq 2$, různými, různě teplými, tepelnými lázněmi $\mathcal{A}_k,\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Ty jsou používány v podcyklech $\mathcal{G}_{i,j}$ a $\mathcal{G}_{j,i}$, např. Carnotových, obecného cyklu $\mathcal{G}$ jako ohříváky, označme je $\mathcal{A}_i$, resp. jako chladníky $\mathcal{A}_j$. Tedy $k \stackrel{\triangle}{=} i$, resp. $k \stackrel{\triangle}{=} j$. Teploty lázní $\mathcal{A}_k$ označme Θ_k. Lze předpokládat uspořádání lázní A_k tak, že platí $\Theta_1 > \Theta_2 > \ ...\ > \Theta_n > 0$.

Uvažujme přímý podcyklus $\mathcal{G}_{i,j}$ obecného tepelného cyklu $\mathcal{G}$ v němž je teplejší lázni $\mathcal{A}_i$, při teplotě Θ_i, látkou $\mathcal{L}$, odebíráno teplo $Q_{i,j}$. Je dodáváno do látky $\mathcal{L}$ a proto klademe $Q_{i,j} > 0$. Část $\mid Q_{j,i} \mid$ tohoto tepla, $\mid Q_{j,i} \mid < Q_{i,j}$, $Q_{j,i} < 0$, přejde, během cyklu $\mathcal{G}_{i,j}$, do chladněší lázně $\mathcal{A}_j$ o teplotě Θ_j, $\Theta_j < \Theta_i,\ i < j$ a rozdíl tepel $Q_{i,j} - \mid Q_{j,i} \mid = Q_{i,j} + Q_{j,i}$ je v cyklu $\mathcal{G}_{i,j}$ vykonanou mechanickou prací $A_{i,j}$. Tedy

$$A_{i,j} = Q_{i,j} + Q_{j,i} = Q_{i,j} - |Q_{j,i}| > 0 \tag{8.1}$$

To předpokládejme pro všechny uspořadané dvojice $(i, j),\ i < j,\ i, j \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$. Je zřejmé, že

$$A_i = \sum_{j,\ j>i} A_{i,j} > 0 \tag{8.2}$$

je celková mechanická práce vykonaná v podcyklu $\mathcal{G}_i$ cyklu $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G}_i = \bigcup_{j,\ j>i} \mathcal{G}_{i,j} \tag{8.3}$$

Cyklus $\mathcal{G}_i$ vzniká (paralelním) složením cyklů $\mathcal{G}_{i,j}$ tak, že Θ_j jsou teploty chladníků cyklů se společným ohřívákem s teplotou Θ_i, $j \in \{i+1,\ ...,\ n\}$, $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\}$. Položme nyní

$$Q_i = \sum_{j,\ j>i} Q_{i,j} \tag{8.4}$$

Takto definované teplo Q_i je celkové teplo odebrané z lázně $\mathcal{A}_i$ v rámci jednoho průchodu látky $\mathcal{L}$ cyklem $\mathcal{G}_i,\ i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n-1\},\ Q_i > 0$.

Uvažujme dále *pomocnou* tepelnou lázeň $\mathcal{A}_0$ o teplotě $\Theta_0 > \Theta_1$, tedy $\Theta_0 > \Theta_k$, $k \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ a uvažujme *pomocný, vratný* přímý Carnotův cyklus $\mathcal{C}_i$ v látce $\mathcal{L}$ takový, že látka $\mathcal{L}$ v něm přijímá z lázně $\mathcal{A}_0$ teplo Q'_{0i}, $Q'_{0i} > 0$ a do lázně $\mathcal{A}_i$ (nyní chladníku v cyklu $\mathcal{C}_i$) je pak dodáváno 'odpadní' teplo Q'_i, $Q'_i < 0$, takové, že

$$\mid Q'_i \mid = Q_i \quad \text{a tedy, dle předchozího, } Q'_i = -Q_i \tag{8.5}$$

Tak je *kompenzován* (anulován) původní odběr tepla Q_i z teplejší lázně $\mathcal{A}_i$ látkou $\mathcal{L}$ během cyklu $\mathcal{G}_i$. Přitom je vykonána práce

$$A'_i = Q'_{0i} + Q'_i = Q'_{0i} - |Q'_i| > 0 \tag{8.6}$$

teplo $Q'_{0i} > 0$ je celkové teplo odebrané z lázně $\mathcal{A}_0$ během cyklu $\mathcal{C}_i$. Zřejmě lze cyklus $\mathcal{C}_i$ považovat za složený z podcyklů $\mathcal{C}_{i,j}$, tedy

$$\mathcal{C}_i = \bigcup_{j,\ j>i} \mathcal{C}_{i,j} \tag{8.7}$$

kde cyklus $\mathcal{C}_{i,j}$ kompezuje teplo $Q_{i,j}$ odebrané z $\mathcal{A}_i$ během cyklu $\mathcal{G}_{i,j}$. Cyklus $\mathcal{C}_i$ kompenzuje teplo Q_i odebrané z $\mathcal{A}_i$.

Dále lze uvažovat *reverzní vratný* Carnotův cyklus $\mathcal{C}_{j,i}$ tak, že teplo $Q_{j,i}$, platí pro něj $|\ Q_{j,i}\ | < Q_{i,j}$, původně dodané do lázně $\mathcal{A}_j$ cyklem $\mathcal{G}_{i,j}$ při teplotě Θ_j, je tímto cyklem $\mathcal{C}_{j,i}$, při teplotě Θ_0, přečerpáno do lázně $\mathcal{A}_0$. Při tom (tj. při izotermické kompresi při teplotě Θ_0) je spotřebována mechanická práce $A'_{j,i}$ a lázni $\mathcal{A}_0$ je tak předáno celkové teplo $Q'_{0j,i}$, $Q'_{0j,i} < 0$ (znaménko bereme vzhledem k látce $\mathcal{L}$),

$$Q'_{0j,i} = Q_{j,i} + A'_{j,i},\ Q_{j,i} < 0,\ A'_{j,i} < 0 \tag{8.8}$$

Tak je v chladnější lázni $\mathcal{A}_j$ kompenzována (anulována) původní dodávka tepla $Q_{j,i}$ do této lázně $\mathcal{A}_j$ (přímým) cyklem $\mathcal{G}_{i,j}$. Je zřejmé, že celkové teplo

$$Q'_{0_j} = \sum_{i,\ i<j} Q'_{0_{j,i}} < 0 \quad [Q'_{0_{j,i}} = -Q_{0_{j,i}}] \tag{8.9}$$

dodané při teplotě Θ_0 do $\mathcal{A}_0$ cyklem $\mathcal{C}_j$,

$$\mathcal{C}_j = \bigcup_{i,\ i<j} \mathcal{C}_{j,i} \tag{8.10}$$

představuje kompenzaci všech tepel dodaných do chladnější lázně $\mathcal{A}_j$ všemi podcykly $\mathcal{G}_{i,j}$ cyklu $\mathcal{G}_j$,

$$\mathcal{G}_j = \bigcup_{i,\ i<j} \mathcal{G}_{i,j} \tag{8.11}$$

K tomu je ale zpotřebí celkové práce

$$A'_j = \sum_{i,\ i<j} A'_{j,i} < 0 \tag{8.12}$$

dodané do celkového pomocného reverzního Carnotova cyklu $\mathcal{C}_j$.
Dále lze uvažovat reverzní podcyklus $\mathcal{G}_{j,i}$ obecného cyklu $\mathcal{G}$ v němž je chladnější lázni $\mathcal{A}_j$ látkou $\mathcal{L}$ odebíráno teplo $Q_{j,i} > 0$. Prací $A_{j,i} < 0$ je toto teplo přečerpáno do teplejší lázně $\mathcal{A}_i$, $i < j$. Do teplejší lázně $\mathcal{A}_i$ je tak cyklem $\mathcal{G}_{j,i}$ dodáno teplo $Q_{j,i} + |A_{j,i}|$. Všemi podcykly $\mathcal{G}_{j,i}$, $i < j$, $j \in \{2,\ \ldots,\ n\}$ cyklu $\mathcal{G}^i$,

$$\mathcal{G}^i = \bigcup_{j,\ j>i} \mathcal{G}_{j,i} \tag{8.13}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

je pak do $\mathcal{A}_i$ dodáno celkové teplo

$$Q^i = \sum_{j,\ j>i} (Q_{j,i} + |A_{j,i}|) \tag{8.14}$$

a při tom je spotřebována celková práce

$$A^i = \sum_{j,j>i} A_{j,i} < 0 \tag{8.15}$$

Pomocný přímý vratný Carnotův cyklus $\mathcal{C}^j$,

$$\mathcal{C}^j = \bigcup_{i,\ j>i} \mathcal{C}^{i,j} \tag{8.16}$$

odebere při teplotě Θ_0 z lázně $\mathcal{A}_0$ celkové teplo ${Q''}_{0j} > 0$, vykoná práci ${A''}_j > 0$ a do lázně $\mathcal{A}_j$ dodá teplo

$${Q'}_j = {Q''}_{0j} - {A''}_j,\ {Q'}_j = Q_j \tag{8.17}$$

Tak je kompenzován odběr tepla Q_j z $\mathcal{A}_j$ všemi cykly $\mathcal{G}_{j,i}$ tvořící podcyklus $\mathcal{G}^j$ obecného cyklu $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{G}^j = \bigcup_{i,\ j>i} \mathcal{G}_{j,i} \tag{8.18}$$

Z chladnější lázně $\mathcal{A}_j$ je tímto podcyklem $\mathcal{G}^j$ cyklu $\mathcal{G}$ totiž odebráno celkové teplo

$$Q_j = \sum_{i,\ i<j} Q_{j,i} > 0 \tag{8.19}$$

Pomocný reverzní vratný Carnotův cyklus $\mathcal{C}^{j,i}$, odebere z $\mathcal{A}_i$ teplo

$${Q'}_{j,i} = Q_{j,i} + |A_{j,i}| > 0 \tag{8.20}$$

spotřebuje práci ${A'}_{j,i} < 0$ a do lázně $\mathcal{A}_0$ dodá teplo

$${Q'}_{0_{j,i}} = {Q'}_{j,i} + |{A'}_{j,i}| \tag{8.21}$$

Složený reverzní vratný Carnotův cyklus $\mathcal{C}^i$,

$$\mathcal{C}^i = \bigcup_{j,\ i<j} \mathcal{C}^{j,i} \tag{8.22}$$

pak do $\mathcal{A}_0$ dodá teplo

$${Q''}_{0i} = \sum_{j,\ i<j} {Q'}_{0j,i} < 0 \tag{8.23}$$

a spotřebuje při tom práci

$${A''}_i = \sum_{j,\ j<i} {A'}_{j,i} < 0 \tag{8.24}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Tak je cyklem $\mathcal{C}^i$ kompenzováno teplo Q^i dodané do $\mathcal{A}_i$ cyklem $\mathcal{G}^i$,

$$\mathcal{C}^i = \bigcup_{j,\ i<j} \mathcal{C}_{i,j}, \quad \mathcal{G}^i = \bigcup_{j,\ i<j} \mathcal{G}_{i,j}$$

Tepla ${Q'}_{0i}$, ${Q'}_{0j}$, ${Q''}_{0i}$ a ${Q''}_{0j}$ lze souhrnně označit jako ${Q'}_{0k}$, práce $A_i+{A'}_i+{A'}_j$, $A^i+{A''}_i+{A''}_j$ jako A_k, $k=1,\ 2,\ ...,\ n$. Těmito teply ${Q'}_{0k}$ jsou tedy kompenzována (anulována) všechna tepla přivedená do nebo odvedená z lázní $\mathcal{A}_k$, $k \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ během celého obecného cyklu $\mathcal{G}$. Původní obecný cyklus $\mathcal{G}$, složený z cyklů $\mathcal{G}_k$,

$$\mathcal{G} = \bigcup_k \mathcal{G}_k \tag{8.25}$$

pak tvoří, spolu s celkovým pomocným Carnotovým cyklem $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} = \bigcup_k \mathcal{C}_k \tag{8.26}$$

celkový cyklus $\mathcal{Z}$,

$$\mathcal{Z} = \mathcal{G} \bigcup \mathcal{C} \tag{8.27}$$

Pro kompenzaci tepla $k-$té tepelné lázně $\mathcal{A}_k$ ($k-$tým pomocným vratným Carnotvým cyklem $\mathcal{C}_k$ cyklu $\mathcal{Z}$) ale platí

$$\frac{{Q'}_{0k}}{\Theta_0} + \frac{{Q'}_k}{\Theta_k} = \frac{{Q'}_{0k}}{\Theta_0} - \frac{Q_k}{\Theta_k} = 0 \tag{8.28}$$

a tedy

$$\frac{{Q'}_{0k}}{\Theta_0} = \frac{Q_k}{\Theta_k},\ {Q'}_{0k} = \Theta_0 \frac{Q_k}{\Theta_k},\ \Theta_0 > 0 \tag{8.29}$$

Výsledkem průchodu soustavy $\mathcal{L}$ jedním cyklem $\mathcal{Z}$ pak je to, že *pouze* lázeň $\mathcal{A}_0$ změnila, při teplotě Θ_0, svoje teplo o teplo ΔQ,

$$\Delta Q = \sum_{k=1}^{n} {Q'}_{0,k} \tag{8.30}$$

Ostatní lázně, v důsledku popsaných kompenzací, pak průchodem celým cyklem $\mathcal{Z}$ žádné teplo ani nepřijaly ani neztratily. Současně byly vykonány a spotřebovány práce A_k a tedy byla vykonána celková práce

$$\Delta A = \sum_{k=1}^{n} A_k \tag{8.31}$$

Protože ale cyklus $\mathcal{Z}$ je tepelným cyklem, mohlo se v mechanickou práci ΔA přeměnit pouze teplo ΔQ ze vztahu (8.30). Ale, podle II. věty termodynamické však není možné aby se v tepelném cyklu veškeré teplo do něj přivedené beze zbytku přeměnilo v mechanickou práci, tedy aby se nedělo nic jiného, než že by se jediné tepelné lázni, zde $\mathcal{A}_0$, odebíralo teplo ΔQ a měnilo se v ekvivalentní množství soustavou $\mathcal{L}$ konané (kladné) mechanické práce $A > 0$. Nemůže tedy platit

$$\sum_{k=1}^{n} Q'_{0k} = A > 0 \tag{8.32}$$

a logicky tedy musí platit

$$\sum_{k=1}^{n} Q'_{0k} \leq 0 \tag{8.33}$$

Tedy ze vztahů

$$Q'_{0k} = \Theta_0 \frac{Q_k}{\Theta_k}, \; A = \Theta_0 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{\Theta_k}, \; \Theta_0 > 0 \tag{8.34}$$

vyplývá že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{\Theta_k} \leq 0 \tag{8.35}$$

O obecném cyklu $\mathcal{G}$ jsme ale nepředpokládali zda je vratný či nevratný.
Nyní o obecném cyklu $\mathcal{G}$ předpokládejme, že je vratný. Pak ho můžeme nechat probíhat v opačném směru. Pomocné Carnotovy cykly naší myšlenkové konstrukce přitom zůstávají vratné. Potom všechna tepla Q_k a práce A_k změní znaménka a v důsledku toho bude platit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{\Theta_k} \geq 0 \tag{8.36}$$

Protože vratný cyklus může probíhat v jednom či druhém směru, musí platit obě rovnosti současně a tedy musí platit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{\Theta_k} = 0 \tag{8.37}$$

Odvozená rovnost platí pro jakýkoliv, tedy obecný, ale vratný cyklus. Ve speciálním případě $n = 2$ se jedná o vratný cyklus Carnotův.

8.2 Obecný vratný cyklus se spojitě proměnnými teplotami

Prakticky ale látka $\mathcal{L}$ nepřichází do styku s několika různými různě teplými lázněmi v pravém slova smyslu. Většinou přijde látka $\mathcal{L}$ do styku s tělesy, která nejsou tepelně (teplotně) homogenní a mají také omezenou tepelnou kapacitu.
Potom předpokládáme, že takové těleso lze rozdělit na n elementárních oblastí, $n \geq 2$, takové velikosti, že v každé z nich lze její teplotu Θ_k, $k = 1, 2, ..., n$, považovat za konstantní. Celkové teplo Q, které látka $\mathcal{L}$ vymění s daným tělesem, tak předpokládáme být rozděleno na elementární tepla $\Delta Q_k \stackrel{\triangle}{=} \Delta Q(\Theta_k)$ vyměněná mezi látkou $\mathcal{L}$ a k-tou oblastí tělesa při (konstantní) teplotě Θ_k této oblasti. Uvažujeme-li

dané těleso rozdělené na oblasti infinitezimálně malé velikosti, definujeme, rovněž infinitezimální, teplo vyměňované mezi nimi a látkou $\mathcal{L}$ limitou

$$\lim_{n\to\infty} \Delta Q_k \stackrel{\text{Def}}{=} \delta Q(\Theta), \quad \delta Q(\Theta) = \frac{\partial Q(\Theta)}{\partial \Theta} \mathrm{d}\Theta \tag{8.38}$$

Potom můžeme psát

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_k}{\Theta_k} = \oint_{\mathcal{G}} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \tag{8.39}$$

Pro obecný cyklus $\mathcal{G}$, obecně nevratný, jímž prochází látka $\mathcal{L}$ tedy lze psát (10.22),

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \leq 0 \tag{8.40}$$

Výrazem δQ vyjadřujeme tu skutečnost, že teplo výměněné mezi sytémem $\mathcal{L}$ a jeho okolím obecně není totálním diferenciálem fukce stavových proměnných systému (uvedených ve stavové rovnici systému $\mathcal{L}$). Odvozený integrál nazýváme Clausiovým integrálem a označujeme jím i sumy v diskrétních případech, tj. tehdy když n je konečné, viz (10.12), (10.22).
V nevratném obecném cyklu $\mathcal{G}_{irrev}$ tedy platí (10.22),

$$\oint_{\mathcal{G}_{irrev}} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} < 0 \tag{8.41}$$

a ve vratném obecném cyklu $\mathcal{G}_{rev}$ platí (10.12),

$$\oint_{\mathcal{G}_{rev}} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} = 0 \tag{8.42}$$

Obecnou cyklickou cestu $\mathcal{G}$ změny termodynamického stavu, $\boldsymbol{\theta}_A \to \boldsymbol{\theta}_B \to \boldsymbol{\theta}_A$, systému $\mathcal{L}$ lze vyjádřit jako sjednocení její vratné a nevratné části. Potom platí, např.

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{G}} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} = \int_{\boldsymbol{\theta}_{A,irrev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \quad &+ \quad \int_{\boldsymbol{\theta}_{B,rev}}^{\boldsymbol{\theta}_A} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \leq 0 \\
\int_{\boldsymbol{\theta}_{A,irrev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \quad &- \quad \int_{\boldsymbol{\theta}_{A,rev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \leq 0 \\
\int_{\boldsymbol{\theta}_{A,rev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \quad &\geq \quad \int_{\boldsymbol{\theta}_{A,irrev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta}
\end{aligned}$$

Je-li cyklická změna $\mathcal{G}$ nevratná, $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_{irrev} \equiv \boldsymbol{\theta}_A \to \boldsymbol{\theta}_B \to \boldsymbol{\theta}_A$, platí

$$\int_{\boldsymbol{\theta}_{A,rev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \quad > \quad \int_{\boldsymbol{\theta}_{A,irrev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

a hodnota druhého integrálu mezi $\boldsymbol{\theta}_A$ a $\boldsymbol{\theta}_B$ *závisí* na integrační cestě, tedy závisí na posloupnosti stavů tuto cestu tvořících.
Je-li cyklická změna $\mathcal{G}$ vratná, $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_{rev} \equiv \boldsymbol{\theta}_A \to \boldsymbol{\theta}_B \to \boldsymbol{\theta}_A$, platí

$$\int_{\boldsymbol{\theta}_{A,1}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \quad = \quad \int_{\boldsymbol{\theta}_{A,2}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta}$$

a hodnota integrálu mezi $\boldsymbol{\theta}_A$ a $\boldsymbol{\theta}_B$ *nezávisí* na integrační cestě (1 nebo 2 atp. ze stavu $\boldsymbol{\theta}_A$ do $\boldsymbol{\theta}_B$), tedy nezávisí na posloupnosti stavů tuto cestu tvořících.
Pro vratné změny tedy platí, že výraz $\dfrac{\delta Q}{\Theta}$ je *totálním* diferenciálem. To znamená, že tento výraz je funkcí (všech uvažovaných) stavových proměnných ve stavové rovnici systému $\mathcal{L}$ v němž tato změna probíhá.
Naopak není totálním diferenciálem a tedy není funkcí všech uvažovaných termodynamických stavových proměnných systému $\mathcal{L}$ pro změny nevratné (neboť tehdy neplatí stavová rovnice v těchto stavových proměnných, např. $p,\ v,\ T$). Hodnota levé strany nerovnosti

$$\int_{\boldsymbol{\theta}_{A,rev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \quad - \quad \int_{\boldsymbol{\theta}_{A,irrev}}^{\boldsymbol{\theta}_B} \frac{\delta Q(\Theta)}{\Theta} \geq 0$$

je pak mírou nevratnosti cesty ze stavu $\boldsymbol{\theta}_A$ do $\boldsymbol{\theta}_B$. V diskrétním případě bychom psali

$$\sum_{i,rev} \frac{\Delta Q_i}{\Theta_i} \quad - \quad \sum_{j,irrev} \frac{\Delta Q_j}{\Theta_j} \geq 0$$

Z odvození Clausiova integrálu je tedy patrno, že na obecný kruhový děj je možno se dívat jako na sjednocení $(\cup\cdot)$ elementárních (případně infinitezimálních) kruhových dějů s $n = 2$ (tedy Carnotových cyklů, jsou-li teploty konstantní).

Z $T - S$ diagramu obecného přímého (vratného) spojitého cyklu vyplývá, že pro elementární praáci $\delta A > 0$ vykonanou v tomto cyklu lze psát

$$\delta A = \mathrm{d}S_{\mathcal{L}} \mathrm{d}\Theta \tag{8.43}$$

Tečnými adiabatmi resp. izotermami tohoto cyklu jej dělíme na části kde

$$\Theta = \Theta_W(S_{\mathcal{L}}),\ S_{\mathcal{L}} \in < S_{\mathcal{L}1}, S_{\mathcal{L}2} >,\ \ \Theta = \Theta_0(S_{\mathcal{L}}),\ S_{\mathcal{L}} \in < S_{\mathcal{L}2}, S_{\mathcal{L}1} >,$$

resp.

$$S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{L}}^W(\Theta),\ \Theta \in < \Theta_1, \Theta_2 >,\ \ S_{\mathcal{L}} = S_{\mathcal{L}}^0(\Theta),\ \Theta \in < \Theta_2, \Theta_1 >,$$

tedy na části, kde teplota Θ látky $\mathcal{L}$ je funkcí entropie $S_{\mathcal{L}}$, resp. na části, kde entropie $S_{\mathcal{L}}$ látky $\mathcal{L}$ je funkcí teploty Θ. Definujme ještě

$$S_{\mathcal{L}}(0) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} 0,\ \Theta(0)\ \stackrel{\mathrm{Def}}{=} 0$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Podle funkčního předpisu Θ_W je v rozmezí entropií $< S_{\mathcal{L}1}, S_{\mathcal{L}2} >$ do látky $\mathcal{L}$ dodáno teplo ΔQ_W a podle předpisu Θ_0 je z $\mathcal{L}$ odvedeno teplo ΔQ_0,

$$\begin{aligned}\Delta Q_W &= \int_{S_{\mathcal{L}1}}^{S_{\mathcal{L}2}} \left(\int_0^{\Theta_W(S_{\mathcal{L}})} \mathrm{d}\Theta \right) \mathrm{d}S_{\mathcal{L}} = \int_{S_{\mathcal{L}1}}^{S_{\mathcal{L}2}} \Theta_W(S_{\mathcal{L}}) \mathrm{d}S_{\mathcal{L}} \qquad (8.44)\\ \Delta Q_0 &= \int_{S_{\mathcal{L}2}}^{S_{\mathcal{L}1}} \left(\int_0^{\Theta_0(S_{\mathcal{L}})} \mathrm{d}\Theta \right) \mathrm{d}S_{\mathcal{L}} = \int_{S_{\mathcal{L}2}}^{S_{\mathcal{L}1}} \Theta_0(S_{\mathcal{L}}) \mathrm{d}S_{\mathcal{L}}\end{aligned}$$

resp. podle funkčního předpisu $S_{\mathcal{L}}^W$ je v rozmezí teplot $< \Theta_1, \Theta_2 >$ do látky $\mathcal{L}$ dodáno teplo $\Delta Q*_W$ a podle předpisu $S_{\mathcal{L}}^0$ je z $\mathcal{L}$ odvedeno teplo $\Delta Q*_0$,

$$\begin{aligned}\Delta Q*_W &= \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \left(\int_0^{S_{\mathcal{L}}^W(\Theta)} \mathrm{d}S_{\mathcal{L}} \right) \mathrm{d}\Theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} S_{\mathcal{L}}^W(\Theta) \mathrm{d}\Theta \qquad (8.45)\\ \Delta Q*_0 &= \int_{\Theta_2}^{\Theta_1} \left(\int_0^{S_{\mathcal{L}}^0(\Theta)} \mathrm{d}S_{\mathcal{L}} \right) \mathrm{d}\Theta = \int_{\Theta_2}^{\Theta_1} S_{\mathcal{L}}^0(\Theta) \mathrm{d}\Theta\end{aligned}$$

Potom, podle věty o střední hodnotě integrálního počtu,[28] pro tepla ze vztahů (8.44) a (8.45) platí, že

$$\Delta Q_W = [S_{\mathcal{L}2} - S_{\mathcal{L}1}] \cdot \overline{\Theta_{W<S_{\mathcal{L}1}, S_{\mathcal{L}2}>}}, \quad \Delta Q_0 = [S_{\mathcal{L}1} - S_{\mathcal{L}2}] \cdot \overline{\Theta_{0<S_{\mathcal{L}1}, S_{\mathcal{L}2}>}} \qquad (8.46)$$

resp.

$$\Delta Q*_W = [\Theta_2 - \Theta_1] \cdot \overline{S_{\mathcal{L}\ <\Theta_1, \Theta_2>}^W}, \quad \Delta Q*_0 = [\Theta_1 - \Theta_2] \cdot \overline{S_{\mathcal{L}<\Theta_1, \Theta_2>}^0} \qquad (8.47)$$

Pro transformační účinnost η pak musí platit

$$\eta = \frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0}{\Delta Q_W} = \frac{\overline{\Theta_W} - \overline{\Theta_0}}{\overline{\Theta_W}}, \text{ resp. } \eta = \frac{\Delta Q*_W - \Delta Q*_0}{\Delta Q*_W} = \frac{\overline{S_{\mathcal{L}}^W} - \overline{S_{\mathcal{L}}^0}}{\overline{S_{\mathcal{L}}^W}} \qquad (8.48)$$

Rovnost $\eta = \eta_{\max}$ platí pokud $\Theta_W(S_{\mathcal{L}}) = \Theta_2 \triangleq T_W = \text{konst1.}$, $\Theta_0(S_{\mathcal{L}}) = \Theta_1 \triangleq T_0 = \text{konst2.}$, $T_0 < T_W$, resp. $S_{\mathcal{L}}^W(\Theta) = S_{\mathcal{L}2} \triangleq S_W = \text{konst3.}$, $S_{\mathcal{L}}^0(\Theta) = S_{\mathcal{L}1} \triangleq S_0 = \text{konst4.}$, $S_0 < S_W$.[29]

[28]Pro reálnou funkci $f(x)$ jedné reálné proměnné, spojitou na intervalu $< a, b >$ platí věta o střední hodnotě integrálního počtu; na intervalu (a, b) existuje číslo c takové, že $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$, kde číslo $f(c)$ je střední hodnotou $\overline{f_{<a,b>}}$ funkce $f(x)$ na intervalu $< a, b >$. Tedy $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = (b-a) \cdot \overline{f_{<a,b>}}$.

[29]Jinak platí $\eta < \eta_{\max}$, což je v souladu s Carnotovou větou (první část) [38] (I.T. I.)

8.2.1 Spojitě proměnná teplota chladníku v reverzním vratném cyklu

Zopakujme stručně předchozí detailní postup.[30] Je tedy zřejmé, že

$$\begin{aligned} \Delta A &= \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} (\Delta Q_{Wk} - \Delta Q_{0k}) \qquad (8.49) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \Delta\Theta_{Wk} = \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{Wk} \eta_{\max k,k} \end{aligned}$$

Při dělení intervalu $< T_0, T_W >$ na n podintervalů délky $\Delta\Theta_{Wk},\ k = 1,\ ...,\ n$ platí

$$\eta_{\max k,k} = \frac{\Theta_{Wk} - \Theta_{Wk+1}}{\Theta_{Wk}} = \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \quad \text{nebo,} \qquad (8.50)$$

$$\eta_{\max k,k} = \frac{\Theta_{Wk} - \Theta_{Wk+1}}{\Theta_{Wk}} = \frac{T_W - T_0}{n \cdot \Theta_{Wk}} = \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{T_W - k \cdot \Delta\Theta_{Wk}}, \text{ pokud } \Delta\Theta_{Wk} = \text{konst.}$$

Je zřejmé, že čím větší n, tím jemnější dělení intervalu $< T_0, T_W >$ získáváme. Při $n \to \infty$, $\Delta\Theta_{Wk} \to 0$. Když pro toto infinizetimální $\Delta\Theta_{Wk}$ zavedeme označení

$$\Delta\Theta_{Wk} \triangleq \mathrm{d}\Theta,\ \Delta Q_{Wk} \triangleq \Delta Q_W(\Theta_W),\ \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \triangleq \frac{\Delta Q_W(\Theta_W)}{\Theta_W} \qquad (8.51)$$

pak pro

$$\eta_{\max k,k} = \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}}$$

píšeme

$$\lim_{n\to\infty} \eta_{\max k,k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} \triangleq \mathrm{d}\eta_{\max}(\Theta_\mathrm{W}) \qquad (8.52)$$

Pokud pro poměry po sobě následujících teplot na ohříváku $\mathcal{A}$ (tj. teplot látky $\mathcal{L}$ při izotermických expanzích po sobě následujících cyklů) platí (7.40),

$$\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \frac{\Delta Q_{Wk+1}}{\Theta_{Wk+1}} = \frac{\Delta Q_W}{T_W},\ k = 1,\ 2,\ ...,\ n-1 \text{ a při tom } n \to \infty,$$

tj. pokud platí, že

$$\text{konst.} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} = \frac{\Delta Q_W(\Theta_W)}{\Theta_W} = \frac{\partial\left[\Delta Q_W(\Theta_W)\right]}{\partial\Theta_W} \triangleq \frac{\partial Q_W(\Theta)}{\partial\Theta}$$

pro elementární práci δA konanou elementárním cyklem s rozpětím pracovních teplot $\Theta_{Wk} - \Theta_{0k} = \Delta\Theta_{Wk} \to \mathrm{d}\Theta_W$ platí, že

$$\begin{aligned} \delta A &= \lim_{n\to\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} [\Delta Q_{Wk}(\Theta_{Wk}) - \Delta Q_{0k}(\Theta_{0k})] \qquad (8.53) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Delta Q_{Wk}(\Theta_{Wk}) \cdot \left(1 - \frac{\Theta_{0k}}{\Theta_{Wk}}\right) = \Delta Q_W(\Theta_W) \cdot \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \mathrm{d}\Theta_W \\ \delta A &= \delta\left[\Delta Q_W(\Theta_W) - \Delta Q_0(\Theta_W)\right] = \frac{\partial\left[\Delta Q_W(\Theta_W) - \Delta Q_0(\Theta_W)\right]}{\partial\Theta_W} \mathrm{d}\Theta_W \triangleq \delta Q(\Theta_W) \end{aligned}$$

[30] Pro větší názornost použijeme terminologie cyklu *přímého*.

Teplo $\delta Q(\Theta_W)$ je pak celkové teplo přeměněné systémem $\mathcal{L}$ v elementárním cyklu s pracovními teplotami Θ_W a Θ_0 v mechanickou práci δA, $\Theta_0 \in (0, T_0 >$, $\Theta_W \in (0, T_W >$, $\Theta_W - \Theta_0 = \Delta\Theta \to \mathrm{d}\Theta > 0$, T_0 a T_W jsou extremální teploty (okolí) $\mathcal{L}$. Potom podle (8.49), ve 'spojitém' vyjádření, platí

$$\Delta A \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_{Wk} \frac{\Delta\Theta_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \int_{T_0}^{T_W} \Delta Q_W(\Theta_W) \cdot \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} \tag{8.54}$$

resp.

$$\Delta A \;=\; \frac{\Delta Q_W}{T_W} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta\Theta_{Wk} = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}\Theta = \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot (T_W - T_0)$$

Srovnáním předchozích výsledků pro práci získáváme

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T_W} \Delta Q_W(\Theta_W) \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} &= \frac{\Delta Q_W}{T_W} \cdot \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}\Theta \\
\int_{T_0}^{T_W} \left(\int_0^{\Theta_W} \delta Q_W(\Theta) \right) \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} &= \int_0^{T_W} \delta Q_W(\Theta) \cdot \int_{T_0}^{T_W} \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{T_W} \\
\Delta A = \oint_{\mathcal{C}} \delta A &= \int_{T_0}^{T_W} \left(\int_0^{T_W} \delta Q_W(\Theta) \right) \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{T_W}
\end{aligned} \tag{8.55}$$

a srovnáním výsledků pro teplotně redukovanou práci získáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta A_k}{\Theta_{Wk}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \eta_{\max k,k}, \\
\int_{T_0}^{T_W} \frac{\Delta Q_W(\Theta_W)}{\Theta_W} \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} &= \int_{T_0}^{T_W} \frac{\int_0^{T_W} \delta Q_W(\Theta_W)}{T_W} \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{T_W}, \\
\int_{T_0}^{T_W} \frac{\Delta Q_W(\Theta_W)}{{\Theta_W}^2} \mathrm{d}\Theta_W &= \frac{\Delta Q_W}{{T_W}^2} \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}\Theta_W \\
\oint_{\mathcal{C}} \frac{\delta A}{\Theta} &= \frac{\Delta Q_W}{{T_W}^2} \cdot (T_W - T_0)
\end{aligned} \tag{8.56}$$

Formálněji a také obecněji lze pro (7.47) podle (7.49) v limitě pro $n \to \infty$ psát[31]

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\delta A}{\Theta} = \int_{T_0}^{T_W} \Delta S_{\mathcal{L}}(\Theta_W) \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} = \int_{T_0}^{T_W} \left(\int_0^{\Theta_W} \mathrm{d}S_{\mathcal{L}}(\Theta) \right) \frac{\mathrm{d}\Theta_W}{\Theta_W} \tag{8.57}$$

V našem případě pro změnu entropie látky $\Delta S_{\mathcal{L}}$ změnou jejího tepla o $\Delta Q_W(\Theta_W)$ při teplotě Θ_W platí

$$\Delta S_{\mathcal{L}}(\Theta_W) = \frac{\Delta Q_W(\Theta_W)}{\Theta_W} = \text{konst.} \tag{8.58}$$

[31] Formulujeme tak speciální tvar Greenovy věty, dále viz (8.75).

Z odvození (8.55) a (8.56) je ale zřejmé, že pro teplo ΔQ_W *vyzářené* při teplotě T_W resp. Θ_W do sytému $\mathcal{L}$ platí

$$\Delta Q_W = \lambda {T_W}^2, \quad \text{resp.} \quad \Delta Q_W(\Theta_W) = \lambda {\Theta_W}^2 \quad \text{kde} \quad \lambda = \text{konst.}, \ \lambda > 0 \tag{8.59}$$

Potom ovšem

$$\delta Q_W(\Theta_W) = 2\lambda\Theta_W \cdot \mathrm{d}\Theta_W \tag{8.60}$$

Při dané teplotě Θ_W ohříváku je ale konána elementární práce

$$\delta A(\Theta_W) \cdot \frac{\mathrm{d}\Theta_\mathrm{W}}{\Theta_W} = \lambda {\Theta_W}^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\Theta_\mathrm{W}}{\Theta_W} = \lambda\Theta_W \cdot \mathrm{d}\Theta_\mathrm{W} \tag{8.61}$$

Pro elementární teplotně redukovanou práci pak platí

$$\begin{aligned} \frac{\delta A(\Theta_W)}{\Theta_W} &= \frac{\lambda\Theta_W \cdot \mathrm{d}\Theta_\mathrm{W}}{\Theta_W} = \lambda \cdot \mathrm{d}\Theta_\mathrm{W} \\ \oint_{\mathcal{C}} \frac{\delta A(\Theta_W)}{\Theta_W} &= \lambda \cdot (T_W - T_0) \end{aligned} \tag{8.62}$$

Následující rovnosti

$$\begin{aligned} &\Delta Q_W(\Theta_W) = \lambda {\Theta_W}^2 \\ &\Delta Q_W(\Theta_W) = \Delta Q_0(\Theta_0) \cdot \frac{\Theta_W}{\Theta_0} = \lambda {\Theta_0}^2 \cdot \frac{\Theta_W}{\Theta_0} = \lambda\Theta_0\Theta_W \\ &\Delta Q_W(\Theta_W) = \lambda {\Theta_W}^2 = \lambda\Theta_0\Theta_W \quad \text{a tedy} \quad \Theta_W = \Theta_0 \end{aligned} \tag{8.63}$$

a rovnosti

$$\begin{aligned} &\Delta Q_0(\Theta_0) = \lambda {\Theta_0}^2 \\ &\Delta Q_0(\Theta_0) = \Delta Q_W(\Theta_W) \cdot \frac{\Theta_0}{\Theta_W} = \lambda {\Theta_W}^2 \cdot \frac{\Theta_0}{\Theta_W} = \lambda\Theta_0\Theta_W \\ &\Delta Q_0(\Theta_0) = \lambda {\Theta_0}^2 = \lambda\Theta_0\Theta_W \quad \text{a tedy} \quad \Theta_0 = \Theta_W \end{aligned}$$

interpretujeme tak, že v Carnotově cyklu jsou možné právě jen dvě pracovní teploty systému $\mathcal{L}$, $\Theta_W = \text{konst1.}$ při dodávání a $\Theta_0 = \text{konst2.}$ při odvádění tepla ze systému $\mathcal{L}$.
Celý předchozí rozklad Carnotova cyklu je tedy ryze formální ale přinesl užitečný vztah (8.57).

V případě obecného tepelného cyklu je ale třeba uvažovat tak, že po proběnutí daného elementárního (infinitezimálního) cyklu s pracovními teplotami $\Theta_{W[k]}$, např. $\Theta_{W[k]} = T_W$ a $\Theta_{0[k]}$, např. $\Theta_{0[k]} = \Theta_{W[k]} - \Delta\Theta$ atd., vnutíme ohříváku a tedy i látce $\mathcal{L}$ při izotermické expanzi, teplotu $\Theta'_W = \Theta_{W[k+1]}$ tak, aby pro těmito námi vnucovanými pracovními teplotami po sobě následujících cyklů a příslušnými dodávanými teply neplatila, alespoň pro jednu hodnotu k, rovnost $\dfrac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} = \dfrac{\Delta Q_{Wk+1}}{\Theta_{Wk+1}}$, tedy aby platilo, alespoň pro jednu hodnotu k, že

$$\frac{\Delta Q_{Wk}}{\Theta_{Wk}} \neq \frac{\Delta Q_{Wk+1}}{\Theta_{Wk+1}} \tag{8.64}$$

8.2.2 Lineárně proměnná teplota chladníku v reverzním vratném cyklu

Elementární změnou teploty Θ okolí cyklu (označme jej $\mathcal{O}_{rrev}$) a tedy i jeho pracovního media $\mathcal{L}$, které je s tímto okolím v diatermickém styku [73] o dΘ, dochází k elementární vratné změně tepla $Q{*}(\Theta)$ dodávaného, *vyzařovaného* do $\mathcal{L}$ o $\delta Q{*}(\Theta)$,

$$\delta Q{*}(\Theta) = \frac{\partial Q{*}(\Theta)}{\partial \Theta}\mathrm{d}\Theta \quad \text{a tedy} \quad Q{*}(\Theta_W) = \int_0^{\Theta_W} \frac{\partial Q{*}(\Theta)}{\partial \Theta}\mathrm{d}\Theta \tag{8.65}$$

Teplo $Q{*}(\Theta_W)$ je celkové teplo vratně dodané, vyzářené do systému $\mathcal{L}$ při jeho koncové teplotě Θ_W.
Pro elementární teplo $\delta Q{*}(\Theta)$ dodané vratně do systému $\mathcal{L}$ při teplotě Θ ale také podle *Clausiovy* definice tepelné entropie $S{*}_{\mathcal{L}}$ [45] platí

$$\delta Q{*}(\Theta) = \Theta \cdot \mathrm{d}S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta), \quad \mathrm{d}S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta) = \frac{\delta Q{*}(\Theta)}{\Theta} \tag{8.66}$$

Pro celkovou změnu entropie $\Delta S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta_W)$, resp. entropii $S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta_W)$, 'dodanou' do látky $\mathcal{L}$ jejím zahříváním v teplotním rozmezí $(0, \Theta_W >$, platí

$$\Delta S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta_W) \;=\; \int_0^{\Theta_W} \mathrm{d}S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta) \int_0^{\Theta_W} \frac{\delta Q{*}(\Theta)}{\Theta} = S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta_W) \tag{8.67}$$

když položíme $S{*}_{\mathcal{L}}(0) \stackrel{\mathrm{Def}}{=} 0$.
Podle (8.66) pro celkové teplo $Q{*}(\Theta_W)$ dodané do $\mathcal{L}$ v teplotním rozmezí $\Theta \in (0, \Theta_W >$ také platí, že

$$Q{*}(\Theta_W) = \int_0^{\Theta_W} \Theta \mathrm{dS}{*}_{\mathcal{L}}(\Theta) \tag{8.68}$$

Potom, podle věty o střední hodnotě integrálního počtu,

$$Q{*}(\Theta_W) \;=\; \int_{S{*}_{\mathcal{L}}(0)}^{S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta_W)} \Theta \mathrm{d}S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta) = [S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta_W) - S{*}_{\mathcal{L}}(0)] \cdot \overline{\Theta_{(0,\Theta_W)}} \tag{8.69}$$

kde $$\overline{\Theta_{(0,\Theta_W)}} = \frac{0 + \Theta_W}{2} = \frac{\Theta_W}{2}$$

Při extremálních hodnotách T_0 a T_W pracovní teploty Θ cyklu $\mathcal{O}_{rrev}$ zaveďme označení

$$Q{*}_0 \stackrel{\triangle}{=} Q{*}(T_0) = \int_0^{T_0} \delta Q{*}_W(\Theta) \quad \text{a} \quad Q{*}_W \stackrel{\triangle}{=} Q{*}(T_W) = \int_0^{T_W} \delta Q{*}_W(\Theta) \tag{8.70}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Podle (8.69) pak budeme mít

$$
\begin{aligned}
Q*_0 &= \int_{S*_\mathcal{L}(0)}^{S*_\mathcal{L}(T_0)} \Theta \mathrm{d}S*_\mathcal{L}(\Theta) = [S*_\mathcal{L}(T_0) - S*_\mathcal{L}(0)] \cdot \overline{\Theta_{(0,T_0)}} \qquad (8.71)\\
Q*_W &= \int_{S*_\mathcal{L}(0)}^{S*_\mathcal{L}(T_W)} \Theta \mathrm{d}S*_\mathcal{L}(\Theta) = [S*_\mathcal{L}(T_W) - S*_\mathcal{L}(0)] \cdot \overline{\Theta_{(0,T_W)}}
\end{aligned}
$$

kde $\overline{\Theta_{(0,T_0)}} = \frac{T_0}{2}$, $\overline{\Theta_{(0,T_W)}} = \frac{T_W}{2}$

Při $S*_\mathcal{L}(0) = 0$ pak pro koncové teploty Θ, T_0 a T_W látky $\mathcal{L}$ platí

$$
\begin{aligned}
Q*(\Theta) &= S*_\mathcal{L}(\Theta) \cdot \frac{\Theta}{2} \quad \text{a tedy} \quad S*_\mathcal{L}(\Theta) = \frac{2Q*(\Theta)}{\Theta} \qquad (8.72)\\
Q*_W &= S*_\mathcal{L}(T_W) \cdot \frac{T_W}{2} \quad \text{a tedy} \quad S*_\mathcal{L}(T_W) = \frac{2Q*_W}{T_W}\\
Q*_0 &= S*_\mathcal{L}(T_0) \cdot \frac{T_0}{2} \quad \text{a tedy} \quad S*_\mathcal{L}(T_0) = \frac{2Q*_0}{T_0}
\end{aligned}
$$

Pro změnu $\Delta S*_\mathcal{L}$ termodynamické entropie systému $\mathcal{L}$, při teplotě Θ probíhající interval $< T_0, T_W >$ výše popsaným příjmem tepla z okolí cyklu, platí

$$\Delta S*_\mathcal{L} = S*_\mathcal{L}(T_W) - S*_\mathcal{L}(T_0) = 2\left(\frac{Q*_W}{T_W} - \frac{Q*_0}{T_0}\right) = \int_{T_0}^{T_W} \frac{\delta Q*(\Theta)}{\Theta} \qquad (8.73)$$

Podle (8.67) pro entropii $S*_\mathcal{L}(\Theta_W)$ látky $\mathcal{L}$ při proměnné teplotě $\Theta \in < 0, \Theta_W >$, $\Theta_W \leq T_W$ platí, že

$$
\begin{aligned}
S*_\mathcal{L}(\Theta_W) &= \int_0^{\Theta_W} \left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{S*_\mathcal{L}(\Theta) \cdot \Theta}{2}\right]\right) \frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\Theta_W} \mathrm{d}S*_L(\Theta) \qquad (8.74)\\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\Theta_W} S*'_\mathcal{L}(\Theta) \mathrm{d}\Theta + \frac{1}{2} \int_0^{\Theta_W} S*_\mathcal{L}(\Theta) \frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta}
\end{aligned}
$$

a tedy

$$S*_\mathcal{L}(\Theta_W) = \int_0^{\Theta_W} S*_\mathcal{L}(\Theta) \frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} = \int_0^{\Theta_W} \mathrm{d}S*_\mathcal{L}(\Theta) \quad \left[= \frac{2Q*(\Theta_W)}{\Theta_W}\right]$$

a tudíž $S*_\mathcal{L}(\Theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} = \mathrm{d}S*_\mathcal{L}(\Theta)$

Podle výsledku odvození (8.74) pro libovolnou teplotu Θ látky $\mathcal{L}$ platí, že[32]

$$S*_\mathcal{L}(\Theta) = l \cdot \Theta \ , \ l = \frac{2Q*(\Theta)}{\Theta^2}, \ \text{tedy } Q*(\Theta) = \lambda\Theta^2 \ , \ \lambda = \frac{l}{2} \qquad (8.75)$$

[32]Platí-li $\int \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}f(x)$, resp. platí-li $\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, pak platí, že

$$\ln|f(x)| = \ln|x| + \ln L, \quad L > 0, \quad \ln|f(x)| = \ln(L \cdot |x|), \quad f(x) = l \cdot x, \quad l \in R.$$

Zřejmě pak můžeme ve vztahu (8.73) pro $\Theta \in < T_0, T_W >$ psát

$$\Delta S*_{\mathcal{L}} = l \cdot (T_W - T_0) = lT_W \cdot (1 - \beta), \quad \beta = \frac{T_0}{T_W} \tag{8.76}$$

Uvažujeme reverzní tepelný cyklus takový, že systém $\mathcal{L}$ nabírá při elementárních izotermických expanzích při teplotách $\Theta \in < T_0, T_W >$ celkové teplo ΔQ_0,

$$\Delta Q_0 = \int_{T_0}^{T_W} \delta Q*(\Theta) = \int_{T_0}^{T_W} l\Theta \mathrm{d}\Theta = \frac{l}{2}\left({T_W}^2 - T_0^2\right) = Q*_W - Q*_0 \tag{8.77}$$

nebo, podle věty o střední hodnotě integrálního počtu,

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^{T_W} \delta Q*(\Theta) &= \int_{S*_{\mathcal{L}}(T_0)}^{S*_{\mathcal{L}}(T_W)} \Theta \mathrm{d}S*_{\mathcal{L}}(\Theta) = \overline{\Theta_{W_{(T_0,T_W)}}} \cdot [S*_{\mathcal{L}}(T_W) - S*_{\mathcal{L}}(T_0)] \quad (8.78)\\ &= \frac{T_W + T_0}{2} \cdot 2\left[\frac{Q*_W}{T_W} - \frac{Q*_0}{T_0}\right]\end{aligned}$$

a tedy stejně

$$\Delta Q_0 = (T_W + T_0) \cdot \lambda \cdot [T_W - T_0] = \lambda {T_W}^2 \cdot (1 - \beta^2), \quad \beta = \frac{T_0}{T_W}$$

Reverzní vratný Carnotův cyklus, ekvivalentní uvažovanému tepelnému cyklu, přečerpává stejné teplo ΔQ_0, spotřebuje stejnou mechanickou práci ΔA a odevzdá při své vyšší teplotě t_W (průměrná teplota ohříváku našeho obecnějšího cyklu) stejné teplo ΔQ_W. Platí, že

$$\Delta Q_0 = \Delta Q_W \cdot \gamma, \quad \text{kde} \quad \gamma = \frac{\frac{T_0 + T_W}{2}}{t_W} \tag{8.79}$$

je transformační poměr a tedy

$$\Delta Q_W = \Delta Q_0 \cdot \frac{2t_W}{T_0 + T_W} = \frac{l}{2}\left({T_W}^2 - {T_0}^2\right) \cdot \frac{2t_W}{T_0 + T_W} = lt_W(T_W - T_0) \tag{8.80}$$

Pro práci ΔA bude platit

$$\begin{aligned}\Delta A &= \Delta Q_W \cdot (1 - \gamma) = lt_W(T_W - T_0) \cdot \left(1 - \frac{T_0 + T_W}{2t_W}\right) \quad (8.81)\\ &= \frac{l}{2}(T_W - T_0) \cdot (2t_W - T_0 - T_W)\end{aligned}$$

Pro elementární práce $\delta A(\cdot,\cdot)$ odpovídající (celkovým) teplům $Q*(\Theta)$ vratně vydaným z $\mathcal{L}$ při (koncových, výstupních) teplotách Θ látky $\mathcal{L}$ a entropii $S*_{\mathcal{L}}(\Theta)$ našeho reverzního cyklu $\mathcal{O}_{rrev}$ platí

$$S*_{\mathcal{L}}(\Theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} = \frac{Q*(\Theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta}}{\Theta} \triangleq \frac{\delta A(\Theta, \mathrm{d}\Theta)}{\Theta} = \mathrm{dS}*_{\mathcal{L}}(\Theta) = l\mathrm{d}\Theta \tag{8.82}$$

a tedy

$$\delta A(\Theta, \mathrm{d}\Theta) = S*_{\mathcal{L}}(\Theta)\mathrm{d}\Theta = l\Theta\mathrm{d}\Theta$$

ale také lze psát

$$\delta A(\mathrm{d}\Theta, \mathrm{d}\Theta) = l\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\Theta = \mathrm{d}S*_{\mathcal{L}}(\Theta)\mathrm{d}(\Theta) \stackrel{\triangle}{=} \delta A$$

a potom

$$\left(\int_{T_0}^{\Theta} l\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\Theta = l(\Theta - T_0)\mathrm{d}\Theta \stackrel{\triangle}{=} \delta A(\Theta, \mathrm{d}\Theta; T_0)$$

Pro celkovou práci $\Delta A(\Theta_W; T_0)$ spotřebovanou naším reverzním cyklem $\mathcal{O}_{rrev}$ mezi teplotami T_0 a Θ_W, pokrytým elementárními cykly (8.82), tedy píšeme

$$\begin{aligned} \Delta A(\Theta_W; T_0) &\stackrel{\triangle}{=} \oint_{\mathcal{O}_{rrev(\Theta_W, T_0)}} \delta A = \int_{T_0}^{\Theta_W} \left[\int_{T_0}^{\Theta} \mathrm{d}S*_{\mathcal{L}}(\theta)\right] \mathrm{d}\Theta \qquad (8.83) \\ &= \int_{T_0}^{\Theta_W} \left[\int_{T_0}^{\Theta} l\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\Theta = l \cdot \int_{T_0}^{\Theta_W} (\Theta - T_0)\mathrm{d}\Theta \\ &= \frac{l}{2} \cdot ({\Theta_W}^2 - {T_0}^2) - l \cdot T_0(\Theta_W - T_0) \\ &= \frac{l}{2} \cdot {\Theta_W}^2 + \frac{l}{2} \cdot {T_0}^2 - \frac{2l}{2} \cdot T_0\Theta_W = \lambda \cdot (\Theta_W - T_0)^2 \end{aligned}$$

a potom

$$\Delta A = \lambda {T_W}^2 \cdot (1-\beta)^2, \quad \Theta_W = T_W, \quad \beta = \frac{T_0}{T_W}$$

Potom ale z výsledků pro ΔA ve (8.81) a (8.83) plyne, že

$$t_W = \frac{T_W + \Theta_W}{2} = T_W \quad \text{a tedy} \quad t_W = T_W = \text{konst.} \qquad (8.84)$$

Náš tepelný cyklus $\mathcal{O}_{rrev}$ má tedy tvar trojúhelníka ($\stackrel{\triangle}{=} \mathcal{O}_{rrev\triangle}$) o vrcholech

$$[lT_0, T_0], \ [lT_W, T_W], \ [lT_0, T_W] \qquad (8.85)$$

a účinnost

$$1 - \gamma = \frac{1-\beta}{2} = \frac{1}{2}\eta_{\max}$$

Není tedy návrat do počátečního stavu media $\mathcal{L}$ možný po libovolné křivce ale jen po orientovaných úsečkách $S - T$ diagramu

$$\overrightarrow{[lT_W, T_W], [lT_0, T_W]} \quad a \quad \overrightarrow{[lT_0, T_W], [lT_0, T_0]} \qquad (8.86)$$

Pro práci $\delta A(\Theta, \mathrm{d}\Theta; T_0)$ elementárních Carnotových cyklů s rozpětím pracovních teplot $\mathrm{d}\Theta$ pokrývajících náš cyklus $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ tvaru (8.85) a pro danou teplotu ohříváku

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

$\Theta \in <T_0, \Theta_W>$, $\Theta_W \in <T_0, T_W>$, pak, v souladu s (8.82), platí

$$\begin{aligned}\delta A(\Theta, \mathrm{d}\Theta; T_0) &= \Delta Q_W(\Theta) \cdot \frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} = l\Theta\,(\Theta - T_0)\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\Theta} = l(\Theta - T_0)\mathrm{d}\Theta \quad (8.87)\\ &= [S*_{\mathcal{L}}(\Theta) - S*_{\mathcal{L}}(T_0)] \cdot \mathrm{d}\Theta\end{aligned}$$

a protože

$$\begin{aligned}\Delta Q_W(\Theta) &= l\Theta\,(\Theta - T_0) \quad \text{pak podle (8.79)}\\ \Delta Q_0(\Theta) &= \Delta Q_W(\Theta) \cdot \gamma(\Theta) = l\Theta\,(\Theta - T_0) \cdot \frac{\Theta + T_0}{2\Theta} = \lambda\left(\Theta^2 - {T_0}^2\right)\end{aligned}$$

Pro celková ΔQ_0 a ΔQ_W vyměňovaná mezi pracovní látkou $\mathcal{L}$ celého našeho trojúhelníkového cyklu (8.85) a jeho okolím a pro práci ΔA, resp. pro jemu ekvivalentní cyklus Carnotův s pracovními teplotami $\frac{T_0 + T_W}{2}$ a T_W, pak bude platit[33]

$$\begin{aligned}\Delta Q_0 &= \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_0^{\Theta} l\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\Theta = \frac{l}{2}{T_W}^2(1 - \beta^2) \triangleq W \qquad (8.88)\\ &\left[W = l(T_W - T_0)T_0 + \frac{l}{2}(T_W - T_0)^2\right]\\ \Delta Q_W &= \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_0^{T_W} l\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\Theta l(T_W - T_0)T_W = l{T_W}^2(1 - \beta)\\ \Delta A &= \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_W} \left[\int_{T_0}^{T_W} l\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\Theta = l{T_W}^2(1 - \beta) - l{T_W}^2(1 - \beta)\\ &= l{T_W}^2(1 - \beta)[1 - \frac{l}{2}(1 + \beta)] = \frac{l}{2}{T_W}^2(1 - \beta)^2 = \oint_{\mathcal{O}_{rrev}} \delta A\end{aligned}$$

8.3 Obecný tepelný cyklus a přenosový kanál

V obecném tepelném cyklu $\mathcal{O}$ s diskrétně se měnícími teplotami lázní, chápaném jako přenosový proces v kanálu $\mathbf{K}$ realizovaném pracocvní látkou, termodynamickým systémem $\mathcal{L}$, budeme pracovat s veličinami

$$H(\Theta_k) \cdot \eta_{[max_k]} \triangleq \frac{\Delta Q(\Theta_k)}{\mathrm{k}\Theta_k} \cdot \eta_{[max_k]}, \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ n \qquad (8.89)$$

kde $n \geq 2$ je maximální počet elementárních Carnotových cyklů.

V obecném tepelném cyklu $\mathcal{O}$ se spojitě se měnícími teplotami lázní, tj. při $n \to \infty$ v předchozím diskrétním případě, chápaném jako přenosový proces v kanále $\mathbf{K} \cong \mathcal{L}$, budeme pracovat s veličinou

$$\mathrm{d}H(\Theta) \triangleq \frac{\delta Q(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} \ \text{kde}\ \delta Q(\Theta) = \frac{\partial Q(\Theta)}{\partial \Theta}\mathrm{d}\Theta \qquad (8.90)$$

[33]Dále položíme $\lambda = \frac{\pi^2 k^2}{6\hbar}$, $l = \frac{\pi^2 k^2}{3\hbar}$.

a tedy

$$\mathrm{d}H(\Theta) \;=\; \frac{\dfrac{\partial Q(\Theta)}{\partial \Theta}\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{k}\Theta}$$

Potom

$$\Delta Q(\Theta) = \int_0^{\Theta} \delta Q(\theta)\mathrm{d}\theta \quad \text{a} \quad H(\Theta) = \int_0^{\Theta} \frac{\delta Q(\theta)}{\mathrm{k}\theta}\mathrm{d}(\theta) \tag{8.91}$$

Veličina $\Delta Q(\Theta_k)$, $\Delta Q(\Theta)$ je změna tepla systému $\mathcal{L}$ při teplotě Θ_k, resp. Θ a veličina $H(\Theta_k) \cdot \eta_{[max_k]}$ resp. $\mathrm{d}H(\Theta)$ je pak 'elementární' resp. infinitezimálně malá změna[34] termodynamické entropie pracovní látky $\mathcal{L}$, v informačních jednotkách (tedy je chápána jako informační entropie).

V obecném tepelném cyklu resp. látce $\mathcal{L}$ v níž tento cyklus probíhá, pak zavádíme změny (elementárních) informačních entropií $h(X_k)$, $h(X_k|Y_k)$, $h(Y_k)$ a $h(Y_k|X_k)$ elementárních cyklů a změny (celkových) informačních entropií $H_n(X)$, $H_n(X|Y)$, $H_n(Y)$ a $H_n(Y|X)$, pro celkový cyklus diskrétní a $H(X)$, $H(X|Y)$, $H(Y)$ a $H(Y|X)$ pro celkový cyklus spojitý.
Pro tyto veličiny pak předpokládáme platnost kanálové rovnice (10.99)[35],

$$H(X) - H(X|Y) = H(Y) - HY|X$$

8.3.1 Obecný přímý vratný cyklus a přenosový kanál

V diskrétním tepelném cyklu $\mathcal{O}$ (s *diskrétně* proměnnými pracovními teplotami), pracujícím v *přímém* směru pak pro jeho jednotlivé 'elementární' vratné Carnotovy cykly $\mathcal{O}_k,\ k \in 1, 2, ..., \ n$ klademe[36]

$$\begin{aligned}
h(X_k) &= \frac{\Delta Q_{0_k}}{\mathrm{k}\Theta_{0_k}} = \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}, \qquad (8.92)\\
h(Y_k) &= h(X_k) \cdot \eta_{\max k} \triangleq \Delta I_k,\ \eta_{max_k} = \frac{\Theta_{W_k} - \Theta_{0_k}}{\Theta_{W_k}}\\
h(Y_k|X_k) &= 0\\
h(X_k|Y_k) &= \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}T_{W_k}} \cdot \beta_k = h(X_k) \cdot \beta_k
\end{aligned}$$

[34]Ve skutečnosti ale pro elementární, minimální, změny tepla Q platí

$$\delta Q = \hbar\nu$$

$\hbar$ je kvantová jednotka točivosti, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, h je Planckova konstanta

[35]viz Dodatky 10.5

[36]v souladu s definicemi a odvozeními uvedenými v literatuře [38] (IT I.)

Pro celkové entropie bude platit

$$\begin{aligned} H_n(X) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \sum_{k=1}^{n} h(X_k), \; k = 1, \; ..., \; n \qquad (8.93) \\ H_n(Y) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \cdot \eta_{\max_k} = \sum_{k=1}^{n} h(X_k)\eta_{\max k} \\ H_n(Y|X) &= 0 \\ H_n(X|Y) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} h(X_k)\beta_k \end{aligned}$$

Pro celkový obecný přímý vratný cyklus $\mathcal{O}$ se *spojitě* proměnnými pracovními teplotami a s extremálními teplotami $T_W > T_0 > 0$, pak položíme

$$\begin{aligned} H(X) &= \frac{S(T_W)}{\mathrm{k}} = \int_0^{T_W} \frac{\delta Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \qquad (8.94) \\ H(Y) &= \frac{S(T_W)}{\mathrm{k}} - \frac{S(T_0)}{\mathrm{k}} = \oint_{\mathcal{O}} \frac{\delta A(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}{T_W}^2} \cdot (T_W - T_0) \\ &= H(X) \cdot \eta_{\max}, \\ H(Y|X) &= 0, \\ H(X|Y) &= H(X) - H(Y) = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) - \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = \int_0^{T_0} \mathrm{d}H(\Theta) \\ &= \int_0^{T_0} \frac{\delta Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \frac{S(T_0)}{\mathrm{k}} = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}{T_W}^2} \cdot T_0 = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \cdot \frac{T_0}{T_W} = H(X) \cdot \beta \end{aligned}$$

Potom pro transinformaci $T(X;Y)$ platí, podle kanálové rovnice, podobně jako v případě cyklu se dvěma pracovními teplotami T_W a T_0, že

$$\begin{aligned} T(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) - \int_0^{T_0} \mathrm{d}H(\Theta) = \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = (8.95) \\ &= \oint_{\mathcal{O}} \frac{\delta A(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = H(Y) = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \cdot \eta_{\max} = H(X) \cdot (1 - \beta) = \Delta I \end{aligned}$$

Zřejmě platí, že $T(X;Y) = T(Y|X)$. Dále je také zřejmé, že transinformace T(X;Y) je i kapacitou C_{T_W,T_0} kanálu,

$$\begin{aligned} C_{T_W,T_0} &= T(X;Y) = H(X) = \oint_{\mathcal{O}} \frac{\delta A(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_{T_0}^{T_W} \frac{\delta Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} \qquad (8.96) \\ &= \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}{T_W}^2} \cdot (T_W - T_0) \\ C_{T_W,T_0}^{\max} &= H(X) \end{aligned}$$

8.3.2 Obecný přímý nevratný cyklus a přenosový kanál

V diskrétním tepelném cyklu $\mathcal{O}'$ (s *diskrétně* proměnnými pracovními teplotami), s extremálními pracovními teplotami T_W a T_0, pracujícím v přímém směru, pro

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

jeho jednotlivé 'elementární' Carnotovy cykly $\mathcal{O}'_k,\ k \in \{1, 2, ..., n\}$, bez újmy na obecnosti považované za nevratné pro libovolné k klademe[37]

$$\begin{aligned}
h(X_k) &= \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \frac{\Delta Q_{0_k}}{\mathrm{k}\Theta_{0_k}} \qquad (8.97)\\
h(Y_k) &= \frac{\Delta A'_{Wk}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}\\
&= \frac{\Delta Q_{W_k} - \Delta Q_{0_k} - \Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = h(X_k)\cdot \eta_{\max k} - \frac{\Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}\\
&= \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}\cdot \eta_k = h(X_k)\cdot \eta_k \stackrel{\triangle}{=} \Delta I'_k\\
h(X_k|Y_k) &= \frac{\Delta Q_{0k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \ \text{ a } \ h(Y_k|X_k) = -\frac{\Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{0_k}}\cdot \beta_k = -\frac{\Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}
\end{aligned}$$

a kde $\eta_k = \dfrac{\Delta A'_{W_k}}{\Delta Q_{W_k}}$ $\beta_k = \dfrac{\Theta_{0_k}}{\Theta_{W_k}},\ \Theta_{W_k} > \Theta_{0_k} > 0,\ k = 1, 2, ..., n.$

Pro celkové entropie bude platit

$$\begin{aligned}
H_n(X) &= \sum_{k=1}^{n} h(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}, \qquad (8.98)\\
H_n(Y) &= \sum_{k=1}^{n} h(Y_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta A'_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k} - \Delta Q_{0_k} - \Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \sum_{k=1}^{n} h(X_k)\eta_{\max k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_W}{\mathrm{k}\Theta_W}\cdot \eta_k = \sum_{k=1}^{n} h(X_k)\eta_k \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=1}^{n} \Delta I'_k\\
H_n(X|Y) &= \sum_{k=1}^{n} h(X_k|Y_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{0_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}\beta_k = \sum_{k=1}^{n} h(X_k)\beta_k \qquad (8.99)\\
H_n(Y|X) &= \sum_{k=1}^{n} h(Y_k|X_k) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{0_k}}\beta_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{0x_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}}\\
&\beta_k > 0,\ \beta_k = \frac{\Theta_{0_k}}{\Theta_{W_k}},\ k = 1, 2, ..., n
\end{aligned}$$

Pro celkový obecný nevratný cyklus $\mathcal{O}'$ se *spojitě* proměnnými pracovními teplotami, s extremálními teplotami $T_W > T_0 > 0$, pracující v přímém směru, máme

$$\begin{aligned}
H(X) &= \frac{S(T_W)}{\mathrm{k}} = \int_0^{T_W} \frac{\delta Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \qquad (8.100)\\
H(Y) &= \oint_{\mathcal{O}'} \frac{\delta A'(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_{T'_0}^{T_W} \frac{\delta Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_{T'_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta)
\end{aligned}$$

[37] v souladu s definicemi a odvozeními uvedenými v literatuře [38] (IT I.)

pro T'_0 platí $$\frac{\Delta Q_W - \Delta Q_0 - \Delta Q_{0x}}{\Delta Q_W} = \frac{T_W - T'_0}{T_W} = \eta$$

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= -\int_0^{T_W} \frac{\delta Q_{0x}(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} \\
H(X|Y) &= H(X) - H(Y) = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) - \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = \int_0^{T_0} \mathrm{d}H(\Theta) \\
&= \int_0^{T_0} \frac{\partial Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \frac{S(T_0)}{\mathrm{k}} = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}{T_W}^2} \cdot T_0 = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \cdot \frac{T_0}{T_W} \\
&= H(X) \cdot \beta
\end{aligned}$$

Pro transinformaci $T(X;Y)$ pak platí, stejně jako v případě kanálu bez šumu s extrmálními teplotami T_W a T_0, že

$$\begin{aligned}
T(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) \qquad (8.101) \\
&= \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) - \int_0^{T_0} \mathrm{d}H(\Theta) = \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = H(X) \cdot \eta_{\max}
\end{aligned}$$

Rovněž zřejmě platí, že $T(X;Y) = T(Y;X)$ neboť

$$\begin{aligned}
T(Y;X) &= H(Y) - H(Y|X) \qquad (8.102) \\
&= \oint_{\mathcal{O}'} \frac{\delta A'(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} - \left(-\int_0^{T_W} \frac{\delta Q_{0x}(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta}\right) \\
&= \int_0^{T_W} \frac{\delta Q_W(\Theta) - \delta Q_0(\Theta) - \delta Q_{0x}(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} + \int_0^{T_W} \frac{\delta Q_{0x}(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} \\
&= \oint_{\mathcal{O}} \frac{\delta A(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = H(X) \cdot \eta_{\max}
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že

$$T(X|Y) = C_{T_W,T_0},\ C^{\max}_{T_W,T_0} = H(X) \qquad (8.103)$$

8.3.3 Obecný reverzní vratný cyklus a přenosový kanál

V k-tém elementárním (Carnotově) cyklu $\mathcal{O}_k$ diskrétního obecného vratného tepelného cyklu $\mathcal{O}$, pracujícího reverzně klademe[38]

$$\begin{aligned}
h(X_k) &= \frac{\Delta A_k}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \qquad (8.104) \\
h(Y_k) &= \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \frac{\Delta Q_{0_k} + \Delta A_k}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \triangleq \Delta I_k \\
h(Y_k|X_k) &= \frac{\Delta Q_{0_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \cdot \beta_k = h(Y_k) \cdot \beta_k \\
h(X_k|Y_k) &= 0
\end{aligned}$$

[38] v souladu s definicemi a odvozeními uvedenými v literatuře [38] (IT I.)

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Pro celkové změny entropií bude platit

$$
\begin{aligned}
H_n(X) &= \sum_{k=1}^{n} h(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta A_K}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \\
H_n(Y) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \sum_{k=1}^{n} h(Y_k) \\
H_n(Y|X) &= \sum_{k=1}^{n} h(Y_k|X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{0_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta Q_{W_k}}{\mathrm{k}\Theta_{W_k}} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} h(Y_k)\beta_k \\
H_n(X|Y) &= 0
\end{aligned}
\tag{8.105}
$$

Pro celkový obecný vratný cyklus $\mathcal{O}_{rev}$ se *spojitě* proměnnými pracovními teplotami a s extremálními teplotami $T_W > T_0 > 0$, pak položíme

$$
\begin{aligned}
H(X) &= \frac{S(T_W)}{\mathrm{k}} - \frac{S(T_0)}{\mathrm{k}} = \oint_{\mathcal{O}_{rev}} \frac{\delta A(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) \\
&= \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}{T_W}^2} \cdot (T_W - T_0) = H(Y) \cdot \eta_{\max} \\
H(Y) &= \frac{S(T_W)}{\mathrm{k}} = \int_0^{T_W} \frac{\delta Q_W(\Theta_W)}{\mathrm{k}\Theta_W} = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \\
H(Y|X) &= H(Y) - H(X) = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) - \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) = \int_0^{T_0} \mathrm{d}H(\Theta) \\
&= \int_0^{T_0} \frac{\partial Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \frac{S(T_0)}{\mathrm{k}} = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}{T_W}^2} \cdot T_0 = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \cdot \frac{T_0}{T_W} = H(X) \cdot \beta \\
H(X|Y) &= 0
\end{aligned}
\tag{8.106}
$$

Potom pro transinformaci $T(X;Y)$ platí, stejně jako v případě reverzního cyklu se dvěma pracovními teplotami T_W a T_0, že

$$
\begin{aligned}
T(Y;X) &= H(Y) - H(Y|X) = \int_0^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) - \int_0^{T_0} \mathrm{d}H(\Theta) = \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}H(\Theta) \\
&= \oint_{\mathcal{O}_{rev}} \frac{\delta A(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \cdot \eta_{\max} = H(Y) \cdot \eta_{\max} = H(X) = \Delta I
\end{aligned}
\tag{8.107}
$$

Zřejmě platí, že $T(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = T(Y|X)$. Dále je zřejmé, že transinformace T(X;Y) je i kapacitou C_{T_W,T_0} kanálu,

$$
\begin{aligned}
C_{T_W,T_0} &= T(X;Y) = H(X) = \oint_{\mathcal{O}_{rev}} \frac{\delta A(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} = \int_{T_0}^{T_W} \frac{\delta Q_W(\Theta)}{\mathrm{k}\Theta} \\
&= \frac{2\Delta Q_W}{\mathrm{k}{T_W}^2} \cdot (T_W - T_0) \\
C_{T_W,T_0}^{\max} &= H(Y)
\end{aligned}
\tag{8.108}
$$

Lze uvažovat i jiné 'informační' uspořádání reverzního Carnotova cyklu[39] v němž budou zvoleny ekvivalence

$$\Delta Q_0 \equiv H(X), \quad \Delta Q_W \equiv H(Y) \ \text{ a } \ \Delta A \equiv H(Y|X), \quad H(X|Y) = 0. \tag{8.109}$$

[39] viz Dodatky 10.6

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

9. Fyzikální přenosové systémy a termodynamika

Ze vztahů (5.23), (5.46) a (5.65) pro kapacity úzkopásmových kanálů B–E, F–D a M–B typu vyplývá, že

$$e^{-\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_W}} \cdot e^{\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}} \;\geq\; 1, \quad e^{\frac{\varepsilon}{\mathrm{k}T_0}\left(\frac{T_W - T_0}{T_W}\right)} \geq e^0$$

Pro $\varepsilon > 0,\ T_0 > 0$ je $T_W \geq T_0$ a pak

$$\frac{T_W - T_0}{T_W} \triangleq \eta_{\max} \geq 0 \tag{9.1}$$

Je tedy teplota pro tyto a všechny další výše studované přenosy informace rozhodující veličina. Předchozí vztah nutně evokuje názor, že tyto přenosy lze modelovat přímým reverzibilním Carnotovým cyklem s účinností $\eta_{max} \in < 0, 1)$. Pokud nějakým termodynamickým cyklem, mimo jiné, nejsou přímo realizovány; ukážeme ale, že nejsou, že tak jak jsou konstruovány, samy o sobě, nejsou ani cyklickými procesy.[40] Podmínky vedoucí ke vztahu $C_{[\cdot|\cdot|\cdot]} < 0$ ale v našem (přímém) cyklickém termodynamickém modelu znamenají, že pro jeho účinnost platí $\eta_{\max} < 0$; tento spor I. větou termodynamickou resp. s *Ekvivalenčním principem termodynamiky* [38] (IT I.) jen nutně vyjadřuje to, že přenos probíhá v opačném směru.

Prozkoumejme ještě vztah mezi informační kapacitou širokopásmových kanálů a tepelnou účinností z (9.1) transformace tepla v modelovém vratném Carnotově cyklu.

Pro kapacitu B–E kanálu (5.98) platí

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h}\left(\frac{T_W - T_0}{T_W}\right) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h}\,\eta_{\max} \underset{\eta_{\max}\to 1}{\longrightarrow} \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h}$$

Tedy platí[41]

$$C^{\max}(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} = \sup_{\boldsymbol{\theta}} H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{i}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})$$

[40] Uvažujeme-li hodnoty W a $E(\boldsymbol{\alpha})$ v analyzovaných přenosových kanálech $\mathcal{K}$ realizovaných fyzikálními systémy $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{B-E}}$, $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{F-D}}$ a $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{M-B}}$ jako průměrné počty nosičů energie ε za *jednotku času*, mají veličiny $\varepsilon \cdot W$, $\varepsilon \cdot E(\boldsymbol{\alpha})$ význam *průměrného výkonu* na jednotku odporu prostředí tvořeného systémem (Ψ, L_*).

V případě F–D přenosového kanálu se jedná o výkony elektrických proudů $\sqrt{\varepsilon \cdot W}$, $\sqrt{\varepsilon \cdot E(\boldsymbol{\alpha})}$ na odporu $R = 1\Omega$. Veličina $\varepsilon \cdot W$ je pak střední jednotkový výkon modulačního proudu vstupujícího do přenosového vedení.

[41] $C^{\max} = C^{\max}(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}})$ když platí $q_\varepsilon(\alpha|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = p_\varepsilon(\alpha|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) = p_\varepsilon(\alpha)$, $\varepsilon \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$ resp. $q(\overline{\alpha}|\boldsymbol{\theta}) = p(\overline{\alpha}|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$ a to pro všechny tři typy uvažovaných přenosových kanálů.

Tedy pro $T_W > T_0$ platí

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) > 0$$

Pro $T_W \to T_0$ platí

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) \underset{\substack{T_W \to T_0 \\ (\eta_{\max} \to 0)}}{\longrightarrow} 0$$

Tedy

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h}\,\eta_{\max} \in \left\langle 0,\, \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} \right) = \langle 0,\, \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})) \tag{9.2}$$

Jedná se o informační kapacitu Carnotova cyklu přímého, kde $H(X) = \dfrac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h}$.
Pro kapacitu F–D a M–B kanálu ze (5.106) a (5.120) platí

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} - \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{6h}$$

a pro $T_W > T_0$ platí

$$\begin{aligned} C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) &= \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} \cdot \frac{2T_W - T_0}{2T_W} = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} \cdot \frac{2T_W - T_0}{2(T_W - T_0)} \cdot \eta_{\max} \\ &= C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) \cdot \frac{2T_W - T_0}{2(T_W - T_0)} \end{aligned} \tag{9.3}$$

Protože

$$1 - \eta_{\max} = \frac{T_0}{T_W},\ \text{ je }\ T_0 = T_W(1 - \eta_{\max})$$

píšeme

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h} \cdot (1 + \eta_{\max}) \underset{\eta_{\max} \to 1}{\longrightarrow} \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h}$$

a také

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) \underset{\substack{T_W \to T_0 \\ (\eta_{\max} \to 0)}}{\longrightarrow} \frac{1}{2} H(\boldsymbol{i}) = \frac{1}{2}\,\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h}$$

Tedy

$$C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) \in \left\langle \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h},\, \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} \right) = \left\langle \frac{1}{2}\,\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}),\, \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) \right) \tag{9.4}$$

Opět se jedná o projev efektu nenulové kapacity při nulovém rozdílu teploty kódování T_W a teploty měření (šumu) T_0, tentokrát pro širokopásmový případ F–D a M–B kanálů.

Kapacity $C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D|M-B}}) \geq 0$ lze jistě uvažovat i pro $T_W \in < \dfrac{T_0}{2}, T_0 >$.

Kapacity $C(\mathbf{K}_{\mathrm{B-E}}) < 0$, $C(\mathbf{K}_{\mathrm{F-D}}) < 0$ a $C(\mathbf{K}_{\mathrm{M-B}}) < 0$ nemají smysl pro daný směr přenosu informace.

Dále se budeme zabývat vztahem mezi cyklicky organizovaným širokopásmovým kanálem B–E a jemu odpovídajícím (reverzním) tepelným cyklem.
Nejdříve si ale připomeneme postup jímž byla, Lebeděvem a Levitinem [67], odvozena kapacitní formule ve fyzikálním systému fotonů (Bose–Einsteinově systému *bosonů*).

9.1 Širokopásmový fotonový přenosový kanál

Přenosový kanál $\mathbf{K}_{\mathrm{L-L}}$ je tvořen elektromagnetickým zářením systému fotonů $\mathcal{L}$ absolutně černého tělesa při teplotě T_0 (energie tohoto záření je energií *šumu*), v šířce pásma $\Delta\nu = R^+$, kde ν je frekvence.
Vysílač, zdroj vstupních zpráv (vstupních signálů x) vysílá do tohoto prostředí monochromatické elektromagnetické impulsy (počty a_i fotonů) o průměrném (vstupním) výkonu W.
Na výstupu kanálu $\mathbf{K}_{\mathrm{L-L}}$ předpokládáme ideální frekvenční analyzátor, který produkuje přesnou expanzi spektra výstupního (přijatého, celkového) signálu (výstupní zprávy y). Výstupní signál je tvořen *aditivní* superpozicí vstupního signálu a šumu. K rozlišení dvou frekvencí lišících se o infinitezimální dν je třeba, v souladu s principem neurčitosti (Heisenberg), nekonečně dlouhého času, $\Delta t \longrightarrow \infty$.[42]
Všechna tři elektromagnetická pole zúčastněná na přenosu informace (vstupní, šumové, výstupní-celkové) předpokládáme *jednodimenzionální*. To znamená, že všechny fotony mají tutéž *polarizaci* a týž *směr* vlnových vektorů.

Zdroj zpráv je definován abecedou vstupních zpráv, signálů $\{a_i\}_{i=1}^n$ s rozdělením pravděpodobnosti $p_i = p(a_i)$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$.
Vstupní signál a_i, tj. počet přenášených fotonů, uvádí přenosový kanál $\mathcal{K}$ (fyzikální systém $\mathcal{L}$ tvořený širokopásmovým elmg. polem, vyzařovaným při teplotě T_0) do stavu A_i. Obecně se jedná o *makrostav, Planckův komplex*, jehož statisticky definovaná *fyzikální* entropie (v informačních jednotkách *nat*) je elekromagnetický

$$H(A_i) \stackrel{\triangle}{=} H_i = -\sum_k w_{ik} \ln w_{ik}$$

kde w_{ik} je pravděpodobnost $k-$ tého *mikrostavu* fyzikálního systému, realizujícího makrostav A_i. *Průměrná* entropie makrostavu fyzikálního systému $\mathcal{L}$ je

$$\overline{H}_a = \sum_i p_i H_i$$

Protože w_k jsou pravděpodobnosti mikrostavů k systému $\mathcal{L}$, platí, že

$$\sum_k w_k = 1$$

[42]V terminologii klasické termodynamiky se jedná o kvazistacionární (tedy vratný) proces.

kde

$$w_k = \sum_i p_i w_{ik},$$

je výrazem

$$H = -\sum_k w_k \ln w_k$$

definována *maximální* entropie fyzikálního systému $\mathcal{L}$, určená nejjemnější možnou disjunktní dekompozicí množiny mikrostavů (tj. rozkladem na jednoprvkové podmnožiny $\{k\}$) v rovnovážném stavu systému $\mathcal{L}$.
Je zřejmé, že indexpozorovatel

$$\overline{H_a} \leq H \leq \ln n$$

kde n je mohutnost množiny mikrostavů.
Rozdíl

$$\Delta H = H - \overline{H}_a$$

nazýváme *defekt* entropie. Ten určuje průměrnou 'vzdálenost' stavů A_i fyzikálního systému $\mathcal{L}$, vynucovaných působením vstupních signálů a_i, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ od stavu, kdy je systém od zdroje zpráv izolován, má teplotu T_0 a nachází se v rovnovážném stavu s entropií $H(T_0)$.
Brillouin [11] postuluje (průměrné) *množství informace* ΔI, které pozorovatel může o pozorovaném systému $\mathcal{L}$ obdržet, právě defektem entropie,[43]

$$\Delta H \overset{\mathrm{Def}}{=} \Delta I$$

Vstupní signál a_i ve frekvenci ν reprezentujeme *obsazovacím* číslem $m = m(\nu)$, tj. počtem fotonů vstupního elektromagnetického pole na energetické hladině $\varepsilon(\nu) = h\nu$.
Šum, resp. počet fotonů záření absolutně černého tělesa při teplotě T_0, reprezentujeme obsazovacím číslem $n = n(\nu)$.
Výstupnímu (celkovému, přijatému) signálu přísluší obsazovací číslo $l = l(\nu)$.
Střední hodnoty těchto veličin, tj. *spektrální* hustoty vstupního, šumového a celkového fotonového proudu označujeme $\overline{m},\ \overline{n},\ \overline{l}$.
Je-li $P_{\Delta\nu}$ výkon vstupního signálu v šířce (přenosového) pásma $\Delta\nu$, je výrazem

$$P_S(\nu) = \frac{P_{\Delta\nu}}{\Delta\nu}$$

definována *spektrální výkonová* hustota vstupního pole a pro střední výkon vstupního signálu v šířce pásma dν platí

$$P_S(\nu)\mathrm{d}\nu = \overline{m}h\nu\mathrm{d}\nu$$

[43] Jedná se o tzv. Brillouinův *negentropický* princip informace.

Je-li spektrální výkonová hustota šumu $\varepsilon_1(\nu)$, pak pro střední výkon šumu v šířce pásma dν platí

$$\varepsilon_1(\nu)\mathrm{d}\nu = \overline{n}(\nu)h\nu\mathrm{d}\nu.$$

Podle Planckova *vyzařovacího* zákona je spektrální hustota záření (fotonového proudu) absolutně černého tělesa při teplotě Θ a ve frekvenci ν dána tzv. *Planckovou distribucí* indexhustota!spektrální

$$\frac{p(\nu,\Theta)}{1-p(\nu,\Theta)},\ p(\nu,\Theta) = e^{-\frac{h\nu}{\mathrm{k}\Theta}}$$

Pro střední počet fotonů při teplotě T_0 a ve frekvenci ν (šum) tedy platí

$$\overline{n}(\nu) = \frac{p(\nu,T_0)}{1-p(\nu,T_0)},\ p(\nu,T_0) = e^{-\frac{h\nu}{\mathrm{k}T_0}}$$

Pro střední výkon P_1 šumu v šířce pásma $\Delta\nu = R^+$ a při teplotě T_0 pak platí

$$P_1(T_0) = \int_0^\infty \varepsilon_1(\nu,T_0)\mathrm{d}\nu = \frac{\pi^2\mathrm{k}^2{T_0}^2}{6h},\ \varepsilon_1(\nu,T_0) = \overline{n}(\nu)h\nu \tag{9.5}$$

Pro výkon fotonového pole jako funkci teploty Θ tedy platí

$$P(\Theta) = \frac{\pi^2\mathrm{k}^2\Theta^2}{6h},\ \frac{\mathrm{d}P(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta} = \frac{\pi^2\mathrm{k}^2\Theta^2}{3h}$$

Entropii H_1 šumu širokopásmového fotonového kanálu určíme z termodynamické (Clausiovy) definice (tepelné) entropie

$$H_1 = \int_0^{T_0} \frac{1}{\mathrm{k}\Theta}\frac{\mathrm{d}P_1(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}\mathrm{d}\Theta = \frac{\pi^2\mathrm{k}T_0}{3h} \quad \text{a tedy} \quad H_1 = \frac{2P_1}{\mathrm{k}T_0} \tag{9.6}$$

Defekt entropie ΔH je *maximální*, nachází-li se fyzikální systém $\mathcal{L}$, tj. nyní, celkové elektromagnetické pole v termodynamickém equilibriu při teplotě kódování T_W, odlišném od rovnováhy $\mathcal{L}$ při teplotě T_0, při nepřítomnosti vstupního signálu.
Soubor mikrostavů při teplotě T_W pak odpovídá Gibbsovu *kanonickému* souboru a spektrální hustota výstupního fotonového proudu (celkového pole) je určena Planckovou distribucí

$$\overline{l}(\nu) = \frac{p(\nu,T_W)}{1-p(\nu,T_W)},\ (\nu,T_W) = e^{-\frac{h\nu}{\mathrm{k}T_W}}$$

Je-li spektrální výkonová hustota výstupního signálu $\varepsilon_2(\nu)$, pak pro střední výstupní výkon v šířce pásma dν platí

$$\varepsilon_2(\nu)\mathrm{d}\nu = \overline{l}(\nu)h\nu\mathrm{d}\nu$$

Pro střední výstupní výkon P_2 v šířce pásma $\Delta\nu = R^+$ a při teplotě T_W platí

$$P_2(T_W) = \int_0^\infty \varepsilon_2(\nu, T_W)\mathrm{d}\nu = \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 T_W^2}{6h},\ \varepsilon_2(\nu, T_W) = \bar{l}(\nu)h\nu \tag{9.7}$$

Entropie H_2 výstupního signálu, resp. celkového fotonového proudu a tedy celková (výstupní) entropie fyzikálního systému $\mathcal{L}$ je

$$H_2 = \int_0^{T_W} \frac{1}{\mathrm{k}\Theta}\frac{\mathrm{d}P(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}\mathrm{d}\Theta = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} \quad \text{a tedy} \quad H_2 = \frac{2P_2}{\mathrm{k}T_W} \tag{9.8}$$

Informační kapacita C_{T_W,T_0} širokopásmového fotonového kanálu (maximální defekt entropie) je

$$C_{T_0,T_W} = H_2 - H_1 = \int_{T_0}^{T_W} \frac{1}{\mathrm{k}\Theta}\frac{\mathrm{d}P(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}\mathrm{d}\Theta = \frac{\pi^2 k}{3h}\int_{T_0}^{T_W}\mathrm{d}\Theta = \frac{\pi^2 k}{3h}\cdot(T_W - T_0)$$

Protože $P_2 = P_1 + W$, kde W je průměrná energie vstupního signálu, platí

$$\frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_W}^2}{6h} = \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}{6h} + W \quad \text{a tudíž} \quad T_W = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{6h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}}$$

Potom

$$\begin{aligned} C_{T_0,W}(\mathbf{K}_{\mathrm{L-L}}) &= \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h}\cdot\left(\sqrt{1 + \frac{6h\cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - 1\right) \\ \lim_{T_0 \to 0} C_{T_0,W}(\mathbf{K}_{\mathrm{L-L}}) &= \pi\sqrt{\frac{2W}{3h}} \\ C_{T_0,W}(\mathbf{K}_{\mathrm{L-L}}) &\doteq \frac{W}{\mathrm{k}T_0},\quad W < \frac{\pi^2 k^2 T_0^2}{6h} \end{aligned} \tag{9.9}$$

shodně se (5.103), (5.104), (5.105).[44]
V předchozím odvozování kapacity $C_{T_0,W}(\mathbf{K}_{\mathrm{L-L}})$ jsme uvažovali takto.
Výstupní zpráva kódovaná součtem P_2 vstupní energie W vstupní zprávy a šumové energie P_1 šumové zprávy, je přijímána, dekódována za koncové, výstupní teploty $\Theta \in (0, T_W >$ přenosového kanálu, media $\mathcal{L}$.
Termodynamická entropie $S*_{\mathcal{L}}$ media $\mathcal{L}$ je pak určena touto hodnotou P_2 energie výstupního signálu, $P_2 = W + P_1$, redukovanou průměrnou výstupní teplotou $\frac{T_W}{2}$.
Průměrná šumová informace H_1 ve výstupní zprávě určena energií P_1 teplotně redukovanou teplotou $\frac{T_0}{2}$.
Ale, ve skutečnosti se při každé hodnotě Θ jedná se o průměrnou energii výstupní zprávy, $P_2(\Theta)$, danou součtem průměrné energie vstupní zprávy, $W(\Theta, \theta)$,

[44]Zřejmě je vhodnější nazývat teplotu T_W *teplotou dekódování.*

a průměrné energie šumové zprávy, $P_1(\theta)$, při průměrné teplotě $\frac{\Theta}{2}$; uvažujeme, že $\Theta \in (0, \Theta_W >$ a $\theta \in (0, \Theta_0 >$; $\Theta_W \leq T_W$, $\Theta_0 \leq T_0$. Tato průměrná teplota (podle věty o střední hodnotě integrálního počtu) příjmu výstupní zprávy, výstupního signálu určuje i entropii H_1.
V této úvaze je rozdíl oproti úvaze vedoucí ke vztahu (9.6) a plyne z ní následující (a první) korekce kapacitního vzorce (9.9) ale i (5.103).

9.2 Korekce kapacity širokopásmového fotonového kanálu

Průměrná energie $P_2(\Theta_W)$ výstupní zprávy, přijímané v intervalu $(0, T_W >$ teploty Θ media $\mathcal{L}$ (kanálu) (když pro teplotu Θ platí $0 < \Theta_0 \leq \Theta \leq \Theta_W$, $\Theta_0 \leq T_0$, $\Theta_W \leq T_W$) je dána součtem vstupní průměrné energií $W(\Theta_W, \Theta_0)$ a průměrné energii $P_1(\Theta_0)$ aditivního šumu (jehož maximální teplota je Θ_0, maximální teplota výstupu, celkové výstupní zprávy je Θ_W),

$$P_2(\Theta_W) = P_1(\Theta_0) + W(\Theta_W, \Theta_0) \tag{9.10}$$

nese průměrnou výstupní informaci (informační entropii) $H_2(\Theta_W)$.
Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu lze, pro jistou maximální teplotu $\Theta_W \leq T_W$ teploty $\Theta \in (0, \Theta_W >$, uvažovat, že příjem výstupní zprávy probíhá za průměrné (konstantní) teploty $\overline{\Theta_W} = \frac{\Theta_W}{2}$. Potom pro celkovou změnu výstupní informační entropie (průměrného výstupního informačního množství) $\Delta H_2 \triangleq H_2(\Theta_W)$ [termodynamickou entropii $S*_{\mathcal{L}}(\Theta_W)$ v informačních jednotkách] platí

$$\begin{aligned} H_2(\Theta_W) &= \frac{P_2(\Theta_W)}{\mathrm{k}\overline{\Theta_W}} = \frac{P_1(\Theta_0) + W(\Theta_W, \Theta_0)}{\mathrm{k}\overline{\Theta_W}} \\ &\triangleq H_1(\Theta_W, \Theta_0) + H[W(\Theta_W, \Theta_0)] \end{aligned} \tag{9.11}$$

Protože podle (8.72) platí

$$\begin{aligned} Q*(\Theta) &= \lambda \Theta^2 \\ \delta Q*(\Theta) &= l \Theta \mathrm{d}\Theta \end{aligned}$$

lze pro $\Theta \in (0, T_0 >$ a $\Theta \in (0, T_W >$ psát, že

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H_{\Theta_W}(Y) &= \frac{\delta Q*(\Theta_W)}{\mathrm{k}\Theta_W} = \frac{l}{\mathrm{k}} \mathrm{d}\Theta_W \\ \mathrm{d}H_{\Theta_W}(Y|X) &= \frac{2l\Theta \mathrm{d}\Theta}{\mathrm{k}\Theta_W} \end{aligned} \tag{9.12}$$

Pro $\Theta_W = T_W$ a $\Theta_0 = T_0$ a redukci teplotou $\frac{T_W}{2}$ označujeme a definujeme rovnosti

$$P_2 = W + P_1 \triangleq Q*_W = \lambda {T_W}^2 \triangleq Y \tag{9.13}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

$$
\begin{aligned}
H_2 &\triangleq H(Y) = \int_0^{T_W} \frac{l}{\mathrm{k}} \mathrm{d}\Theta_W = \frac{l}{\mathrm{k}} T_W \\
&= \frac{P_2}{\mathrm{k}\frac{T_W}{2}} = \frac{2(W+P_1)}{\mathrm{k}T_W} = \frac{2\lambda {T_W}^2}{\mathrm{k}T_W} = \frac{lT_W}{k} \\
P_1 &\triangleq Q{*}_0 = \lambda {T_0}^2 \triangleq Y|X \\
H_1 &\triangleq H(Y|X) = \int_0^{T_0} \frac{2l\Theta \mathrm{d}\Theta}{\mathrm{k}T_W} = \frac{l}{\mathrm{k}T_W} {T_0}^2 \\
&= \frac{P_1}{\mathrm{k}\frac{T_W}{2}} = \frac{2\lambda {T_0}^2}{\mathrm{k}T_W} = \frac{l{T_0}^2}{\mathrm{k}T_W} \\
W &= Q{*}_W - Q{*}_0 \triangleq X \\
H[W(T_W, T_0)] &\triangleq H(X) = \frac{W}{\mathrm{k}\frac{T_W}{2}} = \frac{2\lambda}{\mathrm{k}T_W} \cdot ({T_W}^2 - {T_0}^2)
\end{aligned}
$$

Podle kanálové rovnice (10.99) a (10.104),[45] pro transinformace $T(\cdot;\cdot)$ a ztrátovou entropii $H(X|Y)$ musí platit a také v souladu s definicemi (9.13) platí, že

$$
\begin{aligned}
T(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) = \frac{l}{\mathrm{k}} \cdot (T_W - T_0) \cdot (1+\beta) = H(X) \qquad (9.14)\\
H(X|Y) &= 0 \\
T(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) = H(X)
\end{aligned}
$$

Dále položíme $\lambda = \dfrac{\pi^2 \mathrm{k}^2}{6h}$, $\quad l = 2\lambda$ a $\beta = \dfrac{T_0}{T_W}$. Pro transinformaci platí (9.14) a s použitím (9.9) a při dosazení za l a po úpravě píšeme

$$
\begin{aligned}
T(Y;X) &= H(Y) - H(Y|X) = \frac{\pi^2 \mathrm{k}}{3h} T_W \cdot (1-\beta^2) \qquad (9.15)\\
&= \frac{\pi^2 k}{3h} T_W \cdot (1-\beta) \cdot (1+\beta) = C_{T_0,W}(\mathbf{K}_{\mathrm{L-L}}) \cdot (1+\beta) = T(X,Y)
\end{aligned}
$$

Pro dané extremální teploty T_0 a T_W je takto stanovená hodnota transinformace $T(X;Y)$ jedinou a tedy je i kapacitou $C'_{T_0,T_W}(W)$ našeho kanálu,

$$
C'_{T_0,T_W} = (W) = T(X;Y) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{6h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - 1 \right) \cdot (1+\beta) \qquad (9.16)
$$

Je tedy takto počítaná informační kapacita (9.16) širokopásmového přenosového fotonového kanálu ze [67] $(1+\beta)$-krát větší než stanovovalo odvození (9.9).
Důvod tohoto výsledku je v tom, že v případech (9.9) a (9.16) se jedná o různé informační popisy orientované úsečky $\overrightarrow{[l0,0],[lT_W,T_W]}$ na jedné přímce složené ze dvou orientovaných úseček v $S-T$ diagramu,

$$
\overrightarrow{[l0,0],[lT_0,T_0]} \text{ a } \overrightarrow{[lT_0,T_0],\ [lT_W,T_W]} \qquad (9.17)
$$

[45]Viz Dodatky 10.5

První z úseček představuje 'fázi generování' šumu a druhá 'fázi generování' vstupního signálu a celková úsečka 'fázi generování' celkového, výstupího signálu. [Pro kapacitu (9.9) jsme použili redukci $\frac{T_0}{2}$ a $\frac{T_W}{2}$ resp. T_W v přímém carnotovském modelu s teplotami T_W a T_0; v něm ale platí $X = \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 T_W^2}{3h}$.
Pro kapacitu (9.16) jsme použili $\frac{T_W}{2}$ a v přímém carnotovském modelu s teplotami T_W a T_0 by platilo $X = \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 T_W^2}{3h} \cdot (1+\beta)$.]

Pro trvalý, ve smyslu opakovatelný, cyklický, přenos informace je ale nutné obnovení počátečního stavu přenosového kanálu ($\cong \mathcal{L}$) po uskutečnění každého jednotlivého aktu 'odeslání vstupní a příjmu výstupní zprávy'.

Při odvození formule (9.16) ale i formulí (5.103) a (9.9) se ale tento návrat fyzikálního prostředí $\mathcal{L}$ realizujícího přenosový kanál, po uskutečnění každého jednotlivého aktu 'odeslání vstupní a příjmu výstupní zprávy', do počátečního, výchozího stavu buď neuvažuje a nebo naopak, návrat kanálu ($\cong \mathcal{L}$) do počátečního stavu se uvažuje ale tak, že se realizuje otevřením celého přenosového řetězce a následným pokrytím energetických požadavků na tento přechod z jiných zdrojů, než jsou ve vlastním přenosovém řetězci k dispozici.
V obou případech je ale splněna kanálová rovnice[46] a tak lze každý jednotlivý akt přenosu informace modelovat opětovným spouštěním jejich cyklických termodynamických modelů. Neznamená to ale že sama konstrukce studovaných přenosů je cyklická 'sama o sobě'.[47]

Pokud ale pro vytvoření cyklu použijeme pouze zdrojů přenosového řetězce je třeba

[46]Viz Dodatky 10.5

[47]Nesestrojíme tepelný cyklus správně informačně popsaný bez opravené teplotní redukce. Pokud bychom na trojúhelníku $[l0, 0]$, $[lT_W,\ T_W]$, $[l0, T_W]$ uvažovali teplotní redukci konstantní výstupní teplotou T_W, máme

$$\begin{aligned}
H(X) &= \left(\frac{lT_W{}^2}{2} - \frac{lT_0{}^2}{2}\right)\frac{1}{\mathrm{k}T_W} = T(X;Y) \\
H(Y) &= \frac{lT_W{}^2}{\mathrm{k}T_W} \\
H(X|Y) &= 0 \\
H(Y|X) &= H(Y) - H(X) = \frac{l}{\mathrm{k}}T_W - \frac{l}{2\mathrm{k}}T_W + \frac{l}{2\mathrm{k}}\frac{T_0{}^2}{T_W} = \frac{lT_W{}^2}{2\mathrm{k}T_W} + \frac{lT_0{}^2}{2\mathrm{k}T_W} \quad [\geq (H(Y)) \ \ !\,] \\
T(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) = \frac{l}{2\mathrm{k}}T_W\left(1-\beta^2\right) = H(X)
\end{aligned}$$

I když $T(X;Y) = T(Y;X) = H(X)$ není tak posán relevantní informacní informační děj a tudíž ani jakýkoli relevantní cyklický termodynamický děj. Hodnota η_{max} zde neznamená účinnost cyklu.

Pokud bychom cyklus $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ informačně popsali různými teplotními redukcemi, $\frac{T_W + T_0}{2}$ a T_W, další korekce, tentokrát v (9.16); k jejímu vyjádřní použijeme cyklickou termodynamickou analogii širokopásmového fotonového (Bose–Einsteinova, Lebedëvova–Levitinova) přenosového kanálu. Přenos informace pak realizujeme cyklickým procesem reverzibilních změn stavů přenosového kanálu ($\cong \mathcal{L}$).

9.2.1 Návrat přenosového media do počátečního stavu

Zabývejme se nyní další korekcí kapacitních formulí (9.16) ale i (9.9) a (5.103) pro případ, že návrat media $\mathcal{L}$ do výchozího, počátečního stavu realizujeme jen v rámci přenosového řetězce.
Bude se jednat o reverzní trojúhelníkový cyklus $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ ze (8.85) resp. (8.86) tvořený orientovanými úsečkami v $S-T$ diagramu mezi body

$$[lT_0, T_0],\ [lT_W, T_W],\ [lT_0, T_W]$$

Vzhledem k integračnímu intervalu $< T_0, T_W >$ pro transinformace $T(\cdot;\cdot)$ (9.9), (9.16) (a vzhledem k modelovému Carnotovu cyklu) budeme uvažovat konstantní (koncovou) teplotu T_W [teplotu (příjmu, zpracování) zprávy].
Myšlenkový pokus Lebedëva–Levitina [67] budeme nyní analogicky a formálně realizovat pomocí tohoto *reverzního* a reverzibilního tepelného cyklu $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ s nekonstantními pracovními teplotami ze vztahu (8.85), informačně popsaného a tedy chápaného jako přenosový proces v kanále ($\cong \mathcal{L}$), v němž podle (8.72)-(8.75) klademe

$$\begin{aligned} Q*(\Theta) &= \frac{\pi^2 \mathrm{k}^2 \Theta^2}{6h} = \frac{l}{2}\Theta^2 \\ Q*_W &= \frac{l}{2}{T_W}^2 \\ Q*_0 &= \frac{l}{2}{T_0}^2 \end{aligned}$$

---

pak bychom měli

$$\begin{aligned} H(X) &= \left(\frac{l{T_W}^2}{2} - \frac{l{T_0}^2}{2}\right)\frac{2}{\mathrm{k}(\mathrm{T_W}+\mathrm{T_0})} = \frac{l}{\mathrm{k}}(T_W - T_0) = T(X;Y) \\ H(X|Y) &= 0 \\ H(Y) &= \frac{l{T_W}^2}{\mathrm{k}T_W} \\ H(Y|X) &= \frac{l{T_W}^2}{2\mathrm{k}T_W} + \frac{l{T_0}^2}{2\mathrm{k}T_W} \\ T(Y;X) &= H(Y) - H(Y|X) = \frac{l}{2\mathrm{k}}(1-\beta^2) \neq T(X;Y) \end{aligned}$$

V tomto případě tedy nejsme ani schopni vytvořit informačně relevantní informační popis, kanálovou rovnici [(10.99) a (10.104)], cyklického procesu $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ s extremálními teplotami T_0 a T_W.
[Použijeme-li vztah $H(Y|X) = \frac{l{T_W}^2}{2\mathrm{k}T_W} + \frac{2l{T_0}^2}{2\mathrm{k}T_W}$ máme, že $T(X;Y) = T(Y;X) = H(X)$ ale to neodpovídá fyzikálnímu ději v cyklu.]

Pracovní teploty našeho cyklu, Θ_0 chlazení a Θ_W ohřívání, se mění podle (8.75),

$$\Theta_0 = \frac{1}{l} S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta_0) \in < T_0, T_W >, \quad \Theta_W = T_W = \text{konst.}$$

a tepelná entropie $S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta)$ látky $\mathcal{L}$ se mění podle vztahu (8.74),

$$\mathrm{d}S{*}_{\mathcal{L}} = \frac{\partial Q{*}(\Theta)}{\partial \Theta} \mathrm{d}\Theta \cdot \frac{1}{\Theta} \quad \text{a tedy} \quad S{*}_{\mathcal{L}}(\Theta) = l\Theta = \frac{2Q{*}(\Theta)}{\Theta}$$

Ve vyjádření pomocí integrálů (8.67) a při teplotě Θ píšeme,

$$Q{*}(\Theta) \quad = \quad \int_0^{\Theta} \delta Q{*}(\theta) = \int_0^{\Theta} \frac{\partial Q{*}(\theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\Theta} l\theta \mathrm{d}\theta$$

Podle (8.88) pro celková ΔQ_0 a ΔQ_W vyměňovaná mezi pracovní látkou $\mathcal{L}$ trojúhelníkového cyklu $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ (8.85) a jeho okolím a pro práci ΔA, resp. pro jemu ekvivalentní cyklus Carnotův $\mathcal{O}_{rrev}$ s pracovními teplotami $\frac{T_0 + T_W}{2}$ a T_W, máme

$$\begin{aligned} W = \Delta Q_0 \quad &= \quad \frac{l}{2} {T_W}^2 (1 - \beta^2) \stackrel{\triangle}{=} X \\ \Delta Q_W \quad &= \quad l {T_W}^2 (1 - \beta) \stackrel{\triangle}{=} Y \\ \Delta Q_W - \Delta Q_0 = \Delta A \quad &= \quad \frac{l}{2} {T_W}^2 (1 - \beta)^2 \stackrel{\triangle}{=} Y|X \end{aligned} \tag{9.18}$$

Pro teplotně redukovanou práci tepelného cyklu $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ (8.85) resp. ekvivalentního Carnotova cyklu $\mathcal{O}_{rrev}$ (8.88) <u>dodanou</u> při T_W a entropii $S{*}_{\mathcal{L}}$ jeho pracovní látky $\mathcal{L}$ platí vztahy

$$\frac{\Delta A}{T_W} \quad = \quad \oint_{\mathcal{O}_{rrev\triangle}} \frac{\delta A}{T_W} = \int_{T_0}^{T_W} l(\Theta - T_0) \cdot \frac{\mathrm{d}\Theta}{T_W} \tag{9.19}$$

nebo, vzhledem k trojúhelníkovému tvaru našeho cyklu $\mathcal{O}_{rrev\triangle}$ (8.85),

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{O}_{rrev\triangle}} \frac{\delta A}{T_W} \quad &= \quad \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}S{*}_{\mathcal{L}}(\theta) \right] \frac{\mathrm{d}\Theta}{T_W} = \int_{T_0}^{T_W} \left[S{*}_{\mathcal{L}}(T_W) - S{*}_{\mathcal{L}}(T_0) \right] \frac{\mathrm{d}\Theta}{2T_W} \\ &= \quad \frac{l}{2T_W} (T_W - T_0)^2 = \frac{l}{2} T_W (1 - \beta)^2 = \frac{\Delta A}{T_W} \end{aligned}$$

V souladu s předpokladem (10.99) a (10.104)[48] a v souladu s tvarem našeho cyklu (tedy vzhledem ke vstupní energii a použitým extremálním teplotám myšlenkového

[48]Viz Dodatky 10.5

pokusu ze [67]), definujeme změny hodnot informačních entropií výrazy platnými pro ekvivalentní cyklus Carnotův $\mathcal{O}_{rrev}$ (8.88) a (8.109),

$$
\begin{aligned}
H(X) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_W} = \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_0^{\Theta} \frac{\delta Q*(\theta)}{\theta} \right] \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{k}T_W} = \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_0^{\Theta} l \mathrm{d}\theta \right] \frac{1}{\mathrm{k}T_W} \mathrm{d}\Theta \\
H(Y) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} = \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_0^{T_W} \frac{\delta Q*(\theta)}{\theta} \right] \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{k}T_W} = \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_0^{T_W} l \mathrm{d}\theta \right] \frac{1}{\mathrm{k}T_W} \mathrm{d}\Theta \\
H(Y|X) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W} = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_{T_0}^{T_W} \frac{\delta Q*(\theta)}{\theta} \right] \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{k}T_W} = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_W} \left[\int_{T_0}^{T_W} l \mathrm{d}\theta \right] \frac{1}{\mathrm{k}T_W} \mathrm{d}\Theta \\
T(Y;X) &= H(Y) - H(Y|X) = \frac{l}{2\mathrm{k}T_W} \int_{T_0}^{T_W} \left[2 \int_0^{T_W} \mathrm{d}\theta - \int_{T_0}^{T_W} \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\Theta
\end{aligned}
$$

Vyčíslením výrazů v předchozích vztazích a dosazením $l = \dfrac{\pi^2 k}{3h}$ získáme

$$
\begin{aligned}
H(X) &= \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta^2) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h} (1-\beta^2) \qquad (9.20) \\
H(Y) &= \frac{l}{\mathrm{k}} T_W (1-\beta) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{3h} (1-\beta) \\
H(Y|X) &= \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta)^2 = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h} (1-\beta)^2 = \oint_{\mathcal{O}_{rrev}} \frac{\delta A}{\mathrm{k}T_W} \\
T(Y;X) &= \frac{l}{\mathrm{k}} T_W (1-\beta) - \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta)^2 = \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta)(2-1+\beta) \\
&= \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta^2) = \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_W}{6h} (1-\beta^2) = H(X) = T(X;Y) \\
H(X|Y) &= 0
\end{aligned}
$$

Veličina $H(Y)$ je tedy zavedena správně neboť v souladu s (9.20) platí

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= H(X) + H(Y|X) = \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta)^2 + \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta^2) \qquad (9.21) \\
&= \frac{l}{2\mathrm{k}} T_W (1-\beta)(1-\beta+1+\beta) = \frac{l}{\mathrm{k}} T_W (1-\beta)
\end{aligned}
$$

Transinformace a tedy i kapacita takto organizovaného a popsaného cyklu tedy je

$$T(X;Y) = \frac{1}{2} C'_{T_0,T_W}(W) \qquad (9.22)$$

[srovnej s (9.16)]. Při daných extremálních teplotách T_0 a T_W je ovšem naše transinformace i informační kapacitou $C*_{T_0,T_W}(W)$ uvažovaného cyklu

$$T(X;Y) = C*_{T_0,T_W}(W) \qquad (9.23)$$

a tedy

$$C^{\max} = \lim_{T_0 \to T_W} C*_{T_0,T_W}(W) = H(Y) \tag{9.24}$$

Z rozdílu $\Delta Q_0 \overset{\triangle}{=} W$ tepel $Q*_0$ a $Q*_W$ látky $\mathcal{L}$ vidíme že pro teplotu T_W platí

$$T_W = T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{6h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}}$$

a pro transinformaci, stejně jako v (9.22), pak platí

$$\begin{aligned} T(X;Y) &= \frac{\pi^2 k}{6h} \cdot \left(1 - \beta^2\right) = \frac{\pi^2 k}{3h} \cdot (T_W - T_0) \cdot \frac{1+\beta}{2} \\ &= \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{3h} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{6h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - 1\right) \cdot \frac{1+\beta}{2} = C*_{T_0,T_W}(W) \end{aligned} \tag{9.25}$$

To ale je dvakrát méně než je stanoveno v (9.16) a $\dfrac{2}{1+\beta}$ krát méně než ve (9.9).

Pro $T_0 \to 0$ získáme *'kvantovou' aproximaci* $C(W)$ kapacity $C*_{T_0,T_W}(W)$, nezávislou na výkonu tepelného šumu (zaniká v blízkosti absolutní teploty $0^\circ\ K$)

$$C(W) = \lim_{T_0 \to 0} \left(\sqrt{\frac{\pi^4 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}{6^2 \hbar^2} + \pi^2 \frac{W}{6h}} - \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{6h}\right) \cdot (1+\beta) = \pi \cdot \sqrt{\frac{W}{6h}} \tag{9.26}$$

'Klasickou' aproximaci $C_{T_0}(W)$ kapacity $C*_{T_0,T_W}(W)$ získáme pro $T_0 \gg 0$. Je blízká veličině $\dfrac{W}{\mathrm{k}T_0}$, tj. Shannonově kapacitě širokopásmového *gaussovského* kanálu s výkonem tepelného šumu $\mathrm{k}T_0$ a s celkovým průměrným vstupním výkonem W.

Pro $|x| < 1$ totiž platí, že $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \doteq 1 + \frac{1}{2}x$ a tedy pro $x = \dfrac{6h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2} < 1$ (pro dostatečně velká T_0), ze vztahu pro kapacitu (9.25) získáme

$$C_{T_0}(W) \doteq \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{6h} \left(\frac{3h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}\right) \cdot (1+\beta) = \frac{W}{2\mathrm{k}T_0} \cdot (1+\beta) \to \frac{W}{\mathrm{k}T_0} \tag{9.27}$$

Pro různé způsoby výpočtu *koeficientu chlazení* ζ cyklického přenosu se vstupy a výstupy (9.18), s respektováním (9.20) a tedy s informační kapacitou (9.25), podle definice [29, 44], platí

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\frac{T_W + T_0}{2}}{T_W - \frac{T_W + T_0}{2}} = \frac{T_W + T_0}{T_W - T_0} \\ \zeta_2 &= \frac{\Delta Q_0}{\Delta A} = \frac{\frac{\frac{l}{2} \cdot T_W^2 (T_W^2 - T_0^2)}{T_W^2}}{\frac{\frac{l}{2} \cdot T_W^2 (T_W - T_0)^2}{T_W^2}} = \frac{(T_W - T_0) \cdot (T_W + T_0)}{(T_W - T_0) \cdot (T_W - T_0)} = \frac{T_W + T_0}{T_W - T_0} \\ \zeta_3 &= \frac{H(X)}{H(Y|X)} = \frac{(1-\beta) \cdot (1+\beta)}{(1-\beta)^2} = \frac{T_W + T_0}{T_W - T_0} \end{aligned}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Získáváme tedy vždy stejnou hodnotu $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3$ vyhovující definici [29, 44] při teplotách $\frac{T_W + T_0}{2}$ a T_W.
Pro účinost $\eta*$ [(8.79), (8.81) a (8.84)] našeho reverzního cyklu v přímém směru platí

$$\eta* = \frac{\eta_{max}}{2}$$

a pro součin $(\eta*) \cdot \zeta$ správně platí, že se rovná transformačnímu poměru $\beta*$,

$$\beta* = (\eta*) \cdot \zeta = \frac{\frac{T_W + T_0}{2}}{T_W}$$

Skutečně jsme popsali Carnotův cyklus v němž

$$X = Q*_W \cdot \frac{T_W + T_0}{2T_W}, \quad Y = X \cdot (1 - \beta)$$

Jeho informační kapacita je stanovena vztahem (9.25).

Odlišnost našich výsledků (9.22), (9.25) a (9.26) od výsledku (9.9) je dána uvažováním nutnosti vracet přenosové medium do počátečního stavu po uskutečnění každého jednotlivého aktu 'odeslánaí vstupní a příjmu výstupní zprávy' a odpovídajícími mteplotními redukcemi vstupního tepla ΔQ_0
(a) teplotou $\frac{T_W}{2}$ v případě (9.16)
(b) teplotou T_W v případě (9.25).

Zakončíme tvrzením, že cyklicky organizovaný přenos informace kanálem B–E typu má informační kapacitu (9.25), pišme

$$\begin{aligned} C*_{T_0,T_W}(W) &= \frac{\pi^2 \mathrm{k} T_0}{6hT_W} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{6h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}} - 1 \right) \cdot (T_0 + T_W) \qquad (9.28) \\ = C*_{T_W}(W) &= \frac{W}{kT_W} \\ = C*_{T_0}(W) &= \frac{W}{\mathrm{k}T_0 \cdot \sqrt{1 + \frac{6h \cdot W}{\pi^2 \mathrm{k}^2 {T_0}^2}}}, \quad W = W(T_0, T_W) \end{aligned}$$

V literatře [31, 67] je stanovována informační kapacita jednorázového přenosu informace a tedy se nutnost přechodu přenosového media, kanálu, do počátečního stavu, jakožto podmínky opakovatelného přenosu zpráv, neuvažuje.
Nebo se tento návrat uvažuje být realizován otevřením celého přenosového řetězce, tedy uvažuje se jeho energetické pokrytí z okolí přenosového řetězce, nikoliv v jeho rámci jak to činíme my (používáme reverzního carnotovského modelu).

To je důvod skutečnosti, proč korigovaná kapacita (9.16) jednorázového přenosu vychází dvakrát větší než kapacita (9.22), (9.25) v cyklickém modelu $\mathcal{O}_{rrev}$. Také je zřejmé že nesestrojíme reverzní cyklus správně informačně popsaný bez správné teplotní redukce. V případě jednorázového přenosu informace máme ale možnost volit různé informační popisy s výsledky (9.9) nebo větším (9.16).

I když je kapacita (9.22), (9.25) cyklického termodynamického přenosu (modelu) menší než (9.9), je náš přístup k problému logičtější a jeho výsledek je exaktnější.

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

10. Dodatky

10.1 Lineární prostory a operátory

Účelem tohoto dodatku je připomenout význam základních pojmů lineŕní algebry a fukcionální analýzy, a vztahů, které mezi nimi platí.
Detailnější zpracování této problematiky viz také v [7, 9, 16, 17, 24, 74]

10.1.1 Lineární prostory

Symbolem Ψ označujeme *eukleidovský prostor* $(\Psi \neq \emptyset)$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \Psi \text{ je } \textit{vektorový} \text{ prostor nad tělesem reálných čísel } R \\ \text{(b)} & \text{na } \Psi \text{ je definován skalární součin } (\cdot,\cdot) \\ \text{(c)} & \text{dimenze } \dim\Psi = n,\ n \in N \end{array} \tag{10.1}$$

ad (a) pro prvky $\psi,\ \psi' \in \Psi$, kterým říkáme *vektory* a pro *skaláry* $u \in R$ je definován *součet*

$$\psi + \psi' \in \Psi \tag{10.2}$$

a *násobení skalárem*

$$u\psi \in \Psi \tag{10.3}$$

přičemž jsou splněny axiomy vektorového prostoru včetně těch ve kterých figuruje *nulový prvek* $0 \in \Psi$.

ad (b) pro každou dvojici $\psi,\ \psi' \in \Psi$ je definováno číslo $(\psi, \psi') \in R$ tak, že

$$\begin{array}{rcll} (\psi,\psi) & \geq & 0 \ \Leftrightarrow \ \psi = 0 & \text{(nezápornost)} \\ (\psi,\psi') & = & (\psi',\psi) & \text{(symetrie)} \\ (u\psi,\psi') & = & u(\psi,\psi'),\ \forall u \in R & \text{(homogennost)} \\ (\psi,\psi'+\psi'') & = & (\psi,\psi') + (\psi,\psi'') & \text{(aditivnost)} \end{array} \tag{10.4}$$

ad (c) existují vektory $\psi_1 \cdots \psi_n \in \Psi$ takové, že

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij} = \left\langle \begin{array}{ll} 0 & \text{pro} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pro} \quad i = j \end{array} \right. \tag{10.5}$$

a ke každému $\psi \in \Psi$ existuje právě jeden soubor čísel $(u_1,\ \ldots,\ u_n) \in R^n$ s vlastností

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} u_i\, \psi_i \tag{10.6}$$

Vektory $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n$ tedy tvoří prostoru Ψ *ortonormální* bázi prostoru Ψ.

Řekneme, že podmnožina $\Psi_1 \subset \Psi$ je *eukleidovský podprostor* prostoru Ψ právě

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

tehdy když je uzavřená vzhledem k (lineárním) operacím sčítání a násobení skalárem a současně platí, že

$$1 \leq \dim \Psi_1 \leq \dim \Psi \tag{10.7}$$

Symbolem $\Psi(\Psi_0)$ kde $\Psi_0 \subset \Psi,\ \Psi_0 \neq \emptyset$ označujeme *nejmenší* eukleidovský prostor $\Psi_1 \subset \Psi$ s vlastností $\Psi_0 \subset \Psi_1$ (průnik všech podprostorů s touto vlastností).

Dále definujeme *direktní součet* dvou eukleidovských podprostorů $\Psi_1, \Psi_2 \subset \Psi$

$$\Psi_1 \oplus \Psi_2 \stackrel{\text{Def}}{=} \Psi(\Psi_1 \cup \Psi_2) \tag{10.8}$$

a *ortogonální doplněk* podprostoru $\Psi_0 \subset \Psi$

$$\Psi_0^{\perp} \stackrel{\text{Def}}{=} \{\psi \in \Psi : (\psi, \psi_0) = 0 \text{ pro všechna } \psi_0 \in \Psi_0\} \tag{10.9}$$

Je zřejmé, že $\Psi_0^{\perp}$ je eukleidovský podprostor dimenze $(n - \dim \Psi_0)$, pro který platí

$$\Psi = \Psi_0 \oplus \Psi_0^{\perp} \tag{10.10}$$

Například, pro bázi $\{\psi_1,\ ...,\ \psi_n\}$ platí, že dim $\Psi(\psi_i) = 1,\ \Psi(\{\psi_i\} \subset \Psi$ a

$$\Psi = \Psi(\{\psi_1,\ ...,\ \psi_n\}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \Psi(\{\psi_i\}) \tag{10.11}$$

$$\Psi(\{\psi_1\})^{\perp} = \Psi(\{\psi_2,\ ...,\ \psi_n\}) = \bigoplus_{i=2}^{n} \Psi(\{\psi_i\}) \tag{10.12}$$

Báze $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ prostoru Ψ není určena jednoznačně.
Jestliže $\{\psi_i'\}_{i=1}^n$ je jiná báze, pak podle (10.6) existují *matice transformace* (u_{ij}), (u'_{ij}) báze $\psi_i,\ \psi_i \to \psi_i',\ \psi_i' = (u_{ij})\psi_i$ resp. báze $\psi_i',\ \psi_i' \to \psi_i,\ \psi_i = (u'_{ij}\psi_i')$ tak, že

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\psi_j', \quad \psi_i' = \sum_{j=1}^{n} u'_{ij}\psi_j, \quad 1 \leq i \leq n \tag{10.13}$$

a kde, podle (10.5),

$$(u_{ik})\,(u'_{kj}) = (\delta_{ij}) \tag{10.14}$$

Ze (10.5) a (10.13) obdržíme formule

$$u_{ij} = (\psi_i, \psi_j'), \quad u'_{ij} = (\psi_i', \psi_j) = u_{ji} \tag{10.15}$$

a tudíž podle (10.14)

$$(u_{ik})\,(u_{jk}) = (u'_{ki})\,(u'_{kj}) = (\delta_{ij}) \tag{10.16}$$

10.1.2 Lineární operátory

Symbolem $L(\Psi)$ označujeme množinu všech *lineárních operátorů* na prostoru Ψ, tj. množinu všech zobrazení

$$\boldsymbol{\alpha} : \Psi \to \Psi \tag{10.17}$$

taková, že pro všechna ψ, $\psi' \in \Psi$ a $u \in R$

$$\boldsymbol{\alpha}(\psi + \psi') = \boldsymbol{\alpha}(\psi) + \boldsymbol{\alpha}(\psi'), \quad \boldsymbol{\alpha}(u\psi) = u\boldsymbol{\alpha}(\psi) \tag{10.18}$$

Je tedy zřejmé, že každý operátor $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$ je jednoznačně zadán svými hodnotami $\boldsymbol{\alpha}(\psi_i)$ v bázi $\{\psi_i\}_{i=1}^n$; podle (10.6)

$$\boldsymbol{\alpha}(\psi) = \sum_{i=1}^{n} u_i \boldsymbol{\alpha}(\psi_i) \tag{10.19}$$

ale současně musí existovat $v_j \in R$ s vlastností

$$\boldsymbol{\alpha}(\psi) = \sum_{j=1}^{n} v_j \psi_j \tag{10.20}$$

Ze vztahu (10.5) plyne, že pro v_j platí

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i \quad \text{pro } \alpha_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}(\psi_i), \psi_j) \tag{10.21}$$

Matici (α_{ij}) definovanou v (10.21) nazýváme *matice operátoru* $\boldsymbol{\alpha}$ *v bázi* ψ_i.
Při přechodu k jiné bázi $\{\psi'_i\}_{i=1}^n$ se tato matice transformuje podle pravidla

$$(\alpha'_{ij}) = (u'_{ik})\,(\alpha_{k\ell})\,(u_{\ell j}) \tag{10.22}$$

kde (u'_{ik}), (u_{ik}) jsou matice transformace báze z (10.15).

Množina $L(\Psi)$ lineárních operátorů má zřejmě strukturu vektorového prostoru nad tělesem R, pokud součet, násobení skalárem a nulový prvek definujeme vztahy

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}')\,(\psi) &= \boldsymbol{\alpha}(\psi) + \boldsymbol{\alpha}'(\psi) \\ (u\boldsymbol{\alpha})\,(\psi) &= u\boldsymbol{\alpha}(\psi) \\ \mathbf{0}(\psi) &= 0 \in \Psi \end{aligned} \tag{10.23}$$

Navíc, říkáme, že podmnožina $A \subset L(\Psi)$ je $*$-*algebra* nad R, právě tehdy když

(a) A je vektorový prostor nad R, (R je těleso reálných čísel)

(b) pro všechna $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}' \in A$ je definována *kompozice* $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}' \in A$ splňující při všech $\boldsymbol{\alpha}'' \in A$ a $u \in R$ podmínky

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')\,\boldsymbol{\alpha}'' &= \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}'') \\ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\alpha}'') &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}'',\ (\boldsymbol{\alpha}' + \boldsymbol{\alpha}'')\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}''\boldsymbol{\alpha} \\ u(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}') &= (u\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}(u\boldsymbol{\alpha}') \end{aligned} \tag{10.24}$$

(c) existuje $\mathbf{1} \in A$ s vlastností $\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{1} = \boldsymbol{\alpha}$ pro všechna $\boldsymbol{\alpha} \in A$,

(d) ke každému $\boldsymbol{\alpha} \in A$ existuje *konjugovaný* operátor $\boldsymbol{\alpha}^* \in A$ splňující při všech $\boldsymbol{\alpha} \in A$ a $u \in R$ podmínky

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}^*)^* &= \boldsymbol{\alpha} \\ (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}')^* &= \boldsymbol{\alpha}^* + \boldsymbol{\alpha}'^* \\ (u\boldsymbol{\alpha})^* &= u\boldsymbol{\alpha}^* \\ (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')^* &= \boldsymbol{\alpha}'^*\boldsymbol{\alpha}^* \end{aligned} \tag{10.25}$$

Jestliže navíc platí

(e) $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}$ pro všechna $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in A$, pak A nazýváme *komutativní $*$-algebra*

Teorém 12.1. Pro každý operátor $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$ existuje právě jeden $\boldsymbol{\alpha}^* \in L(\Psi)$,

$$(\boldsymbol{\alpha}^*(\psi), \psi') = (\psi, \boldsymbol{\alpha}(\psi')) \quad \forall \ \psi, \psi' \in \Psi \tag{10.26}$$

Při této *konjugaci* a při kompozici jednoznačně definované pro $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in L(\Psi)$ vztahem

$$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}')\,(\psi) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}'(\psi)),\ \forall\psi \in \Psi \tag{10.27}$$

se množina $L(\Psi)$ všech lineárních operátorů na Ψ stává $*$-algebrou.

Důkaz. Dokážeme první tvrzení, zbytek je již jednoduše ověřitelný.
Uvažujme při libovolném pevném $\boldsymbol{\alpha}$ a ψ funkci

$$\lambda(\psi') = (\psi, \boldsymbol{\alpha}(\psi')), \quad \psi' \in \Psi$$

Je zřejmé, že λ je lineární forma na Ψ přičemž pro všechna $\psi', \psi'' \in \Psi$

$$\begin{aligned} |\lambda(\psi') - \lambda(\psi'')| &= |(\psi, \boldsymbol{\alpha}(\psi' - \psi''))| \leq \\ &\leq \|\psi\|^2 \cdot \|\boldsymbol{\alpha}(\psi' - \psi'')\|^2 \\ &\leq c\|\psi' - \psi''\|^2 \end{aligned}$$

kde

$$c = \|\psi\|^2 \max_{i,j} |(\boldsymbol{\alpha}(\psi_i), \boldsymbol{\alpha}(\psi_j))| \ \text{ v bázi } \{\psi_i\}_{i=1}^n$$

Tudíž λ je *spojitá* lineární forma na Ψ. Podle **Fréchetovy** věty [16] ale existuje právě jeden prvek $\psi^* \in \Psi$ s vlastností

$$\lambda(\psi') = (\psi^*, \psi'),\ \forall\psi' \in \Psi$$

Prvek ψ^* se mění se změnou ψ a proto

$$\psi^* = \boldsymbol{\alpha}^*(\psi), \quad \psi \in \Psi$$

Je zřejmé, že zobrazení $\boldsymbol{\alpha}^* : \psi \to \psi'$ je lineárním zobrazením defnovaným na Ψ.

Říkáme, že operátor $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$ je *symetrický* právě tehdy když

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^* \tag{10.28}$$

Množinu všech symetrických operátorů v dalším označujeme A,

$$A \stackrel{\triangle}{=} \{\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi) : \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^*\} \tag{10.29}$$

Množina A je uzavřená vůči kompozici (10.27) právě tehdy když všechny její prvky *komutují*

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha} \tag{10.30}$$

Potom je A *pod-$*$-algebrou* $*$-algebry $L(\Psi)$.

10.1.3 Spektrální rozklad

Pro každý operátor $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$ definujeme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^i &= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}\cdots\boldsymbol{\alpha}\ (i\text{-krát}), \quad \boldsymbol{\alpha}(\Psi) = \{\boldsymbol{\alpha}(\psi) : \psi \in \Psi\} \\ \boldsymbol{\alpha}^{-1}(0) &= \{\psi \in \Psi : \boldsymbol{\alpha}(\psi) = 0\} \end{aligned} \tag{10.31}$$

kde $\boldsymbol{\alpha}(\Psi)$ a $\boldsymbol{\alpha}^{-1}(0)$ jsou zřejmě eukleidovské podprostory prostoru Ψ.

Operátor $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$ se nazývá *projektor* právě tehdy když

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \boldsymbol{\alpha} \tag{10.32}$$

Symetrické projektory budeme označovat symbolem $\boldsymbol{\pi}$.
Pro každý (symetrický) projektor $\boldsymbol{\pi} \in A$ platí

$$\boldsymbol{\pi}(\Psi) \oplus \boldsymbol{\pi}^{-1}(0) = \Psi \tag{10.33}$$

Obráceně, splňují-li dva eukleidovské podprostory $\Psi_1, \Psi_2 \subset \Psi$ vztah

$$\Psi_1 \oplus \Psi_2 = \Psi \tag{10.34}$$

pak existuje právě jeden projektor $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$ s vlastnostmi

$$\boldsymbol{\alpha}(\Psi) = \Psi_1 \ \text{ a } \ \boldsymbol{\alpha}^{-1}(0) = \Psi_2 \tag{10.35}$$

Tento projektor je symetrický právě když $\Psi_2 = \Psi_1^\perp$.
Každým eukleidovským podprostorem $\Psi_1 \subset \Psi$ je tedy jednoznačně určen symetrický projektor $\boldsymbol{\pi} \in A$ s vlastnostmi

$$\boldsymbol{\pi}(\Psi) = \Psi_1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\pi}^{-1}(0) = \Psi_1^\perp \tag{10.36}$$

Tento projektor označujeme symbolem $\boldsymbol{\pi}[\Psi_1]$, tj.

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}[\Psi_1] \tag{10.37}$$

Říkáme, že $\alpha \in R$ je *vlastní hodnota operátoru* $\boldsymbol{\alpha} \in A$ *příslušná (vlastnímu) vektoru* ψ právě tehdy když existuje $\psi \in \Psi,\ \psi \neq 0$, s vlastností

$$\boldsymbol{\alpha}(\psi) = \alpha\psi \tag{10.38}$$

Vektor ψ nazýváme *vlastní vektor operátoru* $\boldsymbol{\alpha}$ *příslušný (vlastní* hodnotě α. Množina všech těchto vektorů tvoří eukleidovský podprostor $\Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha})$ prostoru Ψ. Dále, symbolem $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ označujeme množinu všech vlastních čísel α operátoru $\boldsymbol{\alpha}$ a nazýváme ji *spektrum operátoru* $\boldsymbol{\alpha}$.

Je-li pro neprázdnou množinu $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{S} \subset R$ dán systém symetrických projektorů $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\} \subset A$ s vlastnostmi

$$\begin{array}{rrcl} \text{(a)} & \boldsymbol{\pi}_\alpha & \neq & \mathbf{0},\ \forall\alpha \in \mathbf{S} \\ \text{(b)} & \boldsymbol{\pi}_\alpha\boldsymbol{\pi}_{\alpha'} & = & \mathbf{0},\ \forall\alpha,\alpha' \in \mathbf{S},\ \alpha \neq \alpha' \\ \text{(c)} & \sum\limits_{\alpha\in\mathbf{S}} \boldsymbol{\pi}_\alpha & = & \mathbf{1} \end{array} \tag{10.39}$$

a množinu $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\}$ nazýváme *spektrální rozklad jednotkového operátroru (*$\mathbf{1}$*)*. Dále říkáme, že tento rozklad je ve *spektrální relaci* se symetrickým operátorem $\boldsymbol{\alpha} \in A$ právě tehdy když

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathbf{S}} \alpha\boldsymbol{\pi}_\alpha \tag{10.40}$$

Lemma 12.2. Je-li $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\}$ spektrální rozklad $\mathbf{1}$, pak

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{S}} \dim \boldsymbol{\pi}_\alpha(\Psi) = n \tag{10.41}$$

Lemma 12.3. Pro všechny symetrické operátory $\boldsymbol{\alpha} \in A$ platí

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha}) \neq \emptyset \tag{10.42}$$

Teorém 12.2. (Spektrální teorém).
Je-li $\boldsymbol{\alpha}$ symetrický operátor pak, podle (10.37)

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & \dim\Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha}) \leq n \quad \text{a} \\ \{\boldsymbol{\pi}_\alpha & = & \boldsymbol{\pi}[\Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha})] : \alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})\} \end{array} \tag{10.43}$$

je jediný spektrální rozklad $\mathbf{1}$ ve spektrální relaci s $\boldsymbol{\alpha}$.

Důkaz.

(a) Kdyby $\boldsymbol{\pi}_\alpha = \mathbf{0}$ znamenalo by to $\Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha}) = \{0\}$ což je spor s $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$.

(b) Jestliže $\boldsymbol{\alpha}\psi = \alpha\psi$, $\boldsymbol{\alpha}\psi' = \alpha'\psi'$ kde $\alpha \neq \alpha'$, pak

$$\alpha(\psi, \psi') = (\boldsymbol{\alpha}\psi, \psi') = (\psi, \boldsymbol{\alpha}\psi') = \alpha'(\psi, \psi')$$

s využitím $\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}$.
Proto, že $\Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha}) \subset \Psi(\alpha'|\boldsymbol{\alpha})^\perp$, nutně $(\psi, \psi') = 0$.
Jelikož $\boldsymbol{\pi}_{\alpha'}$ je *kolmý projektor* na podprostor

$$\Psi(\alpha'|\boldsymbol{\alpha}) \subset \boldsymbol{\pi}_\alpha^{-1}(0) = \Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha})^\perp$$

(nulová množina operátoru $\boldsymbol{\pi}_\alpha$), nutně platí

$$\boldsymbol{\pi}_\alpha(\boldsymbol{\pi}_{\alpha'}(\psi)) = 0 \quad \text{pro každé } \psi \in \Psi$$

(c) Nechť $\boldsymbol{\pi} = \sum \boldsymbol{\pi}_\alpha \neq \mathbf{1}$.
Jelikož podle (b) $\boldsymbol{\pi}^2 = \sum \boldsymbol{\pi}_\alpha$ a jelikož $\boldsymbol{\pi}_\alpha$ jsou projektory, máme $\boldsymbol{\pi}^2 = \boldsymbol{\pi}$ a tedy $\boldsymbol{\pi}$ je rovněž projektor.
Právě tak $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})$ je projektor, neboť $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})^2 = \mathbf{1} - 2\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}^2 = \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}$.
Podle předpokladu $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})\,[\Psi] \neq \mathbf{0}$.
Nechť vektor $\psi \in (\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})\,(\Psi)$, $\psi \neq 0$, je vlastním vektorem operátoru $\boldsymbol{\alpha}$.
Potom $\psi \in \Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha})$ pro některé $\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ a tedy

$$\boldsymbol{\pi}(\psi) = \boldsymbol{\pi}_\alpha(\psi) = \psi \quad \textit{ili} \quad (\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})\,(\psi) = 0 \quad \text{a tedy} \quad \psi \in (\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})^{-1}(0)$$

což ale není možné. Symetrický operátor $\boldsymbol{\alpha}$ na eukleidovském prostoru $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi})\,(\Psi)$ nemá tedy vlastní vektor a tedy ani vlastní hodnotu a to je ve sporu s větou 15.3.

(d) Nechť $\psi \in \Psi$ je libovolné a položme $\psi_\alpha = \boldsymbol{\pi}_\alpha(\psi)$.
Potom $\psi_\alpha \in \Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha})$ a tedy $\boldsymbol{\alpha}(\psi_\alpha) = \alpha\psi_\alpha$ takže podle (c)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}(\psi) &= \boldsymbol{\alpha}\left(\sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\pi}_\alpha(\psi)\right) = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \boldsymbol{\alpha}(\psi_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha\psi_\alpha = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha\boldsymbol{\pi}_\alpha(\psi) = \left(\sum_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha\boldsymbol{\pi}_\alpha\right)(\psi)
\end{aligned}$$

Uvažovaný spektrální rozklad $\mathbf{1}$ je ve spektrální relaci s $\boldsymbol{\alpha}$.

(e) Jestliže $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\}$ je ve spektrální relaci s $\boldsymbol{\alpha}$, pak $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$.

To, že projektory $\boldsymbol{\pi}_\alpha$ jsou jednoznačně určeny operátorem $\boldsymbol{\alpha}$ (tak, že $\boldsymbol{\pi}_\alpha = \boldsymbol{\pi}[\Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha})]$) plyne z následujícího teorému.

Nelprve definujme funkci

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} u_i\, \boldsymbol{\alpha}^i \quad (\text{kde } \boldsymbol{\alpha}^0 = \mathbf{1}) \tag{10.44}$$

pro pevná čísla $u_i \in R$, kde

$$f(u) = \sum_{i=0}^{n} u_i u^i, \; u \in R \tag{10.45}$$

je libovolný reálný polynom, $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$
Je zřejmé, že při $\boldsymbol{\alpha} \in A$ platí $\boldsymbol{\alpha}^i \in A$ a tedy také $f(\boldsymbol{\alpha}) \in A$.

Teorém 12.3. Pro každou neprázdnou konečnou množinu $\mathbf{S} \subset R$ existují reálné polynomy $\{f_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\}$,

$$f_\alpha(\alpha') = \left\langle \begin{array}{ll} 1 & \text{pro} \quad \alpha = \alpha' \\ 0 & \text{pro} \quad \alpha \neq \alpha' \end{array} \right. \tag{10.46}$$

kde $f_\alpha(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\pi}_\alpha$ jakmile $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\}$ je ve spektrální relaci s operátorem $\boldsymbol{\alpha} \in A$.

Důkaz. Stačí použít

$$f_\alpha(u) = \prod_{\alpha' \in \mathbf{S} - \{\alpha\}} \frac{u - \alpha'}{\alpha - \alpha'}$$

Teorém 12.4. Je-li $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\}$ je ve spektrální relaci s $\boldsymbol{\alpha} \in A$ pak pro libovolný reálný polynom f je spektrální rozklad $\mathbf{1}$,

$$\left\{ \boldsymbol{\pi}_{\alpha'} = \sum_{\alpha : f(\alpha) = \alpha'} \boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha' \in f(\mathbf{S}) \right\}, \quad f(\mathbf{S}) = \{f(\alpha) : \alpha \in \mathbf{S}\} \tag{10.47}$$

ve spektrální relaci s $f(\boldsymbol{\alpha}) \in A$.

Důkaz. Podle (b) spektrálního teorému

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^2 &= \left(\sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha \boldsymbol{\pi}_\alpha \right) \left(\sum_{\alpha' \in \mathbf{S}} \alpha' \boldsymbol{\pi}_{\alpha'} \right) = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha^2 \boldsymbol{\pi}_\alpha \\ \boldsymbol{\alpha}^i &= \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha^i \boldsymbol{\pi}_\alpha \quad \text{pro všechna } i = 0, 1, \; ..., \quad [\text{při } i = 0 \text{ nutno použít (c)}] \end{aligned}$$

Nyní dosadíme do (10.44) a obdržíme vztah odkud plyne dokazované tvrzení,

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} f(\alpha)\, \boldsymbol{\pi}_\alpha \tag{10.48}$$

Vztahem (10.48) lze definovat $f(\boldsymbol{\alpha}) \in A$ pro libovolnou funkci $f : R \to R$ a operátor $\boldsymbol{\alpha} \in A$, který je ve spektrální relaci s $\{\boldsymbol{\pi}_\alpha : \alpha \in \mathbf{S}\}$.
(V teorému 12.4 postačí místo f vzít polynom f' totožný s f na $\mathbf{S}$.)

Teorém 12.5. Nechť $A_0 \subset A$ je libovolná konečná množina symetrických operátorů.
Tyto operátory po dvojicích komutují právě tehdy, když existuje operátor $\boldsymbol{\alpha}_0 \in A$ a funkce $f(\cdot|\boldsymbol{\alpha}) : R \to R,\ \boldsymbol{\alpha} \in A_0$ tak, že platí

$$\boldsymbol{\alpha} = f(\boldsymbol{\alpha}_0|\boldsymbol{\alpha}),\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in A_0 \tag{10.49}$$

Důkaz. Předpokládejme, že $A_0 = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}'\}$. V jednom směru je tvrzení terému 12.5 důsledkem terému 12.4.
Nechť proto podle spektrálního teorému

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha \boldsymbol{\pi}_\alpha, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \sum_{\alpha' \in \mathbf{S}'} \alpha' \boldsymbol{\pi}_{\alpha'}$$

a nechť $f : \mathbf{S} \bigotimes \mathbf{S}' \to R$ je libovolné prosté zobrazení.
Položme

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \sum_{\alpha' \in \mathbf{S}'} f(\alpha, \alpha')\, \boldsymbol{\pi}_\alpha \boldsymbol{\pi}_{\alpha'}$$

Z komutativnosti $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}'$ plyne komutativnost dvojic $\boldsymbol{\pi}_\alpha$, $\boldsymbol{\pi}_{\alpha'}$ a zřejmě platí

$$\boldsymbol{\alpha}_0^* = \boldsymbol{\alpha}_0,\ \boldsymbol{\alpha}_0 \in A$$

Jestliže jsou $f(\cdot|\boldsymbol{\alpha}),\ f(\cdot|\boldsymbol{\alpha}')$ libovolné prosté funkce s vlastnostmi

$$f(f(\alpha, \alpha')|\boldsymbol{\alpha}) = \alpha,\ f(f(\alpha, \alpha')|\boldsymbol{\alpha}') = \alpha'$$

pak

$$f(\boldsymbol{\alpha}_0|\boldsymbol{\alpha}) = \left(\sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha \boldsymbol{\pi}_\alpha\right)\left(\sum_{\alpha' \in \mathbf{S}'} \boldsymbol{\pi}_{\alpha'}\right) = \sum_{\alpha \in \mathbf{S}} \alpha\, \boldsymbol{\pi}_\alpha = \boldsymbol{\alpha}$$

a podobně $f(\boldsymbol{\alpha}_0|\boldsymbol{\alpha}') = \boldsymbol{\alpha}'$.

Řekneme, že operátor $\boldsymbol{\alpha} \in A$ je *nezáporný (kladný)*, právě tehdy když je jeho spektrum nezáporné (kladné).

Dále se budeme zabývat *stopou* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha})$ lineárních operátorů $\boldsymbol{\alpha} \subset A$.

10.1.4 Stopa operátoru

Uvažujme třídu $\Lambda(\oplus_1^n \Psi)$ všech *(multi-)lineárních forem*

$$\lambda : \bigoplus_{i=1}^{n} \Psi_i \to R \quad \text{pro } \Psi_i = \Psi \text{ pro } i = 1,\ 2,\ ...,\ n \tag{10.50}$$

kde součet, násobení skalárem, skalární součin atd. rozšíříme na eukleidovský prostor $\oplus_1^n \Psi$ (tzv. přirozenou cestou z eukleidovského prostoru Ψ.

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Podobně jako $L(\Psi)$ resp. $L(\oplus_1^n \Psi)$ tvoří také $\Lambda(\oplus_1^n \Psi)$ vektorový prostor (dokonce algebru) nad tělesem reálných čísel (Součet a násobení číslem lineárních forem definujeme touže přirozenou cestou jako v případě $L(\Psi)$).

Řekneme, že λ je *alternující forma*, jestliže $\lambda(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_n) = 0$ kdykoliv alespoň dva z vektorů $\varphi_i \in \Psi$ jsou totožné.
Příkladem takové formy $\lambda_2 \in \Lambda_2$ je

$$\lambda_2(\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_1(\varphi_2)\, \lambda_1'(\varphi_1) - \lambda_1(\varphi_1)\, \lambda_1'(\varphi_2)$$

kde $\lambda_1, \lambda_1' \in \Lambda_1 = \Lambda(\Psi)$ jsou libovolné formy.
Pro $k > 2$ si alternující formu $\lambda_k \in \Lambda_k$ sestrojíme pomocí alternující formy $\lambda_{k-1} \in \Lambda_{k-1}$ a libovolné formy $\lambda_1' \in \Lambda_1 = \Lambda(\Psi)$ takto:

$$\begin{aligned} \lambda_k(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k-1}(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_{i-1}, \; \varphi_k, \; \varphi_{i+1}, \; ..., \; \varphi_{k-1})\, \lambda_1'(\varphi_i) - \\ &- \lambda_{k-1}(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_{k-1})\, \lambda_1'(\varphi_k) \end{aligned} \tag{10.51}$$

V teorii lineárních forem se dokazuje věta, že jiné alternující formy než ty, které lze sestrojit indukcí podle (1.26) neexistují. [49]
Jinými slovy, že pro každou dvojici $\lambda, \lambda' \in \Lambda_n$ existují $u, \; u' \in R$ takové, že

$$u\lambda + u'\lambda' = 0 \quad \text{na} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \Psi \tag{10.52}$$

Jestliže tedy $\lambda \in \Lambda_n$ není na $\oplus_1^n \Psi$ identicky 0, pak pro libovolnou alternující formu $\lambda' \in \Lambda_n$ existuje právě jedno reálné číslo u takové, že

$$\lambda'(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_n) = u\lambda(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_n) \quad \text{na} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \Psi \tag{10.53}$$

Nechť nyní $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi), \; \lambda \in \Lambda_n$ jsou libovolné, $\lambda \neq 0$. Pak platí $\lambda' \in \Lambda_n$ pro

$$\lambda'(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_{i-1}, \boldsymbol{\alpha}(\varphi_i), \varphi_{i+1}, \; ..., \; \varphi_n) \quad \text{na} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \Psi \tag{10.54}$$

Podle (10.53) existuje reálné číslo u obecně závisící na $\boldsymbol{\alpha}$, tedy $u = u(\boldsymbol{\alpha})$, takové, že

$$\lambda'(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_n) = u(\boldsymbol{\alpha})\, \lambda(\varphi_1, \; ..., \; \varphi_n) \quad \text{na} \quad \bigoplus_{i=1}^{n} \Psi \tag{10.55}$$

$$u(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{10.56}$$

[49] Přesněji řečeno, dokazuje se, že dimenze vektorového podprostoru Λ_n prostoru $\Lambda(\oplus_1^n \Psi)$ se rovná 1 nezávisle na $n = 1, 2, \; ..., .$

Teorémn 12.6. Číslo $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha})$ nezávisí na volbě $\lambda \in \Lambda_n$.

Důkaz. Jestliže $\tilde{\lambda} \in \Lambda_n$ je libovolná nenulová alternující forma pro kterou $\tilde{\lambda}' \in \Lambda_n$ je definována vztahem (10.54) a

$$\tilde{\lambda}'(\varphi_1, \ ..., \ \varphi_n) = u(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \tilde{\lambda}(\varphi_1, \ ..., \ \varphi_n),$$

pak podle (10.53) $\tilde{\lambda} = u\lambda$ a tedy i $\tilde{\lambda}' = u\lambda'$ pro některé $u \neq 0$, musí platit, že $u = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha})$.

Číslo $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha})$ je tedy jednoznačně definováno vztahem (10.55) a nazýváme ho *stopa operátoru* $\boldsymbol{\alpha} \in L(\Psi)$.

Z definice (10.55) lze postupně snadno odvodit následující vlastnosti stopy $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha})$.

Teorém 12.7. Pro všechna $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}' \in L(\Psi)$, $u \in R$ a symetrické projektory $\boldsymbol{\pi} \in A$ platí

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(a)} & \mathrm{Tr}(\mathbf{0}) & = & 0 \\
\text{(b)} & \mathrm{Tr}(\mathbf{1}) & = & \dim \Psi \\
\text{(c)} & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}') & = & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha}') \\
\text{(d)} & \mathrm{Tr}(u\boldsymbol{\alpha}) & = & u\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) \\
\text{(e)} & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\pi}) & = & \dim \boldsymbol{\pi}(\Psi) \\
\text{(f)} & (\boldsymbol{\alpha} \in A) & \Rightarrow & [\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum\limits_{\alpha \in \mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})} \alpha \dim \Psi(\alpha|\boldsymbol{\alpha})] \\
\text{(g)} & \text{vztah (10.51)} & \Leftarrow & [(\alpha_{ij}) \text{ matice } \boldsymbol{\alpha} \text{ v bázi } \{\psi_1, \psi_2, \ ..., \ \psi_n\}]
\end{array} \qquad (10.57)$$

kde $\mathbf{S}(\boldsymbol{\alpha})$ je spektrum operátoru $\boldsymbol{\alpha}$.

10.2 Stacionarita

10.2.1 Ergodický teorém Birkhoffův–Chinčinův

Je-li $\xi(t)$ spojitý stochastický stacionární proces s konečnou střední hodnotou $E\xi(t)$, platí, s pravděpodobností 1, že

$$E\xi(t) = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Je-li dána stacionární posloupnost

$$\xi_{t_0}, \ \xi_{t_1}, \ ...$$

stejně rozdělených náhodných veličin takových, že

$$\xi_{t_j} = \xi(t_j) = \{\xi_i\}_{i=1}^n$$

je řez náhodného procesu $\xi(t)$ v čase $t_j,\ j=0,\ 1,...$, platís pravděpodobností 1, že

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E\xi(t).$$

Je-li $E\xi_{t_j} = E\xi$ střední hodnota veličin $\xi_{t_j},\ j=0,\ 1,\ ...$

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} p(\xi_i)\,\xi_i, \quad p(\xi_i) \in \langle 0, 1\rangle$$

pak s pravděpodobností 1 (podle Chinčinova teorému o konvergenci aritmetického průměru ke střední hodnotě) platí, že

$$E\xi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E\xi(t)$$

resp. platí,že

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \xi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} p(\xi_i)\,\xi_i. \tag{10.58}$$

Pojem *stacionární posloupnost* nebo *proces* značí stacionární *v užším smyslu* [22], tj. kdy pro jejich distribuční funkci platí

$$F(x_1,\ ...,\ x_n;\ t_1,\ ...,\ t_n) = F(x_1,\ ...,\ x_n;\ t_1+t_0,\ ...,\ t_n+t_0) \tag{10.59}$$

10.2.2 Stacionární stochastický fyzikální systém

Stacionární stochastický (fyzikální) systém $\boldsymbol{\Psi}$ [30, 92] nabývá v časech $t = 0,\ 1,\ ...$ stavů $\boldsymbol{\theta}_t \in \Theta$ tak, že pro relativní četnosti událostí $\boldsymbol{\theta}_b \in \Theta$ platí

$$\frac{1}{\tau}\sum_{t=t_0+1}^{t_0+\tau} I_{\boldsymbol{\theta}_b}(\boldsymbol{\theta}_t) \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} p_{t_0}(\boldsymbol{\theta}_b) \tag{10.60}$$

kde $I_{\boldsymbol{\theta}_b}$ je indikátor události $\boldsymbol{\theta}_b \in \Theta$ a $p_{t_0}(\boldsymbol{\theta}_b)$ je pravděpodobnost události $\boldsymbol{\theta}_b$ v okamžiku t_0 nezávisící na volbě t_0 - stacionarita v užším smyslu.

Je tedy zřejmé, že uvedený pojem stacionarita vyhovuje pojmu stacionarita fyzikálního systému, termodynamického (*rovnovážnost, (kvazi)stacionarita* (stavu) termodynamického systému) i systému kvantového.

10.3 Schroedingerova rovnice

Schroedingerova rovnice, viz např. [4, 15, 20, 25, 41, 91], je rovnice šíření vln pravděpodobnosti v prostoru (a čase) jíž se řídí výskyt částice v bodu X resp. (X, t) (časo)prostoru. Tato pravděpodobnost je dána intenzitou vlny

$$|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$$

kde Ψ je zde amplituda vlny (***de Broglie***).

Šíření vln v prostoru je popsáno (***Helmholtzovou***) rovnicí

$$\nabla^2 u \quad = \quad \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{pro } u = \Psi(x;t) \tag{10.61}$$

Pro náš případ *de Brogliových (hmotných) vln* píšeme,

$$\nabla^2 \Psi \quad = \quad \frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{10.62}$$

De Brogliova vlna (*vlna pravděpodobnosti*) je harmonická a tedy píšeme,

$$\Psi = A\, e^{-j(2\pi\nu t-\varphi)}, \quad j = \sqrt{-1}$$

a pro *amplitudovou funkci* $\psi(x) = A\, e^{j\varphi}$ máme

$$\begin{aligned}
\Psi \quad &= \quad \psi(x)\cdot e^{-2\pi j\nu t} = \psi\, e^{2\pi j\nu t},\\
\nabla^2\Psi \quad &= \quad \nabla^2\psi\, e^{-2\pi j\nu t},\\
\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad &= \quad \psi\, e^{2\pi j\nu t}(2\pi j\nu)^2\\
\nabla^2\psi\, e^{-2\pi j\nu t} \quad &= \quad -\frac{4\pi^2\nu^2}{V^2}\,\psi\, e^{-2\pi j\nu t}\\
\nabla^2\psi + \frac{4\pi^2\nu^2}{V^2}\,\psi \quad &= \quad 0, \quad \frac{\nu}{V} = \lambda
\end{aligned}$$

Tedy

$$\nabla^2\psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,\psi = 0 \tag{10.63}$$

je tzv. *bezčasová* Schroedingerova rovnice (pro stojaté de Brogliovy vlny).

Uvažujme "klasickou" kinetickou a potenciální energii, E_{K} a E_{P},

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{K}} \quad &= \quad \frac{1}{2} m\, v^2\\
\varepsilon \quad &= \quad E_{\mathrm{K}} + E_{\mathrm{P}}, \quad E_{\mathrm{K}} \; = \; \varepsilon - E_{\mathrm{P}}
\end{aligned}$$

a předpokládejmme pohyb částice v *konzervativním poli* s potenciální energií

$$E_{\mathrm{P}} = E(x) > 0$$

Potom,

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2}\,\psi \quad &= \quad 0\\
\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\,(\varepsilon - E_{\mathrm{P}})\,\psi \quad &= \quad 0, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}
\end{aligned}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

a tak získáváme výsledný tvar bezčasové Schroedingerovy rovnice

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar}\left(\varepsilon - E_\mathrm{P}\right)\psi \;=\; 0 \tag{10.64}$$

Jeho řešením je vlnová (pravděpodobnostní) funkce stacionárního (časově nezávislého) systému,

$$\Psi \;=\; A\,e^{-2\pi j\nu t + j\varphi} = A\,e^{-2\pi j(\nu t - \frac{x}{\lambda})} \tag{10.65}$$

Položme

$$E = h\nu = 2\pi\hbar\nu,\ \lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p},\ \Psi = A\,e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi}{\partial x} &= -p\left(-\frac{i}{\hbar}\right)A\,e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = \frac{ip}{h}\,\Psi \\
\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &= -\frac{p^2}{\hbar}\,\Psi \\
\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= \varepsilon\left(-\frac{i}{\hbar}\right)A\,e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = -\frac{i\varepsilon}{\hbar}\,\Psi, \\
\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -i\,\frac{\varepsilon}{\hbar}\,\Psi,\ \varepsilon = \frac{p^2}{2m} + E_\mathrm{P}
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\varepsilon\,\Psi &= -\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad (10.66)\\
\varepsilon\,\Psi &= \frac{p^2}{2m}\,\Psi + E_\mathrm{P}\,\Psi = -\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}
\end{aligned}$$

Protrože podle předchozího platí

$$p^2\Psi = -\hbar\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

pak použitím vztahů ve (10.66) získáme *časově závislý* tvar Schroedingerovy rovnice

$$\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2m}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - E_\mathrm{P}\,\Psi \tag{10.67}$$

Jeho řešením je *časově závislá* vlnová pravděpodobnostní funkce

$$\Psi = \Psi(x;t)$$

10.3.1 Stacionární kvantový systém a lineární prostor

Částice v potenciálovém poli. Uvažujme fyzikální systém $\mathbf{\Psi} \cong < \Psi, L(\Psi) >$ všech funkcí $\psi :< 0,1 > \rightarrow R$, které jsou analytické, integrovatelné s kvadrátem na intervalu $< 0,1 >$, přičemž v krajních bodech $x = 0,\ x = 1$ splňují podmínku

$$\frac{\mathrm{d}^{2i}}{\mathrm{d}x^{2i}}\psi(x) = 0,\ i = 1,\ 2,\ ...$$

Nechť nás zajímají pouze dvě veličiny,[50] *kinetická energie* vyjádřná operátorem $\boldsymbol{\kappa}$ a *potenciální energie vyjádřná operátorem* $\boldsymbol{\nu}$,

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \quad \boldsymbol{\nu} = E_{\mathrm{P}}(x) \quad \text{pro všechna } x \in R,$$

kde $V : [0,1] \rightarrow R$ je libovolná analytická funkce, která není identicky nula, $m \neq 0$ je tzv. *redukovaná hmotnost* částice a $\hbar$ je *redukovaná* Planckova konstanta.
Uvažujeme tedy pouze *analytické* potenciálové pole částice pohybující se po přímce.
Zřejmě

$$\boldsymbol{\kappa}(\psi) = \frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} \in \Psi, \quad \boldsymbol{\nu}(\psi) = E_{\mathrm{P}} \cdot \psi \in \Psi$$

a dále $\boldsymbol{\kappa}^* = \boldsymbol{\kappa},\ \boldsymbol{\nu}^* = \boldsymbol{\nu}$ přičemž $\boldsymbol{\kappa\nu} \neq \boldsymbol{\nu\kappa}$.
Jelikož podle učiněných předpokladů operátory $\boldsymbol{\kappa}^i(\psi) \in \Psi,\ \boldsymbol{\nu}^i(\psi) \in \Psi$ pro všechna $\psi \in \Psi$ (přičemž $\boldsymbol{\kappa}^0 = n \cdot \mathbf{1},\ \boldsymbol{\nu}^0 = \mathbf{1}$), bude obecná veličina $\boldsymbol{\alpha}$ dána výrazem

$$\boldsymbol{\alpha} = u\boldsymbol{\kappa}^r + v\boldsymbol{\nu}^s \quad \text{kde } u,\ v \in R,\ r,\ s \in 0,\ 1,\ ...$$

Ačkoli je těžké dát všem možným tvarům veličiny $\boldsymbol{\alpha}$ fyzikální interpretaci, je zřejmé, že při $r = s = 1$ a $u = v = 1$, je $\boldsymbol{\alpha}$ operátorem *celkové energie* $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + E_{\mathrm{P}}(x)$$

Schroedingerova rovnice $\boldsymbol{\varepsilon}\psi = \varepsilon\psi$ má tedy tvar homogenní diferenciální rovnice druhého řádu,

$$\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \left[E_{\mathrm{P}}(x) - \varepsilon\right]\psi = 0$$

Nejsnadněji se nám tato rovnice bude řešit při konstantním potenciálu na celé přímce. Položme $E_{\mathrm{P}}(x) = E_{\mathrm{P}} = (\hbar\pi^2/2m)\,n^2$ pro některé $n > 1$. Reálné řešení Schroedingerovy rovnice existuje a je dáno vztahem

$$\psi(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

[50] Třída operátorů $L(\Psi)$ stejně jako třída veličin $A \subseteq L(\Psi)$ je v tomto případě velice rozsáhlá a je obtížné tyto třídy vůbec charakterizovat, natož dát například všem veličinám fyzikální smysl. Jelikož $\boldsymbol{\kappa}$ a $\boldsymbol{\nu}$ nekomutují, nebude minimální $*$-algebra obsahující $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\nu}$ (označme si ji L_*) totožná s množinou veličin $A_* \subset L_*$. Struktura L_* je pořád poměrně složitá a uvedeme si proto jen tvar obecného prvku $\boldsymbol{\alpha} \in A_*$.

pouze za podmínky

$$\lambda = \frac{2m(E_{\mathrm{P}} - \varepsilon)}{\hbar} > 0.$$

Jelikož zřejmě pro toto řešení platí

$$\frac{\mathrm{d}^{2i}\psi(x)}{\mathrm{d}x^{2i}} = (-\lambda)^i\,\psi(x)$$

bude $\psi \in \Psi$ právě tehdy, když $\psi(0) = \psi(1) = 0$, tj.

$$\begin{aligned} c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,0\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,0\right) &= 0 \\ c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,1\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Tyto podmínky lze splnit právě když

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{tedy} \quad \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0$$

K tomu je nutné a stačí aby

$$\lambda = \pi^2\, i^2 \quad \text{pro } i = 1,\ 2,\ \ldots$$

tedy aby

$$\varepsilon = E_{\mathrm{P}}\ - \frac{\hbar}{2m}\,\pi^2 i^2 \quad \text{pro } i = 1,\ 2,\ \ldots$$

Dosazením hodnoty konstantního potenciálu zjistíme, že energetické spektrum $\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})$ operátoru $\boldsymbol{\varepsilon}$ obsahuje pouze konečně mnoho nezáporných energetických hladin ε_i,

$$\varepsilon_i = \frac{\hbar\pi^2}{2m}\,(n-i)\,(n+i), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Jedinou vlastní vlnovou funkcí ψ_i operátoru $\boldsymbol{\varepsilon}$ příslušnou vlastní hodnotě ε_i je funkce

$$\psi_i(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(\pi x i), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Můžeme tedy místo fyzikálního systému (Ψ, L_*) použít k popisu částice v potenciálovém poli uvažovaného typu systém $(\Psi, \{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}\})$, resp. $(\Psi_*, \{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}\})$, kde

$$\Psi_* = \bigoplus_{i=1}^{n} \Psi(\{\psi_i\})$$

je eukleidovský podprostor prostoru Ψ, $\dim(\Psi) = n$, jehož báze je $\{\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n\}$. Prostory Ψ a Ψ_* mají fyzikální interpretaci neboť oba popisují pohyb částice ve stacionárním na čase nezávislém potenciálovém poli. Jsou to tedy reprezentacemi tohoto fyzikálního systému $\boldsymbol{\Psi}$: $\boldsymbol{\Psi} \cong (\Psi, \{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}\})$, resp. $\boldsymbol{\Psi} \cong (\Psi_*, \{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\nu}\})$ [30, 31].

10.4 Fyzikální statistiky

Předpokládáme makroskopický termodynamický systém N stejných částic, z nichž každá má s *stupňů volnosti*. Celková energie systému je vlastní hodnotou *Hamiltoniánu*

$$\kappa = \kappa(p_1, p_2, \ ..., \ p_f, \ q_1, q_2, \ ..., \ q_f) \tag{10.68}$$

kde $f = N \cdot s$ je celkový (maximální) počet stupňů volnosti.

Souřadnice p, q tvoří *fázový prostor* Γ, $\dim \Gamma = 2f = 2Ns$ v němž každý bod odpovídá nějakému stavu systému (klasicky).

Pro objemový element (kvantově, pravděpodobnostně)

$$\Delta\Omega_\Gamma = \Delta p \, \Delta q \tag{10.69}$$

platí *Liouvillův teorém*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\Omega_\Gamma) = 0; \quad \Delta\Omega_\Gamma \geq h^f \tag{10.70}$$

V každém bodu z Γ předpokládáme jeho shodnou pravděpodobnost s ostatními body Γ ale tak, že platí

$$\begin{aligned} \Delta p_1 \cdot \Delta q_1 &\geq h \\ \Delta\Omega_\Gamma = \Delta p \cdot \Delta q &\geq h^f \end{aligned} \tag{10.71}$$

Vztahy (10.71) jsou *Heisenbergovými relacemi neurčitosti*, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \ J \cdot s$ je Planckova konstanta.

Detailnější zpracování problematiky souvisící s fyzikálními statistikami viz také v [42, 44, 58]

10.4.1 Maxwell–Boltzmanova statistika (M–B statistika)

Pro (nejmenší) jednočásticový element fázového prostoru platí

$$\Delta\Omega_1 = h^s \tag{10.72}$$

Jednotlivé *částicové* prostory jsou shodné ale (vzájemně)izolované. Dohromady reprezentují *μ-stav* soustavy v němž jsou částice umístěny v rzných buňkách $\Delta\Omega$ fázového prostoru Γ.

Předpokládáme, že Γ má n buněk $\Delta\Omega$ a systém má N částic. Dále předpokládáme že N_i částic (s energiemi ε_i) obsadí i-tou buvnku $\Delta\Omega$ z prostoru Γ.

Máme $N!$ permutací částic celkem,
$N_i!$ permutací částic v i-tém objemu $\Delta\Omega$
a celkový počet vzájemně nerozlišitelných μ-stavů.
Termodynamická pravděpodobnost makrostavu, je

$$W = \frac{N!}{\prod\limits_{i=1}^{n} N_i!} \tag{10.73}$$

Pro Stirlingův vzorec, $N! \approx N \left(\frac{N}{n}\right)^N$, máme (přibližně, pro velká N)

$$\ln W = N \ln N - \sum_{i=1}^{n} N_i \ln N_i - N + \sum_{i=1}^{n} N_i \tag{10.74}$$

Pro rovnovážný (stacionární) stav zjišťujeme maximální hodnotu termodynamické pravděpodobnosti W metodou Lagrangeových multiplikátorů při podmínkách

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N,\ \sum_{i=1}^{n} N_i\,\varepsilon_i = E \in \sigma(\kappa) \tag{10.75}$$

Píšeme,

$$\begin{aligned}
\partial \ln W &= -\sum_{i=1}^{n} (\ln N_i + 1)\,\partial N_i = \sum_{i=1}^{n} \partial N_i \ln N_i \\
\partial N &= \sum_{i} \partial N_i = 0 \\
\partial E &= \sum_{i} \partial N_i\,\varepsilon_i = 0
\end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned}
\partial \ln W &= -\sum_{i=1}^{n} (\ln N_i + \alpha + \beta\varepsilon_i)\,\partial N_i = 0 \\
\ln N_i + \alpha + \beta\varepsilon_i &= 0 \\
f_i' &= N_i = e^{-\alpha-\beta\varepsilon_i}
\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\ln W_{\max} &= N \ln N - \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha-\beta\varepsilon_i}(-\alpha - \beta\varepsilon_i) \\
&= N \ln N + \alpha N + \beta E
\end{aligned} \tag{10.76}$$

Dále,

$$\begin{aligned}
N \cdot \mathrm{d}\alpha &= -E \cdot \mathrm{d}\beta \\
\mathrm{d}S' &= \mathrm{k} \cdot \mathrm{d}(\ln W_{\max}) = \mathrm{k} \cdot (N\mathrm{d}\alpha + E\mathrm{d}\beta + \beta\mathrm{d}E) = \frac{\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V}{\Theta}
\end{aligned}$$

Pro rovnovážnou změnu při $p = $ konst. a $\Theta = $ konst., tedy pro $p\mathrm{d}V = 0$, pak platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S' = \mathrm{k} \cdot \beta \cdot \mathrm{d}E &= \frac{\mathrm{d}E}{\Theta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\mathrm{k}\Theta} \\
f_i' &= e^{-\beta\varepsilon_i}
\end{aligned}$$

V rovnovážném stavu platí, že $\varepsilon_i = \varepsilon$; pravděpodobnost výskytu 1 částice na energetické hladině ε je

$$f_i' = p = e^{\frac{-\varepsilon}{\mathrm{k}\Theta}},\ \forall\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n \tag{10.77}$$

Pravděpodobnost jevu opačného je

$$q = 1 - p = 1 - e^{-\frac{\varepsilon}{k\Theta}} \tag{10.78}$$

Boltzmanovy částice jsou daleko od sebe, takže tato vzdálenost je mnohonásobně větší než je vlnová délka jejich *de Broglieových* vln a tak zachovávají svou identitu [proto je možné použít celý fázový prostor Γ resp. neuplatňují se zde relace neurčitosti (10.71)].

10.4.2 Fermi–Diracova statistika (F–D statistika)

Fermiony (např. elektrony) jsou u sebe velmi blízko, tak, že vlnové délky jim příslušných de Brogliových vln se překrývají a tyto částice jsou tak vzájemně *nerozlišitelné*, platí pro ně *Pauliho vylučovací princip:*
žádná buňka fázového prostoru Γ, představující kvantovanou energetickou hladinu fermionu, neobsahuje více, než právě jeden fermion.

(Každé čtveřici kvantových čísel elektronu přísluší právě jedna buňka fázového prostoru, resp. nejvýše jeden elektron.)
(Fázový prostor Γ fermionového plynu je tvořen buňkami $\Delta\Omega$ s nejvýše jedním fermionem v každém z nich.)

Uvažujme N_i fermionů obsazujících n_i buněk fázového prostoru Γ, $N_i \leq n_i$ (každá s energií ε_i). Tedy je $n_i - N_i$ buněk neobsazených.
Počet permutací představujících změny μ-stavu je

$$W_i = \frac{n_i!}{(n_i - N_i)!\, N_i!} \tag{10.79}$$

neboť nelze rozlišit ani obsazené ani prázdné buňky z Γ. Termodynamická pravděpodobnost makrostavu je

$$W = \prod_{i=1}^{n} W_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n_i - N_i)!\, N_i!} \tag{10.80}$$

Pro rovnovážný stav hledáme maximum W metodou Lagrangeových multiplikátorů a to za podmínek

$$\sum_i N_i = N, \qquad \sum_i N_i \varepsilon_i = E \tag{10.81}$$

Píšeme,

$$\begin{aligned} \ln W &= \sum_{i=1}^{n} n_i \ln n_i - (n_i - N_i) \ln(n_i - N_i) - N_i \ln N_i \\ \frac{\partial \ln W}{\partial N_i} &= \sum_{i=1}^{n} \ln(n_i - N_i) - \ln N_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\partial \ln W &= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln(n_i - N_i) - \ln N_i - \alpha\beta\varepsilon_i\right] \partial N_i = 0 \\
& \ln(n_i - N_i) - \ln N_i - \alpha - \beta\varepsilon_i = 0 \\
\ln \frac{n_i - N_i}{N_i} &= \alpha + \beta\varepsilon_i \\
\frac{n_i - N_i}{N_i} &= e^{\alpha+\beta\varepsilon_i} \\
n_i &= N_i \left(1 + e^{\alpha+\beta\varepsilon_i}\right), \quad \alpha = \frac{E_\mathrm{F}}{\mathrm{k}\Theta} \to 0, \quad \beta = \frac{1}{\mathrm{k}\Theta}
\end{aligned}
$$

kde E_F je *Fermiho energie*. Dále,

$$
f_i' = \frac{N_i}{n_i} = \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k}\Theta}}} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k}\Theta}}}{1 + e^{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k}\Theta}}} = \frac{p}{1+p}, \quad \varepsilon_i = \varepsilon, \ \forall\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n \tag{10.82}
$$

Je to pravděpodobnost jevu, že jeden fermion je na energetické hladině ε. Pravděpodobnost opačnho jevu je

$$
1 - f_i' = \frac{1}{1+p} \tag{10.83}
$$

10.4.3 Bose–Einsteinova statistika (B–E statistika)

Na jedné energetické hladině se může vyskytnout více *bosonů* (např. fotoně).
Zvolíme n_i buněk fázového prostoru o energii ε_i.
Celkový počet permutací rozdělení N_i bosonů do n_i buněk je

$$
(N_i + n_i - 1)!
$$

Nerozlišitelné jsou jak bosony tak buňky, ale jedna je obsazena; $N_i!(n_i - 1)!$ permutací nevede k novému makrostavu.

Termodynamická pravděpodobnost makrostavu je

$$
W = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(N_i + n_i - 1)!}{N_i!(n_i - 1)!} \tag{10.84}
$$

Podobně jako v předchozích případech hledáme maximum veličiny W,

$$
\frac{\partial}{\partial N_i} \left(\ln W - \sum_{i=0}^{\infty} \beta \cdot N_i \cdot \varepsilon_i = 0 \right), \ \beta = \frac{1}{\mathrm{k}\Theta}
$$

Potom,

$$
f_i' = \frac{N_i}{n_i} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k}\Theta}} - 1} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k}\Theta}}}{1 - e^{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k}\Theta}}} = \frac{p}{1-p}, \quad \varepsilon_i = \varepsilon, \ \forall\ i = 1,\ ...,\ n \tag{10.85}
$$

Vztah (10.85) je ale vyjadřuje střední hodnotu geometricky rozdělené náhodné veličiny a proto je pravděpodobnost výskytu N_i bosonů na energetické hladině ε dána vztahem

$$p_{N_i} = (1 - p) \cdot p^{N_i} \tag{10.86}$$

Bosony jsou nerozlišitelné ze stejného dvodu překrývání vlnových délek jim příslušných de Brogliových vln jako je tomu u fermionů. Danou energetickou hladinu mohou zaujímat v libovolném množství.

10.5 Přenosové kanály teorie informace

Na tomto místě se pozastavíme u definice diskrétního a spojitého *přenosového (komunikačního) kanálu* známé z teorie informace viz např. [5, 11, 14, 28, 79, 84, 92, 97] a zevrubněji si probereme veličiny na přenosovém kanále definované. Vynikne tak souvislost, do níž klademe výše uvedené veličiny p-entropie

$$H(p(\cdot|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})) = H(\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta})$$

a q-entropie

$$H(q(\cdot|\boldsymbol{\theta})) = H(\boldsymbol{\theta})$$

definované na fyzikálním systému $\boldsymbol{\Psi}$, pojímaném jako komunikační kanál.[51] *Diskrétní přenosový kanál* definujeme jako uspořádanou trojici $[(X, p(\cdot|\cdot), Y)]$ kde X je *vstupní* diskrétní náhodná veličina s výběrovým prostorem

$$\mathbf{S}(X) = \{x_0, x_1,\ x_2,\ ...\} \triangleq \mathcal{X} \tag{10.87}$$

a s rozdělením $q(\cdot)$ definovaným na množině

$$\{0,\ 1,\ 2,\ ...\},\ q(a) \geq 0,\ \sum_i q(a) = 1 \tag{10.88}$$

a Y je *výstupní* diskrétní náhodná veličina s výběrovým prostorem

$$\mathbf{S}(Y) = \{y_o,\ y_1,\ y_2,\ ...\} \triangleq \mathcal{Y} \tag{10.89}$$

[51] Vynikne tak souvislost pojmu transinformace a informační kapacita fyzikálního systému. V tomto přehledu se přidržíme označení častěji používaného v literatuře o komunikačních kanálech. Při korespondenci zavedené v této práci píšeme,

$$X \triangleq \boldsymbol{\theta},\ Y \triangleq \boldsymbol{\alpha}$$

$$Y \triangleq (\boldsymbol{\alpha}\|\boldsymbol{\theta}),\ (X|Y) \triangleq (\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\alpha})$$

$$(Y|X) \triangleq (\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\theta})$$

.

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

a s rozdělením $p(\cdot)$,

$$p(j) \geq 0, \ \sum_j p(j) = 1 \tag{10.90}$$

Nakonec, $p(\cdot|\cdot)$ je rozdělení pravděpodobnosti *šumu (rušení)* v kanále, tj. rozdělení pravděpodobnosti změření (pozorování) $y_j \in \mathcal{Y}$ na výstupu kanálu při vstupním $x_i \in \mathcal{X}$ (výstupního j při vstupním i).

Shannonovu entropii vstupní veličiny X resp. výstupní veličiny Y nazýváme *vstupní* resp. *výstupní entropií* a podle definice informační entropie

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_i q(a) \ln q(a) \qquad (10.91) \\ H(Y) &= -\sum_j p(j) \ln p(j) \end{aligned}$$

Je zřejmé, že se jedná o *střední hodnotu* veličin

$$-\ln q(\cdot) \ \text{ resp. } \ -\ln p(\cdot)$$

Čísla $-\ln q(a)$ a $-\ln p(j)$ nazýváme *informační množství (informace)* obsažené v náhodném jevu jehož pravděpodobnost je $q(a)$, resp. $p(j)$.
Náhodnou veličinu X nazýváme *zdroj zpráv*, veličina Y je přijímána (měřena) *příjemcem (přijímačem)* zpráv.
Množství informace $I_{i|j}$ obsažené v jevu s podmíněnou pravděpodobností $p(i|j)$, tedy $I_{i|j} = -\ln p(i|j)$ nazýváme *ztracená informace*. Pro její (podmíněnou) entropii platí

$$H(X = x_i|Y) = -\sum_j p(i|j) \ln p(i|j) \tag{10.92}$$

a tedy

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_i q(a) \sum_j P(i|j) \ln p(i|j) \qquad (10.93) \\ &= -\sum_i \sum_j p(i,j) \ln p(i|j) \end{aligned}$$

kde $p(i,j)$ je simultánní pravděpodobnost jevů i a j.

Veličinu $H(X|Y)$ nazýváme *ztrátová (zbytková)* entropie (měření, pozorování).
Podobně $I_{j|i} = \ln p(j|i)$. Tuto hodnotu nazýváme *šumová (rušivá) informace* a její (podmíněnou) informační entropii

$$H(Y|X) = -\sum_i \sum_j p(i,j) \ln p(j|i) \tag{10.94}$$

nazýváme *entropie šumu (rušení)* v kanále. Je zřejmé, že *užitečná informace* $I_{i,j}$ ve výstupní zprávě y_j o vstupním x_i je dána vztahem

$$I_{i,j} = I_i - I_{i|j} = -\ln q(a) + \ln p(i|j) \ = \ \ln \frac{p(i|j)}{q(a)}$$

Průměrné množství užitečné informace $I_{i,j}$ ve zprávě j o zprávě i je veličina

$$\begin{aligned} T(X;Y) &= \sum_i \sum_j I_{i,j} p(i,j) = \sum_i \sum_j p(i,j) \ln \frac{p(i|j)}{q(a)} \\ &= \sum_i \sum_j p(i,j) \ln(p|j) - \sum_i \sum_j p(i,j) \ln q(a) \\ &= -H(X|Y) + H(X) \end{aligned} \tag{10.95}$$

kterou nazýváme *přenesená informace (transinformace).*
Podobně platí pro výstupní informaci $I_j = I_{i,j} + I_{j|i}$,

$$I_{i,j} = I_j - I_{j|i} = -\ln p(j) + \ln \frac{p(j|i)}{p(j)}$$

a tedy pro transinformaci $T(Y;X)$ platí

$$\begin{aligned} T(Y;X) &= \sum_i \sum_j I_{i,j} p(i,j) = \sum_i \sum_j p(i,j) \ln \frac{p(j|i)}{p(j)} \\ &= -H(Y|X) + H(Y) \end{aligned} \tag{10.96}$$

Pro simultánní rozdělení $p(i,j)$, $i,j \in \{0,\ 1,\ ...\}$ definujeme *simultánní (vlastní) entropii*

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= -\sum_i \sum_j p(i,j) \ln p(i,j) = \sum_i \sum_j q(a)p(j|i) \ln[q(a)p(j|i)] \\ &= -\sum_i \sum_j q(a)p(j|i) \ln q(a) - \sum_i \sum_j q(a)p(j|i) \ln p(j|i) \\ &= H(X) + H(Y|X) \end{aligned} \tag{10.97}$$

Zřejmě platí i to, že

$$\begin{aligned} H(Y,X) &= -\sum_i \sum_j p(j)p(i|j) \ln[p(j)p(i|j)] \\ &= H(Y) + H(X|Y) \end{aligned} \tag{10.98}$$

Protože $\forall_{(i,j)\in(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})}[p(i,j) = p(j,i)]$, musí platit *kanálová rovnice*

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= H(Y,X) \\ H(X) + H(Y|X) &= H(Y) + H(X|Y) \\ H(X) - H(X|Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ T(X;Y) &= T(Y;X) \\ H(X,Y) - H(Y|X) - H(X|Y) &= H(Y,X) - H(X|Y) - H(Y|X|Y) \end{aligned} \tag{10.99}$$

Spojitý přenosový kanál definujeme formálně shodně s diskrétním kanálem, ale veličiny $X, Y, (X|Y), (Y|X)$ jsou spojité náhodné veličiny. Pro jejich výběrové prostory $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ platí, že

$$\mathcal{X} \subseteq R,\ \mathcal{Y} \subseteq R$$

Protož u spojité náhodné veličiny limituje pravděpodobnost výskytu konkrétní hodnoty k hodnotě 0, je třeba při zavádění pojmů entropie a informace určité korekce.

Uvažujme spojitou náhodnou veličinu X s výběrovým prostorem $\mathcal{X}$ a s hustotou pravděpodobnosti $w(\cdot)$. Potom uvažujme pravděpodobnost $p(x_i) = w(x_i)\Delta x$ výskytu hodnoty $x_i \in \mathcal{X}$ v intervalu Δx.
Informační množství takového jevu je

$$I(x_i) = -\ln[w(x_i)\Delta x]$$

a je zřejmé, že

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} I(x_i) = +\infty$$

Je také zřejmé, že entropie $H'(X)$ spojité náhodné veličiny $X = [\mathcal{X}, w(\cdot)]$ roste nade všechny meze.

$$\begin{aligned} H'(X) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow o} -\sum_i w(x_i)\Delta x \cdot \ln[w(x_i)\Delta x] \\ &= -\int_{\mathcal{X}} w(x) \ln w(x)\ \mathrm{d}x - \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \sum_i [w(x_i)\Delta x] \ln(\Delta x) \\ &= -\int_{\mathcal{X}} w(x) \ln w(x)\ \mathrm{d}x - \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \ln(\Delta x) = +\infty \end{aligned}$$

Zavedeme tedy referenční veličinu X_0 a stejným způsobem spočítáme *referenční entropii* $H'(X_0)$. Rozdílem $H'(X) - H'(X_o)$ zrušíme divergující členy $\lim_{\Delta x \longrightarrow o} \ln(\Delta x)$ a získáme tzv. *diferenciální (relativní) entropii*

$$\begin{aligned} H''(X) &= H'(X) - H'(X_0) = H(X) - H(X_0) \\ &= -\int_{\mathcal{X}} w(x) \ln w(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{X}_0} w_0(x_0) \ln w_0(x_0)\ \mathrm{d}x_0 \end{aligned}$$

Definitoricky klademe $H(X_0) = 0$ a tedy

$$H^{''}(X) = H(X) = -\int_{\mathcal{X}} w(x) \ln w(x)\ \mathrm{d}x \tag{10.100}$$

Nechť je nyní X vstupní a Y výstupní spojitá náhodná veličina spojitého přenosového kanálu $[X, p(\cdot|\cdot), Y)]$. Nechť $w(x)$ resp. $w(y)$ jsou hustoty pravděpodobnosti veličin X a Y definované na $\mathcal{X} \subseteq R, \mathcal{Y} \subseteq R$ a $p(y|x)$ je podmíněná hustota pravděpodobnosti vzniku šumu v kanále a $p(y,x)$ je simultánní hustota pravděpodobnosti. Potom

$$H(X) \;=\; -\int_{\mathcal{X}} w(x) \ln w(x)\ \mathrm{d}x \tag{10.101}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

$$
\begin{aligned}
H(Y) &= -\int_{\mathcal{Y}} v(y) \ln v(y) \; \mathrm{d}y \\
H(X|Y) &= -\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} p(x,y) \ln p(y|x) \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
H(Y|X) &= -\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} p(x,y) \ln p(x|y) \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
H(X,Y) &= -\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} p(x,y) \ln p(x,y) \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
T(X;Y) &= \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} p(x,y) \ln \frac{p(x,y)}{w(x)v(y)} \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

jsou vstupní, výstupní, ztrátová, šumová (rušivá), vzájemná (vlastní) entropie a přenesená informace (transinformace).

Kapacita kanálu, jak spojitého tak diskrétního je definována vztahem

$$C = \sup T(X;Y) \tag{10.102}$$

přes všechna možná rozdělení $q(\cdot), p(\cdot)$ resp. $w(\cdot), v(\cdot)$.
Jedná se o maximální průměrné množství užitečné informace o vstupní zprávě (i resp. x) ve zprávě výstupní (j resp. y).

Je-li $R = \frac{1}{\tau} T(X;Y)$ průměrná *rychlost přenosu informace* (τ je doba trvání signálního prvku z X), pak kapacita C určuje maximální rychlost přenosu informace

$$C_\tau = \sup R = \frac{1}{\tau} \sup T(X;Y) = \frac{1}{\tau} C \tag{10.103}$$

kterou nazýváme *propustnost kanálu.* (Veličinu $\lim\limits_{\tau \longrightarrow \infty} C_\tau$ také nazýváme kapacita.)
Jak v diskrétním, tak spojitém přenosovém kanálu lze formálně shodně psát

$$
\begin{aligned}
T(X;Y) &= T(Y;X) \qquad (10.104) \\
&\equiv \\
H(X) - H(X|Y) &= H(Y) - H(Y|X)
\end{aligned}
$$

Poslední vztah ve (10.104), také viz vztahy (10.99), nazýváme *zákon zachování informace* v přenosovém kanále.

Na zdroji zpráv $X = [\mathcal{X}, q(\cdot)]$ definujeme *informační účinnost* zdroje

$$\mu = \frac{H[q(\cdot)]}{\sup H[q(\cdot)]} = \frac{H(X)}{\sup H(X)} \tag{10.105}$$

a *redundanci* zdroje zpráv[52] $X = [\mathcal{X}, q(\cdot)]$,

$$\rho = 1 - \mu \; = \; \frac{\sup H[q(\cdot)] - H[q(\cdot)]}{\sup H[q(\cdot)]} \triangleq \frac{\sup H(X) - H(X)}{\sup H(X)} \tag{10.106}$$

[52]Výběr zdroje zpráv $[\mathcal{X}, q(\cdot)] \equiv \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0$ se řídí požadovanou rychlostí a bezpečností přenosu informace, resp. zprávy, kanálem.

Redundance je kvantitativní mírou zabezpečení zprávy $i \equiv x_i$ proti šumu v kanále tj. proti stochastické transformaci vstupního i na výstupní y podle rozdělení

$$p(y|Y|x_i), i \in \{1,\ 2,\ ...\},\ y \in \mathcal{Y}$$

(Tedy platí, že přijaté $y \neq y_i$ s pravděpodobností $p(y|X|x_i)$ a vstupní i je při bezchybném přenosu indikováno změřením $y_i \stackrel{\triangle}{=} i$.)

10.5.1 1. Shannonoův teorém (o kódování zdroje zpráv)

Je-li $H_{\max}(X)$ maximální entropie zdroje zpráv, je kapacita bezšumového kanálu

$$C = \gamma\, H_{\max}(X), \quad \gamma \in \langle 0, 1\rangle \tag{10.107}$$

Při vhodném zakódování zprávy ji lze kanálem přenášet rychlostí R libovolně blízkou kapacitě C.

Důkaz.

$$\begin{aligned} I &= m\, H(x) && (10.108)\\ I &= m_0\, H_{\max}(x), \quad m \geq m_0, \quad H(x) \leq H_{\max}(x) \\ \frac{m_0}{m} &= \frac{H(x)}{H_{\max}(x)} = \mu = 1 - \rho \end{aligned}$$

kde μ je *účinnost* a ρ je *redundance zdroje zpráv* X; m_0 je minimální počet znak zprávy při entropii $H_{\max}(X)$ a m je počet znak zprávy při entropii $H(X)$ zdroje zpráv X.

Je-li $X = [\mathcal{X} \subseteq N,\ q(x)]$ diskrétní zdroj zpráv, dosahuje $H_{\max}(X)$ pro

$$p(x) = \frac{1}{\mathrm{card}\, \mathcal{X}},\ \forall\, x \in \mathcal{X}$$

V případě spojitém, $X = [\mathcal{X} \subseteq R,\ w(x)]$, dosahujeme $H_{\max}(X)$ pro

$$w(x) = N_0[E(X), D(X)],\ x \in \mathcal{X}$$

(Samozřejmě, že $\mathcal{X}$ může být jakákoli neprázdná diskrétní množina.)

10.5.2 2. Shannonův teorém (o přenositelnosti zdroje zpráv kanálem)

Definice. $(M, \mathcal{M}, \beta)$-kód je uspořádaná množina

$$\{(a_i, D_i)\}_{i=1}^{\mathcal{M}} \tag{10.109}$$

kde $a_i = a_i^M \in \boldsymbol{A}^M$ jsou vstupní kódová slova kanálu délky M (nad abecedou $\boldsymbol{A}$) a $D_i \subset \boldsymbol{B}^M$ jsou vzájemně disjunktní okolí slova a_i. Dále,

$$\begin{aligned} p^M(D_i|a_i) &\geq \beta && (10.110)\\ p^M(D_i^c|a_i) &< 1 - \beta \end{aligned}$$

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

jsou pravděpodobnosti správného resp. chybového přenosu slova a_i kanálem a

$$\beta = \beta(M, \mathcal{M}) \tag{10.111}$$

je *maximální pravděpodobnost* chyby přenosu. Dále, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M, \beta)$ je mohutnost množiny kódových slov,

$$\mathcal{M} \geq \mathrm{card}\mathcal{X}^N = e^{N \ln(\mathrm{card}\mathcal{X})} \tag{10.112}$$

$\mathcal{X}$ je abeceda zdroje zpráv, N je délka zpráv. Dále

$$k : \mathcal{X}^N \to \boldsymbol{A}^M \tag{10.113}$$

je *kodér* na vstupu kanálu, $k(\mathcal{X}^N) \subset \boldsymbol{A}^M$

$$\mathcal{M} \leq \mathrm{card}\,\boldsymbol{A}^M = e^{M \ln \mathrm{card}\boldsymbol{A}} \tag{10.114}$$

$\boldsymbol{B}$ je výstupní abeceda kanálu,

$$d : \boldsymbol{B}^M \to \boldsymbol{A}^M \tag{10.115}$$

je *dekodér* stochastické transformace

$$\boldsymbol{A} \underset{p^M}{\longrightarrow} \boldsymbol{B} \tag{10.116}$$

podle relací (10.110).

Podle přijatého $b \in \boldsymbol{B}^M$ rozhoduje dekodér o vyslaném $a' \in \boldsymbol{A}^M$, $a' = \delta(b)$, kde b je výstupní kódové slovo kanálu délky $M = M(\mathcal{M}, \beta)$. Dále,

$$k^{-1} : \boldsymbol{A}^M \to \boldsymbol{X}^M \tag{10.117}$$

je dekodér výstupní zprávy. Zřejmě

$$\begin{aligned}
\ln\mathcal{M} &\geq N \ln \mathrm{card}\boldsymbol{X} \geq M\,C - o(M) \\
\ln\mathcal{M} &\leq N \ln \mathrm{card}\boldsymbol{A} \leq M\,C - o(M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MC - o(M) &\leq \ln\mathcal{M} \leq MC + o(M), \quad o(M) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
M(C-\delta) &\leq \ln\mathcal{M} \leq M(C+\delta), \quad \delta = \frac{o(M)}{M} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
C - \delta &\leq \frac{1}{M}\ln\mathcal{M} \leq C + \delta
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M}\ln\mathcal{M} &= R, \quad \mathcal{M} = e^{MR} \\
\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\ln\mathcal{M} &= C, \quad R \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} C
\end{aligned} \tag{10.118}$$

2. Shannonovův teorém. *Pro libovolný bezpaměťový kanál platí*

$$\mathcal{M}(M,\beta) = e^{MR} = e^{MC-M\delta} \tag{10.119}$$

a tedy existuje (M, e^{MR}, β)*-k*$\boldsymbol{u}$*d přenositelný kanálem s kapacitou* C *rychlostí* R *jehož maximální mohutnost je*

$$\mathcal{M} = e^{MR},\ \ \beta \in (0,1),\ \ R \leq C \tag{10.120}$$

Důsledek. *Pro* $R > C$ *neexistuje* (M, e^{MR}, β)*-k*$\boldsymbol{u}$*d pro žádná* M *a* ε*; pravděpodobnost chyby přenosu nelze stlačit pod zvolenou úroveň* $\varepsilon \in (0,1)$*.*

Je-li $H(X) < C$*, je zdroj* X *přenositelný kanálem s libovolně malou chybou* ε*.*

Je-li $H(X) > C$*, není zdroj* X *přenositelný kanálem s libovolně malou chybou* ε*.*

10.5.3 Shannon–Nyquist–Kotělnikovův vzorkovací teorém

Každý spojitý časový průběh, jehož spektrum frekvencí je omezeno shora hodnotou F_m *mezní frekvence, lze jednoznačně vyjádřit jeho okamžitými hodnotami, vzorky odebíranými z tohoto (spojitého) průběhu v periodických okamžicích s periodou*

$$\tau_v \leq \frac{1}{2F_m}$$

Tyto vzorky, (impulsy) se vyskytují s frekvencí vzorkování F_v*,*

$$F_v \geq 2F_m$$

Délku B *intervalu frekvencí*

$$B \geq 2F_m$$

nazýváme šířka pásma.

10.5.4 Shannon–Hartleyův teorém

Pro přenos impulsu šířky τ *je potřebná informační kapacita* C_τ *(přenosového kanálu)*

$$C_\tau \geq 2F_m \ln s$$

kde s *je počet energetických (výkonových) úrovní (amplitud) signálu*

$$s = \sqrt{1 + \frac{W^{\max}}{Q_0}} = \sqrt{1 + \frac{W^{\max}}{\mathrm{k}T_0 B}}$$

$W^{\max}$ *je maximální energie* W *signálu,* $W \in \{0,\ Q_0,\ 2Q_0,\ \ldots,\ W^{\max}\}$*.*
Počet amplitudových úrovní s *je mohutnost signálového spektra* $\mathbf{S}$*,* $s = \operatorname{card} \mathbf{S}$
a T_0 *je teplota šumu o výkonu* Q_0*.*

10.6 Informační popis reverzního Carnotova cyklu

Reverzní vratný Carnotův cyklus pracuje jako *tepelné čerpadlo.* V tomto cyklu, pojímaném jako středně-hodnotový model přenosového procesu v kanále ($\cong \mathcal{L}$ - pracovní látka cklu) přenášejícího (libovolnou) vstupní zprávu $x \in X$ o průměrném informačním množství $H(X)$ [38], označujeme symboly

ΔQ_0 teplo odebírané z chladníku $\mathcal{B}$ izotermickou expanzí při T_0,

ΔA mechanickou práci dodanou cyklu izotermickou kompresí při teplotě T_W,

ΔQ_W výstupní teplo dodané do ohříváku $\mathcal{A}$ izotermickou kompresí při teplotě T_W

Dále, změnami fyzikálních entropií cyklu, definujeme hodnoty změn informačních entropií na přenosovém kanálu ($\cong \mathcal{L}$) (s přenosovým procesem tímto cyklem realizovaným), např. takto:

$$\begin{aligned} H(X) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W}, \text{ vstupní entropie,} \\ &\quad \Delta A \cong x \text{ vstupní zpráva;} \\ H(Y) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} = \frac{\Delta Q_0 + \Delta A}{\mathrm{k}T_W} \triangleq \Delta\mathcal{I}, \text{ výstupní entropie,} \\ &\quad \Delta Q_W \cong y \text{ výstupní zpráva;} \\ H(Y|X) &\overset{\text{Def}}{=} \frac{\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_W} > 0, \text{ šumová entropie,} \\ &\quad \Delta Q_0 \text{ šumová 'zpráva'.} \end{aligned} \tag{10.121}$$

Bude se tedy jednat o kanál s *aditivními* šumy (rušením). Zřejmě platí

$$H(Y|X) = \frac{\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_W} \cdot \frac{T_0}{T_0} = \frac{\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_0} \cdot \beta = \frac{\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} \cdot \beta = H(Y) \cdot \beta, \ \beta = \frac{T_0}{T_W} \tag{10.122}$$

Šum o entropii $H(Y|X)$ je součástí definice přenosu informace. Nevzniká kladnou produkcí tepla ΔQ_{0x} v pracovní látce $\mathcal{L}$[53].

Dále předpokládáme, že pro změny hodnot informací o velikostech $H(X)$, $H(Y|X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$ definovaných vztahy (10.121) platí vztahy (10.99), (10.104), tedy

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W} - H(X|Y) &= \frac{\Delta Q_0 + \Delta A}{\mathrm{k}T_W} - \frac{\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_W} \\ H(X|Y) &\overset{\text{Def}}{=} 0 \end{aligned} \tag{10.123}$$

Jedná se tedy o kanál *beze ztrát.*

Pro transinformace $T(\cdot;\cdot)$ pak při definici (10.121) platí

$$\begin{aligned} T(X;Y) &= H(X) - H(X|Y) = \frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W} - 0 = H(X) \\ T(Y;X) &= H(Y) - H(Y|X) = \frac{\Delta Q_0 + \Delta A}{\mathrm{k}T_W} - \frac{\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_W} = \frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W} = H(X) \end{aligned} \tag{10.124}$$

[53]Ze vztahů pro η a $\eta_{\max}$ vyplývá, že $\Delta Q_0 = f(T_0)$, kde funkce $f(\cdot)$ je nezápornou funkcí argumentu T_0, $f(T_0) \geq 0$, pro kterou platí $\lim_{T_0 \to 0} f(T_0) = 0$.

Levé strany odvození (10.124) se tedy rovnají a platí tedy, pro hodnoty informací definovaných vztahy (10.121) a výsledek odvození (10.123), kanálová rovnice zachování informací (jak průměrných, informačních entropií, tak 'okamžitých') v kanálu (10.99) a (10.104). (V rámci jednoho průchodu systému $\mathcal{L} \cong \mathcal{K}$ reverzním Carnotovým cyklem realizujícím přenosový proces.) Zřejmě platí

$$\frac{H(X)}{H(Y)} = \frac{\frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W}}{\frac{\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W}} = \frac{\Delta A}{\Delta A + \Delta Q_0} = \eta_{\max} \tag{10.125}$$

a tedy

$$H(X) = H(Y) \cdot \eta_{\max} \tag{10.126}$$

kde $\eta_{\max}$ je účinnost cyklu pracujícího v přímém směru. Platí tedy, v souladu se vztahy (10.122) a (10.123),

$$T(X;Y) = H(Y) \cdot \eta_{\max} \tag{10.127}$$

kde η_{max} je účinnost cyklu pracujícího v přímém směru.

Protože hodnota $T(X;Y)$ je pro dané hodnoty T_W, T_0, ΔQ_0 a ΔA *jedinou* a protože hodnota η_{max} je maximem množiny hodnot účinností η (ať již uvažujeme proměnné teploty Θ_W a Θ_0 s maximy T_W a T_0 nebo, pokud bychom uvažovali nevratnost při daných T_W a T_0, pak $\eta \to \eta_{max}$ pokud $\Delta Q_{0x} \to 0$, resp. $\Delta t \to \infty$), je zřejmé, že $T(X;Y)$ je kapacitou C_{T_W,T_0}. Tedy definujeme

$$\begin{aligned} C_{T_W,T_0} &\overset{\text{Def}}{=} T(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) \cdot \eta_{max} = \frac{\Delta Q}{kT_W} \cdot \eta_{max} = \frac{\Delta A}{kT_W} = H(X) \\ H(X) &< H(Y) \end{aligned} \tag{10.128}$$

Nejlepšího přenosu dosahujeme při $\eta_{max} = 1$, tedy pro $\Delta Q_0 = 0$. Tehdy platí

$$C^{\max}{}_{T_W,T_0} \overset{\text{Def}}{=} T^{\max}(X;Y) = H(Y) = \frac{\Delta A}{kT_W} = H(X) \tag{10.129}$$

Je zřejmé, že rovnost $H(X) = H(Y)$ je reálně nedosažitelná, vždy platí, že

$$H(Y|X) > 0$$

Povšimněme si nyní změn termodynamické entropie v izolovaném systému, v němž probíhá právě popsaný proces:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mathcal{AB}} &= \frac{-\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_0} + \frac{\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_W} = \frac{-\Delta Q_0}{T_0 T_W} \cdot \frac{T_W + T_0}{k} \\ &= \frac{-\Delta Q_0}{\mathrm{k}T_0} \cdot \eta_{\max} = -H(Y) \cdot \eta_{\max} < 0 \end{aligned} \tag{10.130}$$

Termodynamická (Clausiova) entropie $S_{\mathcal{AB}}$ systému $\mathcal{AB}$ tedy klesá - zvětšuje se (termodynamická, tepelná) rozlišitelnost systémů $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Je to ovšem na úkor dodané práce ΔA resp. entropie o velikosti $\frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W}$. Nicméně je třeba tuto energii (entropii) získat. To je ale v rámci takové izolované soustavy možné jen *nepřirozeným* procesem přeměny tepla v tuto mechanickou energii. Tento proces ale 'běží' na pozadí *přirozeného* procesu přechodu tepla podle II. hlavní věty termodynamické.

Uvažujme takový vratný proces dodávající mechanickou práci o velikosti ΔA^*,

$$\Delta A^* \geq |\Delta A|$$

píšeme tak s ohledem na různé směry fungování obou cyklů;

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A^*}{\mathrm{k}T_W{}^*} &= H(X^*) \cdot \eta_{\max}{}^* = H(X^*) \cdot \frac{T_W^* - T_0^*}{T_W^*} = \Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*},\ T_W^* \geq T_0^* > 0 \quad (10.131) \\ \frac{\Delta A}{\mathrm{k}T_W} &= H(Y) \cdot \eta_{\max} = H(Y) \cdot \frac{T_W - T_0}{T_W} = -\Delta S_{\mathcal{AB}},\ T_W \geq T_0 > 0 \end{aligned}$$

Pro celkovou změnu ΔS entropie S celé izolované soustavy, v níž oba procesy probíhají, platí podle II. hlavní věty termodynamické

$$\Delta S = \Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*} + \Delta S_{\mathcal{AB}} \geq 0 \tag{10.132}$$

Protože ale $\Delta S_{\mathcal{AB}} \leq 0$, musí platit

$$\Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*} \geq |\Delta S_{\mathcal{AB}}| \tag{10.133}$$

To znamená, že k poklesu entropie o $|\Delta S_{\mathcal{AB}}|$ je třeba 'vygenerovat' větší přírůstek $\Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*}$ a celková entropie roste o hodnotu

$$\Delta S = \Delta S_{\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*} - |\Delta S_{\mathcal{AB}}| \geq 0 \tag{10.134}$$

Rovnost nastává při $\eta_{\max}{}^* = \eta_{\max}$. Jinak $\eta_{\max}{}^* > \eta_{\max}$ což např. pro $T_0^* = T_0$ znamená, že $\Delta Q_W^* > \Delta Q_W$ a $T_W^* > T_W$.

Lze uvažovat i jiné 'informační' uspořádání reverzního Carnotova cyklu v němž budou zvoleny ekvivalence

$$\Delta Q_0 \cong H(X), \quad \Delta Q_W \cong H(Y) \;\text{ a }\; \Delta A \cong H(Y|X), \quad H(X|Y) = 0.$$

Poznámka. Podle Shannonova kódovacího teorému (kanálu) *lze zprávu informačním kanálem přenášet s libovolně malou pravděpodobností chyby přenosu* β,

$$\beta > 0$$

pokud $H(X) < C$, veličina C je informační kapacita kanálu. Tehdy existuje přirozené číslo

$$n_0 = n_0(\beta),\ n_0 \in N$$

takové, že *pokud pro počet znaků n zprávy*, $n \in N$, $n = n(\beta)$, ze zdroje zpráv s abecedou o mohutnosti M_n rostoucí s n, platí, že

$$n \geq n_0(\beta) \quad [\ n_0(\beta) \to \infty,\ \beta \to 0]$$

platí, že

$$p_{Y|X}(\cdot|\cdot) \leq \beta \quad [\ p_{Y|X}(\cdot|\cdot) \to 0,\ \beta \to 0\ ]$$

Neplatí-li $H(X) < C$, *nelze chybovost* β *přenosu* a tedy i chyby $p_{Y|X}(\cdot|\cdot)$, *libovolně stlačit* k 0.

Samotné rozdělení vstupní zprávy $\Delta Q_W \in \mathbf{R}$ (v našem termodynamickém modelu) na stále se zvětšující počet stále menších částí

$$\frac{\Delta Q_W}{m(n)} \to 0,\ n = n(\beta),\ n \to \infty,\ \beta \to 0$$

nezmění nerovnost $\eta_{[max]} < 1$, tedy $C_{T_W,T_0} < H(X)$, tedy chybovost přenosu. To je v souladu s druhým Shannonovým teorémem.
V rámci průměrných veličin

$$H(\cdot),\ \frac{\Delta q}{\Theta},\ \eta_{[max]}$$

je ale přenos chybový vždy , chování cyklu jako přenosového kanálu je v těchto veličinách deterministické.
Vstupní zpráva ΔQ_W bude tedy zkreslena vždy a to o hodnotu výrazu $|H(X) - H(Y)|$ v předchozí limitě. Mikrostavy makrostavu ΔQ_W jsou pak zprávami přenášenými s chybou $< \varepsilon$ danou hodnotou $|H(X) - H(Y)|$. To je ale náš případ 'carnotizovaného' přímého přenosu informace, kde

$$H(X) > C_{T_W,T_0}$$

(tento vztah byl odvozen pro náš 'carnotizovaný' přenos informace ale musí platit i v obecnějším případě energií přímo se sdílejících).

Podle Brillouina a Landauera [11, 65] je třeba pro přenos, uchování nebo zpracování každého bitu zprávy probíhajících nevratně, uvnitř systému se vzrůstající entropií ($\Delta S_{\mathcal{C}} > 0$) a při teplotě $\mathbf{\Theta}$, vynaložit energii

$$\Delta W_1 > 1 \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2$$

Tedy pro zprávu o n znacích (a tedy m bitech, $m = m(n)$ je rostoucí funkce n) platí

$$\Delta W > m(n) \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2$$

kde výraz $m(n) \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2$ představuje tepelnou disipaci při zmíněných procesech [vznik tepla ΔQ_{0x} a rozptyl $\Delta Q_0 + \Delta Q_{0x}$ po stroji, viz vztahy (10.37)-(10.40)].

Tedy

$$\lim_{n \to \infty} \Delta W = \lim_{n \to \infty} m(n) \cdot k \cdot \Theta \cdot \ln 2 = \infty$$

Tento případ je ale v souladu s naším požadavkem limitní rovnosti[54] $\eta_{[max]} = 1$

$$\Delta W \stackrel{\triangle}{=} \Delta Q_W = \Delta A$$

resp.

$$\eta_{\max} = 1 \ \text{ pro } \ H(X|Y) = 0 \ \text{ a } \ \frac{\Delta Q_{0x}}{\Delta Q} = 0$$

[54] V limitních případech $T_W \to \infty,\ \Delta Q_W \to \infty;\ \ T_0 \to 0,\ \Delta Q_{0x} \to 0;\ \ \Delta Q_0 \to 0,\ \Delta Q_{0x} \to 0$

přesněji

$$\eta_{\max} \to 1,\ \Delta Q_W \to \infty;\ \eta \to 1,\ \Delta Q_W \to \infty,\ \frac{\Delta Q_{0x}}{\Delta Q} \to 0$$

Stejné platí pro T_W,

$$\eta_{\max} \to 1,\ T_W \to \infty;\ \eta \to 1,\ T_W \to \infty,\ \frac{\Delta Q_{0x}}{\mathrm{k}T_W} \to 0$$

$$\eta_{\max} \to 1,\ T_0 \to 0;\ \eta \to 1,\ T_W \to \infty,\ \Delta Q_{0x} \to 0$$

Lze říci, že náš termodynamický model opakovatelného přenosu informace není v rozporu se známými vlastnostmi a požadavky jak pro tepelný cyklus tak pro informační kanál.

V uvedeném Carnotově přenosovém systému vždy platí, že

$$H(X) > C_{T_W,T_0} = H(X) \cdot \eta_{\max} = T(X;Y),\ \eta_{\max} \in < 0, 1)$$

Dosáhnout v něm rovnosti $H(X) = H(Y)$ je možno, pokud pro zakódování vstupní zprávy použijeme nekonečně velkou *energii*, $\Delta Q[m(n)] \to \infty$, $\eta_{[max]} \to 1$ nebo při $T_0 \to 0$. Tedy podle vztahu

$$\lim_{\eta_{[max]} \to 1} |H(X) - H(Y)| = 0$$

je ale možno libovolně potlačovat nenulovou chybovost přenosu změnou parametrů T_W, T_0 (resp. $\Delta Q_W,\ \Delta Q_0$) přenosové soustavy (Carnotova stroje), samozřejmě, při splnění požadavku[55]

$$\frac{\Delta Q_W}{\mathrm{k}T_W} = H(X) = \text{konst.}$$

[55]Shannonův kódovací teorém kanálu je informační formulací Carnotovy věty (Planckovy-Thomsonovy věty) a tedy je další z mnoha formulací II. hlavního principu termodynamiky viz [38] (IT I.)

11. Závěr

Aplikovali jsme informační přístup ke stacionárním stochastickým kvantovým systémům a také k systémům klasické (rovnovážné) termodynamiky (rovnovážným, ekvilibriálním systémům) jakož i k relevantním fyzikálním veličinám.

Stanovili jsme informační kapacity úzkopásmových i širokopásmových variant fyzikálních systémů Bose–Einsteinových (B–E), Fermi–Diracových (F–D) a také Maxwell–Boltzmanových (M–B).
Rovněž jsme stanovili středně-hodnotové podmínky platnosti těchto vztahů, tedy podmínky existence přenosu informace.

Na základě analogie informačních popisů měření jak na kvantových tak na klasických fyzikálních (termodynamických) systémech, jsme postulovali rovnovážný stav klasických termodynamických systémů jako analog čistého stavu systémů kvantově-mechanických a naopak.

Zabývali jsme se souvislostí veličin informační kapacita a tepelná účinnost vyjevující se ve studovaných (speciálně širokopásmových) systémech a to nás přivedlo ke korigovanému vzorci pro informační kapacitu širokopásmového fotonového přenosového kanálu uvažuje-li se jeho cyklické použití v rámci izolované soustavy.
Tomuto výsledku ale předcházela analýza chování tepelných cyklů kde jsme dokázali elementárnost, nedělitelnost Carnotova cyklu.

Ukázali jsme, že v literatuře [31, 67] je stanovována jen informační kapacita jednorázového přenosu informace a tedy to, že se zde nutnost přechodu přenosového media, kanálu, do počátečního stavu, jakožto podmínky opakovatelného přenosu zpráv, neuvažuje.
Nebo, že se tento návrat uvažuje být realizován otevřením celého přenosového řetězce, tedy energetickým pokrytím z okolí přenosového řeťezce, nikoliv v jeho rámci jak to činíme my (používáme reverzního carnotovského modelu).
To je důvod proč korigovaná kapacita (9.16) jednorázového přenosu [máme možnost volit různé informační popisy s výsledky (9.9) nebo větším (9.16)] vychází dvakrát větší než kapacita (9.22), (9.25) v cyklickém modelu.
I když se korigované informační kapacity (9.22), (9.25) cyklického termodynamického modelu liší od kapacity původně stanovené [67] [jsou menší než (9.9) nebo i (9.16)], jsou náš přístup k problému i tento dosažený výsledek exaktnější.

Korigovaná informační kapacita širokopásmového fotonového kanálu (ale i zní plynoucí korekce pro kanály F–D a M–B typu) se mohou uplatnit při určování prakticky dosažitelných hodnot informačních kapacit v konstrukci opto-elektronických zařízení. Elementárnost Carnotova cyklu je možno dále využít při makroskopickém modelování kvantových jevů na polopropustném zrcadle.

Bohdan Hejna

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Rejstřík

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Literatura

[1] Ashby, R. W. *Kybernetika*; Orbis: Praha, 1961.

[2] Balda, M.; Hanuš, B.; et al. *Základy technické kybernetiky*; SNTL/ALFA: Praha, 1986.

[3] Ballescu, R. *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*; Wiley: New York, 1975.

[4] Beiser, A. *Úvod do moderní fyziky*; Academia: Praha, 1978.

[5] Bell, D. A. *Teorie informace*; SNTL: Praha, 1961.

[6] Bennet, Ch. H. The Thermodynamics of Computation – a Review. *Int. J. Theor. Phys.* **1982**, *21* (12), 905–940. DOI: 10.1007/BF02084158.

[7] Blank, J.; Exner, P.; Havlíček, M. *Lineární operátory v kvantové mechanice*; Univerzita Karlova: Praha, 1990.

[8] Boublík, T. *Statistická termodynamika*; Academia: Praha, 1996.

[9] Brabec, J. *Vybrané kapitoly z teorie matic*; ČVUT: Praha, 1975.

[10] Brdička, R.; Dvořák, J. *Základy fysikální chemie*, 2nd ed.; Academia: Praha, 1977.

[11] Brillouin, L. *Science and Information Theory*; Academia Press: New York, 1963.

[12] Cholevo, A. S. On the Capacity of Quantum Communication Channel. *Problems of Information Transmission* **1979**, *15* (4), 3–11.

[13] Cholevo, A. S. *Verojatnostnyje i statističeskije aspekty kvantovoj teorii*; Nauka: Moskva, 1980.

[14] Cover, T. M.; Thomas, J. B. *Elements of Information Theory*; Wiley: New York, 1991.

[15] Davydov, A. S. *Kvantová mechanika*; SPN: Praha, 1978.

[16] Dieudonné, J. A. *Osnovy sovremennogo analiza*; Mir: Moskva, 1964.

[17] Emch, G. G. *Algebraičeskije metody v statističeskoj mechanike i kvantovoj těorii polja*; Mir: Moskva, 1976.

[18] Fabián, F; Kluiber, Z.; et al. Pojem entropie. *Moderní směry ve fyzice*; Nakladatelství ARSCI: Praha, 2003; Chapter 19, p 144.

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

[19] Fahn, P. N. Maxwell's demon and the entropy cost of information. *Foundations of Physics* **1996**, *26* (1), 71–93. DOI: 10.1007/BF02058888.

[20] Fuchs, C. A.; van de Graaf, J. Cryptographic Distinguishability Measures for Quantum-Mechanical States. *IEEE Transactions on Information Theory* **1999**, *45* (4), 1216 – 1227. DOI 10.1109/18.761271.

[21] Gershenfeld, N. Signal entropy and the thermodynamics of computation. *IBM Systems Journal* **1996**, *35* (3/4), 577–586. DOI 10.1147/sj.353.0577.

[22] Gnedenko, B. V. *Kurs teorii verojatnostej*; Nauka: Moskva, 1965.

[23] Hála, E. *Úvod do chemické termodynamiky*; Academia: Praha, 1975.

[24] Halmos, P. R. *Konečnomernyje vektornyje prostranstva*; Nauka: Moskva, 1963.

[25] Hanitz, F. *Kvantová a statistická fyzika: Příklady*; ČVUT: Praha, 1989.

[26] Hanš, O. *Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky*; ČVUT: Praha, 1968.

[27] Havrda, J. *Základy počtu pravděpodobnosti*; ČVUT: Praha, 1972.

[28] Havrda, J. *Teorie informace*; ČVUT: Praha, 1976.

[29] Hašek, O.; Nolička, J. *Technická mechanika pro elektrotechnické obory II.*; SNTL: Praha, 1968.

[30] Hejna, B.; Vajda, I. Information transmission in stationary stochastic systems. *AIP Conf. Proc.* **1999**, *465* (1), 405–418. DOI: 10.1063/1.58272.

[31] Hejna, B. Informační kapacita stacionárních fyzikálních systémů. Ph.D. Dissertation, ÚTIA AV ČR, Praha, FJFI ČVUT, Praha, 2000.

[32] Hejna, B. Generalized Formula of Physical Channel Capacities. *International Journal of Control, Automation, and Systems* **2003**, 15.

[33] Hejna, B. Tepelný cyklus a přenos informace. *Matematika na vysokých školách: Determinismus a chaos*; JČMF, ČVUT: Praha, 2005; pp 83–87.

[34] Hejna, B. Thermodynamic Model of Noise Information Transfer. In *AIP Conference Proceedings*, Computing Anticipatory Systems: CASYS'07 – Eighth International Conference; Dubois, D., Ed.; American Institute of Physics: Melville, New York, 2008; pp 67–75. ISBN 978-0-7354-0579-0. ISSN 0094-243X.

[35] Hejna, B. Informační význam Gibbsova paradoxu. In *Matematika na vysokých školách: Variační principy*; JČMF: Praha, 2007; pp 25–31.

[36] Hejna, B. Proposed Correction to Capacity Formula for a Wide-Band Photonic Transfer Channel. In *Proceedings of International Conference Automatics and Informatics'08*; Atanasoff, J., Ed.; Society of Automatics and Informatics: Sofia, Bulgaria, 2008; pp VII-1–VIII-4.

[37] Hejna, B. Gibbs Paradox as Property of Observation, Proof of II. Principle of Thermodynamics. In *AIP Conf. Proc.*, Computing Anticipatory Systems: CASYS'09: Ninth International Conference on Computing, Anticipatory Systems, 3–8 August 2009; Dubois, D., Ed.; American Institute of Physics: Melville, New York, 2010; pp 131–140. ISBN 978-0-7354-0858-6. ISSN 0094-243X.

[38] Hejna, B. *Informační termodynamika I.: Rovnovážná termodynamika přenosu informace*; VŠCHT Praha: Praha, 2010. ISBN 978-80-7080-747-7.

[39] Hejna, B. Thermodynamics, Information and Telomera. In *Proceedings of International Conference Automatics and Informatics'10*; Atanasoff, J., Ed.; Society of Automatics and Informatics: Sofia, Bulgaria, 2010; pp I-59–I-64.

[40] Hejzlar, R. *Termodynamika*; ČVUT: Praha, 1998.

[41] Helstroem, C. W. *Quantum Detection and Estimation Theory*; Pergamon Press: London, 1976.

[42] von Hippel, A. R. *Molekulová fyzika hmoty*; SNTL: Praha, 1963.

[43] Hoffner, V. *Úvod do teorie signálů*; SNTL: Praha, 1979.

[44] Horák, Z.; Krupka, F. *Technická fyzika*; SNTL/ALFA: Praha, 1976.

[45] Horák, Z.; Krupka, F. *Technická fysika*; SNTL: Praha, 1961.

[46] Horský, J.; Novotný, J.; Štefaník, M. *Mechanika ve fyzice*; Academia: Praha, 2001.

[47] Chodasevič, M. A.; Sinitsin, G. V.; Jasjukevič, A. S. *Ideal fermionic communication channel in the number-state model*; Division for Optical Problems in Information technologies, Belarus Academy of Sciences, 2000.

[48] Jaglom, A. M.; Jaglom, I. M. *Pravděpodobnost a teorie informace*; Academia: Praha, 1964.

[49] Jaynes, E. T. The Evolution of Carnot's Principle. *Ericksen & Smith* **1988**, 1, 267–282.

[50] Jaynes, E. T. Gibbs vs Boltzmann Entropies. *Am. J. Phys.* **1965**, 33 (5), 391–398.

[51] Jaynes, E. T. The Gibbs Paradox. *Maximum Entropy and Bayesian Methods*; Kluwer Academic Publishers: Netherlands, 1992; Chapter 1, pp 1–22. ISBN 0-7923-2031-X.

[52] Jaynes, E. T. Information Theory and Statistical Mechanics. *The Physical Review* **1957**, *106* (4), 620–630. DOI 10.1103/PhysRev.106.620.

[53] Kalčík, J.; Sýkora, K. *Technická termomechanika*; Academia: Praha, 1973.

[54] Karpuško, F. V.; Chodasevič, M. A. *Sravnitel'noje issledovanije skorostnych charakteristik bozonnych i fermionnych kommunikacionnych kanalov*; Vesšč NAN B, The National Academy of Sciences of Belarus, 1998.

[55] Košťál, K. *Statistická fyzika: Vybrané partie*; ČVUT: Praha, 1973.

[56] Kvasil, B. *Teoretické základy kvantové elektroniky*; Academia: Praha, 1984.

[57] Kvasnica, J. *Termodynamika*; SNTL: Praha, 1965.

[58] Kvasnica, J. *Statistická fyzika*; Academia: Praha, 1983.

[59] Kvasnica, J. *Mechanika*; SNTL: Praha, 1988.

[60] Kvasnica, J. *Matematický aparát fyziky*; Academia: Praha, 1997.

[61] Kotek, Z.; Vysoký, P.; Zdráhal, Z. *Kybernetika*; SNTL: Praha, 1990.

[62] Kotek, Z.; Vysoký, P.; Zdráhal, Z. *Kybernetika*; ČVUT: Praha, 1987.

[63] Kracík, J.; Kalivoda, L.; Maloch, J. *Kvantová a statistická fyzika*; ČVUT: Praha, 1988.

[64] Landau, L. D.; Lifschitz, E. M. *Statistical Physics*, 2nd ed.; Pergamon Press: Oxford, 1969.

[65] Landauer, M. Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process. *IBM J. Res. Dev.* **2000**, *44* (1/2), 261.

[66] Lavenda, B. H. *Statistical Physics*; Wiley: New York, 1991.

[67] Lebedev, D.; Levitin, L. B. Information Transmission by Electromagnetic Field. *Information and Control* **1966**, *9*, 1–22.

[68] Leech, J. W. *Klasická mechanika*; SNTL: Praha, 1970.

[69] Madelung, E. *Príručka matematiky pre fyzikov*; Alfa: Bratislava, 1975.

[70] Marvan, M. *Záporné termodynamické teploty a nové základy termodynamiky*; SNTL: Praha, 1965.

[71] Maršík, F.; Dvořák, I. *Biotermodynamika*; Academia: Praha, 1998.

[72] Maršík, F. *Termodynamika kontinua*; Academia: Praha, 1999.

[73] Maršák, Z. *Termodynamika a statistická fyzika*; ČVUT: Praha, 1995.

[74] Matušů, J. *Ortogonální systémy: Fourierovy řady*; ČVUT: Praha, 1973.

[75] Marx, G. *Úvod do kvantové mechaniky*; SNTL: Praha, 1965.

[76] Moore, W. J. *Fyzikální chemie*; SNTL: Praha, 1981.

[77] Novotná, H.; Cais, S.; Ptáček, M. *Teoretická mechanika*; SNTL/ALFA: Praha, 1983.

[78] Odehnal, M. *Supravodivost a jiné kvantové jevy*; Academia: Praha, 1992.

[79] Prchal, J. *Signály a soustavy*; SNTL/ALFA: Praha, 1987.

[80] Rao, R. C. *Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace*; Academia: Praha, 1978.

[81] Rényi, A. *Teorie pravděpodobnosti*; Academia: Praha, 1972.

[82] Rényi, A. *A Diary on Information Theory*; Akadémiai Kiadó: Budapest, 1984.

[83] Samohýl, I. *Racionální termodynamika chemicky reagujících směsí*; Academia: Praha, 1982.

[84] Shannon, C. E. A Mathematical Theory of Communication. *The Bell Systems Technical Journal* **1948**, *27*, 379–423, 623–656.

[85] Schumacher, B. *Entropy, Complexity, and Computation*; Natural science colloquium, Kenyon College, 1989.

[86] Shunya, I.; Nobuko, F. Entropy Generation in Computation and the Second Law of Thermodynamics. In *AIP Conf. Proc.*, Unsolved Problems of Noise and Fluctuations: UPoN'99: Second International; 1999.

[87] Silin, V. P. *Úvod do kinetické teorie plynů*; Academia: Praha, 1971.

[88] Sinitsin, G. V.; Chodasevič, M. A.; Jasjukevič, A. S. *Elektronnyj kommunikacionnyj kanal v modeli svobodnogo vyroľdennogo fermi-gaza*; Belarus Academy of Sciences, 1999.

[89] Slavík, J. B.; et al. *Základy fysiky I*; Academia: Praha, 1961.

[90] Svoboda, E.; Bakule, R. *Molekulová fyzika*; Academia: Praha, 1992.

[91] Uhlíř, M. *Kvantová mechanika I.*; ČVUT: Praha, 1992.

[92] Vajda, I. *Teória informácie a štatistického rozhodovania*; Alfa: Bratislava, 1982.

[93] Vajda, I. Informace ve statistickém experimentu a její vyuľití při statistickém rozhodování. Ph.D. Dissertation, ÚTIA ČSAV, Praha, 1987.

[94] Vajda, I. *Theory of Statistical Inference and Information*; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1989. ISBN 9027727813.

[95] Vajda, I. *Teorie informace*; ČVUT: Praha, 2004.

[96] Vodák, F. *Termomechanika spojitého prostředí*; ČVUT: Praha, 1992.

[97] Watanabe, S. *Knowing and Guessing*; Wiley: New York, 1969.

[98] Wiener, N. *Kybernetika*; SNTL: Praha, 1960.

[99] Wiener, N. *Kybernetika a společnost*; Československá akademie věd: Praha, 1963.

Abstract

The objective of this, yet second, part of the ***Information Thermodynamics*** project, *Information Thermodynamics II.*, is to apply the information approach to stationary stochastic quantum systems as well to systems of classical (equilibrium) thermodynamics (equilibrium systems) and to the physical quantities associated with such systems.

The basic fact of quantum mechanics that a system occurs in a *probabilistic superposition* of its *pure states*, directly leads to a definition of the value of a measured physical quantity as an expectation value and to the application of the concept of a probability space and the associated quantities *information, I-divergence, transinformation, information entropy and information capacity.*

Chapters 2-5 use the formal mathematical model of quantum physical systems as defined by von Neumann [17, 97] and show how the concept of Shannon's information theory is applied to quantum mechanics [41, 13]. This mathematical model is used here in a simplified, finite-dimensional form and is explained, along with the required mathematical terms and their basic properties, in Chapters 2-4. The model is used to demonstrate Boltzman's entropy, $\mathcal{H}$-theorem and Gibbs' theorem. Probabilistic distributions on physical systems are introduced and their I-divergence is determined as a quantity expressing the information (Shannon entropy) increment during a measurig on that systems. Specifically, Chapter 4 introduces the concept of information transfer (measurement) on the systems studied and defines Shannon's information of the state and information capacity of the system (as the maximum Shannon's information of the state).

Information capacities of both the narrow-band and the wide-band variant of *Bose–Einstein (B–E), Fermi–Dirac (F–D), and Maxwell–Boltzman (M–B)* physical systems are determined in Chapter 5.
The results for M–B systems are given for the sake of completeness and for use where the M–B approximation is appropriate. The expectation value conditions of validity of those relations and hence the *conditions of existence of information transfer* are also determined.

Based on the analogy of the information description of a measuring on quantum and classical physical (thermodynamic) systems, the equilibrium state in classical thermodynamic systems is postulated as an *analogue* of the pure state of quantum-mechanical systems and vice versa.

The relationship between the quantities of information capacity and heat efficiency appearing in the systems studied is also of interest (in wide-band systems in particular). Analysis of this relationship leads to a *corrected formula* for the information capacity of a *wide-band photonic transfer channel* when considering its *cyclic use within an isolated system.*
This result from Chapter 9, however, is preceded by an analysis of the behaviour of heat cycles, presented in Chapters 7 and 8.

The *elementary nature, the indivisibility of the Carnot Cycle* is explained in Chapter 7, and a heat cycle with variable working temperatures is studied in Chapter 8.

Chapters 8 and 9 are inspired by the form of the capacity formulas derived in Chapter 5 and are directly linked to Information Thermodynamics I. ([38]).

Chapter 9 shows that the *information capacity of a single information transfer only is determined in the literature [31, 67]* and hence, that the *necessity of transition of the transfer medium, the channel, to the initial state as a condition for the repeatable transfer of messages, fails to be considered.*
Or, that this return is regarded as accomplished by the opening of the transfer chain, that is, *by energy coverage from the environment* of the transfer chain rather than within its framework, and done by us (using a reverse Carnot model).
Corrected capacity is determined for both a single information transfer and a cyclically organised transfer. Although the corrected information capacities differ from the initially determined capacity [67], the author considers the approach to the problem expounded in Chapter 9 (which is more "philosophical") as well as the result more exact from the gnoseologic point of view.

Chapters 2-5 present the main results of the work [31], although some of them in a simplified form only (the second part of Chapter 5), while some results are only referred to (information *capacity below the critical input value* and the *generalised capacity formula*).

Preliminary knowledge required for the study of this book is explained in Supplements, Chapter 10.

The author believes that the results presented, especially those in Chapter 5 and, most of all, the concluding result of Chapter 9 (*corrected information capacity* of a wide-band photonic channel as well as the corrections for F–D and M–B type channels following from it), can contribute favourably to the design of optoelectronic devices, particularly where the practically attainable information capacity levels are to be determined. The author believes also that the studied elementary property of the Carnot Cycle is usable in macroscopic modeling of quantum phenomena on a half-reflecting mirror.

Key words: Carnot cycle, I., II., III. Principle of Thermodynamics, Heat entropy, Observation, Information entropy, Transfer channel, Transinformation, Noise.

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

Ing. Bohdan Hejna, Ph.D.

INFORMAČNÍ TERMODYNAMIKA II.
Fyzikální systémy přenosu informace

Vydala:	Vysoká škola chemicko-technologická v Praze Vydavatelství VŠCHT Praha Technická 5, 166 28 Praha 6
Odpovědná redaktorka:	Ing. Eva Dibuszová, Ph.D.
Obálka a grafická úprava:	Jan Žalud
Tisk:	KANAG - TISK, s.r.o., Technická 5, 166 28 Praha 6
Počet stran:	159
Vydání:	první

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.

Hejna, B. Informační termodynamika II.: Fyzikální systémy přenosu informace, 1st ed.; VŠCHT Praha: Praha, 2011. ISBN 978-80-7080-774-3.
Kniha je k dispozici v elektronické formě na stránkách vydavatelství VŠCHT Praha, http://vydavatelstvi.vscht.cz/, E-mail: vydavatelstvi@vscht.cz, Tel.: (+420) 220 443 211

ISBN 978-80-7080-774-3

9 788070 807743