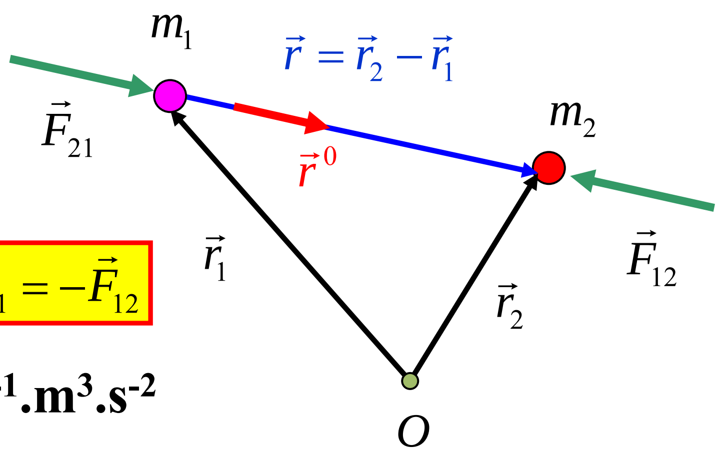
Gravitační pole

- **Newtonův gravitační zákon**:

  „Mezi dvěma tělesy o hmotnostech m_1 a m_2, které jsou od sebe vzdáleny o r, působí stejně velké síly vzájemné přitažlivosti, jejichž velikost je přímo úměrná součinu hmotností m_1 a m_2 a nepřímo úměrná čtverci vzdáleností r“.

$$\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}^{\,0} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$



κ **- gravitační konstanta 6,67·10^{-11} kg^{-1}.m^3.s^{-2}**

- gravitační síla je **síla přitažlivá** a **centrální**

$$\vec{F}_g = f\left(|\vec{r}|\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

- gravitační síla je **silou konzervativní** a může být proto charakterizována intenzitou ***E*** a potenciálem φ

Gravitační pole

- **intenzita** gravitačního pole:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3}\vec{r}$$

diskrétní rozložení hmoty

$$\vec{E} = -\kappa \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^3}\vec{r}\,\mathrm{d}V$$

spojité rozložení hmoty

- **potenciál gravitačního pole**:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \kappa M \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\kappa \frac{M}{r} + K$$

- integrační konstantu K lze volit, obvykle se volí K=0, potom hladina nulového potenciálu se nachází v nekonečnu ($r \to \infty$, $\varphi \to 0$).

$$\varphi = -\kappa \frac{M}{r}$$

diskrétní rozložení hmoty

$$\varphi = -\kappa \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r}\,\mathrm{d}V$$

spojité rozložení hmoty

Gravitační pole

- vztahy pro potenciál a intenzitu hmotného bodu platí též pro tělesa kulového tvaru se středově symetrickým rozložením hmoty (přibližně např.Země)

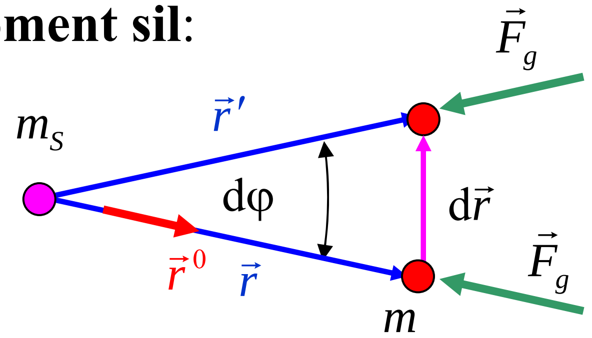
- **Potenciální energie:**

$$W_p = m\varphi = -\kappa\frac{mM}{r}$$

- Působí-li na těleso pouze centrální síla (např.gravitační), potom **na těleso působí nulový moment sil**:

$$\vec{F}_g = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}_g = \vec{0}$$



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = \vec{0} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{L} = \text{konst.}}$$

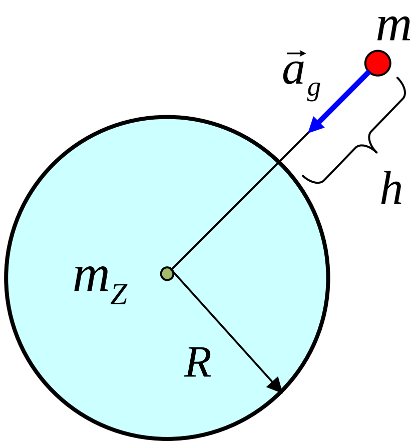
zachovává se moment hybnosti tělesa

$$\vec{L} = \vec{r}\times(m\vec{v}) = m\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{r}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}r^2 = m\vec{\omega}r^2 = \text{konst.}$$

Gravitační pole Země

Gravitační pole Země:

- Země má velmi přibližný tvar koule (geoid)
- **poloměr:** $R = 6378 \cdot 10^3$ m
- **hmotnost:** $m_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg



- **velikost gravitačního zrychlení** v nadmořské výšce h:

$$a_g = \left|\vec{E}\right| = \kappa \frac{m_Z}{(R+h)^2} \qquad h = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_g \doteq g = \kappa \frac{m_Z}{R_Z^2} \doteq 9{,}8\, m/s^2}$$

- **Potenciální energie tělesa** v nadmořské výšce h:

$$\Delta W_p = W_p(R+h) - W_p(R) = -\kappa \frac{m_Z m}{R+h} + \kappa \frac{m_Z m}{R} = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = mg \frac{h}{1 + h/R}$$

$$\boxed{h << R \quad \Delta W_p = mgh} \quad \Leftarrow$$

platí přibližně v blízkosti povrchu Země

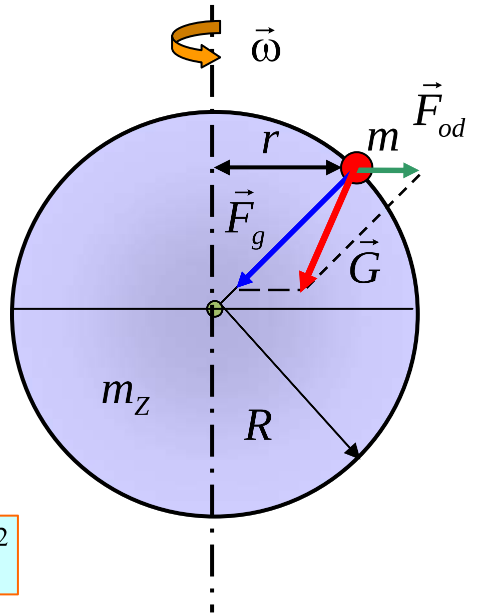
Tíhové pole Země

- **Tíha** - síla, která uděluje tělesu zrychlení volného pádu

- na povrchu Země **je dána vektorovým součtem gravitační síly** a **síly odstředivé** (vyvolané rotací Země)

$$\vec{G} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{od}$$

$$a_{od} = \omega^2 r << a_g \qquad r \in (0, R)$$



- **tíhové zrychlení** – závisí na zeměpisné šířce, zploštění Země,…

zeměpisný pól → $g \doteq 9{,}83\ \mathrm{m/s^2}$

rovník → $g \doteq 9{,}79\ \mathrm{m/s^2}$

45° severní šířky → $g_n = |\vec{g}| \doteq 9{,}80665\ \mathrm{m/s^2}$

$\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ rad/s

úhlová rychlost rotace Země

- tíhové pole blízko povrchu Země lze považovat za **homogenní**

$$h << R \quad \Rightarrow \quad \varphi = gh \quad \Delta W_p = mgh$$

- **soustavu spojenou s povrchem Země** lze přibližně považovat za **inerciální**

Gravitační pole – pohyb planet

Keplerovy zákony:

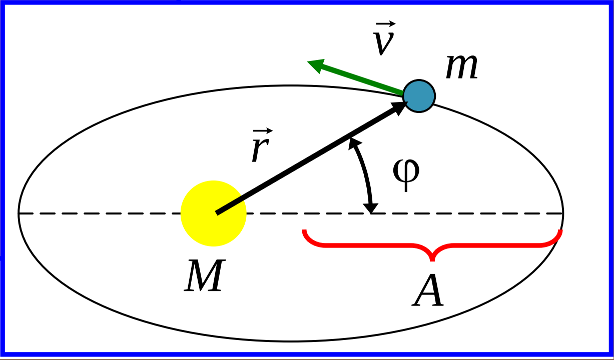
1) Planety obíhají kolem Slunce v elipsách málo odlišných od kruhu, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

2) Plochy opsané průvodičem planety ve stejných dobách jsou stejné (plošná rychlost je konstantní).

$$\boxed{w = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{L}{2m} = \text{konst.}}$$

3) Druhé mocniny oběžných dob planet jsou v témže poměru jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah.

$$m_p << M_S \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{A^3} \approx \frac{4\pi^2}{\kappa M_S} \approx \text{konst.}}$$



Gravitační pole – pohyb planet

Celková energie planety

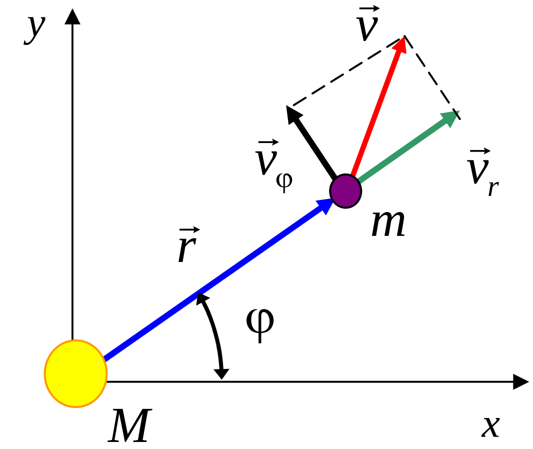
$$W = \frac{1}{2}mv^2 + W_P(r) = \frac{1}{2}mv_r^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv_\varphi^2 + W_P(r)}_{W_{ef}(r)}$$

$$\frac{1}{2}mv_\varphi^2 \rightarrow \frac{L^2}{2mr^2}$$

$W_{ef}(r)$

efektivní potenciální energie

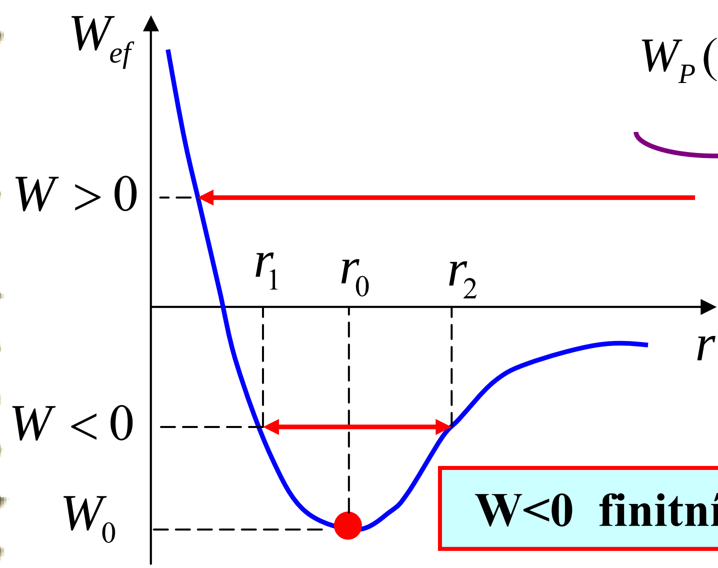
$$v_r^2 = \frac{2}{m}(W - W_{ef}) \geq 0$$



$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad v_\varphi = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\omega$$

$$W_P(r) = -\kappa\frac{Mm}{r} \qquad L = mrv_\varphi = m\omega r^2 = \text{konst.}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}(W - W_{ef})} \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{mr^2}$$



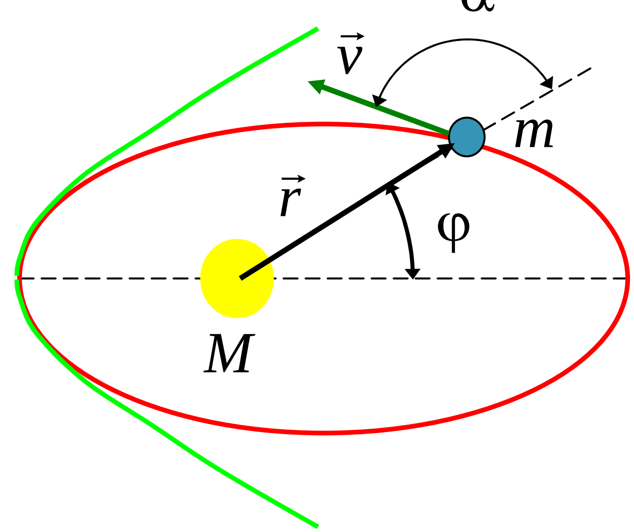
W<0 finitní pohyb

$$\boxed{\mathrm{d}\varphi = \frac{L}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}[W - W_{ef}(r)]}}\mathrm{d}r}$$

Gravitační pole – pohyb planet

- **objekty v gravitačním poli se pohybují po kuželosečkách**

- trajektorie závisí na energii tělesa W



$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

excentricita kuželosečky

$$p = \frac{L^2}{\kappa m^2 M} \qquad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2WL^2}{\kappa^2 m^3 M^2}}$$

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r}\times m\vec{v}| = mrv\sin\alpha = \text{konst.}$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{mM}{r} = \text{konst.}$$

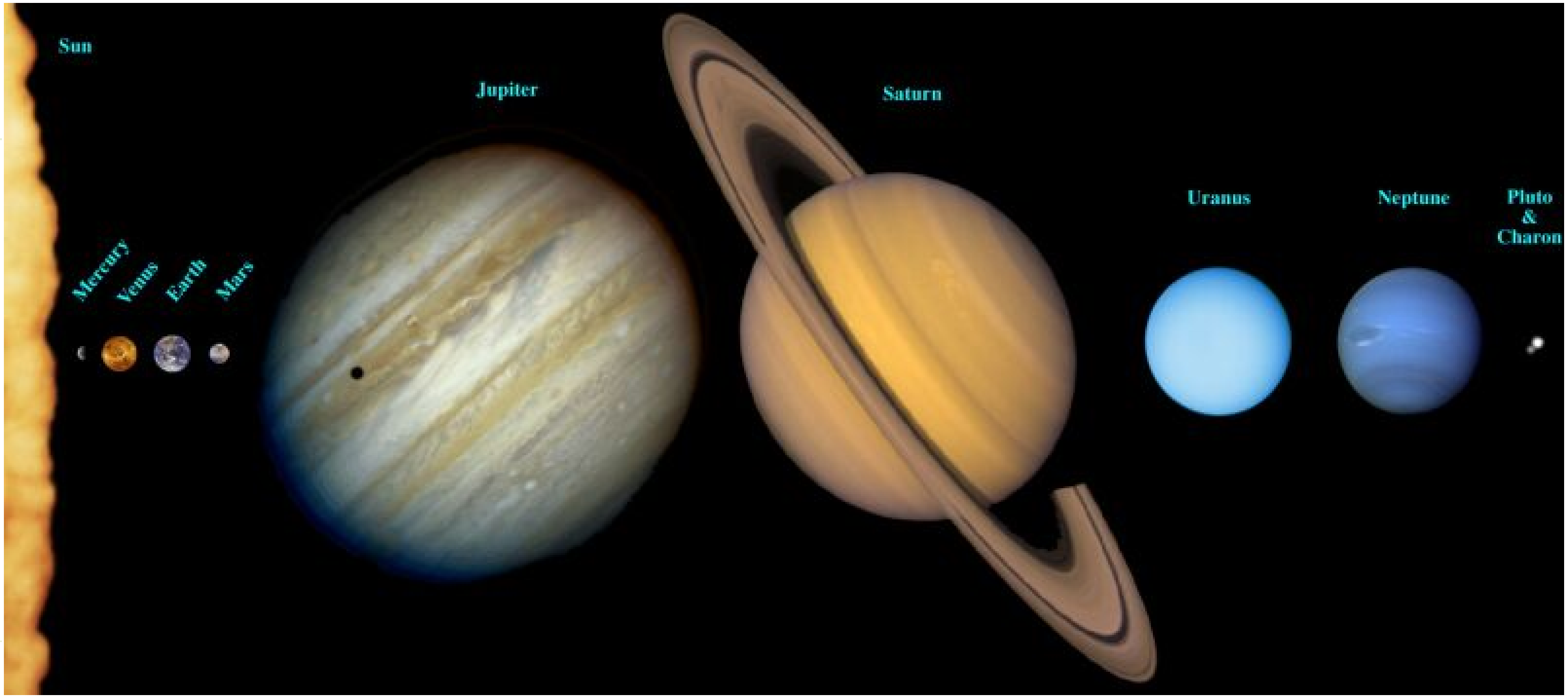
celková mechanická energie tělesa

- **eliptická dráha:** $\varepsilon < 1$ $W < 0$
- **parabolická dráha:** $\varepsilon = 1$ $W = 0$
- **hyperbolická dráha:** $\varepsilon > 1$ $W > 0$

Gravitační pole – pohyb planet

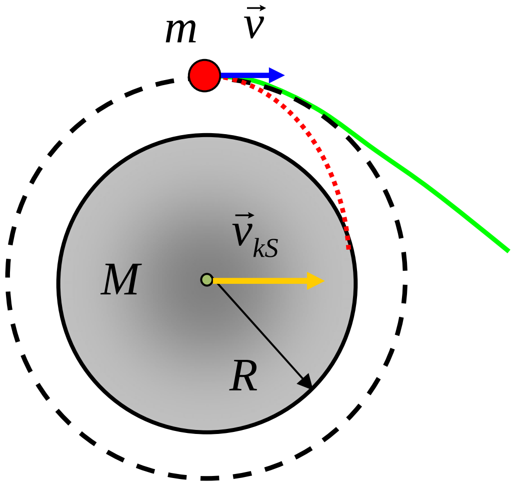
- Pro pohyb těles v gravitačním poli platí **pohybové rovnice:**

$$\boxed{m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F} = -\kappa \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} m_i m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^{\,3}}}$$



Pohyb těles v gravitačním poli Země

⌖ Kruhová (první kosmická) rychlost:



$$m\frac{v^2}{r} = \frac{\kappa Mm}{r^2} = a_g m \quad \Rightarrow \quad v_k = \sqrt{\frac{a_g}{r}} = \sqrt{g\frac{R^2}{(R+h)}}$$

$$W_{ef}(r) \to \min. \qquad h \ll R \quad \Rightarrow \quad v_k \approx 7{,}9\ \text{km/s}$$

⌖ Parabolická (druhá kosmická) rychlost:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa Mm}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{(R+h)}} \approx \sqrt{2}v_k = 11{,}2\ \text{km/s}$$

⌖ Třetí kosmická rychlost:

- parabolická úniková rychlost z působení gravitačního pole Země a Slunce

$$v_{kS} \approx 29{,}8\ \text{km/s}$$

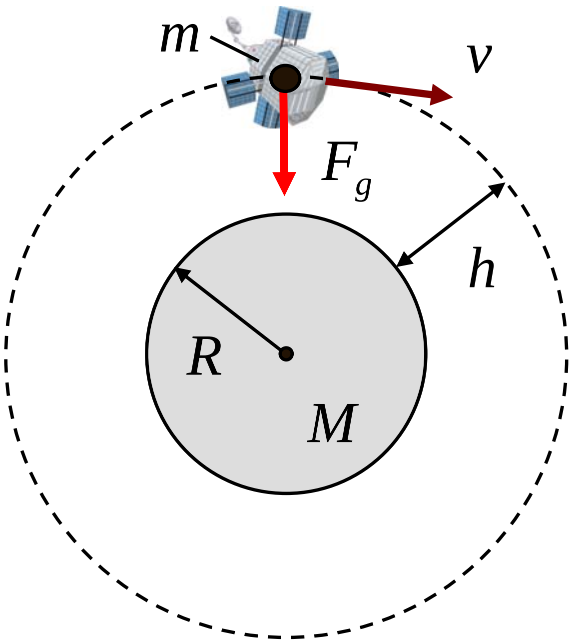
$$\underbrace{v_{rS} = \sqrt{2}v_{kS} - v_{kS} = 12{,}3\ \text{km/s}}$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_{rS}{}^2 + \frac{1}{2}mv_p^2 \quad \Rightarrow \quad v_3 \approx \sqrt{v_{rS}^2 + v_p^2} = 16{,}4\ \text{km/s}$$

Pohyb těles v gravitačním poli Země

Příklad: **(družice)**

- určete výšku družice při době oběhu T



$$\boxed{F_d = F_g}$$

$$\frac{mv^2}{R+h} = \kappa \frac{mM}{(R+h)^2}$$

obvodová rychlost

$$v = \omega(R+h) = \frac{2\pi}{T}(R+h)$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2}(R+h) = \frac{gR^2}{(R+h)^2}$$

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} - R}$$

stacionární družice

$T = 24\ \mathrm{h}$ → $h = 35879\ \mathrm{km}$

Pohyb těles v gravitačním poli Země

<u>Příklad:</u> (pád Země na Slunce)

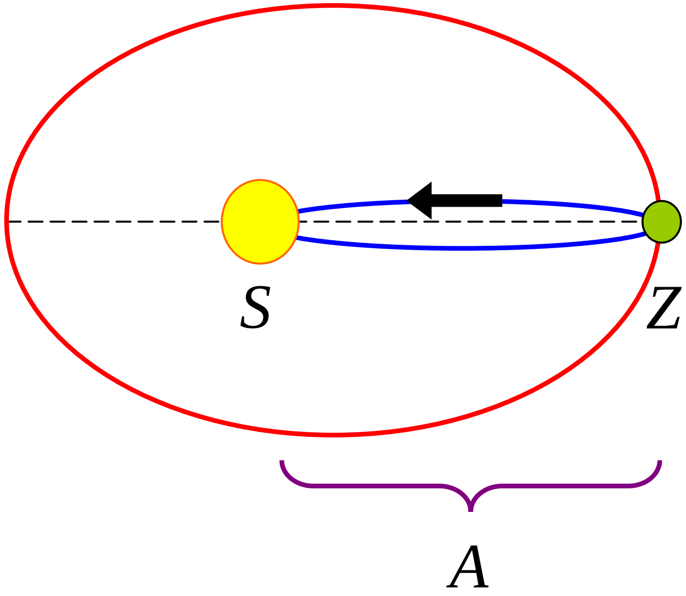
- určete přibližně, za jak dlouho by Země spadla na Slunce, kdyby byla zastavena na své oběžné dráze

$T_Z = 365\ \text{dnů}$

Keplerův zákon

$$\frac{T_Z^{\,2}}{A^3} = \frac{T^2}{(A/2)^3} \approx \text{konst.}$$

$$\boxed{t = \frac{T}{2} = \frac{T_Z}{4\sqrt{2}} \doteq 65\ \text{dnů}}$$



Pohyb těles v gravitačním poli Země

Video – beztížný stav

SKYLAB (1973-1979)
- výška 435 km nad povrchem Země

Pohyb těles v gravitačním poli Země

Letadlo Zero-G pro simulaci krátkodobého beztížného stavu