Předběžný výstup

Pracovní skupina pro diskusi bloků předmětů matematické analýzy v bakalářském studiu

Složení pracovní skupiny (komise):
Petr Hasil *(zodpovědný vedoucí)*, Martin Čadek, David Kraus, Zdeněk Pospíšil, Petr Zemánek

Zpracovávané předměty:

Pro celý program

- M1100 Matematická analýza I
- M2100 Matematická analýza II
- M3100 Matematická analýza III
- M4100 Matematická analýza IV
- M1130 Seminář z matematiky I

Pro zaměření

- M6150 Funkcionální analýza I
- M6170 Analýza v komplexním oboru
- M5160 Obyčejné diferenciální rovnice I
- M2130 Seminář z matematiky II

Zadání:
Přichystat obsah předmětů v bloku matematická analýza – bakalářské studium, zkontrolovat pokrytí otázek státní závěrečné zkoušky (přiložený soubor 1) a obsahy konfrontovat s Rozvahou o struktuře a obsahu studijních programů garantovaných ÚMS (přiložený soubor 2). Dále ve spolupráci s ostatními skupinami brát ohled na vztah k předmětům v jiných blocích. Výsledky předat vedení do konce května 2018.

Další předpokládaný postup:
Vedení ÚMS projedná výstupy pracovních skupin v průběhu června 2018 a do konce září 2018 se k nim vyjádří. Jestliže vedení navrhne změny, budou tyto pracovní skupinou zpracovány do konce listopadu 2018. V průběhu prosince 2018 se pak vedení finálně vyjádří k obsahové náplni předmětů a činnost skupin bude z hlediska tvorby obsahu ukončena. Do konce března 2019 na základě schváleného zadání připraví stanovení vyučující inovované sylaby. Očekává se, že vyučující bude v případě potřeby konzultovat realizaci sylabů s vedoucím příslušné pracovní skupiny. Předměty budou zároveň v případě potřeby zavedeny do ISu a uvedeny v připravovaném katalogu na období 2019/2020. Na základě vyjádření vedoucího skupiny a garanta programu proběhne finální schválení všech sylabů vedením ÚMS v dubnu 2019.

Komentář k výstupu:
• Pracovní skupina vzala v úvahu jako vstupní materiály sylaby předmětů připravené vyučujícími v ISu pro akreditace, seznam nových otázek pro SZZ a Rozvahu. Na základě toho byly zpracovány návrhy obsahů všech zadaných předmětů. Tyto návrhy jsou součástí této zprávy jako příloha A a příloha B.
Příloha A obsahuje všechny diskutované kurzy a jedná se o soupis hlavních témat (klíčových slov) bez důrazu na pořadí a detaily. Cílem je především pokrytí všeho z otázek pro SZZ a může sloužit jako kontrola pro budoucí tvorbu sylabů v ISu (srovnáním by mělo být ihned patrné, zda je vše pokryto). Jednotlivé body uvedené v navrhovaných obsazích předmětů

nesouvisejí s počtem přednášek. Jedná se o výčet a popis témat, se kterými by měl být absolvent příslušného kurzu seznámen. Konkrétní provedení, zejména časové rozvržení témat na přednášky (cvičení, semináře) závisí na učiteli a konkrétní skupině studentů. Podobně pořadí klíčových slov nemusí určovat pořadí probírání daných pojmů. Značka [inf] je uvedena u položek, které by měly být ve výuce alespoň informativně zmíněny kvůli širšímu přehledu studentů.

Příloha B obsahuje podrobný popis témat v pořadí navrhovaném pro pořadí přednášek s odhadem počtu přednášek věnovaným dané oblasti, aby byla patrná míra podrobnosti. Jedná se pouze o návrh realizace těchto kurzů, který by měl být k dispozici vyučujícím pro přehled o očekávaném obsahu a znalostech studentů po absolvování příslušného kurzu. V příloze jsou zpracovány základní kurzy Matematiká analýza I-III a Matematická analýza pro fyziky I-III (pro zdůvodnění nových kurzů viz dále popis změn).

• Obsah otázek pro SZZ byl zkontrolován a u každého kurzu je zdůrazněno co pokrývá (mimo nových kurzů pro fyziky). Komise doporučuje zvážit možnost úpravy otázek pro SZZ, konkrétně do otázky A7 přidat “Radonova–Nikodymova věta” a do otázky A8 přidat “Fourierovy řady” a “Hilbertův prostor”.

• Z Rozvahy je pokryt odstavec 5.4 a oddíly Komplexní analýza, Funkcionální analýza a Diferenciální rovnice z odstavce 5.20. V oddílu Komplexní analýza jsou pojmy “konformní zobrazení” a “analytické pokračování” zařazeny pouze informativně.

• Od komise pro diskrétní matematiku, algebru a lineární algebru byl vznesen požadavek o zahrnutí několika pojmů z Rozvahy do zpracovávaných kurzů. Položka “základní koncepty množinové topologie (spojitost, kompaktnost)” z odstavce 5.2 byla zahrnuta do M2100. Položka “vytvořující funkce” z odstavce 5.3 byla zahrnuta do M3100 (oproti rozvaze pouze informativně). Položka “diskrétní varianty konceptů a postupů matematické a infinitesimální analýzy” byla zahrnuta do M1100.

Hlavní změny:

• Komise navrhuje uvážit obdobu postupu, který připravuje prof. Kučera pro obory učitelství. Jedná se o přípravný týden výuky ve smyslu opakování středoškolské látky před nástupem do prvního semestru. Základní ideou je poslat studentům např. odkaz na test (možno využít odpovědníků v ISu), kde by si vyzkoušeli, zda nemají nedostatky. Poté by se mohli prihlásit na týdenní kurz, kde by byly některé přednášky společné se studenty učitelství, další by byly oddělené. Cílem je zejména doplnit nestejné znalosti studentů z různých SŠ a některé kurzy již mohou být přípravou na následující semestr, mj. ve smyslu vyzkoušení si a přivyknutí na prostředí a odlišnosti v přístupu na VŠ, kde je kladen mnohem větší důraz na samostatnou přípravu a zodpovědnost studentů.

• Komise navrhuje využít kurz M1130 Seminář z matematiky I jako podpůrný prostředek zejména pro kurzy Matematická analýza I, Lineární algebra I a Diskrétní matematika. Témata jsou navržena s ohledem na tyto předměty a navrhujeme, aby již v následujícím zimním semestru proběhl seminář v tomto režimu. Tím se ujasní pořadí témat, aby co nejlépe korespondovala s potřebami výše uvedených kurzů (tj. některá jako úvod a uvolnění prostoru v daném kurzu, který by byl jinak věnován opakování, další jako opakování a doplnění témat již v kurzech probraných, zejména pokud jde o příklady). Součástí semináře by měl být větší počet domácích úkolů, na jejichž opravování a popř. také na konzultacích spojených s vyhodnocováním těchto úkolů by se mohli podílet studenti vyšších ročníků. Tato pomoc by mohla probíhat např. v rámci volitelného předmětu (obdoba pomoci při výuce pro PGS), čímž by studenti vyšších ročníků byli motivováni, mimo samotný zisk zkušeností, také kredity a případně finanční odměnou. Zde je nutné zohlednit fakt, že studenti učitelství budou tuto pomoc dělat v rámci povinné praxe, tedy pouze za kredity. Doporučujeme proto zvážit, zda v případě finančních odměn za tuto pomoc neposkytnout odměnu i studentům učitelství. Seminář z matematiky I navrhujeme vypisovat každý semestr, aby studenti, kteří budou mít natolik velké nedostatky ve znalostech, že seminář neukončí úspěšně, měli možnost znovu si tyto základy projít ještě v prvním ročníku studia a zvýšila se jejich šance při opakování ostatních kurzů v druhém ročníku. Při rozhodování, zda k opakování v jarním semestru přistoupit je nutné uvážit také to, že pokud student nezvládne úspěšně končit seminář napodruhé, jedná se o neúspěch v opakovaném předmětu, které znamená ukončení studia a neumožní tedy postup do druhého ročníku a opakování dalších kurzů (zde pracujeme s předpokladem, že pokud student nezvládne seminář, pravděpodobně nezvládne ukončit ani některé ze základních povinných kurzů).

• Na základě obnovené diskuse s ústavy fyziky zastupovanými prof. Munzarem komise vytvořila verzi kurzů matematické analýzy podle jejich přání. Důvodem je, že kompromisní řešení "Komise pro tvorbu programů" bylo pro fyziky shledáno jako nevyhovující. Ředitelé ústavů fyziky se dohodli, že základní kurzy matematické analýzy pro studenty fyziky budou nadále vedeny pod ÚMS, aby měli studenti k dispozici také matematický pohled na problematiku. Návrhem je proto vytvoření tří kurzů "Matematická analýza pro fyziky I–III". Čtvrtý kurz není pro fyziky povinný a lze jej proto nabízet jen v jedné verzi. Jeho obsah je proto primárně podřízen potřebám studentů ÚMS.

`Příloha A (základní návrh obsahů pro kontrolu úplnosti kurzů)`

Matematická analýza pro fyziky I (4/2)

1. Úvod (Reálná čísla a jejich základní vlastnosti, obecné vlastnosti reálných funkcí, elementární funkce, inverzní funkce, axiomy reálných čísel a jejich vlastnosti [inf], supremum, infimum, posloupnosti [inf])

2. Funkce (limita a spojitost funkcí, vlastnosti spojitých funkcí)

3. Derivace funkce (základní pravidla, vlastnosti derivace, geometrický význam derivace, diferenciál, Taylorův polynom, l'Hospitalovo pravidlo, věty o střední hodnotě, vyšetřování průběhu funkcí, lokální a globální extrémy [inf], křivky v rovině, derivace a tečna parametricky zadané křivky, křivost)

4. Neurčitý integrál (primitivní funkce a její vlastnosti, základní integrační metody s příklady, speciální integrační postupy – integrály s goniometrickými, iracionálními a dalšími typy elementárních funkcí)

5. Riemannův integrál a jeho vlastnosti (metody integrace, konstrukce Riemannova integrálu, integrál jako funkce horní meze [inf], Newtonova–Leibnizova formule, nevlastní integrál, geometrické a fyzikální aplikace integrálu včetně parametrického zadání křivky)

6. Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic (rovnice 1. řádu, existence a jednoznačnost řešení, metoda integračního faktoru, separace proměnných, aplikace, rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty, systémy lineárních rovnic s konstantními koeficienty, metoda variace konstant a neurčitých koeficientů, aplikace diferenciálních rovnic 2. řádu)

Poznámka. Diskuse s fyziky stále probíhá, obsah není finální.

Matematická analýza pro fyziky II (4/2)

1. Metrické prostory (metrika, pojem metrického prostoru, příklady metrik [inf], euklidovská metrika, konvergence, uzavřené a otevřené množiny, kompaktní množiny v euklidovské metrice, spojitá zobrazení, úplné a kompaktní prostory [inf])

2. Diferenciální počet funkcí více proměnných (limita, spojitost, parciální a směrová derivace, diferencovatelnost, složené zobrazení a jeho derivace, extrémy funkcí a jejich aplikace, věta o implicitní funkci, věta o inverzní funkci, vázané extrémy, aplikace [inf])

3. Integrální počet funkcí více proměnných (konstrukce Riemannova integrálu, Fubiniho věta, věta o transformaci vícenásobného integrálu, základní příklady transformací, nevlastní integrál, konvergence, kritéria konvergence, absolutní konvergence, integrály závislé na parametru)

4. Křivkový integrál (křivkový integrál prvního a druhého druhu, základní vlastnosti, převod na Riemannův integrál, závislost resp. nezávislost na integrační cestě, potenciálové vektorové pole, cirkulace a tok vektorového pole, aplikace: křivkový integrál v rovině a prostoru, práce síly po trajektorii)

5. Plošný integrál (plošný integrál prvního a druhého druhu, normálový vektor, vlastnosti, výpočet, Gaussova-Ostrogradského věta, Stokesova věta, aplikace)

Poznámka. Diskuse s fyziky stále probíhá, obsah není finální.

Matematická analýza pro fyziky III (4/2)

1. Nekonečné číselné řady (číselné řady s nezápornými členy, alternující řady, řady s libovolnými členy, kritéria konvergence, absolutní a neabsolutní konvergence [inf], komutativní zákon, operace s číselnými řadami, Riemannova věta o přerovnání, násobení nekonečných řad [inf], odhad zbytku)

2. Posloupnosti a řady funkcí (bodová a stejnoměrná konvergence, kritéria a příklady stejnoměrné konvergence, derivování a integrování posloupností a řad funkcí, mocninné řady a jejich aplikace, poloměr konvergence, Taylorova řada, Fourierovy řady)

3. Úvod do komplexní analýzy (derivace v $\mathbb{C}$, Cauchyho–Riemannovy podmínky, holomorfní funkce, funkce zadané mocninnými řadami, exponenciální funkce, goniometrické funkce, mocniny, odmocniny, komplexní logaritmus, obecná mocnina, Cauchyho věta, Cauchyho vzorec, aplikace na výpočet integrálů z reálného oboru, vlastnosti holomorfních funkcí, singularity holomorfních funkcí, reziduum funkce v bodě, reziduová věta, aplikace reziduové věty na výpočet integrálů)

4. Základy funkcionální analýzy (Hilbertovy prostory, lineární funkcionály, duální prostory, samoadjungované lineární operátory v Hilbertových prostorech, spektrální teorie)

Poznámka. Diskuse s fyziky stále probíhá, obsah není finální.

M1100 Matematická analýza I (4/2)

1. Úvod (Reálná čísla a jejich základní vlastnosti, obecné vlastnosti reálných funkcí, elementární funkce, inverzní funkce, axiomy reálných čísel a jejich vlastnosti, supremum, infimum)

2. Funkce a posloupnosti (posloupnosti reálných čísel, limita posloupnosti, limita a spojitost funkcí, vlastnosti spojitých funkcí)

3. Derivace funkce (základní pravidla, vlastnosti derivace, geometrický význam derivace, diferenciál, Taylorův polynom, l'Hospitalovo pravidlo, věty o střední hodnotě, vyšetřování průběhu funkcí, lokální a globální extrémy, křivky v rovině, derivace a tečna parametricky zadané křivky)

4. Neurčitý integrál (primitivní funkce a její vlastnosti, základní integrační metody, speciální integrační postupy – integrály s goniometrickými, iracionálními a dalšími typy elementárních funkcí)

5. Riemannův integrál a jeho vlastnosti (konstrukce Riemannova integrálu, metody integrace, integrál jako funkce horní meze, Newtonova–Leibnizova formule, nevlastní integrál, geometrické a fyzikální aplikace integrálu, aplikace a slovní úlohy vedoucí na rovnice $y' = f(x)$)

6. Diskrétní varianty nástrojů matematické analýzy [inf] (diferenční a sumační počet)

Poznámka. V seznamu otázek pro SZZ pokrývá části otázek A5 a A6.

M2100 Matematická analýza II (4/2)

1. Metrické prostory (metrika, pojem metrického prostoru, normovaný lineární prostor, konvergence, uzavřené a otevřené množiny, spojitá a lipschitzovská zobrazení, úplné prostory, Banachův prostor, kompaktní prostory, prostor spojitých funkcí, Banachova věta o pevném bodu a její aplikace, základní pojmy množinové topologie – spojitost a kompaktnost [inf])

2. Diferenciální počet funkcí více proměnných (limita, spojitost, parciální a směrová derivace, diferenciál, Taylorův polynom, extrémy funkcí, spojitost s kvadratickými formami, zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí, věta o implicitní funkci, věta o inverzní funkci, volné a vázané extrémy, prostory L^p a vztahy mezi nimi, Hölderova nerovnost, Minkowského nerovnost)

3. Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic (rovnice 1. řádu, existence a jednoznačnost počáteční úlohy pro rovnice 1. řádu, řešení rovnic 1. a 2. řádu, systémy lineárních rovnic s konstantními koeficienty, lineární rovnice, rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty, systémy lineárních diferenciálních rovnic, diferenční rovnice [inf])

4. Příklady parciálních diferenciálních rovnic [inf] (např. rovnice vedení tepla)

5. Ukázka teorie optimalizace a variačního počtu [inf] (např. brachistochrona)

Poznámka. V seznamu otázek pro SZZ pokrývá části otázek A5, A8 a D5.

M3100 Matematická analýza III (4/2)

1. Nekonečné číselné řady (číselné řady s nezápornými členy, alternující řady, řady s libovolnými členy, kritéria konvergence, absolutni a neabsolutní konvergence, komutativní zákon, operace s číselnými řadami, Riemannova věta o přerovnání, násobení nekonečných řad, odhad zbytku, nekonečné součiny [inf])

2. Posloupnosti a řady funkcí (bodová a stejnoměrná konvergence, kritéria a příklady stejnoměrné konvergence, derivování a integrování posloupností a řad funkcí, mocninné řady a jejich aplikace, vytvořující funkce pro posloupnosti [inf], řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad, poloměr konvergence, Taylorova řada, ortogonální a ortonormální báze, Fourierovy řady a transformace, Laplaceova transformace, konvoluce)

3. Integrální počet funkcí více proměnných (základy teorie míry [inf], Jordanova míra, Riemannův integrál, Fubiniho věta, věta o transformaci vícenásobného integrálu, základní příklady transformací, nevlastní integrál)

4. Integrály závislé na parametru (věty o spojitosti, derivaci a jejich aplikace na výpočet určitých integrálů, funkce gama a beta)

5. Křivkový integrál (křivkový integrál prvního a druhého druhu, konstrukce, vlastnosti, aplikace)

6. Plošný integrál (plošný integrál prvního a druhého druhu, konstrukce, vlastnosti, aplikace)

7. Úvod do komplexní analýzy (číselné, funkční a mocninné řady v $\mathbb{C}$, Cauchyho věta [inf], Cauchyho vzorec [inf])

Poznámka. V seznamu otázek pro SZZ pokrývá části otázek A6, A7 a A8.

M4100 Matematická analýza IV (2/2)

1. Základní pojmy teorie míry, sigma-algebra, borelovské množiny, definice a konstrukce míry, měřitelné množiny, vnější míra a Caratheodoryho konstrukce míry, Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^n$, Vitaliho věta, Stieltjesova míra

2. Měřitelné funkce, konvergence měřitelných funkcí (skoro všude, v míře – slabá konvergence)

3. Abstraktní integrál podle míry, jeho základní vlastnosti, Stieltjesův integrál, věty o limitních přechodech (Lebesgueova věta, Fatouovo lemma), absolutní spojitost [inf], Radonova–Nikodymova věta, Čebyševova nerovnost, Jensenova nerovnost [inf]

4. Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$, srovnání Lebesgueova a Riemannova integrálu, součin měr, integrace v součinových prostorech, Tonelliho a Fubiniho věta, věta o substituci, nevlastní Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$

5. L^p prostory, vztah k ℓ^p, konvergence v L^p, Hilbertovy a Banachovy prostory, L^2 teorie, Cauchy–Schwarzova nerovnost

Poznámka. V seznamu otázek pro SZZ pokrývá většinu otázky otázku A7.

Poznámka. Možné ukázky a aplikace (v pravděpodobnosti) k jednotlivým bodům:

ad 2. náhodné veličiny, rozdělení jako obraz míry, konvergence náhodných veličin (skoro jistě, v pravděpodobnosti), slabý zákon velkých čísel

ad 3. střední hodnota, momenty, hustota rozdělení (vzhledem k Lebesguově, čítací a jiné obecnější míře, např. k jinému rozdělení), konvergence v distribuci

ad 4. sdružené rozdělení náhodného vektoru, i např. se spojitými a diskrétními složkami apod., součin měr a nezávislost náhodných veličin, rozdělení transformace náhodného vektoru

ad 5. L^p prostory náhodných veličin, momenty a Hölderova nerovnost, L^2 prostor náhodných veličin, kovariance jako skalární součin, Cauchy–Schwarzova nerovnost a korelace, predikce náhodných veličin (lineární predikce, případně podmíněná střední hodnota)

M1130 Seminář z matematiky I (0/2)

1. Počítání a nerovnosti s absolutní hodnotou. Výroky, logické spojky, kvantifikátory. Negace jednoduchých matematických výroků.

2. Sestrojování zobrazení mezi množinami reálných / celých / přirozených čísel, které jsou bijektivní, injektivní nebo surjektivní.

3. Elemetární funkce, jejich vlastnosti a jejich grafy. Počítání inverzních funkcí.

4. Počítání s komplexními čísly, polynomy a jejich kořeny, rozklady racionálních funkcí na parciální zlomky.

5. Procvičování elementární kombinatoriky a pravděpodobnosti.

6. Zápisy množin, důkazy množinových inkluzí, procvičování zápisu tvrzení formálním jazykem predikátové logiky, např. na výrocích o nekonečných posloupnostech nebo limitách.

7. Důkazy přímé, nepřímé, sporem a matematickou indukcí na skutečných příkladech. Protipříklady.

8. Příklady na průběh funkce (periodické funkce, funkce s "hroty" apod.), Taylorův rozvoj (zejm. odhad chyby, metody výpočtu Taylorova polynomu, aplikace) a aplikace integrálu.

Poznámka. Řazení jednotlivých témat je nutné upřesnit v konzultacích s učiteli diskrétní matematiky, analýzy a lineární algebry. Domácí úlohy. K zápočtu je potřeba získat 70 procent bodů z domácích úloh a napsat zápočtovou písemku.

M6150 Funkcionální analýza I (2/1)

1. Normované lineární prostory, Hilbertovy prostory, Banachův prostor, rozdíly mezi konečnou a nekonečnou dimenzí, prostory funkcí a posloupností, ortogonalita v Hilbertových prostorech, obecné Fourierovy řady v Hilbertových prostorech, prostory C^k, L^p a ℓ^p, jejich úplnost, kriteria kompaktnosti a prekompaktnosti jejich podmnožin

2. Lineární funkcionály a zobrazení, norma, spojitost, princip stejnoměrné omezenosti (Banachova–Steinhausova věta, její důsledky a aplikace), věta o otevřeném zobrazení a uzavřeném grafu, invertibilita, Hahnova–Banachova věta a její důsledky.

3. Duální prostory, reflexivita, reprezentace spojitých lineárních funkcionálů na Hilbertově prostoru, duální prostor k Hilbertovu prostoru, duální prostory k prostorům funkcí a posloupností, slabá konvergence, slabá ohraničenost.

Poznámka. V seznamu otázek pro SZZ pokrývá otázku D4.

M6170 Analýza v komplexním oboru (2/2)

1. Opakování a úvod (číselné, funkční a mocninné řady v $\mathbb{C}$, historický úvod [inf])

2. Komplexní čísla (základní pojmy a operace, Gaussova rovina, $\mathbb{C}$ a $\tilde{\mathbb{C}}$ jako metrický prostor, Riemannova sféra)

3. Základy kalkulu v $\mathbb{C}$ (limita, komplexní a reálná diferencovatelnost, Cauchyho–Riemannovy podmínky, holomorfní funkce, harmonické a harmonicky sdružené funkce)

4. Elementární funkce v $\mathbb{C}$ (exponenciální, goniometrické, hyperbolické, n-tá mocnina a odmocnina, logaritmus, obecná mocnina, Riemannova plocha [inf])

5. Integrály (základní pojmy, křivka, cesta, křivkový integrál, nezávislost integrálů na integrační cestě, primitivní funkce)

6. Cauchyho teorie a holomorfní funkce (Cauchyho věta, Cauchyho integrální vzorce a jejich důsledky, aplikace na výpočet nevlastních integrálů, Cauchyho nerovnost, Morerova věta, Věta o reprezentovatelnosti, Věta o jednoznačnosti, celé funkce, Liouvilleova věta, základní věta algebry, Princip maxima modulu, analytické pokračování [inf])

7. Laurentova řada

8. Teorie reziduí (izolované singularity, l'Hospitalovo pravidlo, Casoratiho–Weierstrassova věta, Picardova věta, reziduum, Reziduová věta, aplikace, konformní zobrazení [inf])

Poznámka. V seznamu otázek pro SZZ pokrývá otázku D6. Oproti Rozvaze jsou témata konformní zobrazení a analytické pokračování uvedena informativně.

Poznámka. Základ k číselným, funkčním a mocninným řadám v $\mathbb{C}$ je v M3100 – zde pouze opakování a rozšíření.

M5160 Obyčejné diferenciální rovnice I (2/2)

1. Základní pojmy (obyčejné diferenciální rovnice a jejich systémy, řád rovnice, rovnice vyšších řádů, počáteční problém, pojem řešení diferenciální rovnice a počátečního problému)

2. Systémy lineárních diferenciálních rovnic (existence a jednoznačnost řešení, struktura systému řešení, metoda variace konstant, lineární systémy s konstantními koeficienty, souvislost lineárních systémů s lineárními rovnicemi vyšších řádů)

3. Lokální a globální vlastnosti řešení (lokální existence a jednoznačnost řešení nelineárních počátečních problémů, globální existence a jednoznačnost, závislost řešení na počátečních podmínkách a parametrech, úplná řešení)

4. Autonomní systémy (trajektorie, fázový portrét, stavový prostor, typy singulárních bodů [inf])

5. Úvod do teorie stability (ljapunovské pojetí, stejnoměrná, asymptotická a exponenciální stabilita, stabilita lineárních a perturbovaných lineárních systémů, Hurwitzovo kritérium, přímá Ljapunovova metoda)

Poznámka. V seznamu otázek pro SZZ pokrývá část otázky D5.

M2130 Seminář z matematiky II (0/2)

1. Osvojení si techniky důkazů z prvních dvou semestrů matematické analýzy a lineární algebry
2. Klasifikace kuželoseček a kvadrik, jednotlivé kuželosečky a kvadriky podrobněji

Poznámka. Bude-li M1130 (Seminář z matematiky I) vyučován každý semestr, doporučujeme zvážit přesun M2130 do třetího semestru. Tím by se zároveň zvětšil počet témat, která zde mohou být připomenuta/rozšířena.

Příloha B (návrh realizace a proveditelnost)

M1100 Matematická analýza I (4/2)

1. Reálná čísla, posloupnosti, funkce, limity, spojitost. *(6 přednášek)*

- Reálná čísla, supremum a infimum, rozdíl mezi reálnými a racionálními čísly. Komplexní čísla.
- Funkce a posloupnosti. Definiční obor funkce, obor hodnot. Vlastnosti funkcí: sudé, liché, periodické, monotónní. Operace s funkcemi, skládání funkcí, inverzní funkce. Přehled elementárních funkcí: polynomy, racionální lomené funkce, mocninné funkce, exponenciální funkce, logaritmus, goniometrické funkce, cyklometrické funkce, hyperbolické a hyperbolometrické funkce.
- Limita funkce a posloupnosti. Limita součtu, součinu a podílu, limita složené funkce. Limita neklesající shora omezené posloupnosti (funkce) - příklad na užití suprema. Cauchyovská posloupnost. S důkazem věta: Posloupnost má konečnou limitu právě když je cauchyovská. (Analogie pro funkce bez důkazu.)
- Spojité funkce. Jejich základní vlastnosti. Vlastnosti spojitých funkcí na uzavřených intervalech - nabývání mezihodnot, omezenost, nabývání minima a maxima. (S důkazy, ty ukazují potřebnost pojmu suprema.)

2. Derivace funkce. *(8 přednášek)*

- Definice, geometrický význam (směrnice tečny), fyzikální význam (okamžitá rychlost), derivace a spojitost, derivace součtu, součinu a podílu, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Derivace elementárních funkcí.
- Věty o střední hodnotě (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyho), l'Hospitalovo pravidlo. Výpočty pomocí l'Hospitalova pravidla. Znaménko 1. derivace a monotónie funkce. Lokální a globální extrémy. Nutná podmínka pro extrém - derivace rovna 0. Hledání extrémů pomocí znaménka 1. derivace.
- Druhá derivace. Postačující podmínka pro lokální extrém pomocí první a druhé derivace. Konvexní a konkávní funkce na intervalu (poloha grafu funkce, sečny a tečny grafu). Konvexnost a konkávnost pomocí monotonie 1. derivace. Konvexnost a konkávnost pomocí znaménka 2. derivace. Inflexní body. Asymptoty a vyšetřování průběhu funkce.
- Diferenciál funkce f v bodě a jako lineární zobrazení v $x - a$ aproximující funkci $f(x) - f(a)$ na okolí a. Vyšší derivace. Taylorův polynom jako aproximace funkce f na okolí bodu a. Taylorova věta. Součet řady jako limita částečných součtů. Rozvoj elementárních funkcí pomocí Taylorových řad.

- Rovinné křivky, jejich tečné vektory a křivost.

3. Neurčitý integrál. *(3 přednášky)*

- Primitivní funkce, tabulka základních primitivních funkcí. Integrace per partes, věta o substituci.
- Integrace speciálních funkcí. Rozklad racionálních lomených funkcí, integrace racionálních funkcí, integrace racionálních funkcí v $\sin x$ a $\cos x$. Na příkladech binomický integrál a integrály typu

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s\right) \quad R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right).$$

4. Riemannův integrál. *(7 přednášek)*

- Definice Riemannova integrálu: dělení intervalu, horní a dolní součty, horní a dolní integrál. Které funkce mají R-integrál - ohraničené a monotónní, spojité, s body nespojitosti Jordanovy míry nula [inf]. (Je potřeba zavést pojem stejnoměrné spojitosti a ukázat, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu je stejnoměrně spojitá.) Integrovatelnost součtu a absolutní hodnoty.
- Riemannův integrál jako funkce horní meze, spojitost funkce horní meze, výpočet pomocí primitivní funkce. Per partes a substituce (bez důkazů, výpočty se provádějí stejně pomocí primitivních funkcí). Věty o střední hodnotě.
- Geometrické aplikace: plocha rovinných obrazců, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělesa (včetně parametrického zadání). Fyzikální aplikace: Hmotnost, statický moment a těžiště křivky. Aplikace a slovní úlohy vedoucí na rovnice $y' = f(x)$.
- Nevlastní Riemannův integrál. Definice, výpočet pomocí primitivní funkce. Konvergence nevlastních integrálů, srovnávací kriterium a limitní srovnávací kriterium, absolutní a neabsolutní konvergence. Abelovo a Dirichletovo kriterium pro neabsolutní konvergenci [inf].

5. Diskrétní varianty derivace a integrálu [inf]. *(1 přednáška)*

- Diferenční a sumační počet [inf].

M2100 Matematická analýza II (4/2)

1. Elementární metody řešení diferenciálních rovnic *(2 přednášky)*

   - Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ pro reálnou funkci y. Věta o existenci řešení počáteční úlohy, postačující podmínky pro jednoznačnost řešení, oboje bez důkazu. Rovnice se separovanými proměnnými, příklady včetně těch s nejednoznačným řešením.

   - Lineární rovnice $y' + p(x)y = f(x)$, metoda variace konstant, lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Využití lineární algebry. Počáteční a okrajová úloha. Bernoulliho rovnice, exaktní rovnice, rovnice nerozřešená vzhledem k derivaci.

2. Metrické prostory. *(6 přednášek)*

   - Metrické prostory a jejich podprostory, konvergence, uzavřené a otevřené množiny, spojitá a lipschitzovská zobrazení mezi metrickými prostory. Metriky na $\mathbb{R}^n$, metrika na prostoru spojitých funkcí. Stejnoměrná konvergence. Normované vektorové prostory.

   - Kompaktnost a úplnost. Kompaktní množiny v metrickém prostoru. Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$. Spojité funkce na kompaktních množinách. Úplné metrické prostory. Banachovy prostory. Úplnost prostoru spojitých funkcí. Banachova věta o pevném bodu. Aplikace na důkaz existence a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro rovnici $y' = f(x, y(x))$ s lipschitzovskou pravou stranou.

   - Základní pojmy množinové topologie [inf] (spojitost a kompaktnost), souvislé metrické prostory [inf].

3. Diferenciální počet fukcí více proměnných. *(12 přednášek)*

   - Limita a spojitost funkcí definovaných v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, směrové derivace, diferenciál jako lineární forma, spojitost s lineární algebrou, parciální derivace vyšších řádů, druhý diferenciál jako symetrická bilineární forma, Taylorův rozvoj. Nutné a postačující podmínky pro lokální extrémy, spojitost s lineární algebrou.

   - Diferencovatelná zobrazení mezi prostory konečných dimenzí, věta o implicitní funkci (důkaz pomocí Banachovy věty o pevném bodu). Věta o inverzní funkci. Vázané extrémy a Lagrangeovy multiplikátory pro úlohy s omezeními ve tvaru rovností, podmínka druhého řádu.

   - Nerovnosti: Youngova, Hölderova, Minkowského. Prostory funkcí L^p a řad l^p.

4. Aplikace [inf]. *(2 přednášky)*

   - Příklady parciálních diferenciálních rovnic [inf] (např. rovnice vedení tepla)

- Ukázka teorie optimalizace a variačního počtu [inf] (např. brachistochrona)

5. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic. *(3 přednášky)*

   - Řešitelnost a jednoznačnost, prostory řešení jako afinní podprostory.
   - Homogenní soustavy s konstantními koeficienty. Využití vlastních čísel, vlastních vektorů a Jordanova kanonického tvaru.

M3100 Matematická analýza III (4/2)

1. Nekonečné číselné řady v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. *(3 přednášky)*

   - Konvergence, neabsolutní a absolutní, v $\mathbb{R}$ i v $\mathbb{C}$. Kriteria konvergence pro řady s nezápornými členy - srovnávací, limitní srovnávací, podílové, odmocninové, integrální.
   - Neabsolutní konvergence a přerovnávání řad. Kriteria pro neabsolutní konvergenci - Abelovo a Dirichletovo.
   - Násobení řad, zmínka o nekonečných součinech.

2. Posloupnosti a řady funkcí. *(7 přednášek)*

   - Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí. Cauchyho kritérium pro bodovou i stejnoměrnou konvergenci. Derivování a integrování posloupností a řad funkcí.
   - Mocninné řady v $\mathbb{C}$, poloměr konvergence, stejnoměrná a absolutní konvergence. Definice derivace funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Derivování a integrování mocninných řad. Taylorovy řady. Řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad.
   - Fourierovy řady. Fourierovy koeficienty. Hilbertův prostor L^2. Konvergence v L^2. Besselova nerovnost. Dirichletovo a Fejerovo jádro. Bodová konvergence a stejnoměrná konvergence [inf].
   - Fourierova a Laplaceova transformace na přímce. Vlastnosti Fourierovy transformace. Inverzní Fourierova transformace. Použití Fourierovy a Laplaceovy transformace.

3. Integrální počet více proměnných. *(8 přednášek)*

   - Definice Riemannova integrálu na omezených oblastech v $\mathbb{R}^n$.
   - Fubiniho věta.
   - Věta o substituci. Základní příklady transformací.
   - Integrály závislé na parametru (věty o spojitosti, derivaci a jejich aplikace na výpočet určitých integrálů, funkce gama a beta)

- Nevlastní integrály. Fourierova transformace v $\mathbb{R}^n$, gamma a beta funkce.

4. Křivkový integrál a plošný integrál. *(4 přednášky)*

- Křivkový integrál prvního a druhého druhu. Greenova věta. Nezávislost, resp. závislost na integrační cestě. Fyzikální aplikace.

- Plošný integrál prvního a druhého druhu. Konstrukce a vlastnosti. Výpočet. Gaussova-Ostrogradského věta. Stokesova věta. Vektorový kalkulus [inf]. Fyzikální aplikace.

5. Úvod do komplexní analýzy. *(3 přednášky)*

- Derivace v $\mathbb{C}$, Cauchyho–Riemannovy podmínky, holomorfní funkce, číselné, funkční a mocninné řady v $\mathbb{C}$, funkce zadané mocninnými řadami, exponenciální funkce [inf], goniometrické funkce [inf].

- Cauchyho věta [inf], Cauchyho vzorec [inf].

Matematická analýza pro fyziky I (4/2)

1. Reálná čísla, posloupnosti, funkce, limity, spojitost. *(5 přednášek)*

- Reálná čísla, supremum a infimum, rozdíl mezi reálnými a racionálními čísly. Komplexní čísla.

- Funkce a posloupnosti. Definiční obor funkcer, obor hodnot. Vlastnosti funkcí: sudé, liché, periodické, monotónní. Operace s funkcemi, skládání funkcí, inverzní funkce. Přehled elementárních funkcí: polynomy, racionální lomené funkce, mocninné funkce, exponenciální funkce, logaritmus, goniometrické funkce, cyklometrické funkce, cosinus a sinus hyperbolický.

- Limita funkce a posloupnosti. Limita součtu, součinu a podílu, limita složené funkce. Limita neklesající shora omezené posloupnosti (funkce) - příklad na užití suprema. Cauchyovská posloupnost. S důkazem věta: Posloupnost má konečnou limitu právě když je caychyovská. (Analogie pro funkce bez důkazu.)

- Spojité funkce. Jejich základní vlastnosti. Vlastnosti spojitých funkcí na uzavřených intervalech - nabývání mezihodnot, omezenost, nabývání minima a maxima. (S důkazy, ty ukazují potřebnost pojmu suprema.)

2. Derivace funkce. *(7 přednášek)*

- Definice, geometrický význam (směrnice tečny), fyzikální význam (okamžitá rychlost), derivace a spojitost, derivace součtu, součinu a podílu, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Derivace elementárních funkcí.

- Věty o střední hodnotě (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyho), l'Hospitalovo pravidlo. Výpočty pomocí l'Hospitalova pravidla. Znaménko 1. derivace a monotónie funkce. Lokální a globální extrémy. Nutná podmínka pro extrém - derivace rovna 0. Hledání extrémů pomocí znaménka 1. derivace.

- Druhá derivace. Postačující podmínka pro lokální extrém pomocí první a druhé derivace. Konvexní a konkávní funkce na intervalu (poloha grafu funkce, sečny a tečny grafu). Konvexnost a konkávnost pomocí monotonie 1. derivace. Konvexnost a konkávnost pomocí znaménka 2. derivace. Inflexní body. Asymptoty a vyšetřování průběhu funkce.

- Diferenciál funkce f v bodě a jako lineární zobrazení v $x - a$ aproximující funkci $f(x) - f(a)$ na okolí a. Vyšší derivace. Taylorův polynom jako aproximace funkce f na okolí bodu a. Taylorova věta. Součet řady jako limita částečných součtů. Rozvoj elementárních funkcí pomocí Taylorových řad.

- Rovinné křivky, jejich tečné vektory a křivost.

3. Neurčitý integrál. *(3 přednášky)*

- Primitivní funkce, tabulka základních primitivních funkcí. Integrace per partes, věta o substituci.

- Integrace speciálních funkcí. Rozklad racionálních lomených funkcí, integrace racionálních funkcí, integrace racionálních funkcí v $\sin x$ a $\cos x$. Na příkladech binomický integrál a integrály typu

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s\right) \quad R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right).$$

4. Riemannův integrál. *(6 přednášek)*

- Definice Riemannova integrálu: dělení intervalu, horní a dolní součty, horní a dolní integrál. Které funkce mají R-integrál - ohraničené a monotónní, spojité. (Je potřeba zavést pojem stejnoměrné spojitosti a ukázat, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu je stejnoměrně spojitá.) Integrovatelnost součtu a absolutní hodnoty.

- Riemannův integrál jako funkce horní meze, výpočet pomocí primitivní funkce. Per partes a substituce (bez důkazů, výpočty se provádějí stejně pomocí primitivních funkcí). Věty o střední hodnotě.

- Geometrické aplikace: plocha rovinných obrazců, délka křivky, objem a obsah pláště rotačního tělesa (včetně parametrického zadání). Fyzikální aplikace: Hmotnost, statický moment a těžiště křivky.

- Nevlastní Riemannův integrál. Definice, výpočet pomocí primitivní funkce. Konvergence nevlastních integrálů, srovnávací kriterium a limitní srovnávací kriterium, absolutní a neabsolutní konvergence. Abelovo a Dirichletovo kriterium pro neabsolutní konvergenci [inf].

5. Obyčejné diferenciální rovnice. *(4 přednášky)*

- Diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ pro reálnou funkci y. Věta o existenci řešení počáteční úlohy, postačující podmínky pro jednoznačnost řešení, oboje bez důkazu. Rovnice se separovanými proměnnými a rovnice na ně převoditelné (rozpad radioaktivních jader, pohyb tělesa v odporujícím prostředí, logistická rovnice, rovnice integrálních křivek vektorových polí).

- Lineární rovnice $y' + p(x)y = f(x)$, metoda variace konstant, lineární diferenciální rovnice 2. řádu koeficienty. Využití lineární algebry (řešení homogenních rovnic jsou vektorové prostoty konečné dimenze - princip superpozice, wronskián). Počáteční a okrajová úloha. Rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.

- Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, využití vlastních čísel a vlastních vektorů, řešení úlohy pro matice, které nemají vícenásobná vlastní čísla.

Matematická analýza pro fyziky II (4/2)

1. Metrické prostory. *(3 přednášky)*

- Metrické prostory a jejich podprostory, konvergence, uzavřené a otevřené množiny, spojitá a lipschitzovská zobrazení mezi metrickými prostory. Metriky na $\mathbb{R}^n$, metrika na prostoru spojitých funkcí. Stejnoměrná konvergence. Normované vektorové prostory.

- Kompaktnost a úplnost. Kompaktní množiny v metrickém prostoru. Kompaktní množiny v $\mathbb{R}^n$. Spojité funkce na kompaktních množinách. Úplné metrické prostory. Banachovy prostory. Úplnost prostoru spojitých funkcí. Banachova věta o pevném bodu. Aplikace na důkaz existence a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro rovnici $y' = f(x, y(x))$ s lipschitzovskou pravou stranou.

- Souvislé metrické prostory [inf].

2. Diferenciální počet fukcí více proměnných. *(10 přednášek)*

- Limita a spojitost funkcí definovaných v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, směrové derivace, diferenciál jako lineární forma, spojitost s lineární algebrou, parciální derivace vyšších řádů, druhý diferenciál jako symetrická bilineární forma, Taylorův rozvoj. Nutné a postačující podmínky pro lokální extrémy, spojitost s lineární algebrou.

- Diferencovatelná zobrazení mezi prostory konečných dimenzí, derivování složených zobrazení, věta o implicitní funkci (důkaz pomocí Banachovy věty o pevném bodu). Věta o inverzní funkci. Vázané extrémy a Lagrangeovy multiplikátory pro úlohy s omezeními ve tvaru rovností, podmínka druhého řádu.

- Aplikace. Exaktní obyčejné diferenciální rovnice. příklady parciálních diferenciálních rovnic.

3. Integrální počet více proměnných. *(7 přednášek)*

- Definice Riemannova integrálu na omezených oblastech v $\mathbb{R}^n$.

- Fubiniho věta.

- Věta o substituci. Základní příklady transformací.

- Stejnoměrná konvergence a integrál. Nevlastní integrály. Integrály závislé na parametru (spojitost, diferencovatelnost), gamma a beta funkce.

4. Křivkový integrál a plošný integrál. *(5 přednášek)*

- Křivkový integrál prvního a druhého druhu. Greenova věta. Nezávislost, resp. závislost na integrační cestě. Potenciálové vektorové pole, cirkulace a tok vektorového pole, práce síly po trajektorii.

- Plošný integrál prvního a druhého druhu. Konstrukce a vlastnosti. Výpočet. Gaussova-Ostrogradského věta. Stokesova věta. Vektorový kalkulus. Aplikace.

Matematická analýza pro fyziky III (4/2)

1. Nekonečné číselné řady v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$. *(3 přednášky)*

- Konvergence, neabsolutní a absolutní, v $\mathbb{R}$ i v $\mathbb{C}$. Kriteria konvergence pro řady s nezápornými členy - srovnávací, limitní srovnávací, podílové, odmocninové, integrální.

- Neabsolutní konvergence a přerovnávání řad. Kriteria pro neabsolutní konvergenci - Abelovo a Dirichletovo.

- Násobení řad, zmínka o nekonečných součinech.

2. Posloupnosti a řady funkcí. *(7 přednášek)*

- Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí. Cauchyho kritérium pro bodovou i stejnoměrnou konvergenci. Derivování a integrování posloupností a řad funkcí.

- Mocninné řady v $\mathbb{C}$, poloměr konvergence, stejnoměrná a absolutní konvergence. Definice derivace funkce z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$. Derivování a integrování mocninných řad. Taylorovy řady. Řešení diferenciálních rovnic pomocí mocninných řad.

- Fourierovy řady. Fourierovy koeficienty. Hilbertův prostor L^2. Konvergence v L^2. Besselova nerovnost. Parselvalova rovnost. Dirichletovo a Fejerovo jádro. Bodová konvergence a stejnoměrná konvergence [inf].

- Fourierova a Laplaceova transformace. Vlastnosti Fourierovy transformace. Inverzní Fourierova transformace. Použití Fourierovy a Laplaceovy transformace.

3. Úvod do komplexní analýzy. *(6 přednášek)*

- Derivace v $\mathbb{C}$, Cauchyho–Riemannovy podmínky, holomorfní funkce, funkce zadané mocninnými řadami, exponenciální funkce, goniometrické funkce, mocniny, odmocniny, komplexní logaritmus, obecná mocnina.

- Cauchyho věta, Cauchyho vzorec, aplikace na výpočet integrálů z reálného oboru, vlastnosti holomorfních funkcí.

- Singularity holomorfních funkcí, reziduum funkce v bodě, reziduová věta, aplikace reziduové věty na výpočet integrálů.

4. Základy funkcionální analýzy. *(9 přednášek)*

- Banachovy prostory, prostory funkcí C^k. Hilbertovy prostory, prostor L^2. Prostory s mírou [inf], Lebesqueův integrál podle míry [inf]. Prostory L^p [inf] (Youngova nerovnost, Hölderova nerovnost, Minkovského nerovnost).

- Spojité lineární funkcionály, duální vektorový prostor, duální prostory k L^p.

- Lineární zobrazení mezi normovanými vektorovými prostory, omezená a uzavřená zobrazení. Kompaktní operátory, samoadjungované operátory na Hilbertových prostorech, unitární operátory.

- Spektrum lineárního operátoru, rezolventa, Fredholmova alternativa a spektrum kompaktního operátoru.

- Spektrální teorie samoadjungovaných operátorů. Spektrální míra a věta o spektrálním rozkladu samoadjungovaného operátoru. Souvislost s konečnou dimenzí.