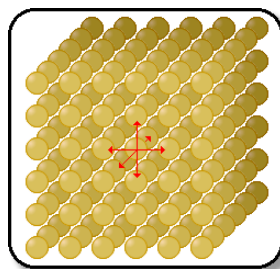


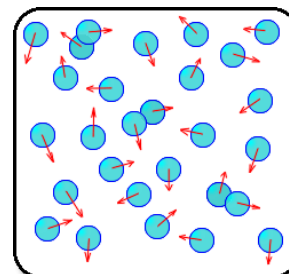
# Tekutiny

## Tekutiny

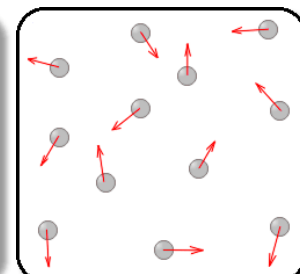
- ⊕ **tekutiny (plyny a kapaliny)** se výrazně liší z hlediska vnitřní struktury od pevných látek



Pevná látka



Kapalina



Plyn

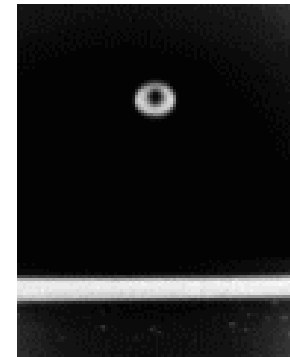
- ⊕ **molekuly nejsou vázány na neproměnné rovnovážné polohy, ale mohou se vzájemně volně posouvat (tekutiny jsou tvarově nestálé)**
- **viskozita** (odpor proti změně tvaru) se projevuje pouze při pohybu
- **kapaliny a plyny se navzájem liší stlačitelností a rozpínavostí**
- **u plynu lze velmi snadno měnit tvar i objem** (plyny se snaží vyplnit celý uzavřený prostor – nevytváří volnou hladinu)

# Kapaliny

## Kapaliny

- ⊕ nízká viskozita způsobuje **tvarovou nestálost** (tvar je dán tvarem nádoby)
- ⊕ kapaliny jsou **velmi málo stlačitelné** ( $\kappa = 10^{-8}-10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ )
- ⊕ ve statickém stavu u izotropních tekutin **neexistují smyková napětí** pouze **normálová (tlaková) napětí**

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

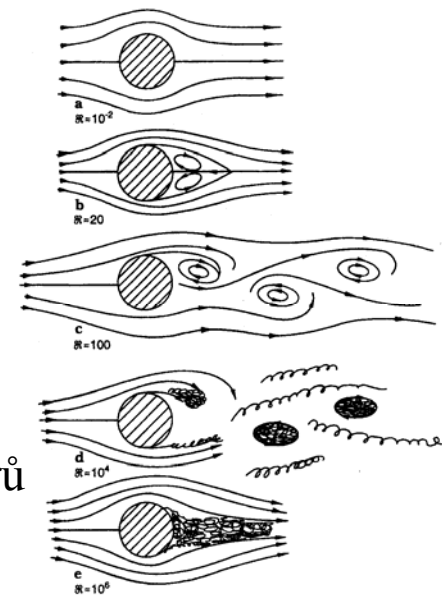
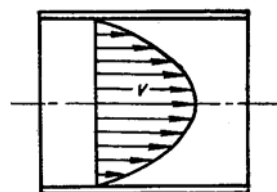


- ⊕ úkolem hydromechaniky je určit **tlak  $p$ , hustotu  $\rho$  a rychlost  $v$  proudění, jako funkce polohy a času**

# Charakteristiky proudění

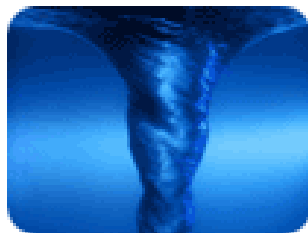
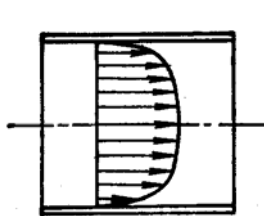
## Laminární proudění

- proudová vlákna probíhají rovnoběžně a nemísí se
- rozložení rychlosti je parabolické



## Turbulentní proudění

- při určité kritické rychlosti začne převládat rušivý vliv vírů
- proudová vlákna se mísí

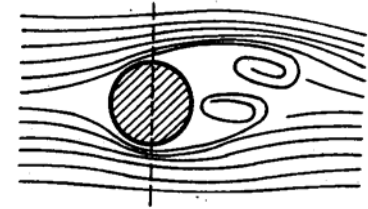
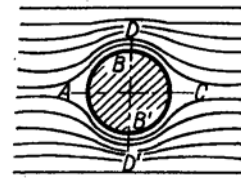


# Charakteristiky proudění

$$\frac{v_x}{dx} = \frac{v_y}{dy} = \frac{v_z}{dz}$$

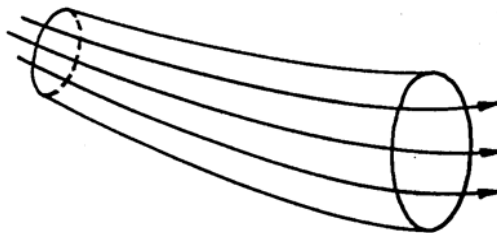
## Proudočáry:

- mají **směr vektoru rychlosti v daném časovém okamžiku**
- můžeme pomocí nich graficky znázornit velikost toku
- v závislosti na typu proudění mohou být otevřené i uzavřené křivky

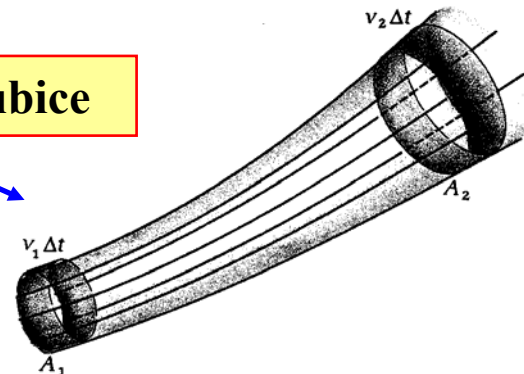


## Proudová trubice:

- myšlené trubice, jejichž stěny jsou tvořeny sousedícími proudočáry.
- v ustáleném laminárním proudění zůstávají proudové trubice konstantní jak v prostoru tak v čase



proudová trubice



# Charakteristiky vektorových polí

⊕ proudočáry mohou vznikat i zanikat. O jejich přírůstku nebo úbytku nás informuje **divergence vektoru rychlosti**.

⊕ **divergence** – výtok vektoru z objemového elementu jednotkové velikosti

• **Tok vektoru uzavřenou plochou:**

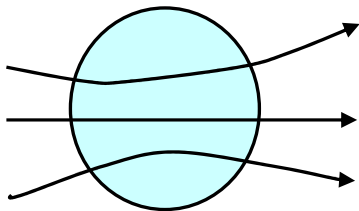
$$N = \oint_{\Delta\Omega} \vec{v} \, d\vec{\Omega}$$

**tok můžeme charakterizovat počtem proudočar**

$N > 0$  ... vytéká více než vtéká (zřídla toku)

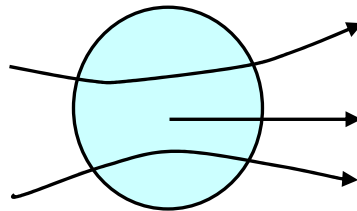
$N < 0$  ... vytéká méně než vtéká (propady toku)

$N = 0$  ... stejný vtok i výtok



$$\text{div } \vec{v} = 0$$

**proudění nezřídlové**



$$\text{div } \vec{v} \neq 0$$

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta\Omega} \vec{v} \, d\vec{\Omega} = \frac{dN}{dV}$$

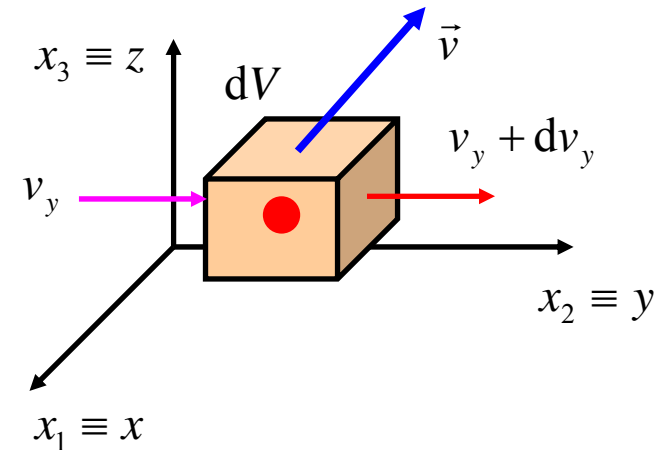
**Divergence** vyjadřuje to, zda dané vektorové pole (např. pole rychlosti proudící kapaliny, elektromagnetické pole,...) obsahuje v daném místě zdroje či úbytky toku dané veličiny

**Umožňuje určit tok daného vektorového pole ve specifikovaném objemu, např. hmotnostní průtok kapaliny**

# Charakteristiky vektorových polí

## ⊕ Tok vektoru ve směru y:

$$dN_y = dv_y \cdot d\Omega_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dx dz = \frac{\partial v_y}{\partial y} dV$$



## ⊕ Celkový tok vektoru v objemu dV:

$$dN = dN_x + dN_y + dN_z = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \text{div } \vec{v} dV$$

**Gaussova věta:**

## ⊕ Divergence vektorového pole:

$$\text{div } \vec{v} = (\nabla \cdot \vec{v}) = \left( \frac{d}{d\vec{r}} \cdot \vec{v} \right) = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\oint_{\Omega} (\vec{v} \cdot d\vec{\Omega}) = \int_V \text{div } \vec{v} dV$$

$$\oint_{\Omega} S d\vec{\Omega} = \int_V \text{grad } S dV$$

- výsledkem této diferenciální operace je **skalár (číslo)**

# Charakteristiky vektorových polí

⊕ jestliže některé proudočáry jsou uzavřené křivky, pak jde o tzv. **vírový pohyb**

⊕ vírový pohyb je možno charakterizovat **rotací rychlosti**:

$$\text{rot } \vec{v} = [\nabla \times \vec{v}] = \left[ \frac{d}{d\vec{r}} \times \vec{v} \right]$$

$$\text{rot } \vec{v}_T = \text{rot } \frac{d\vec{r}_T}{dt} = \frac{d}{dt} (\text{rot } \vec{r}_T) = 0$$



$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{v}_T + \text{rot } [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \text{rot } [\vec{\omega} \times \vec{r}] = 2\vec{\omega}$$

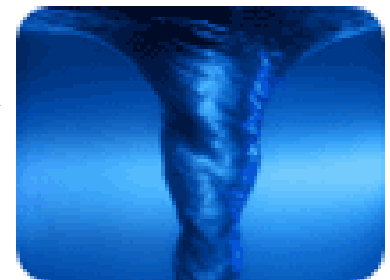
**rotace rychlosti  
jednoho bodu kontinua**

**Stokesova věta:**

$$\oint_{\Omega} \text{rot } \vec{V} d\vec{\Omega} = \int_{\Gamma} \vec{V} d\vec{r}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{0}$$

**vírový pohyb**



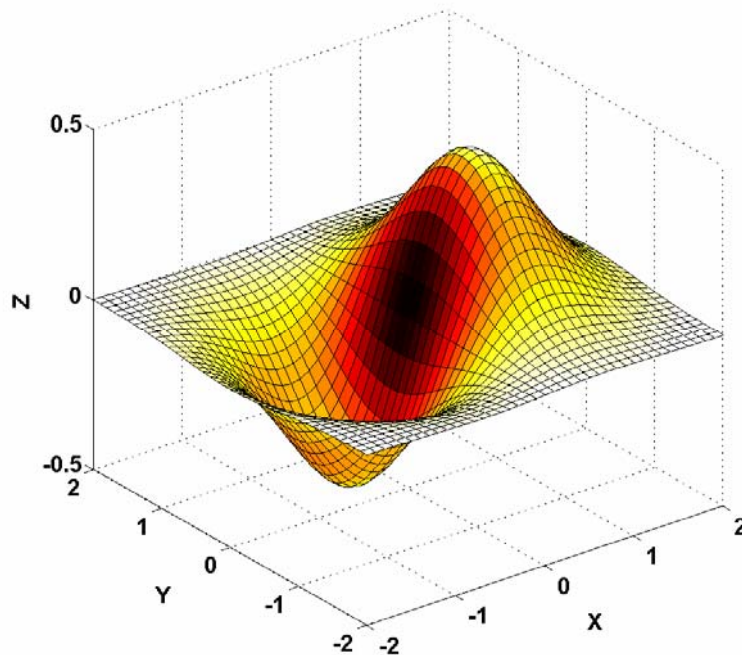


# Gradient skalární funkce

⊕ **Gradient skalární funkce:**

$$\text{grad } S = \nabla \cdot S = \frac{dS}{d\vec{r}} = \left( \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z} \right)$$

- výsledkem této diferenciální operace je **vektor**



$$z = f(x, y) = x \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$$

**Gradient vyjadřuje vektor směru maximální prostorové změny skalární veličiny S,**

tj. směr, kterým nám v daném místě prostoru daná veličina (např. teplota) nejvíce narůstá



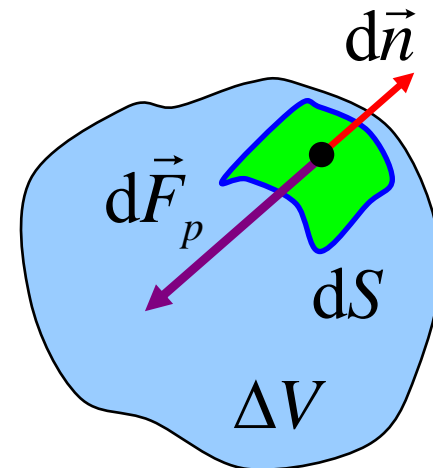
# Hydromechanika

## Tlaková síla v kapalině

- ⊕ u kapalin v klidu **neexistují smyková napětí** (pouze normálová tlaková napětí)
- ⊕ **tlak** v kapalině **působí všesměrně**
- ⊕ **tlaková síla** na zvolenou plochu poté **působí vždy kolmo a proti směru vnější normály k ploše**

$$d\vec{F}_p = -p d\vec{S} = -p\vec{n} \cdot dS$$

$$p = \frac{dF_p}{dS}$$



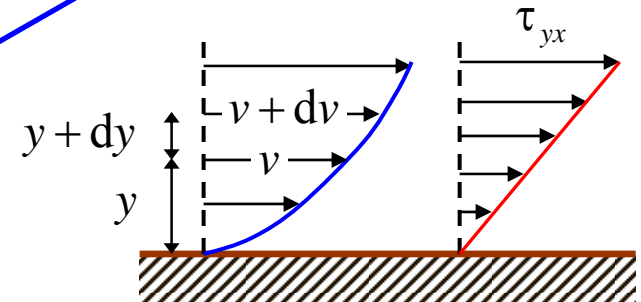
# Hydromechanika

## Vnitřní tření - viskozita kapalin

tečné napětí mezi vrstvami proudící kapaliny je úměrné rychlostnímu gradientu

$$\tau_{yx} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Newtonovská kapalina



- ⊕ vnitřní tření způsobuje ztrátu mechanické (tlakové) energie proudící kapaliny
- ⊕ tlakové ztráty závisí na viskozitě, rychlosti a typu proudění, průřezu potrubí

viskózní síla v kapalině

$$\rightarrow dF_{yx} = S \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy = S \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{dv_x}{dy} \right) dy = dV \eta \frac{d^2 v_x}{dy^2}$$

$$\Delta = \nabla^2$$

$$d\vec{F}_v = d\vec{F}_x + d\vec{F}_y + d\vec{F}_z = dV \eta \Delta \vec{v}$$

# Hydromechanika

## Ideální kapalina

- ⊕ nestlačitelná kapalina s nulovou viskozitou

$$dF_v = 0 \quad \kappa = 0$$

- ⊕ stlačitelnost reálných kapalin je velmi nízká, za běžných tlaků jsou téměř nestlačitelné
- ⊕ v praxi lze též často u některých velmi málo viskózních kapalin zanedbat vnitřní tření (např. voda, líh,...)



med

$$\eta = 3000 \cdot 10^3 \text{ [kgs}^{-2}\text{]}$$



voda

$$\eta = 1 \cdot 10^3 \text{ [kgs}^{-2}\text{]}$$

takovéto kapaliny lze za určitých podmínek považovat za ideální

# Základní rovnice hydromechaniky

## ⊕ Rovnice kontinuity:

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

- vyjadřuje zákon zachování hmoty
- úbytek hmotnosti, ke kterému v objemu  $\Delta V$  dojde za časovou jednotku, je roven toku hmotnosti přes povrch  $\Delta\Omega$  objemu  $\Delta V$

$$dm = \rho dV = \rho d\vec{S} \cdot \vec{v}$$

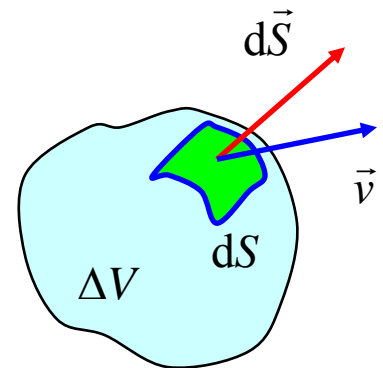
$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$$



$$m = \iint_{\Delta S} \rho \vec{v} d\vec{S}$$



$$m = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho dV = -\int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$



**hmotnostní tok kapaliny za jednotku času v objemu  $\Delta V$**

- použitím Gaussovy věty získáme 
$$\iint_{\Delta S} \rho \vec{v} d\vec{S} = \int_{\Delta V} \text{div} \rho \vec{v} dV = -\int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

**rovnice kontinuity**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0$$

# Základní rovnice hydromechaniky

⊕ Rovnice kontinuity pro stacionární proudění nestlačitelné tekutiny:

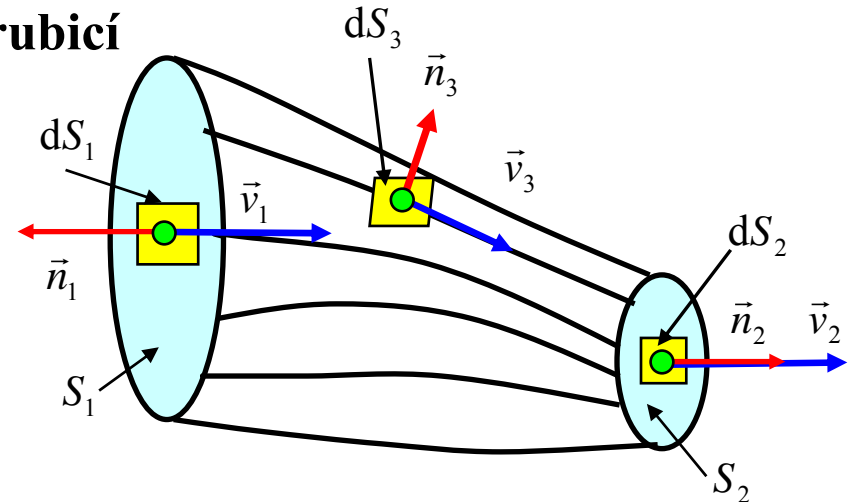
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_{\Delta\Omega} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$

- **ustálené proudění proudovou trubicí**

$$\int_{S_1} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}) + \int_{S_2} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}) + \int_{S_3} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{S}) = 0$$



$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$



- **u nestlačitelné kapaliny:**  $\rho(\vec{r}, t) = \text{konst.}$



$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

# Pohybová rovnice kapaliny

## ⊕ Pohybová rovnice ideální kapaliny:

$$\vec{v} = \vec{v}(x(t), y(t), z(t), t)$$

$$dM \cdot \vec{a} = dM \frac{d\vec{v}}{dt} = dM \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = d\vec{F}_o + d\vec{F}_p$$

$$d\vec{F}_o = \vec{E} dM$$

$$d\vec{F}_p = -p d\vec{S} = -\text{grad } p dV$$

$$\rho \vec{a} = \vec{f}_o + \vec{f}_p$$

**pohybová rovnice  
ideální kapaliny**

- v případě ideální kapaliny v tíhovém poli:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \text{grad } p$$

**Eulerova rovnice**

$$\vec{f}_p = -\text{grad } p$$

$$\vec{f}_o = \rho \vec{g} = -\rho \text{grad } \varphi$$

# Pohybová rovnice kapaliny

## ⊕ Pohybová rovnice vazké kapaliny:

$$dM \frac{d\vec{v}}{dt} = d\vec{F}_O + d\vec{F}_p + d\vec{F}_v$$

$$d\vec{F}_v = dV \eta \Delta \vec{v}$$

$$d\vec{F}_O = \vec{E} dM$$

$$d\vec{F}_p = -p d\vec{S} = -\text{grad } p dV$$

$$\rho \vec{a} = \vec{f}_O + \vec{f}_p + \vec{f}_v$$

**pohybová rovnice  
vazké kapaliny**

- v případě vazké kapaliny v tíhovém poli:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v}$$

**Navier-Stokesova  
rovnice**

$$\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$$

$$\vec{f}_p = -\text{grad } p$$

$$\vec{f}_O = \rho \vec{g} = -\rho \text{grad } \varphi$$



# Pohybová rovnice kapaliny

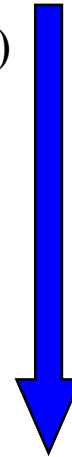
Navier-Stokesova rovnice

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$$



$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$



$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \frac{1}{2} \nabla(v^2) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

nevírové proudění

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

ustálené proudění

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

# Hydromechanika

## Hydrostatika:

⊕ uvažuje kapalinu v klidu, tj. (nulová rychlost a tření).

$$\vec{v} = 0 \quad \vec{f}_v = 0$$

$$\rho \vec{g} = \text{grad } p$$

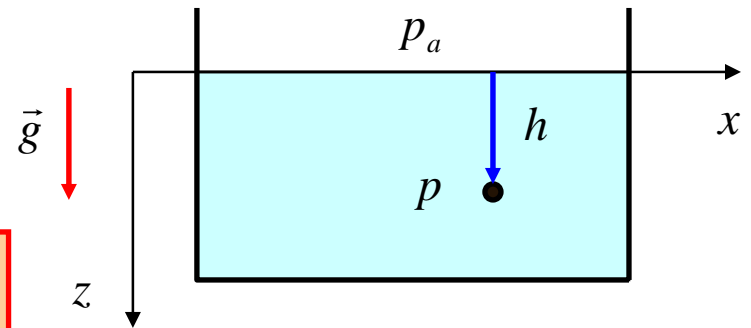
**základní rovnice hydrostatiky**

$$\int_{p_a}^p dp = p - p_a = \int_0^h \rho g dz = \rho g h$$



**hydrostatický tlak**

**nezávisí na tvaru nádoby**



• pokud na tekutinu žádné objemové síly nepůsobí (nebo se dají zanedbat):

$$\text{grad } p = 0 \quad \longrightarrow \quad p(\vec{r}) = \text{konst.}$$

**Pascalův zákon**



# Hydromechanika

## Hydrostatika:

- ⊕ **tlaková síla** působící na elementární plošku v kapalině je:

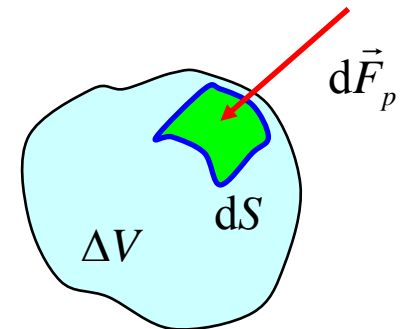
$$d\vec{F}_p = -pd\vec{S} = -p\vec{n}dS$$

- ⊕ v tekutině o hustotě  $\rho_T$  je ponořeno pevné těleso hustoty  $\rho_P$ , celkového objemu  $V$  a s celkovým povrchem  $S$ . **Výsledná tlaková síla**

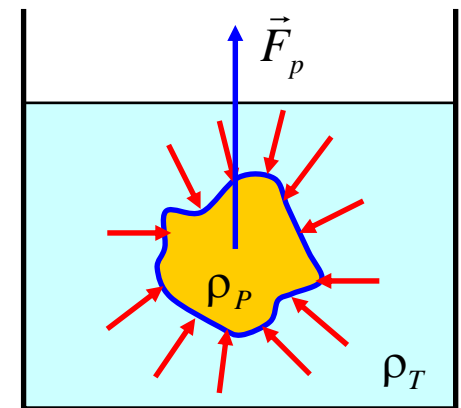
$$\vec{F}_p = \oint (-p \cdot d\vec{S}) = -\int \text{grad } p dV = -\int \rho_T \vec{g} dV = -\vec{g} \rho_T V_T$$



**Archimédův  
zákon**



## **vztlaková síla**



# Hydromechanika

## Bilance energie při pohybu ideální kapaliny

- ustálené nevírové proudění ideální kapaliny:

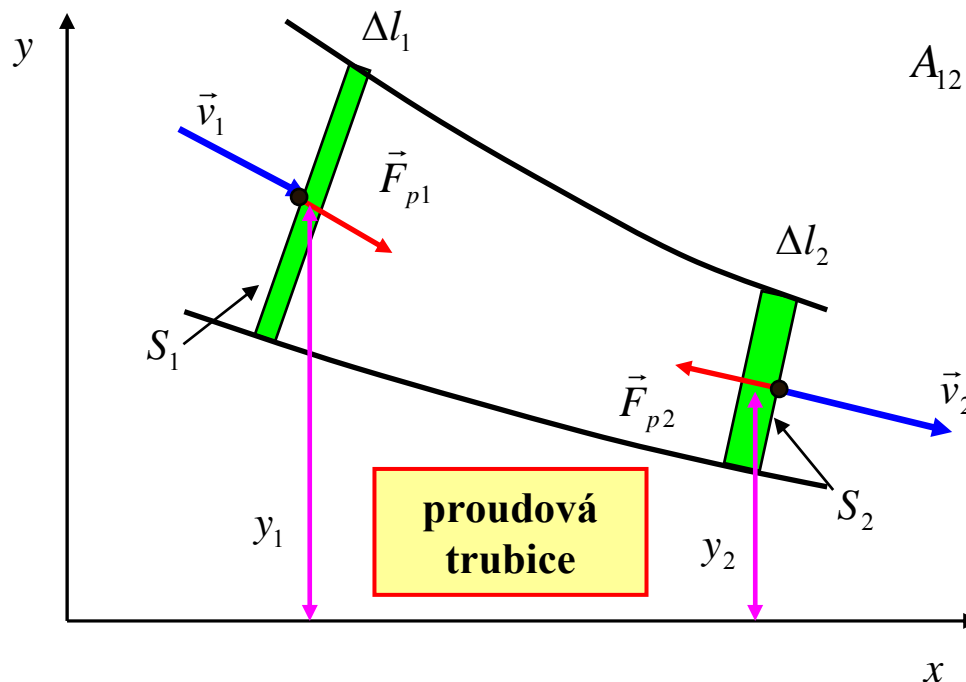
$$W_2 - W_1 = A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) + \Delta m g (y_1 - y_2)$$

práce tlakových sil

$$F_{p1} = p_1 S_1$$

$$F_{p2} = -p_2 S_2$$

$$A_{12} = F_{p1} \Delta l_1 + F_{p2} \Delta l_2 = \Delta V (p_1 - p_2)$$



$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{konst.}$$

**Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu**

# Hydromechanika

## Ustálené nevírové proudění ideální kapaliny:

⊕ **ideální tekutiny jsou nestlačitelné a neexistuje vnitřní tření, tj.  $\eta = 0$**

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

**nevírové proudění**

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

**pro ustálené proudění je rovno 0**

$$\text{grad} \left( \varphi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi + p = \text{konst.}$$

**Bernoulliho rovnice je bilancí energie**

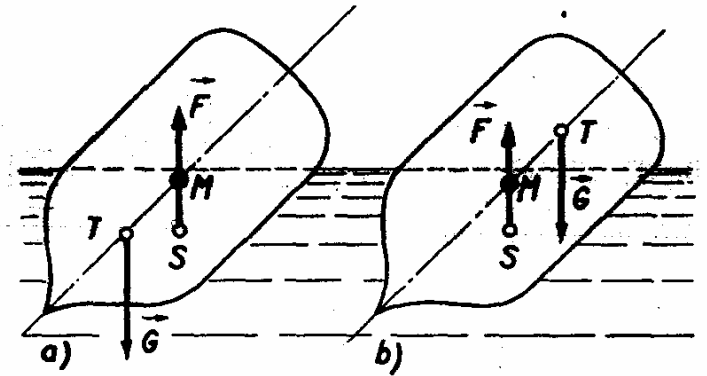
**Bernoulliho rovnice pro ideální kapalinu**



# Hydromechanika

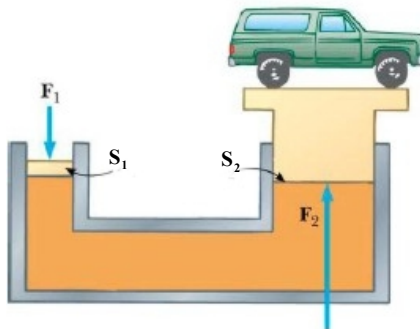
## Stabilita plování

- výslednice vztlakové síly  $F$  a tíhy  $G$  tvoří silovou dvojici
- pokud se tato dvojice při vychýlení snaží plovoucí těleso navrátit zpět – potom je **rovnováha stabilní**

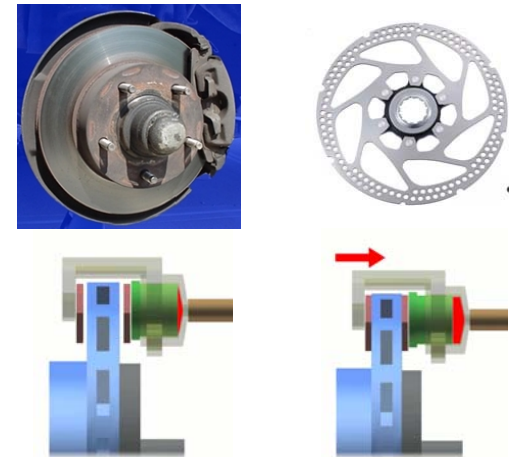


## Hydraulické stroje

$$p(\vec{r}) = \text{konst.} \quad p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$



Hydraulický lis



Hydraulické diskové brzdy

# Hydromechanika

## Příklad: (ledovec)

Jaká část ledovce je vidět nad hladinou ?

### Rovnováha sil

$$F_{vz} = G$$

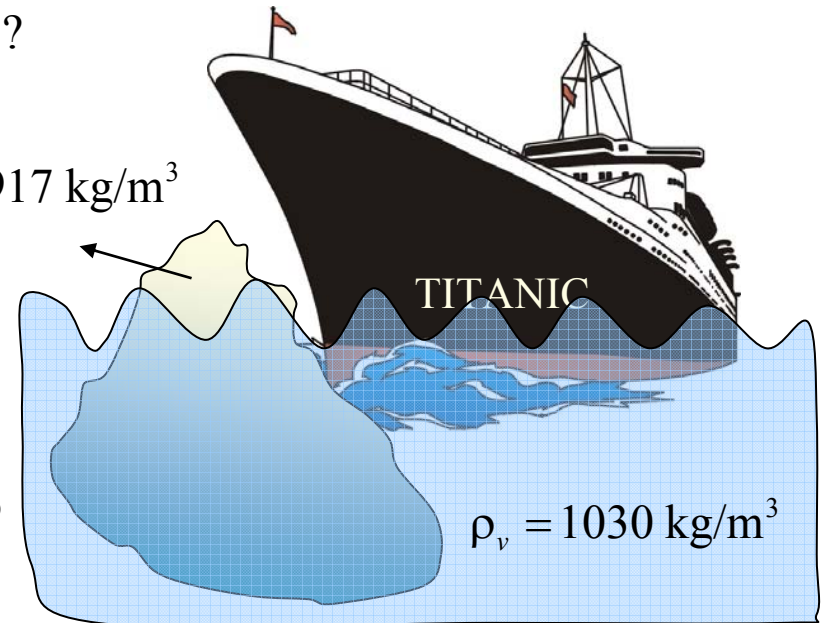


$$V_x \rho_v g = V \rho_l g$$



$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V - V_x}{V} = 1 - \frac{\rho_l}{\rho_v} \doteq 0,11 \Rightarrow 11 \%$$

$$\rho_l = 917 \text{ kg/m}^3$$



$$\rho_v = 1030 \text{ kg/m}^3$$

## Příklad: (tlak pod mořskou hladinou)

Jak hluboko se může ponořit ponorka, jestliže maximální tlaková síla  $F_{\max}$  může být 100 kg na 1 cm<sup>2</sup> ?

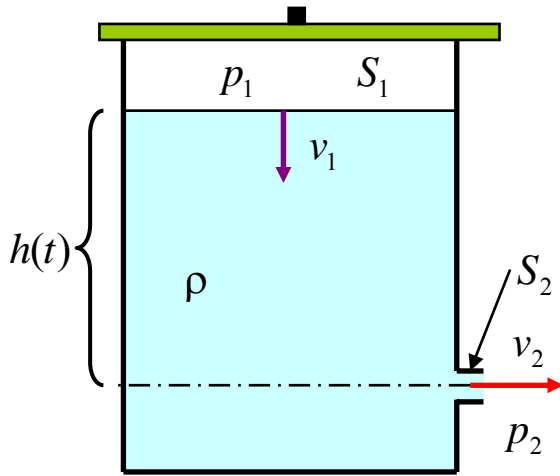
$$p_{\max} = \frac{F_{\max}}{S} = h_{\max} \rho_v g \quad \longrightarrow \quad h_{\max} = \frac{F_{\max}}{\rho_v g S} \doteq 970 \text{ m}$$





# Hydromechanika

**Příklad:** (výtok kapaliny z nádoby malým otvorem )



**Bernoulliho rovnice**

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$$

**rovnice kontinuity**

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

**výtok**

$$Q = \mu S_2 v_2$$

**Výtokový součinitel  $\mu < 1$**

$$p_1 = p_2 \quad S_2 \ll S_1 \quad \rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

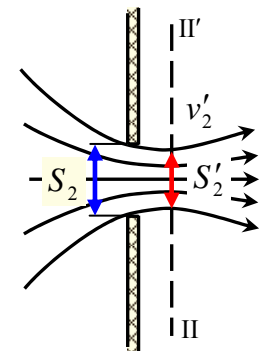
**Torriceliiho vzorec**

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\rho g h + (p_1 - p_2)}{\rho \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}}$$

$$dV = -S_1 dh = \mu S_2 \sqrt{2gh} dt$$

**doba výtoku**

$$t = \frac{-S_1}{\mu S_2 \sqrt{2g}} \int_h^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2S_1 \sqrt{h}}{\mu S_2 \sqrt{2g}}$$



# Hydromechanika

**Příklad:** (měření průtoku – Venturiho trubice)

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2$$

**Tlakový rozdíl**

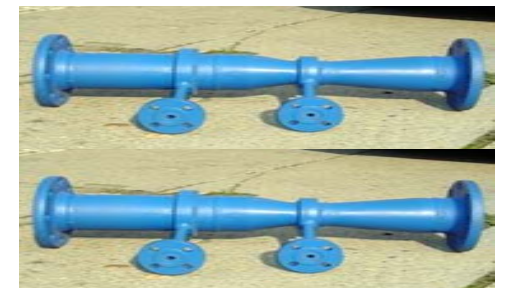
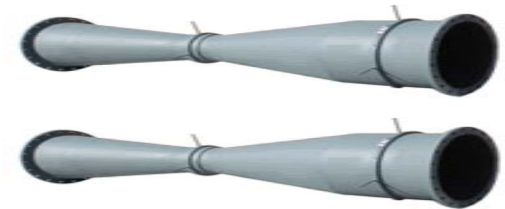
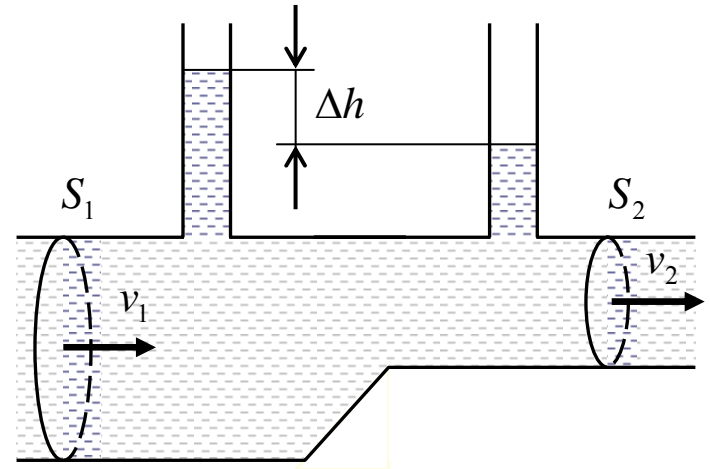
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g \Delta h$$

**Průtoková rychlost**

$$v_2 = \frac{\sqrt{2g\Delta h}}{\sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}$$

**Objemový průtok**

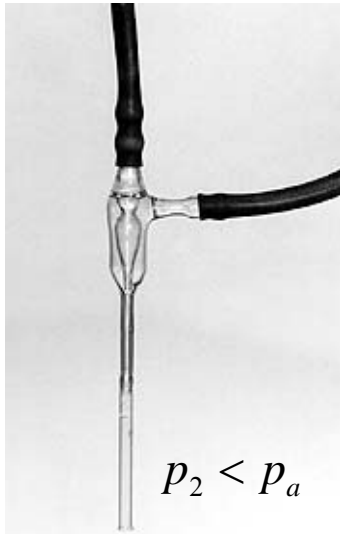
$$Q = v_2 S_2 = S_2 \frac{\sqrt{2g\Delta h}}{\sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}$$



# Hydromechanika

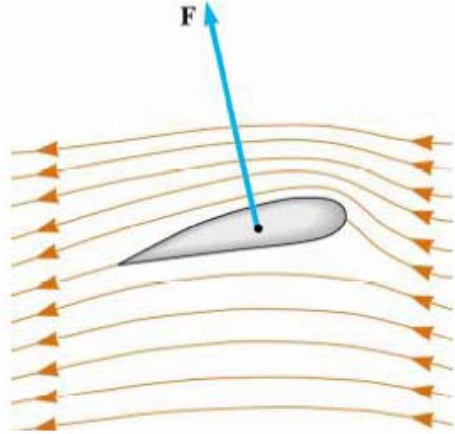
Příklad: (rozprašovač, vodní vývěva, obtékání těles)

vodní vývěva



často lze docílit i toho, že tlak v zúženém průřezu je nižší nežli tlak okolní (vytvoří se podtlak) a dochází k nasávání okolního prostředí – **princip vodní vývěvy, rozprašovače**

obtékání křídla



rozprašovač



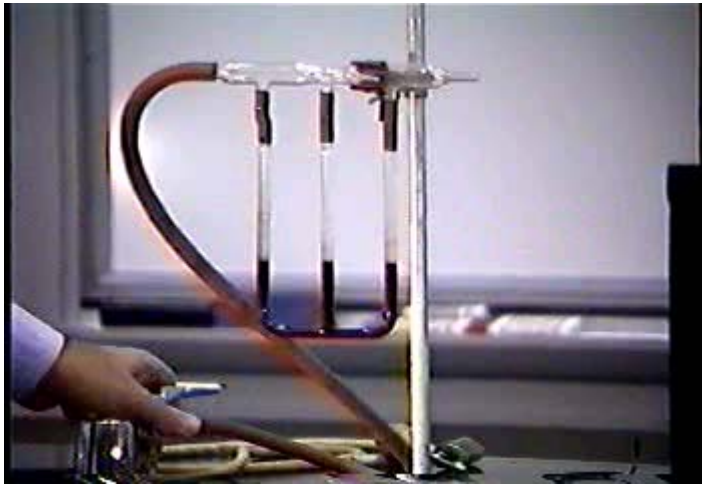
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2$$

$$S_2 < S_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$$

**při náhlém zúžení průřezu dochází ke zvýšení rychlosti a ke snížení tlaku**

# Hydromechanika

**Video – Bernoulliho rovnice**



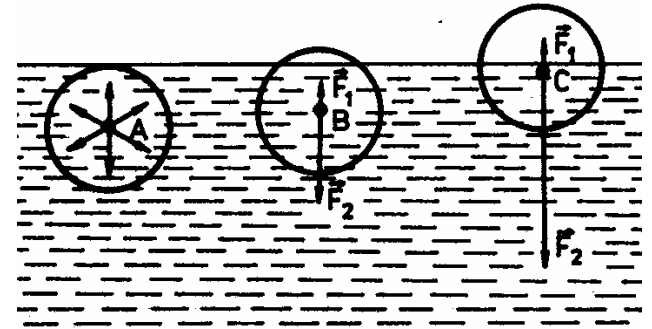
**Video – vodní sloupec**



# Povrchové napětí

## Povrchová fáze

- ⊕ v povrchové vrstvě na styku dvou odlišných látek dochází existující nevykompenzované interakční síly (v tloušťce  $\sim 10^{-7}$  cm)
- ⊕ vlastnosti povrchové fáze látky (např. hustota) se mohou významně lišit od obecných objemových vlastností takové látky



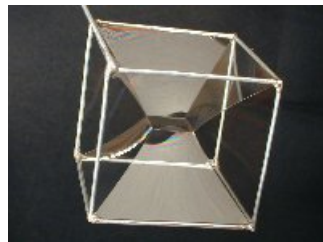
povrch kapaliny se chová jako **pružná blána**

snaží se smrštit na plochu s nejmenším obsahem

vytvářejí se kapky kulovitého tvaru



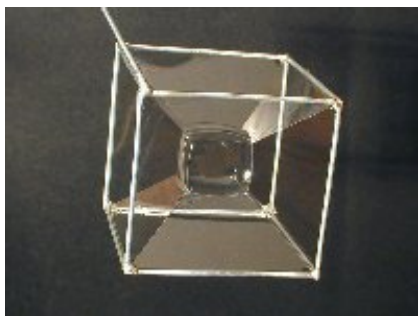
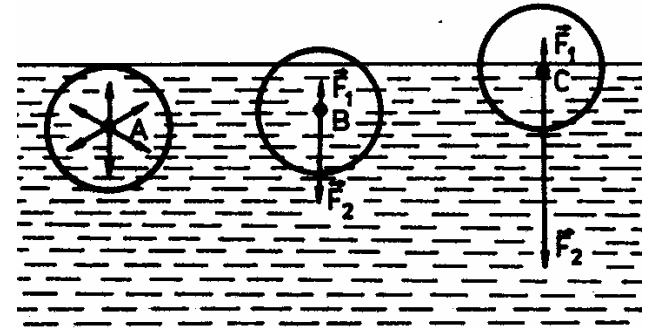
vodoměrka





# Povrchové napětí

- ✦ na každou molekulu, jejíž vzdálenost je menší nežli **poloměr sféry molekulového působení**, působí výsledná tlaková síla směřující dovnitř kapaliny
- ✦ povrchová vrstva tedy působí na kapalinu tlakovou silou, která vyvolává tzv. **kohézní tlak** (řádově v GPa, souvisí se stlačitelností kapalin)



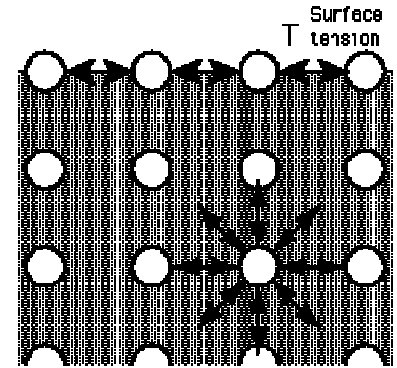
# Povrchové napětí

## Povrchové napětí

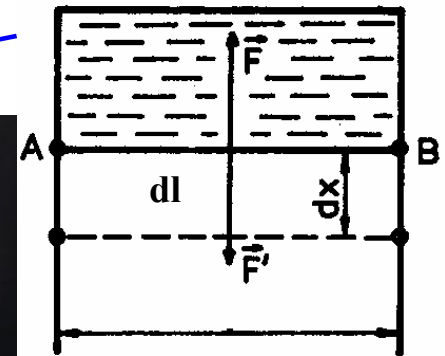
- ⊕ v povrchové vrstvě vlivem molekulových (kohézních) sil vzniká stav napjatosti, kterou charakterizujeme pomocí povrchových sil, jež působí kolmo k řezu povrchem kapaliny a leží v rovině povrchu
- ⊕ v povrchové vrstvě je nahromaděna tzv. **povrchová energie**  $W$  (rozdíl vnitřní potenciální energie molekul na povrchu a uvnitř kapaliny) – práce, kterou je nutno vykonat na zvětšení volného povrchu kapaliny
- ⊕ **povrchové napětí**  $\sigma$  definujeme jako povrchovou sílu působící na jednotkovou délku řezu povrchem kapaliny
- ⊕ přírůstek povrchové energie blány je roven vykonané práci

$$dW = dA = Fdx = 2\sigma ldx = \sigma dS$$

**povrchové napětí představuje plošnou hustotu povrchové energie** (tj. energie na jednotku plochy povrchové blány)



$$\sigma = \frac{dF}{dl} = \frac{dW}{dS} \quad [\text{N/m}]$$



**mýdlová blána**



# Povrchové napětí

## Jevy na rozhraní tří prostředí

⊕ **povrchové napětí silně závisí na teplotě** (s rostoucí teplotou klesá) a **na prostředí, s nímž je kapalina ve styku**

**rovnováha sil**

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = \vec{0}$$



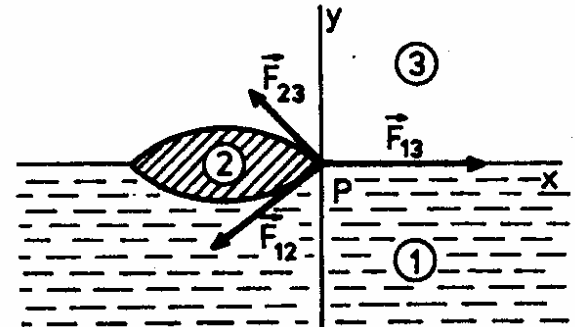
$$\sigma_{12} \cos \vartheta_{12} + \sigma_{23} \cos \vartheta_{23} + \sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{12} \sin \vartheta_{12} = \sigma_{23} \sin \vartheta_{23}$$



$$\sigma_{13} < \sigma_{12} + \sigma_{23}$$

$$\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$$



**kapka oleje na  
vodní hladině**

**kapka se udrží pohromadě**

– např. parafinový olej na  
vodní hladině

$$\sigma_{23} = 40 \text{ N/m} \quad \sigma_{13} = 74 \text{ N/m}$$

$$\sigma_{12} = 38 \text{ N/m}$$

**kapka se roztáhne po povrchu**

**kapaliny** – např. olivový olej na  
vodní hladině

$$\sigma_{23} = 33 \text{ N/m} \quad \sigma_{13} = 74 \text{ N/m}$$

$$\sigma_{12} = 12 \text{ N/m}$$



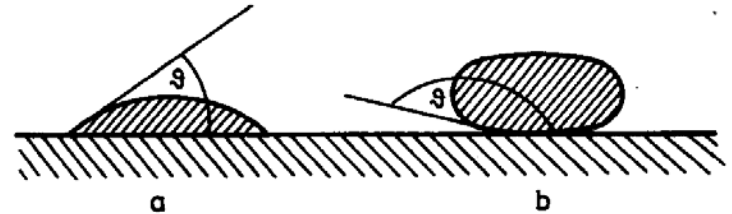
# Povrchové napětí

⊕ povrchové síly jsou v rovnováze s reakcí stěny nádoby (podložky), která je kolmá ke stěně vzhledem k neexistenci tečných napětí

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = \vec{0}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \vartheta$$

$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}$$



**Kapka na podložce**

## Krajní (stykový) úhel

- závisí jen na prostředí (rozhraní), která se stýkají

sklo-voda-vzduch ...  $\vartheta = 8^\circ$

sklo-rtuť-vzduch ...  $\vartheta = 128^\circ$

$$\sigma_{13} > \sigma_{12} \wedge \sigma_{23} > \sigma_{13} - \sigma_{12} \Rightarrow \vartheta < \pi/2$$

$$\sigma_{13} < \sigma_{12} \wedge \sigma_{23} > \sigma_{12} - \sigma_{13} \Rightarrow \vartheta > \pi/2$$

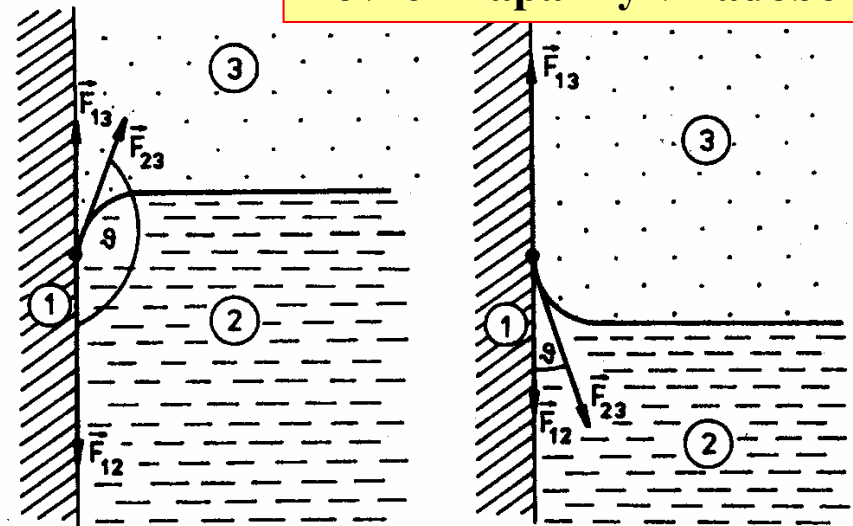
**dokonale smáčivá kapalina**

$$\sigma_{23} - \sigma_{13} \geq \sigma_{12} \Rightarrow \vartheta = 0^\circ$$

**dokonale nesmáčivá kapalina**

$$\sigma_{13} - \sigma_{23} \geq \sigma_{12} \Rightarrow \vartheta = 180^\circ$$

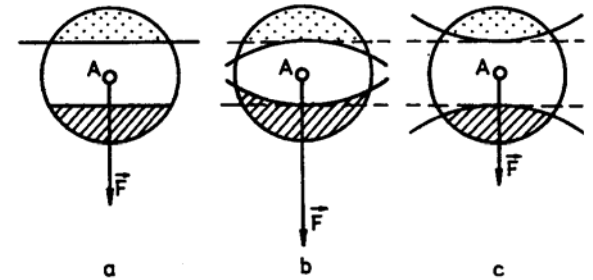
**Povrch kapaliny v nádobě**



# Povrchové napětí

## Tlak pod zakřiveným povrchem kapaliny

- ⊕ při rovinném povrchu vzniká vlivem kohezních (soudržných) sil tzv. **kohézní tlak**



## Kapilární tlak:

- ⊕ **přídavný tlak**, který vzniká zakřivením povrchu kapaliny

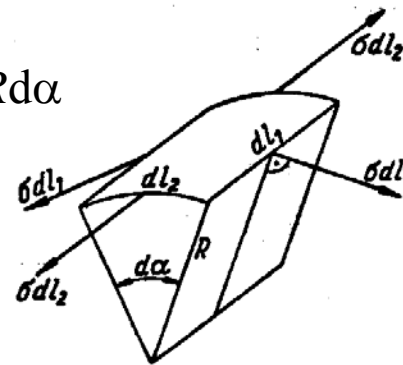
## výslednice povrchových sil:

$$dF = \sigma dl_1 d\alpha = \frac{\sigma dl_1 dl_2}{R} = \frac{\sigma dS}{R}$$

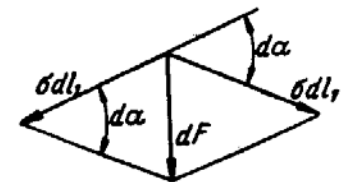
$$p_k = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma}{R}$$

$$p_k = p_{k1} + p_{k2} = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

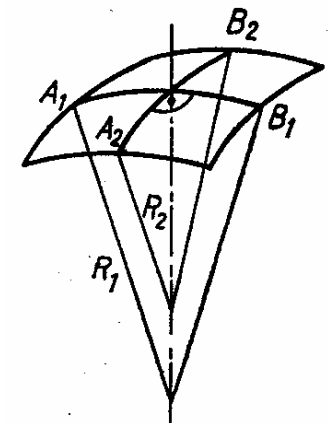
$$dl_2 = R d\alpha$$



## válcový povrch



u obecně zakřiveného povrchu - 2 hlavní normálové řezy  $A_1B_1, A_2B_2$



## Laplaceův vztah

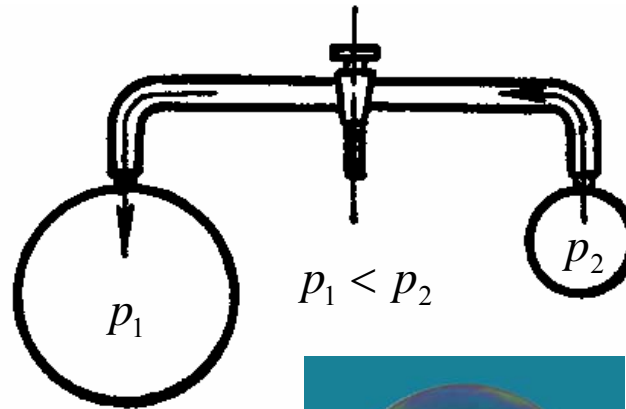
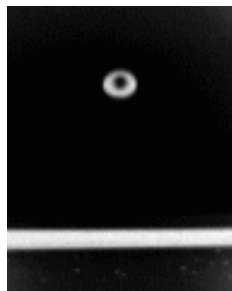
# Povrchové napětí

Tlak se při přechodu z okolí do kapaliny změní o kohézní tlak a přídavný kapilární tlak, způsobený zakřivením povrchu

$$p = p_{koh} \pm p_k = p_{koh} \pm \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

**kapka**

$$p_k = \frac{2\sigma}{r}$$



**bublina**

$$p_k = \frac{4\sigma}{r}$$

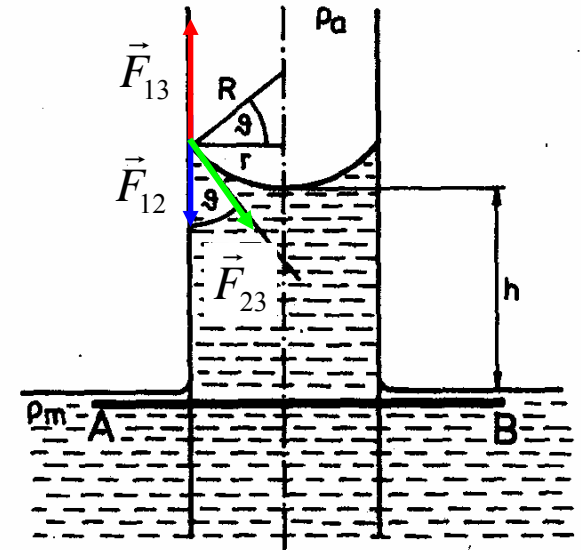
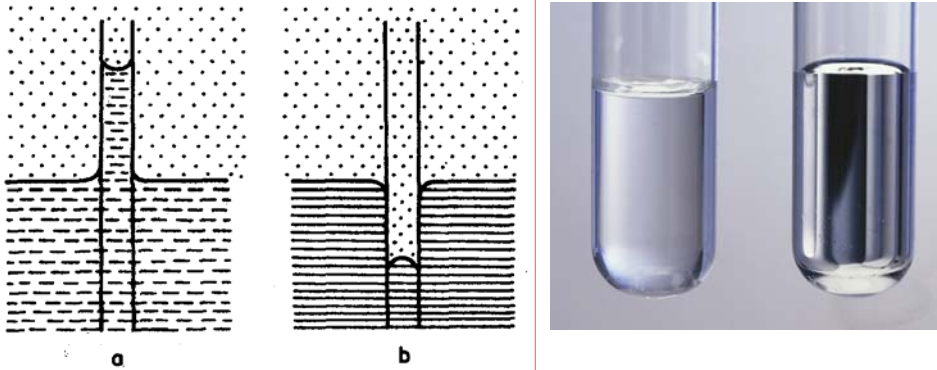


- ⊕ musíme počítat s tím, že bublina má 2 povrchy – vnější a vnitřní
- ⊕ v bublině je tedy přetlak

# Povrchové napětí

## Kapilární elevace a deprese

⊕ vzlínání resp. pokles vody v kapilárách



$$F = F_{13} - F_{12} = 2\pi r(\sigma_{13} - \sigma_{12}) = 2\pi r\sigma_{23} \cos \vartheta$$

$$G = \rho g h S = \pi r^2 \rho g h$$

$$F = G$$



$$h = \frac{2\sigma_{23} \cos \vartheta}{r\rho g}$$

$$\cos \vartheta > 0 \Rightarrow h > 0$$



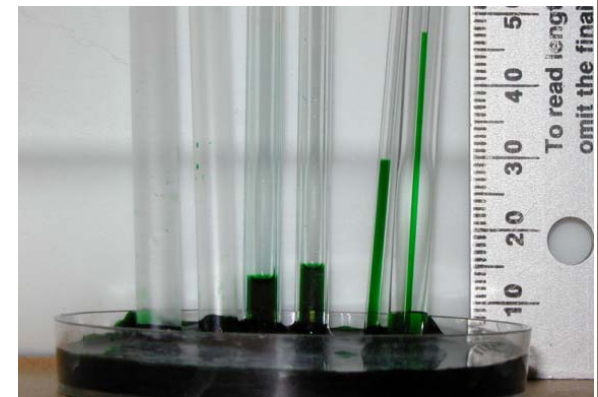
kapilární elevace

$$\cos \vartheta < 0 \Rightarrow h < 0$$



kapilární deprese

$$p_a + p_{koh} = p_a + p_{koh} + p_k - h\rho g$$



# Vlastnosti kapalin

## Charakteristiky kapalných látek:

Kapalina	$\sigma$ [kgm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> ]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\eta \cdot 10^3$ [kgs <sup>-2</sup> ]
voda	73	998	1,00
glycerin	62,5	1260	1480
ricinový olej	36,4	960	987
terpentýnový olej	27	855	1,49
rtuť	498	13550	1,55
etanol	22	789	1,2

# Hybnost kapaliny

## Hybnost kapaliny

- stacionární proudění  $Q_m = \text{konst.}$

hybnosti tekutiny  
ve dvou průřezech

$$\vec{p}_1 = \Delta m \cdot \vec{v}_1 = Q_m \Delta t \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{p}_2 = \Delta m \cdot \vec{v}_2 = Q_m \Delta t \cdot \vec{v}_2$$

na tekutinu při změně  
hybnosti působí síla

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = Q_m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

síla působící na potrubí:

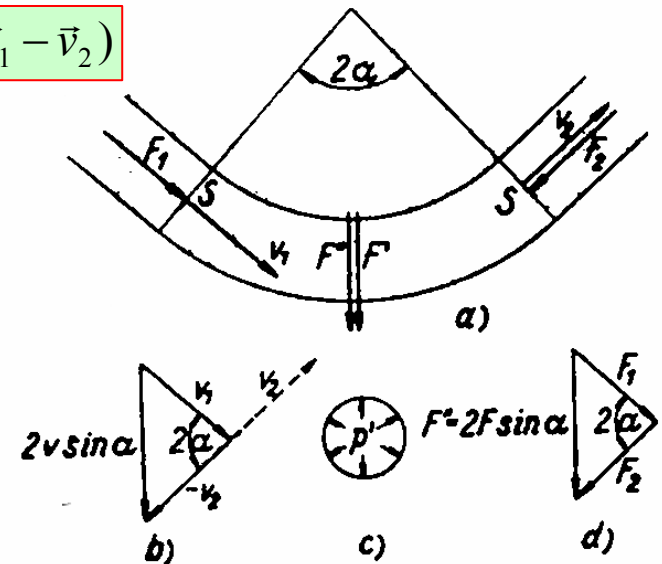
$$\vec{F}' = -\vec{F} = Q_m \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

tlaková síla působící na  
koleno potrubí:

$$\vec{F}'' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

celková síla působící na  
koleno potrubí:

$$R = F' + F'' = 2S(\rho v^2 + p) \sin \alpha$$





# Hybnost kapaliny

## vodní turbíny

⊕ tlaková síla působí na lopatky turbíny

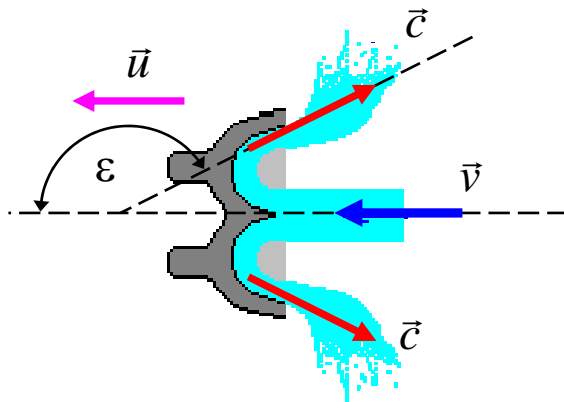
$$\vec{F} = Q_m \cdot (\vec{v}_{rel} - \vec{c})$$

$$Q_m = S\rho v$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} - \vec{u}$$



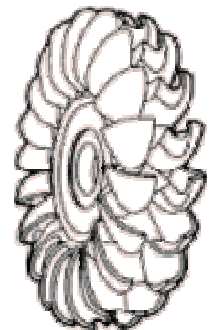
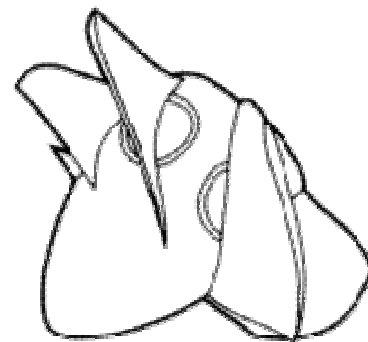
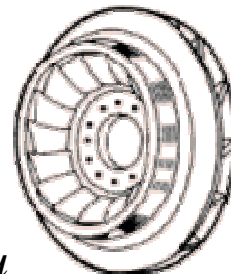
$$F = Q_m \cdot u(v - u)(1 - \cos \varepsilon)$$



**Výkon síly:**

$$P = Fu$$

$$P \rightarrow \max. \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow v = 2u$$



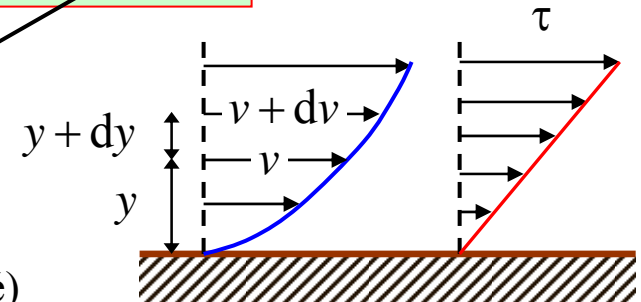
# Viskozita kapalin

## Vnitřní tření - viskozita kapalin

tečné napětí mezi vrstvami proudící kapaliny je úměrné rychlostnímu gradientu

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}$$

## Newtonovská kapalina



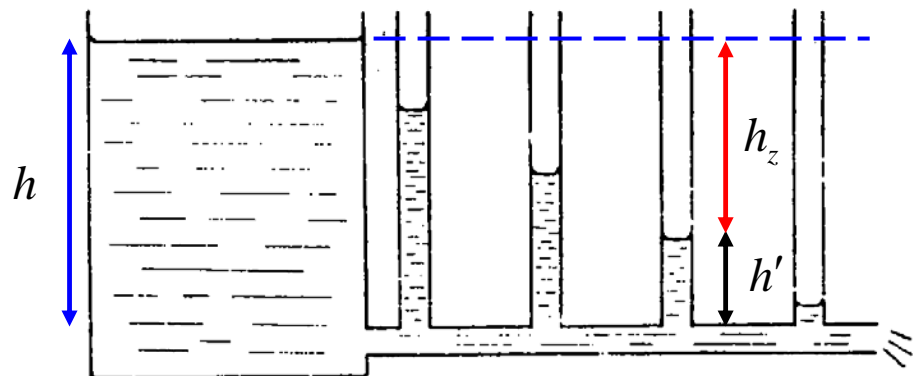
- ✦ vnitřní tření způsobuje ztrátu mechanické (tlakové) energie proudící kapaliny
- ✦ tlakové ztráty závisí na viskozitě, rychlosti a typu proudění, průřezu potrubí

## Bernoulliho rovnice pro reálnou kapalinu

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p_z = konst.$$

ztráta energie  $\Delta W$ :

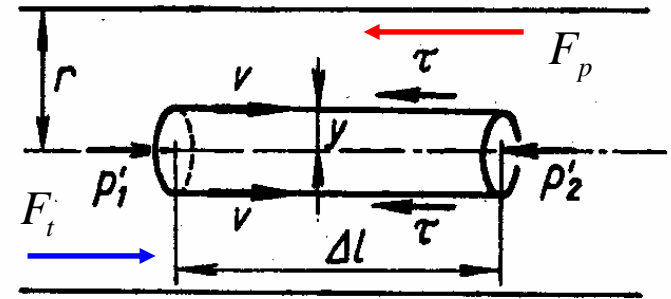
$$\frac{\Delta W}{V} = \rho g (h - h') = \rho g h_z$$



# Viskozita kapalin

## Průtok kapaliny potrubím

- ⊕ laminární proudění Newtonovské viskózní kapaliny potrubím



**tlaková síla:**

$$F_p = \pi y^2 \Delta p$$

**třecí síla:**

$$F_t = \tau \cdot 2\pi y \Delta l = 2\pi \eta y \frac{dv}{dy} \Delta l$$

**okrajová podmínka**

$$y = r \Rightarrow v = 0$$

$$F_t = F_p$$

$$dv = -\frac{1}{2\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l} y dy$$

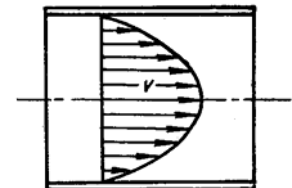
$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l} (r^2 - y^2)$$

**objemový průtok:**

$$dQ_v = 2\pi y dy \cdot v = \frac{\pi}{2\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l} (r^2 - y^2) y dy$$

$$Q_v = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

**Hagen-Poiseuilleův vztah**



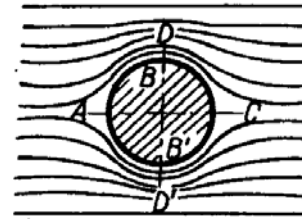
# Viskozita kapalin

## Obtékání koule kapalinou

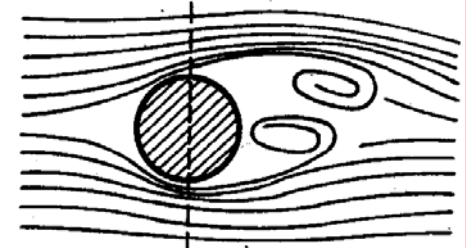
- ✦ při laminárním proudění kolem tělesa kulovitého tvaru resp. při jeho pohybu malou rychlostí v kapalině platí pro odporovou sílu:

**Stokesův vztah**

$$F_o = 6\pi\eta r v$$



a)



b)

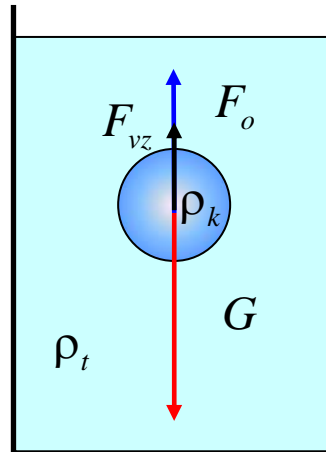
## Příklad: (pohyb kuličky ve viskózní kapalině)

**tíhová síla:**

$$G = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g$$

**vztlaková síla:**

$$F_{vz} = V\rho_t g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_t g$$



$$m \frac{dv}{dt} = G - F_o - F_{vz}$$



$$v = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt})$$

$$A = g(1 - \rho_t / \rho_k) \quad B = F_o / mg = \frac{9}{2} \frac{\eta v}{\rho_k r^2}$$