

*Československá akademie věd*  
*Ústav technologie a spolehlivosti strojních konstrukcí*  
*Veleslavínova 11, 301 14 Plzeň*

---

*MDT: (531-9.01+531.15/16):517.2*

Doc. Ing. Rudolf BREPTA, DrSc.

## **TENKÁ VÁLCOVÁ SKOŘEPINA KRUHOVÉHO TVARU BODOVĚ RADIÁLNĚ ZATÍŽENÁ RÁZEM**

*Číslo zprávy: 115 VP*

*Číslo kopie:*

*Druh zprávy: výzkumná  
dílčí*

Grant ČSAV, číslo 27007

Zodpovědný řešitel: Ing. František VALEŠ, CSc.  
Ředitel ústavu: Ing. Miroslav BALDA, DrSc.  
pověřený vedením ústavu

---

*Plzeň, prosinec 1992*

## ROZDĚLOVNÍK :

- výtisk číslo 1: archivní
- výtisk číslo 2: knihovna ústavu
- výtisk číslo 3: Doc. Ing. Brepta, DrSc.
- výtisk číslo 4: Ing. Valeš, CSc.

*Číslo zprávy: 115 VP*  
Plzeň, prosinec 1992

*MDT: (531-9.01+531.15/16):517.2*

**BREPTA, R.**

***Tenká válcová skořepina kruhového tvaru bodově radiálně zatížená rázem***

Tato výzkumná zpráva je první ze souboru tří dílčích zpráv, které mají zahrnout problematiku nestacionárního "bodového" zatížení tenké válcové skořepiny kruhového průřezu. Bodové zatížení je modelováno normálovým napětím působícím na malém (vzhledem k rozměrům skořepiny) čtverci. Další dvě výzkumné zprávy mají pojednávat o vlivu tečného zatížení, čili tečného vzhledem ke kružnici průřezu a dále ležícího ve směru výtvarné přímky skořepiny.

Výpočtovým modelem je zachycen vliv membránového a ohybového napětí pro malá přetvoření skořepiny. Teorie nerespektuje vliv rotační setrvačnosti prvků skořepiny a vliv posouvajících sil na její přetvoření. Výsledkem jsou vztahy pro tři složky posuvu  $u_z$ ,  $u_\varphi$  a  $u_r$  ve válcové soustavě souřadnic.

V příloze je uvedeno rozložení vnějšího zatížení ve dvojnou řadu vytvořenou z vlastních tvarů kmitání skořepiny. Je rovněž uveden odhad potřebného počtu sčítanců.

Počet stran: 35  
Počet obrázků: 7  
Počet tabulek: 1

***Klíčová slova:*** Tenká válcová skořepina  
Rázové namáhání silou  
Teorie nerespektuje vliv rotační setrvačnosti

***OBSAH:***

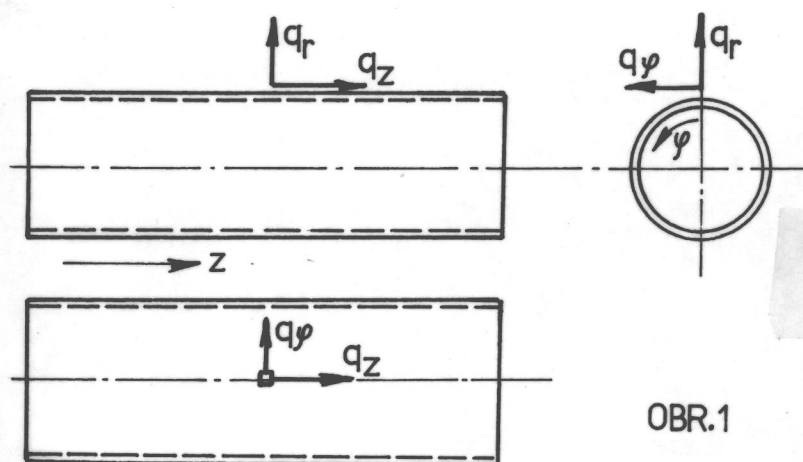
	<b>strana</b>
1. Použité označení .....	5
2. Úvod .....	6
3. Vztahy pro průřezové veličiny. Pohybové rovnice .....	8
4. Řešení pohybových rovnic .....	12
5. Závěr .....	29
6. Použitá literatura .....	29
7. Příloha .....	30
8. Dodatek .....	35

## 1. POUŽITÉ OZNAČENÍ

$R, L, h$	Rozměry válcové skořepiny
$z, \varphi, r$	Souřadnice ve válcové soustavě souřadnic
$u_z, u_\varphi, u_r$	Složky vektoru posuvu ve válcové soustavě souřadnic
$\rho$	Hustota materiálu
$c_3$	Rychlost dilatační vlny - rovinná napjatost
$a, \alpha_0$	Rozměry plošky se zatížením
$q_r, q_\varphi, q_z$	Složky vnějšího zatížení skořepiny
$H(t)$	Heavisideova funkce času
$t$	Čas
$E$	Modul pružnosti v tahu
$\mu$	Poissonovo číslo
$N_z, N_\varphi,$ $N_{z\varphi} \doteq N_{\varphi z}$	Jednotkové síly v průřezu
$M_z, M_\varphi,$ $M_{z\varphi} \doteq M_{\varphi z}$	Jednotkové momenty v průřezu
$\sigma_{rr}(z, \varphi)$	Radiální napětí v oblasti vnějšího zatížení
$n, k$	Indexy sčítanců v řadách
$\Omega_0 = \frac{c_3}{R}$	
$\Delta_1, \Delta_2$	"Frekvenční" determinanty

## 2. ÚVOD

Pro kvantitativní vyhodnocení signálů vznikajících při "akustické emisi"<sup>1</sup> je zvlášť důležité znát postup "bodového" rozruchu pláštěm tenkostěnné válcové skořepiny. Sotva lze tvrdit, že posuvy vyvolané v jistém bodě povrchu vyvolají stejnou odezvu ve směru obvodovém i podél výtvarné přímky válcové plochy. Právě geometrie skořepiny je vliv, který chceme v této výzkumné zprávě zkoumat. Je více než pravděpodobné, že tvar vyvolaného rozruchu v daném bodě povrchu (složky vektoru posuvu) bude ovlivněn nejen časovým průběhem zatížení, výše uvedenou geometrií prostředí jímž se šíří, ale také směrem působení vstupního pulsu napětí



(obr. 1). Na obrázku jsou označena zatížení ve směru radiálním, tečném a osovém. Řešení pro každý z těchto typů provádíme odděleně. V této výzkumné zprávě je uváděno řešení pro radiální zatížení velikosti

$$q_r(z, \varphi)H(t)$$

Časová závislost daná Heavisideovou funkcí  $H(t)$  byla zvolena proto, že z ní lze konvolucí numericky nalézt průbě-

hy posuvů pro obecné (i experimentálně dané) za-

tížení. Velice často se řešení omezují jen na určení složky posuvu  $u_r$ , kolmé k plášti skořepiny (viz /1/). Naše řešení uvádí vztahy pro všechny tři složky posuvu  $u_r, u_\varphi, u_z$ . Nutno ovšem přiznat, že pro AE je zatím nejdůležitější radiální složka  $u_r$ . Zásadně neuvádíme vztahy pro "průřezové veličiny", tj. síly a momenty, které lze formálně získat ze vztahů pro složky posuvů derivacemi. Teorie, kterou užíváme, nerespektuje např. vliv posouvajících sil v průřezech, ani vliv rotační setrvačnosti elementů skořepiny a není proto pro určení "průřezových veličin" dostatečně přesná. Pro AE mají však dominující význam posuvy.

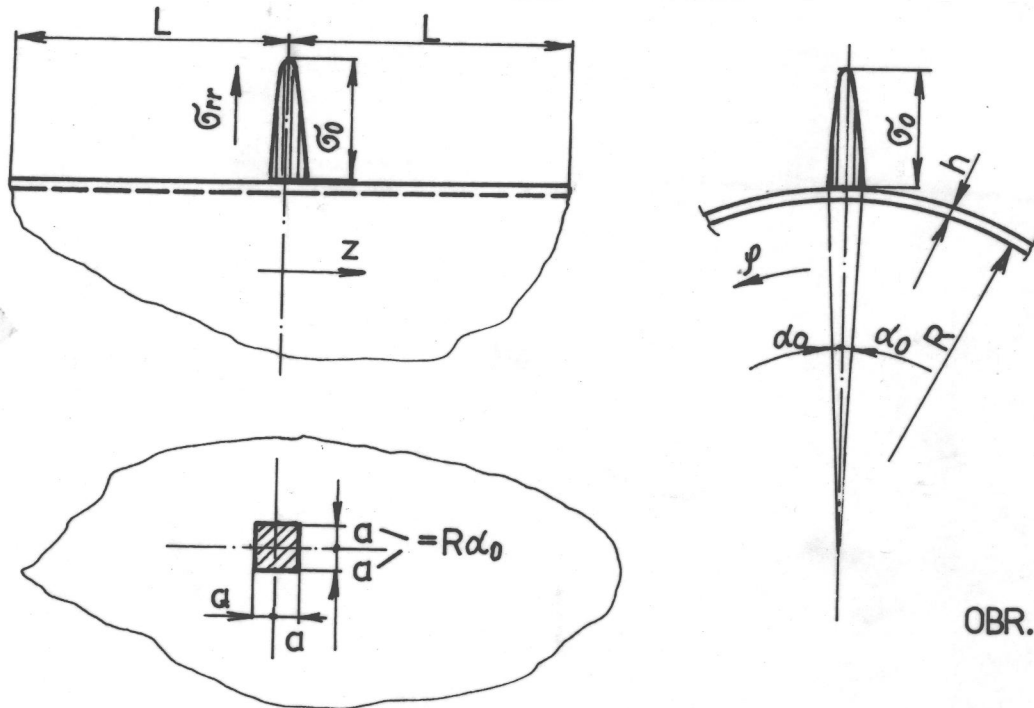
Vnější bodové zatížení se někdy vyjadřuje Diracovými funkcemi (viz /1/), vlastně součinem Diracových funkcí v proměnných  $z$  a  $\varphi$ . Toto vyjádření zde zásadně nepoužíváme z důvodu velice špatné konvergence řad, které řešením dostaneme. "Bodové" zatížení nahrazujeme zatížením na malém elementu ve tvaru čtverce (obr. 2). Je kresleno radiální zatížení; stejný typ zatížení použijeme pro tečné i osové zatížení. Napětí  $\sigma_{rr}$  vyjadřujeme jako součin dvou kosinových průběhů vztahem

$$q_r(z, \varphi, t) = \sigma_{rr}H(t)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 \cos\left(\frac{\pi\varphi}{2\alpha_0}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)$$

1

Dále jen AE.



OBR. 2

$$\varphi \in \langle -\alpha_0, +\alpha_0 \rangle$$

$$z \in \langle -a, +a \rangle \quad \text{když } a = \alpha_0 R.$$

Toto rozložení napětí je výhodnější nejen než "bodové rozložení Diracovo", ale i než konstantní napětí v oblasti čtvercového elementu. Hlavní předností je rychlejší konvergence řad. Je to zvláště důležité, když poměry  $a/L$  i  $\alpha_0/\pi$  jsou velmi malé hodnoty a je pak zapotřebí velkého počtu sčítanců v mocných řadách<sup>2</sup>. Podle St. Venantova principu bude námi použité náhradní zatížení dostatečně přesně nahražovat účinek bodového zatížení, je-li splněna podmínka, že vzdálenost referenčního bodu je dána větším násobkem hodnoty  $a$ . Jak již bylo výše uvedeno, užíváme při řešení ohybové teorie tenkých skořepin, bez vlivu rotační setrvačnosti elementů a bez vlivu posouvacích sil na přetvoření skořepiny. Autorem teorie je J. L. Sanders, viz [2].

V práci se užívají pro zestručnění zápisu symboly  $[ ]_k$  a  $[ ]_{n,k}$ . Pak všechny veličiny v závorce  $[ ]$  jsou závislé na sčítacích indexech  $k$ , respektive  $n, k$ .

### 3. VZTAHY PRO PRŮŘEZOVÉ VELIČINY. POHYBOVÉ ROVNICE

K vyjádření všech veličin používáme válcovou soustavu souřadnic - obr. 3. Průřezové jednotkové veličiny se vyjádří takto :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1)$$

$$N_z = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \mu \frac{u_r}{R} \right)$$

$$N_\varphi = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{R} \right) \quad (2)$$

$$N_{z\varphi} \doteq N_{\varphi z} = \frac{Eh}{(1-\mu^2)} \frac{(1-\mu)}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right)$$

$$M_z = D \left( - \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} \right)$$

$$M_\varphi = D \left( - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} \right) \quad (3)$$

$$M_{z\varphi} \doteq M_{\varphi z} = D(1-\mu) \left( - \frac{1}{4R^2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{3}{4R} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \varphi} \right).$$

Pohybové rovnice vyjádřené průřezovými veličinami jsou :

$$\text{do směru } z \quad \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{z\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2R^2} \frac{\partial M_{z\varphi}}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\text{do směru } \varphi \quad \frac{\partial N_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{2R} \frac{\partial M_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{R} Q_\varphi = \rho h \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$\text{do směru } r \quad - \frac{\partial Q_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} N_\varphi + \sigma_{rr}(z, \varphi) H(t) = \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$



Po dosazení z rovnic (2) a (3) do rovnic (4) dostáváme pohybové rovnice ve složkách posuvů  $u_z$ ,  $u_\varphi$  a  $u_r$

$$c_3^2 = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} c_3^2 \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{c_3^2 (1-\mu)}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{48} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{c_3^2}{R} \cdot \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \\ + \mu \cdot \frac{c_3^2}{R} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{c_3^2}{R} \cdot \frac{(1-\mu)}{24} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 u_r}{\partial z \partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_3^2}{R} \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \varphi} + c_3^2 \cdot \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{c_3^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \cdot \\ \cdot \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{c_3^2}{R^2} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \left( \frac{h}{R} \right)^2 c_3^2 \cdot \frac{(3-\mu)}{24} \frac{\partial^3 u_r}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{1}{12 R^2} c_3^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 u_r}{\partial \varphi^3} - \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = C \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -\mu \cdot \frac{c_3^2}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{(1-\mu) c_3^2}{24 R} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 u_z}{\partial z \partial \varphi^2} + c_3^2 \cdot \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} \frac{\partial^3 u_\varphi}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{c_3^2}{R^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{c_3^2}{12 R^2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 u_\varphi}{\partial \varphi^3} - \\ - \frac{h^2 c_3^2}{12} \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^4} - \frac{1}{6} c_3^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^2 \partial \varphi^2} - \frac{1}{12 R^2} c_3^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^4 u_r}{\partial \varphi^4} - \frac{c_3^2}{R^2} u_r + \frac{\sigma_{rr}(z, \varphi)}{\rho h} H(t) - \\ - \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

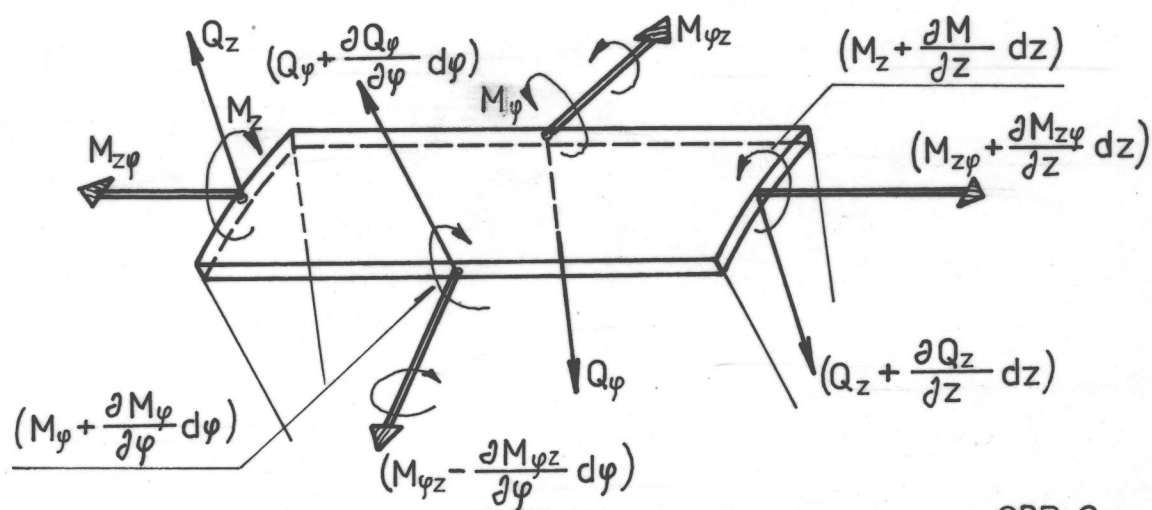
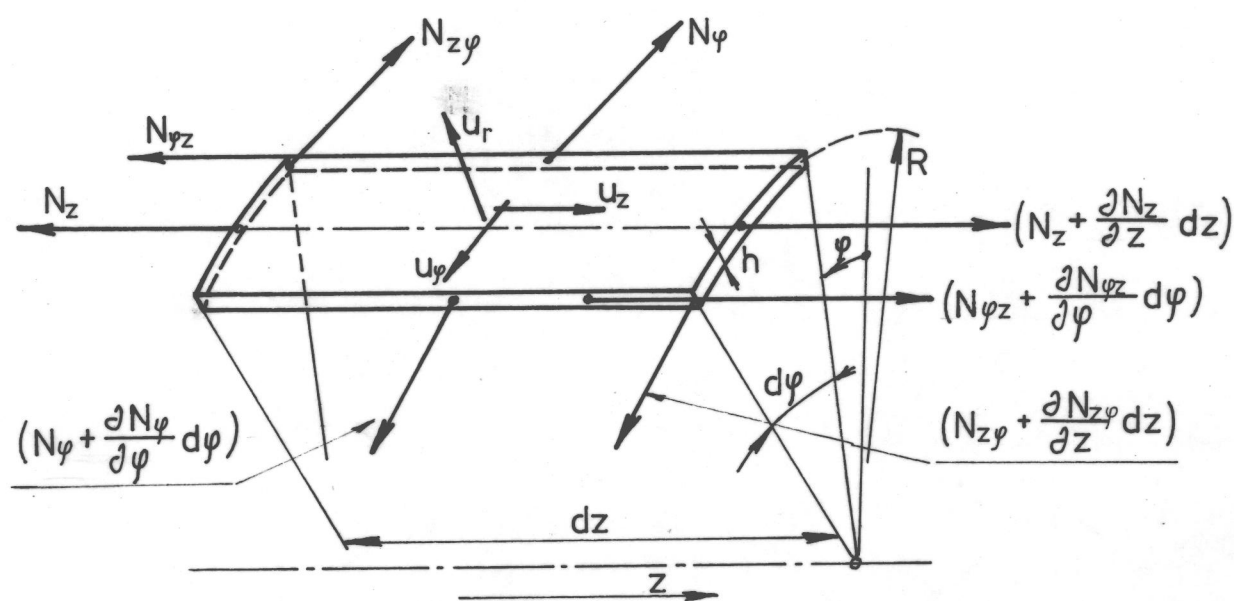
Rozložení napětí  $\sigma_{rr}(Z, \varphi)$ , které popisuje vnější zatížení skořepiny, je nutné vyjádřit řadou z vlastních funkcí (vlastní tvary kmitání), které vyplynou z řešení okrajových podmínek (viz "Příloha").

#### Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční podmínky jsou jednoduché:

na začátku působení vnějšího zatížení v čase  $t = 0$  je skořepina v klidu a bez deformací, čili:

$$u_z = 0, u_\varphi = 0, u_r = 0 \quad \text{i} \quad \dot{u}_z = 0, \dot{u}_\varphi = 0, \dot{u}_r = 0. \quad (9)$$



OBR. 3

Okrajové podmínky poslouží při hledání vlastních tvarů; jinak nejsou důležité, protože nebudeme hledat tvar postupujícího pulzu po odrazu od okrajů.

Vhodné jsou tyto okrajové podmínky (obr. 4):

$$z = -L$$

$$z = +L$$

$$u_{\varphi} = 0$$

$$u_{\varphi} = 0$$

$$u_r = 0$$

$$u_r = 0$$

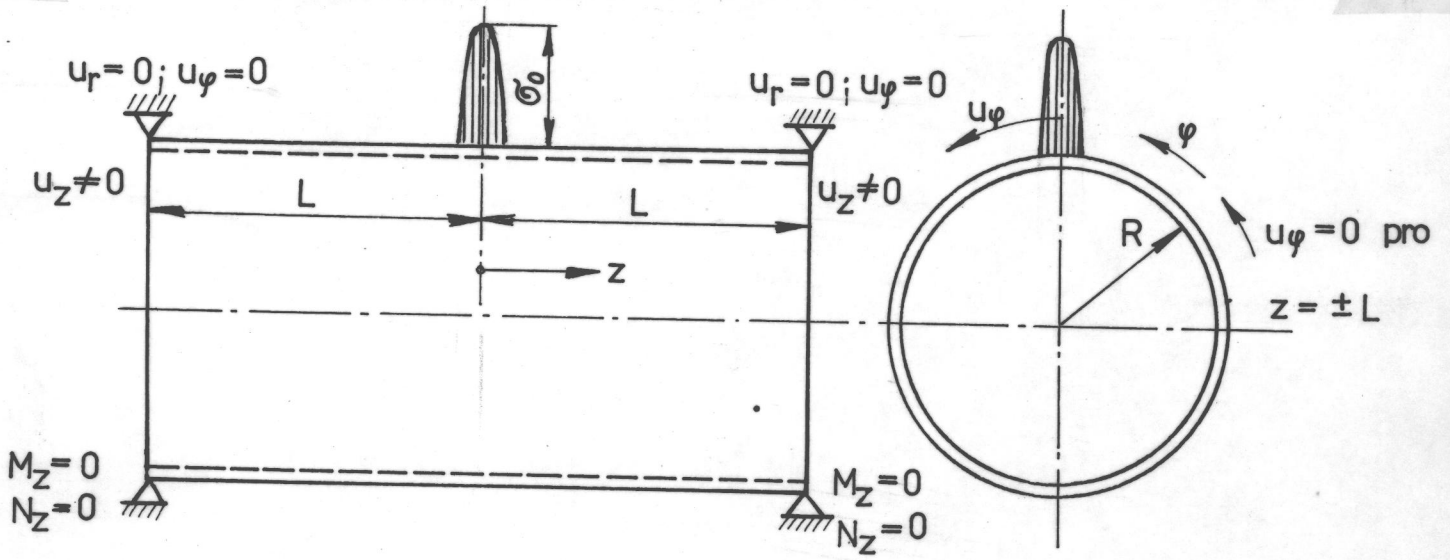
$$M_z = 0$$

$$M_z = 0$$

$$N_z = 0$$

$$N_z = 0$$

(10)



OBR. 4

#### 4. ŘEŠENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC

Časové proměnné se zbavíme L.-transformací; vzhledem k podmínkám (9) přejdou pohybové rovnice (6) až (8) do následujícího tvaru (L. obrazy veličin jsou značeny vodorovným pruhem ...  $\mathcal{L}\{u_r(z, \varphi, t)\} = \bar{u}_r(z, \varphi)$ ):

$$c_3^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} + \frac{c_3^2 (1-\mu)}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{48} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial \bar{u}_z^2}{\partial \varphi^2} + \frac{c_3^2}{R} \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \mu \cdot \frac{c_3^2}{R} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} +$$

$$+ \frac{c_3^2 (1-\mu)}{R} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_r}{\partial z \partial \varphi^2} - p^2 \bar{u}_z = 0 \quad (11)$$

$$\frac{c_3^2}{R} \cdot \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z \partial \varphi} + c_3^2 \cdot \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{c_3^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{c_3^2}{R^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \varphi} - c_3^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} \frac{\partial^3 \bar{u}_r}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{1}{12 R^2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_r}{\partial \varphi^3} -$$

$$- p^2 \bar{u}_\varphi = 0 \quad (12)$$

$$- \mu \cdot \frac{c_3^2}{R} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - \frac{c_3^2 (1-\mu)}{R} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_z}{\partial z \partial \varphi^2} + c_3^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} \frac{\partial^3 \bar{u}_\varphi}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{c_3^2}{R^2} \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{c_3^2}{12 R^2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi^3} -$$

$$- \frac{h^2 c_3^2}{12} \frac{\partial^4 \bar{u}_r}{\partial z^4} - \frac{c_3^2}{6} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^4 \bar{u}_r}{\partial z^2 \partial \varphi^2} - \frac{1}{12 R^2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^4 \bar{u}_r}{\partial \varphi^4} - \frac{c_3^2}{R^2} \bar{u}_r + \frac{\sigma_{rr}(z, \varphi)}{\rho h} \cdot \frac{1}{p} - p^2 \bar{u}_r = 0. \quad (13)$$

Vlastní tvary musí splňovat homogenní části rovnic (11) až (13), čili po vynechání členu  $\frac{\sigma_{rr}(z, \varphi)}{\rho h} \cdot \frac{1}{p}$ , při současném splnění okrajových podmínek (10). Tyto tvary najdeme odhadem, když využijeme symetrie úlohy (viz obr. 4) a když vycházíme z předpokladu, že funkce  $\bar{u}_z(\varphi, Z)$ ,  $\bar{u}_\varphi(\varphi, Z)$  a  $\bar{u}_r(\varphi, Z)$  lze vyjádřit jako součiny funkcí proměnných  $\varphi$  a  $Z$ . Začneme závislostmi na souřadnici  $\varphi$ . Vzhledem k symetrii k meridiální rovině proložené osou skořepiny (obr. 4) bude zřejmě

$$\bar{u}_z = Z(z) \cdot \cos(n\varphi); \bar{u}_\varphi = U(z) \cdot \sin(n\varphi)$$

$$\bar{u}_r = Q(z) \cdot \cos(n\varphi) \quad (14)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Když tyto výrazy dosadíme do rovnic (11) až (13), zjistíme, že jsou splněny (pokud jde o proměnnou  $\Phi$ ) a pro funkce  $Z(z)$ ,  $U(z)$  a  $Q(z)$  dostáváme obyčejné diferenciální rovnice:

$$c_3^2 \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} - \left\{ p^2 + n^2 \frac{c_3^2 (1-\mu)}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{48} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \right\} Z + n \cdot \frac{c_3^2}{R} \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{dU}{dz} + \frac{c_3^2}{R} \left[ \mu - n^2 \cdot \frac{(1-\mu)}{24} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \cdot \frac{dQ}{dz} = 0 \quad (15)$$

$$-n \cdot \frac{c_3^2}{R} \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{dZ}{dz} + c_3^2 \cdot \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{d^2 U}{dz^2} - \left\{ p^2 + n^2 \cdot \frac{c_3^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \right\} U + n \left( \frac{h}{R} \right)^2 c_3^2 \cdot \frac{(3-\mu)}{24} \frac{d^2 Q}{dz^2} - n \cdot \frac{c_3^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{n^2}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \cdot Q = 0 \quad (16)$$

$$\frac{c_3^2}{R} \left[ -\mu + n^2 \frac{(1-\mu)}{24} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{dZ}{dz} + n \cdot c_3^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} \frac{d^2 U}{dz^2} - n \cdot \frac{c_3^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{n^2}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] U - \frac{h^2 c_3^2}{12} \frac{d^4 Q}{dz^4} + n^2 \cdot \frac{c_3^2}{6} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{d^2 Q}{dz^2} - \left\{ p^2 + \frac{c_3^2}{R^2} + \frac{n^4 c_3^2}{12 R^2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right\} Q = 0. \quad (17)$$

Dosazením se ověří, že rovnicím (15) až (17) vyhoví funkce

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_k \cdot \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{Z}{L} \right) \right] \\ U(z) &= U_k \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{Z}{L} \right) \right] \\ Q(z) &= Q_k \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{Z}{L} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

když  $k = 1, 2, 3, \dots$

Po dosazení, a když současně nahradíme  $p = i\Omega$ , máme soustavu tří lineárních algebraických rovnic pro  $Z_k, U_k, Q_k$ . Anulovaný determinant je frekvenční rovnicí pro úhlové frekvence  $\Omega$  (rovnice je kubická)<sup>3</sup>.

Spojením vztahů (14) a (18) dostáváme pro tvary kmitu

$$\begin{aligned}(\bar{u}_z)_{n,k} &= Z_{n,k} \cdot \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \cdot \cos(n\varphi) \\(\bar{u}_\varphi)_{n,k} &= U_{n,k} \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \cdot \sin(n\varphi) \\(\bar{u}_r)_{n,k} &= Q_{n,k} \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \cdot \cos(n\varphi)\end{aligned}\quad (19)$$

když  $n, k = 1, 2, 3, \dots$

Protože platí princip superpozice, vyhoví rovnicím (15) až (17) také dvojnásobné řady, utvořené z těchto funkcí. Snadno se přesvědčíme, že funkce (19) splňují všech osm okrajových podmínek daných vztahy (10).

Nyní již jsme schopni vyjádřit člen  $\frac{\sigma_{rr}(z,\varphi)}{\rho h} \cdot \frac{1}{p}$  řadami vlastních funkcí (19)<sup>4</sup>; pak rovnice (11) až (13) nabydou tvaru:

$$\begin{aligned}c_3^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} + \frac{c_3^2 (1-\mu)}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{48} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{c_3^2}{R} \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial z \partial \varphi} + \frac{c_3^2}{R} \mu \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + \\+ \frac{c_3^2 (1-\mu)}{R} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_r}{\partial z \partial \varphi^2} - p^2 \cdot \bar{u}_z = 0\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}\frac{c_3^2}{R} \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z \partial \varphi} + \frac{c_3^2}{R} \cdot \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial z^2} + \\+ \frac{c_3^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{c_3^2}{R^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \varphi} - \frac{c_3^2}{R} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} \frac{\partial^3 \bar{u}_r}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{1}{12 R^2} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_r}{\partial \varphi^3} - \\- p^2 \cdot \bar{u}_\varphi = 0\end{aligned}\quad (21)$$

<sup>3</sup> Frekvence musí mít dva indexy  $n$  a  $k$ , čili  $\Omega \rightarrow \Omega_{n,k}$ . Viz také str. 25.  
<sup>4</sup> Viz "Příloha".

$$\begin{aligned}
& -\mu \cdot \frac{c_3^2}{R} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} - \frac{(1-\mu)c_3^2}{24} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_z}{\partial z \partial \varphi^2} + c_3^2 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} \frac{\partial^3 \bar{u}_\varphi}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{c_3^2}{R^2} \frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{c_3^2}{12R^2} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{\partial^3 \bar{u}_\varphi}{\partial \varphi^3} \\
& - \frac{h^2 c_3^2}{12} \frac{\partial^4 \bar{u}_r}{\partial z^4} - \frac{c_3^2}{6} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{\partial^4 \bar{u}_r}{\partial z^2 \partial \varphi^2} - \frac{1}{12R^2} c_3^2 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{\partial^4 \bar{u}_r}{\partial \varphi^4} - \left(\frac{c_3^2}{R^2} + p^2\right) \bar{u}_r + \\
& + \frac{1}{p} \cdot \frac{8}{\rho h \pi^3} \left(\frac{a}{L}\right) \sigma_0 \alpha_0 \left\{ \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right]}_I + \right. \\
& \left. + 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1-\left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cos(n\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right]}_II \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Pro zjednodušení zavedeme při dalším postupu tuto novou veličinu

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{a}{L}\right) \sigma_0 \alpha_0 = \frac{1}{p} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\sigma_0 (2a)^2}{(2\pi RL) h \rho} = \frac{1}{p} \cdot \frac{4q_0}{\pi^2} \tag{23}$$

$$\text{když } q_0 = \frac{(\sigma_0 / 2a)^2}{(2\pi RL) h \rho} \tag{24}$$

Dále zavádíme úhlovou frekvenci  $\Omega_0$ , danou vztahem

$$\Omega_0 = \frac{c_3}{R}. \tag{25}$$

Poznámka:

Nové veličiny  $q_0$  a  $\Omega_0$  mají jasný fyzikální smysl

Čitatel zlomku (24) má rozměr síly - kdyby po celém čtvercovém elementu působilo neměnné normálové napětí  $\sigma_0$ , byla by to zatěžující síla, působící na skořepinu. Jmenovatel zlomku (24) vyjadřuje celkovou hmotnost skořepiny;  $q_0$  má tedy rozměr zrychlení.

Úhlová frekvence  $\Omega_0$  je frekvencí radiálního rotačně symetrického kmitání nekonečně dlouhé skořepiny (dýchání)

Řešení soustavy rovnic (20) až (22) provedeme postupně. Nejprve jen s výrazem I., který je funkcí jen proměnné  $z$ .  
Řešení odhadneme ve tvaru

$$\begin{aligned}\bar{u}_z &= C_{z,k} \cdot \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \\ \bar{u}_\varphi &= C_{\varphi,k} \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \\ \bar{u}_r &= C_{r,k} \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right].\end{aligned}\tag{26}$$

Dosadíme do výše uvedených rovnic a máme lineární rovnice pro konstanty  $C_{z,k}$ ,  $C_{\varphi,k}$  a  $C_{r,k}$  - při pevné hodnotě indexu  $k$ :

$$\left[ \Omega_0^2 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\pi^2}{4} (2k-1)^2 + p^2 \right] \cdot C_{z,k} + \mu \Omega_0^2 \left( \frac{R}{L} \right) (2k-1) \left( \frac{\pi}{2} \right) C_{r,k} = 0\tag{27}$$

$$-c_3^2 \cdot \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \cdot \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2L} \right]^2 \cdot C_{\varphi,k} - p^2 \cdot C_{\varphi,k} = 0\tag{28}$$

$$\begin{aligned}\mu \Omega_0^2 \left( \frac{R}{L} \right) \frac{\pi}{2} (2k-1) C_{z,k} + \left\{ \Omega_0^2 \left[ \frac{1}{192} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \pi^4 (2k-1)^4 + 1 \right] + p^2 \right\} C_{r,k} = \\ = \frac{1}{p} \cdot \frac{4q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{z}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]}.\end{aligned}\tag{29}$$

Z rovnice (28) ihned plyne, že  $C_{\varphi,k} = 0$  tedy pro všechny hodnoty indexu  $k$  ! Determinant zbyvajících rovnic (27) a (29) je



$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} \left(A_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) & A_{12} \\ A_{21} & \left(A_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) \end{vmatrix} = [\Delta_1(p)]_k \quad (30)$$

pro jeho prvky platí vztahy

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 A_{11} &= \Omega_0^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 (2k-1)^2 \\ \Omega_0^2 A_{12} &= \Omega_0^2 A_{21} = \Omega_0^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{R}{L}\right) (2k-1)\mu \\ \Omega_0^2 A_{22} &= \Omega_0^2 \left[ \frac{\pi^4}{192} \left(\frac{h}{L}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 (2k-1)^4 + 1 \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Vypočítáme  $C_{z,k}$  a  $C_{r,k}$

$$\begin{aligned} C_{z,k} &= - \frac{4q_0}{\pi^2 \Omega_0^2} \cdot \frac{1}{p \Delta_1(p)} \cdot \frac{A_{12} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left(\frac{a}{L}\right) \right]}{\left[ 1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2 \right]} \\ C_{r,k} &= \frac{4q_0}{\pi^2 \Omega_0^2} \cdot \frac{1}{p \Delta_1(p)} \cdot \frac{(A_{11} + p^2) \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left(\frac{a}{L}\right) \right]}{\left[ 1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Část řešení odpovídající členu I. v rovnicích (20) až (22) tedy je

$$\bar{u}_z \Omega_0^2 = - \left(\frac{4}{\pi^2}\right) q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p \Delta_1(p)} \cdot \frac{A_{12} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left(\frac{a}{L}\right) \right]}{\left[ 1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left(\frac{z}{L}\right) \right] \quad (32)$$

$$\bar{u}_\varphi = 0 \quad (33)$$

$$\bar{u}_r \Omega_0^2 = \left(\frac{4}{\pi^2}\right) q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p \Delta_1(p)} \cdot \frac{\left(A_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left(\frac{a}{L}\right) \right]}{\left[ 1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left(\frac{z}{L}\right) \right] \quad (34)$$

Abychom našli řešení vyhovující výrazu II. v rovnici (22), položíme

$$\begin{aligned}\bar{u}_z &= z D_{n,k} \cdot \cos(n\varphi) \sin \cdot \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \\ \bar{u}_\varphi &= \varphi D_{n,k} \cdot \sin(n\varphi) \cos \cdot \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \\ \bar{u}_r &= r D_{n,k} \cdot \cos(n\varphi) \cos \cdot \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right]\end{aligned}\tag{35}$$

Dosadíme do rovnic (20) až (22) a máme lineární algebraické rovnice pro koeficienty  $zD_{n,k}$ ,  $\varphi D_{n,k}$  a  $rD_{n,k}$ :

$$\begin{aligned}\left\{ \Omega_0^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{R}{L} \right)^2 (2k-1)^2 + \Omega_0^2 \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{1}{48} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] n^2 + p^2 \right\} \cdot z D_{n,k} + \\ + \Omega_0^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{R}{L} \right) \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] n(2k-1) \cdot \varphi D_{n,k} + \\ + \Omega_0^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{R}{L} \right) (2k-1) \left[ \mu - \frac{(1-\mu)}{24} \left( \frac{h}{R} \right)^2 n^2 \right] \cdot r D_{n,k} = 0\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}\Omega_0^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{R}{L} \right) \left[ \frac{(1+\mu)}{2} - \frac{(1-\mu)}{32} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] n(2k-1) \cdot z D_{n,k} + \left\{ \Omega_0^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{(1-\mu)}{2} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ 1 + \frac{3}{16} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] (2k-1)^2 + \Omega_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] n^2 + p^2 \right\} \cdot \varphi D_{n,k} + \\ + \Omega_0^2 n \left\{ 1 + \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} (2k-1)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 n^2 \right\} \cdot r D_{n,k} = 0\end{aligned}\tag{37}$$

<sup>5</sup> Výchozím bodem při konstrukci tohoto řešení je rovnice (22), která přímo obsahuje člen s  $\bar{u}_r$ .

$$\begin{aligned}
& \Omega_0^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{R}{L}\right) (2k-1) \left[ \mu - \frac{(1-\mu)}{24} \left(\frac{h}{R}\right)^2 n^2 \right] \cdot_z D_{n,k} + \\
& + \Omega_0^2 \cdot n \left\{ 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} (2k-1)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 n^2 \right\} \cdot_\varphi D_{n,k} + \\
& + \left\{ \frac{\Omega_0^2}{12} \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \left(\frac{R}{L}\right)^4 \left(\frac{h}{R}\right)^2 (2k-1)^4 + \frac{\Omega_0^2}{6} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{h}{R}\right)^2 n^2 (2k-1)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{\Omega_0^2}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 n^4 + \left(\Omega_0^2 + p^2\right) \right\} \cdot_r D_{n,k} = \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left| 1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2 \right|} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2} \left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left| 1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2 \right|}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Zkrácený zápis determinantu  $\Delta_2(p)$  soustavy rovnic (36) až (38) má tvar

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} \left(B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & \left(B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & \left(B_{33} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) \end{vmatrix} = [\Delta_2(p)]_{n,k}. \tag{39}$$

Pro prvky determinantu platí

$$\Omega_0^2 B_{11} = \Omega_0^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 (2k-1)^2 + \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{1}{48} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \right] n^2 \right\}$$

$$\Omega_0^2 B_{12} = \Omega_0^2 B_{21} = \Omega_0^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{R}{L}\right) \left[ \frac{1+\mu}{2} - \frac{1-\mu}{32} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \right] n \cdot (2k-1)$$

$$\Omega_0^2 B_{13} = \Omega_0^2 B_{31} = \Omega_0^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{R}{L}\right) (2k-1) \left[ \mu - \frac{(1-\mu)}{24} \left(\frac{h}{R}\right)^2 n^2 \right]$$

$$\Omega_0^2 B_{22} = \Omega_0^2 \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{(1-\mu)}{2} \left[ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \right] (2k-1)^2 + \left[ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \right] n^2 \right\}$$

$$\Omega_0^2 B_{23} = \Omega_0^2 B_{32} = \Omega_0^2 n \left\{ 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{(3-\mu)}{24} (2k-1)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 n^2 \right\}$$

$$\Omega_0^2 B_{33} = \Omega_0^2 \left\{ \frac{1}{12} \left( \frac{\pi}{2} \right)^4 \left( \frac{R}{L} \right)^4 \left( \frac{h}{R} \right)^2 (2k-1)^4 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 n^2 (2k-1)^2 + \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 n^4 \right] \right\}. \quad (40)$$

Výsledkem jsou vztahy

$${}_z D_{n,k} = - \frac{8q_0}{\pi^2 \Omega_0^2} \cdot \frac{1}{p\Delta_2(p)} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \left[ B_{12} B_{23} - B_{13} \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \right] \quad (41)$$

$${}_\varphi D_{n,k} = - \frac{8q_0}{\pi^2 \Omega_0^2} \cdot \frac{1}{p\Delta_2(p)} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \left[ B_{23} \left( B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) - B_{21} B_{13} \right] \quad (42)$$

$${}_r D_{n,k} = \frac{8q_0}{\pi^2 \Omega_0^2} \cdot \frac{1}{p\Delta_2(p)} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \left[ \left( B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) - \right. \\ \left. - B_{12}^2 \right]. \quad (43)$$

Dosazením do vztahů (35) získáme hledané příspěvky k řešení

$$\bar{u}_z \Omega_0^2 = \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p\Delta_2(p)} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \left[ B_{12} B_{23} - B_{13} \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \right] \cdot \cos(n\varphi) \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \quad (44)$$

$$\bar{u}_\varphi \Omega_0^2 = - \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p\Delta_2(p)} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \left[ B_{23} \left( B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) - B_{21} B_{13} \right] \cdot \sin(n\varphi) \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_r \Omega_0^2 = & \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p[\Delta_2(p)]} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \left[ \left(B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) \left(B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) - \right. \\ & \left. - B_{12}^2 \right] \cos(n\varphi) \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Laplaceovy obrazy posuvů dostaneme spojením vztahů (32) a (44), dále (33) a (45), pak (34) a (46):

$$\begin{aligned} \bar{u}_z \Omega_0^2 = & - \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p[\Delta_1(p)]_k} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} [A_{12}]_k \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right] + \\ & + \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p[\Delta_2(p)]_{k,n}} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot [B_{12}B_{23} - B_{13}(B_{22} + \\ & + \frac{p^2}{\Omega_0^2})]_{k,n} \cdot \cos(n\varphi) \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right] \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varphi \Omega_0^2 = & - \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p[\Delta_2(p)]_{k,n}} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \\ & \cdot \left[ B_{23} \left(B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) - B_{21}B_{13} \right]_{k,n} \cdot \sin(n\varphi) \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_r \Omega_0^2 = & \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p[\Delta_1(p)]_k} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \left[ A_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right]_{k,n} \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right] + \\ & + \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p[\Delta_2(p)]_{k,n}} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \left[ \left(B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) \left(B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2}\right) - \right. \\ & \left. - B_{12}^2 \right] \cos(n\varphi) \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right]. \end{aligned} \quad (49)$$

Členy  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  a  $B_{11} \div B_{32}$  jsou dány vzorci (31) a (40).

#### Zpětná transformace Laplaceových obrazů

Při zpětné transformaci budeme potřebovat derivace determinantů  $\frac{\partial \Delta_1(p)}{\partial p}$  a  $\frac{\partial \Delta_2(p)}{\partial p}$  (viz (30) a (39))

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial p} = \frac{2p}{\Omega_0^2} \left( A_{11} + A_{22} + 2 \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_2}{\partial p} = 2 \frac{p}{\Omega_0^2} \left\{ \left[ \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \left( B_{33} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) + \left( B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \left( B_{33} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( B_{11} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \right] - \left( B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2 \right) \right\} = \frac{2p}{\Omega_0^2} \Gamma(p). \end{aligned} \quad (51)$$

Funkce je ještě dále přesně specifikována vztahem (62).

Zpětná transformace obrazů posuvů (47) až (49) probíhá stejně; podrobněji popíšeme postup jen pro posuv  $u_z$ . Nejprve první část vztahu (47). Zpětná transformace se provádí integrací v Gaussově rovině. Singularity jsou jednoduché póly. První z nich leží v počátku soustavy souřadnic  $p=0$ , další póly jsou dány kořeny rovnice  $\Delta_1(p) = 0$ . Tyto kořeny jsou ryze imaginární, jejich absolutní hodnota přísluší vlastním frekvencím kmitání skořepiny při rotačně symetrickém (na souřadnici  $\varphi$  nezávislém) přetvoření!

#### Hodnota rezidua u pólu $p=0$

Jedná se o reziduum výrazu  $\left( \frac{1}{p \Delta_1(p)} \cdot e^{pt} \right)_{p \rightarrow 0}$  při pevném indexu  $k$ ,

$$\text{Res.} \left( \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\Delta_1(p)} \cdot e^{pt} \right)_{p \rightarrow 0} = \frac{1}{[\Delta_1(p)]_{p=0}} = \frac{1}{\Delta_1(0)}. \text{ Příspěvek tohoto pólu k řešení je}$$

$$- \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_{12}}{\Delta_1(0)} \right]_k \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right]. \quad (52)$$

Tato řada neobsahuje závislost na čase  $t$  a vyjadřuje proto ustálený (statický) stav.

#### Hodnoty reziduí v pólech daných kořeny rovnice $\Delta_1(p) = 0$ .

Tyto póly musí ležet na imaginární ose Gaussovy roviny a proto kořeny rovnice musí mít tvar  $p = i\alpha\Omega_0$ ,  $\alpha$  jsou kladné reálné veličiny a jsou to zmíněné hodnoty vlastních

frekvencí.  $\alpha$  dostáváme z anulovaného determinantu (30), když do něj dosadíme  $p = i\alpha\Omega_0$

$$\begin{vmatrix} (A_{11} - \alpha^2) & A_{12} \\ A_{21} & (A_{22} - \alpha^2) \end{vmatrix}_{n,k} = 0. \quad (53)$$

Tato rovnice je bikvadratická, kořeny necht' jsou  $\pm\alpha_1$  a  $\pm\alpha_2$ . Např. pro kořen  $+\alpha_1$  je reziduum dáno vztahem

$$\begin{aligned} \operatorname{Rez}\left[\frac{e^{pt}}{p\Delta_1(p)}\right]_{p=i\alpha_1\Omega_0} &= e^{i\alpha_1\Omega_0 t} \cdot \operatorname{Rez}\left[\frac{1}{p\Delta_1(p)}\right]_{p=i\alpha_1\Omega_0} = \\ &= e^{i\alpha_1\Omega_0 t} \lim_{p \rightarrow i\alpha_1\Omega_0} \left[\frac{(p-i\alpha_1\Omega_0)}{p\Delta_1(p)}\right] \quad 6 \quad e^{i\alpha_1\Omega_0 t} \left[\frac{1}{\Delta_1(p) + p \frac{\partial \Delta_1(p)}{\partial p}}\right]_{p=i\alpha_1\Omega_0} = \\ &= \frac{e^{i\alpha_1\Omega_0 t}}{(i\alpha_1\Omega_0) \frac{2(i\alpha_1\Omega_0)}{\Omega_0^2} [A_{11} + A_{22} + 2(i\alpha_1)^2]} \quad 7 \quad \frac{e^{i\alpha_1\Omega_0 t}}{-2\alpha_1^2 (A_{11} + A_{22} + 2\alpha_1^2)}. \end{aligned} \quad (54)$$

Stejným postupem dostaneme reziduum pro kořen  $-\alpha_1$

$$= \frac{e^{-i\alpha_1\Omega_0 t}}{-2\alpha_1^2 (A_{11} + A_{22} + 2\alpha_1^2)}. \quad (55)$$

Příspěvek kořenů  $p = +i\alpha_1\Omega_0$  a  $p = -i\alpha_1\Omega_0$  k řešení je dán součtem vztahů (54) a (55)

$$= - \frac{\cos(\alpha_1\Omega_0 t)}{\alpha_1^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_1^2)}.$$

Stejným postupem dostaneme pro druhou dvojici kořenů  $p = \pm i\alpha_2\Omega_0$  následující příspěvek

<sup>6</sup> Užijeme L'Hospitalova pravidla.

<sup>7</sup> Viz vztah (50).

$$= - \frac{\cos(\alpha_2 \Omega_0 t)}{\alpha_2^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_2^2)}.$$

Celkový příspěvek singularit daných kořeny rovnice (53) je

$$+ \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\cos(\alpha_1 \Omega_0 t)}{\alpha_1^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_1^2)} + \frac{\cos(\alpha_2 \Omega_0 t)}{\alpha_2^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_2^2)} \right]_k \frac{[A_{12}]_k \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right]. \quad (56)$$

Výsledek zpětné transformace prvního členu "obrazu" (47) je dán součtem vztahů (52) a (56).

Zpětná transformace druhé části "obrazu" (47)

Singularity v Gaussově rovině jsou jednoduché póly, jejich poloha je dána vztahy  $p = 0$  a  $\Delta_2(p) = 0$ . Příspěvek řešení plynoucí z pólu  $p = 0$  je

$$+ \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22})}{\Delta_2(0)} \right]_{n,k} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cos(n\varphi) \cdot \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right]. \quad (57)$$

Příspěvky reziduí v pólech daných kořeny rovnice  $\Delta_2(p) = 0$ ; póly musí ležet na imaginární ose Gaussovy roviny a proto kořeny rovnice  $\Delta_2(p) = 0$  musí mít tvar  $p = i\beta\Omega_0$  ( $\beta$  jsou hodnoty vlastních frekvencí).  $\beta$  najdeme z anulovaného determinantu (39), když do něho dosadíme  $p = i\beta\Omega_0$

$$[\Delta_2(\beta)]_{n,k} = \begin{vmatrix} (B_{11} - \beta^2) & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & (B_{22} - \beta^2) & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & (B_{33} - \beta^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (58)$$

Rovnice (58) je bikubická pro neznámé  $\beta$ . Má tři dvojice kořenů  $\pm\beta_1, \pm\beta_2$  a  $\pm\beta_3$ ; jsou vesměs reálné a kladné. Reziduum např. pro kořen  $+\beta_1$  bude (viz rovnice (41)) při pevném  $k$  a  $n$ :



$$\begin{aligned}
& \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \operatorname{Rez} \left\{ \frac{e^{pt} \left[ B_{12}B_{23} - B_{13} \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega^2} \right) \right]}{p\Delta_2(p)} \right\} = \\
& = \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot e^{+i\beta_1\Omega_0 t} \left\{ \frac{(p - i\beta_1\Omega_0) \left[ B_{12}B_{23} - B_{13} \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right) \right]}{p\Delta_2(p)} \right\} = \\
& = \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos[n\alpha_0]}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot e^{+i\beta_1\Omega_0 t} \left\{ \frac{B_{12}B_{23} - B_{13} \left( B_{22} + \frac{p^2}{\Omega_0^2} \right)}{\Delta_2(p) + p \frac{\partial \Delta_2(p)}{\partial p}} \right\} = \\
& = \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot e^{+i\beta_1\Omega_0 t} \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} + B_{13}\beta_1^2)}{(i\beta_1\Omega_0) \cdot \frac{2(i\beta_1\Omega_0)}{\Omega_0^2} \cdot \Gamma_1(\beta_1)} \quad ^8 \\
& = \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} + B_{13}\beta_1^2)}{-2\beta_1^2 \cdot \Gamma_1(\beta_1)} \cdot e^{+i\beta_1\Omega_0 t}
\end{aligned} \tag{59}$$

Stejnou cestou najdeme pro druhý kořen  $p = -i\beta_1\Omega_0$

$$= \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} + B_{13}\beta_1^2)}{-2\beta_1^2 \cdot \Gamma_1(\beta_1)} \cdot e^{-i\beta_1\Omega_0 t} \tag{60}$$

Príspevek dvojice pólů  $p = \begin{cases} i\beta_1\Omega_0 \\ -i\beta_1\Omega_0 \end{cases}$  je (při pevném  $n$  a  $k$ ) dán sloučením vztahů

(59) a (60)

<sup>8</sup> Viz rovnice (51).

$$= - \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} + B_{13}\beta_1^2)}{\beta_1^2 \Gamma_1(\beta_1)} \cdot \cos(\beta_1 \Omega_0 t). \quad (61)$$

Dále se ukáže být výhodné zavést veličinu  $\Gamma_s(\beta_s)$  vztahem (viz rovnice (51))

$$\Gamma_s(\beta_s) = (B_{22} - \beta_s^2)(B_{33} - \beta_s^2) + (B_{11} - \beta_s^2)(B_{33} - \beta_s^2) + (B_{11} - \beta_s^2) \cdot (B_{22} - \beta_s^2) - (B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2). \quad (62)$$

Pro další dvě dvojice kořenů rovnice (58) je postup úplně stejný jako pro kořeny  $\pm\beta_1$ . Celkově je tedy příspěvek všech šesti kořenů k řešení (při pevných indexech  $n$  a  $k$ ) dán vztahem

$$= - \frac{8q_0}{\pi^2} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \left[ \sum_{s=1}^3 \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} + B_{13}\beta_s^2)}{\beta_s^2 \Gamma_s(\beta_s)} \cos(\beta_s \Omega_0 t) \right]_{n,k}. \quad (63)$$

Pro všechny indexy  $n$  a  $k$  dostáváme

$$= - \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \left[ \sum_{s=1}^3 \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} + B_{13}\beta_s^2)}{\beta_s^2 \Gamma_s(\beta_s)} \right]_{n,k} \cdot \cos(\beta_s \Omega_0 t) \cdot \cos(n\varphi) \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right]. \quad (64)$$

Celý vztah pro posuv  $u_z(z, \varphi, t)$  je dán součtem vztahů (52), (56), (57) a (64):

$$u_z(z, \varphi, t) \Omega_0^2 = - \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_{12}}{\Delta_1(0)} \right]_k \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right] +$$

$$+ \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22})}{\Delta_2(0)} \right]_{n,k} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[1 - \left(\frac{2\alpha_0}{\pi}\right)^2 n^2\right]} \cdot \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{a}{L}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)^2 (2k-1)^2\right]} \cdot \cos(n\varphi) \cdot$$

$$\cdot \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\left(\frac{z}{L}\right)\right] + \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\cos(\alpha_1 t)}{\alpha_1^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_1^2)} + \frac{\cos(\alpha_2 t)}{\alpha_2^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_2^2)} \right]_k.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{[A_{12}]_k \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] - \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \\
& \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \left[ \sum_{s=1}^3 \frac{(B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22} + B_{13}\beta_s^2)}{\beta_s^2 \Gamma_s(\beta_s)} \cos(\beta_s \Omega_0 t) \right]_{n,k} \cdot \cos(n\varphi) \cdot \\
& \cdot \sin \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] . \tag{65}
\end{aligned}$$

Pro další dva posuvy stejnými postupy dostaneme

$$\begin{aligned}
u_{\varphi}(z, \varphi, t) \Omega_0^2 = & - \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \left[ \frac{(B_{23}B_{11} - B_{21}B_{13})}{\Delta_2(0)} \right]_{n,k} \\
& \cdot \sin(n\varphi) \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] + \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \\
& \cdot \left[ \sum_{s=1}^3 \frac{(B_{23}B_{11} - B_{21}B_{13} - B_{23}\beta_s^2)}{\beta_s^2 \Gamma(\beta_s)} \cos(\beta_s \Omega_0 t) \right]_{n,k} \sin(n\varphi) \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] . \tag{66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_r(z, \varphi, t) \Omega_0^2 = & \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_{11}}{\Delta_1(0)} \right]_k \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] + \\
& + \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{\Delta_2(0)} \right]_{n,k} \cdot \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cos(n\varphi) \cdot \\
& \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] - \frac{4q_0}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(A_{11} - \alpha_1^2) \cos(\alpha_1 t)}{\alpha_1^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_1^2)} + \frac{(A_{11} - \alpha_2^2) \cos(\alpha_2 t)}{\alpha_2^2 (A_{11} + A_{22} - 2\alpha_2^2)} \right]_k \\
& \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] - \frac{8q_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} .
\end{aligned}$$

$$\cdot \left[ \sum_{s=1}^3 \frac{[(B_{11}-\beta_s^2)(B_{22}-\beta_s^2)-B_{12}^2]}{\beta_s^2 \Gamma_s(\beta_s)} \cdot \cos(\beta_s \Omega_0 t) \right]_{n,k} \cdot \cos(n\varphi) \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \cdot$$

(67)

## 5. ZÁVĚR

Ve výzkumné zprávě je vyřešeno nestacionární chování tenkostěnné skořepiny radiálně rázově zatížené normálovým napětím na malé čtvercové ploše. Rozložení má tvar poloviny kosinusovky. Tímto zatížením se má simulovat porucha v určitém místě skořepiny. Výpočtový model skořepiny respektuje její membránovou i ohybovou napjatost. Není respektována rotační setrvačnost hmotných prvků skořepiny ani vliv posouvajících sil. Výsledkem jsou vztahy pro tři složky posuvů  $u_z$ ,  $u_\varphi$  a  $u_r$  ve válcové soustavě souřadnic. Vztahy pro ohybové momenty a síly v průřezích počítány nebyly vzhledem k tomu, že užitá teorie není dostačující pro jejich výpočet.

### Zadávací veličiny nutné pro výpočet

Geometrické údaje skořepiny:  $\frac{R}{L}, \frac{h}{R}, \frac{a}{L}, \alpha_0 = \frac{a}{R}$

Materiálové hodnoty:  $\Omega_0 = \frac{c_3}{R}, \mu$

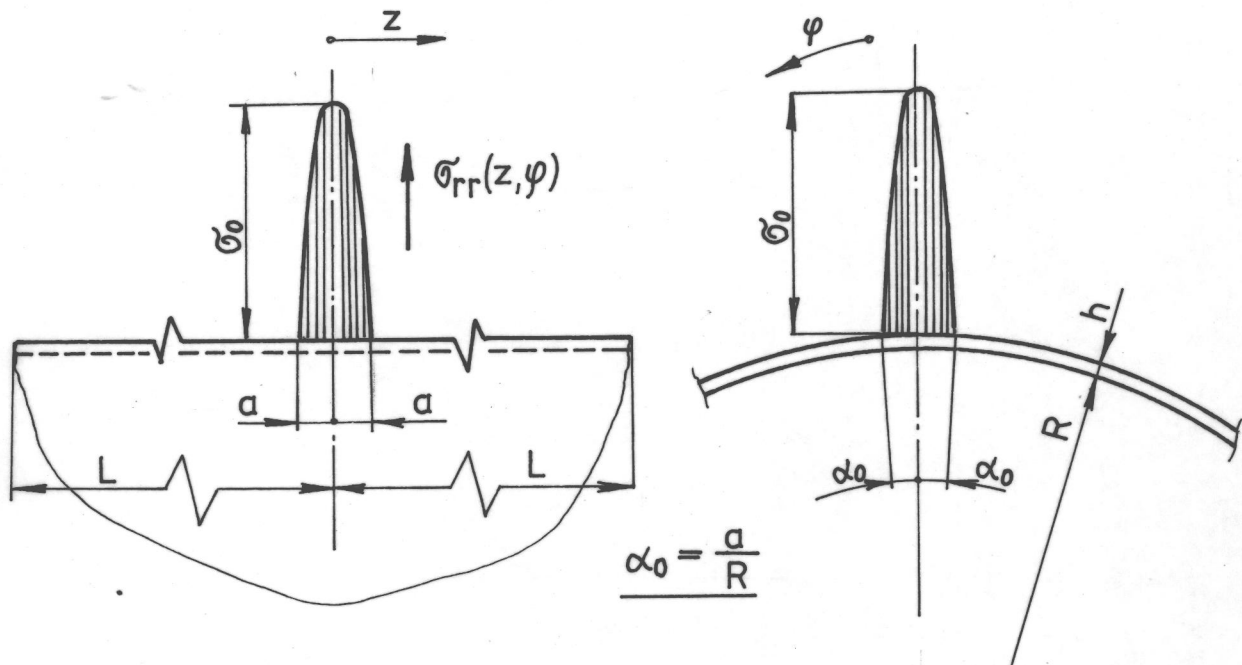
Lze přímo počítat veličiny:  $u_z \Omega_0^2 / q_0, u_\varphi \Omega_0^2 / q_0, u_r \Omega_0^2 / q_0$ .

## 6. POUŽITÁ LITERATURA

- /1/ Shirakawa, K., Asano, K.: Dynamic Response of Cylindrical Shells to Concentrated Impact Load.  
Bulletin of the JSME, 21(1978), str. 189
- /2/ Sanders, J. L.: An Improved First Approximation Theory for Thin Shells.  
NASA, TR-R24, 1959

## 7. PŘÍLOHA

## Rozvoj vnější zatížení skořepiny v řadu vlastních funkcí



OBR. I

Osamělou vnější zatěžující sílu nahrazujeme radiálním normálovým napětím  $\sigma_{rr}(z, \varphi)$ , působícím na malém čtverci o hranách rovných  $2a$ , viz obr. I. O rozložení napětí na tomto čtverci předpokládáme, že je lze vyjádřit součinem dvou kosinových funkcí

$$\sigma_{rr}(z, \varphi) = \underbrace{\sigma_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\varphi}{\alpha_0}\right)}_{\Phi(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{a}\right)}_{\Psi(z)}$$

$$\varphi \in \langle -\alpha_0, +\alpha_0 \rangle$$

$$z \in \langle -a, +a \rangle.$$

(1)

Dva ortogonální řezy plochou danou vztahem (1) jsou na obr. I. Funkcí (1) na intervalu  $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$  a  $-L \leq z \leq +L$  máme vyjádřit dvojnou řadou utvořenou z vlastních funkcí pro složku posuvu  $u_r$ , viz poslední vztah (19).

Lze postupovat tak, že se najdou oddělené jednoduché řady pro funkci jen proměnné  $\varphi$  a jen funkci proměnné  $z$ . Součin těchto řad je pak hledaná dvojná řada.

Řada pro funkci  $\Phi(\varphi)$  je běžná Fourierova řada s konstantním členem

$$\Phi(\varphi) = \sigma_0 \frac{2\alpha_0}{\pi^2} + \frac{\sigma_0}{\alpha_0} \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cos(n\varphi).$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

(2)

Řada pro funkci  $\Psi(z)$  je vytvořena z části vlastní funkce (viz poslední vztah (19)) a má tedy předpokládaný tvar

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] = \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{a} \right)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, -a \leq z \leq a.$$

(3)

Výpočet neznámých koeficientů  $B_k$  se provede běžným postupem

$$\int_{-a}^{+a} \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{a} \right) \cos \left[ \frac{(2s-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] dz = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \underbrace{\int_{-L}^{+L} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \cos \left[ \frac{(2s-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] dz}_{}$$

Pro  $s \neq k$  se rovná nule

Pro  $s = k$  se rovná  $B_k \cdot L$ .

Proto je

$$B_k = \frac{4}{\pi} \left( \frac{a}{L} \right) \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \pi \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]}.$$

(4)

Spojením vztahů (2), (3) a (4) dostáváme hledanou řadu

$$\sigma_{rr} = \frac{8}{\pi^3} \left( \frac{a}{L} \right) \sigma_0 \alpha_0 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha_0)}{\left[ 1 - \left( \frac{2\alpha_0}{\pi} \right)^2 n^2 \right]} \cdot \cos(n\varphi) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \right]}{\left[ 1 - \left( \frac{a}{L} \right)^2 (2k-1)^2 \right]} \cdot \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \left( \frac{z}{L} \right) \right] \right\}.$$

(5)

Aby byla přesnost "ve směru"  $\varphi$  stejná jako "ve směru"  $Z$ , musí být mezi "horními" sčítacími indexy řad  $n_{\infty}$  a  $k_{\infty}$  splněn vztah

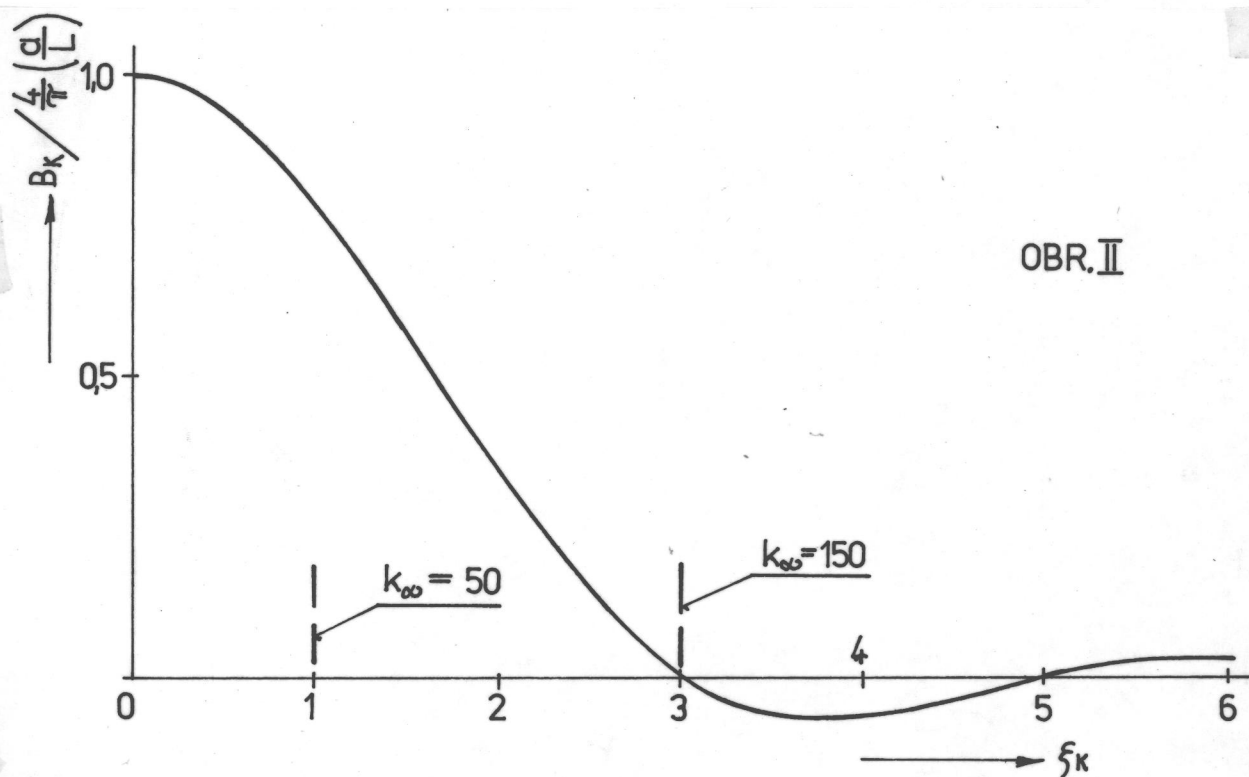
$$n_{\infty} = \pi \left( \frac{R}{L} \right) k_{\infty}$$

Důležitý je horní sčítací index řad  $k_{\infty}$  vzhledem k požadované přesnosti. Vztahy pro koeficienty řad (viz rovnice (4) a (2)) jsou principiálně shodné, proto postup pro odhad horního sčítacího indexu předvedeme na vztahu (4), který napíšeme ve tvaru

$$B_k / \frac{A}{\pi} \left( \frac{a}{L} \right) = \frac{\cos \left[ \zeta_k \left( \frac{\pi}{2} \right) \right]}{1 - \zeta_k^2}$$

$$\zeta_k = \left( \frac{a}{L} \right) (2k - 1).$$

Graficky je tato závislost uvedena na obr. II., který platí pro všechny hodnoty poměru  $a/L$ <sup>9</sup> Pro hodnotu poměru  $a/L = 1/100$  jsou uvedeny dva průběhy součtu řady (3) na obr. III., které předvádějí míru shody mezi součty řady a danou funkcí. Je vidět, že k přijatelné shodě je zapotřebí respektovat u  $\zeta_n$  oblast alespoň v intervalu  $0 \leq \zeta_n \leq 3,0$ .



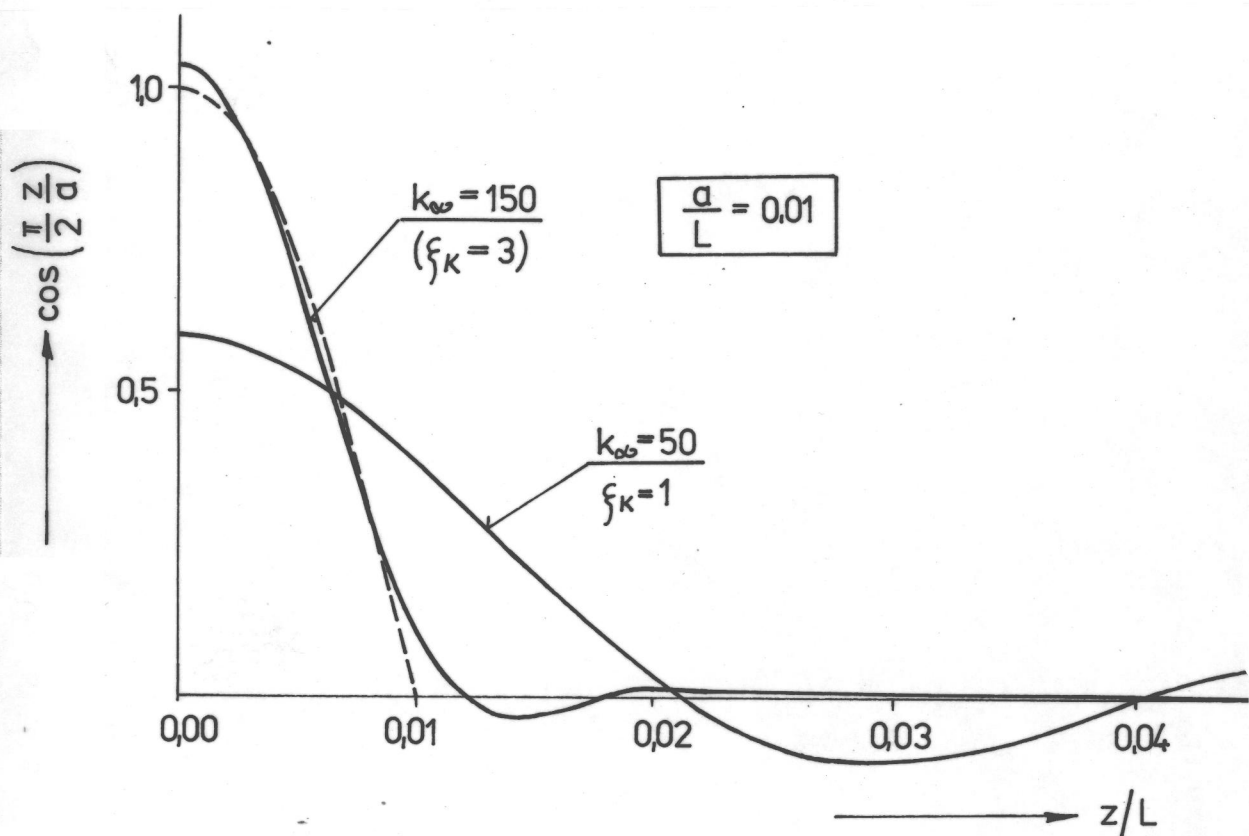
<sup>9</sup> Je kreslena spojitá křivka, ve skutečnosti se jedná o soubor izolovaných hodnot (bodů), které na křivce leží.



Poznámka:

Nesmíme ovšem zapomínat, že vyjadřujeme průběh napětí. Protože však naše řešení v této výzkumné zprávě se omezuje na vztahy pro složky posuvu, je dosti pravděpodobné, že vystačíme s menším počtem sčítanců v řadách.

Již ve vzdálenosti  $z/L = 2a/L$  je hodnota funkce prakticky nulová. V tabulce<sup>10</sup> jsou uvedeny hodnoty součtů řad také pro další hodnoty  $k_{\infty} = 350$  a  $1000$ , což odpovídá hodnotám  $\zeta_k = 7$  a  $20$ . Ze srovnání s přesnými hodnotami funkce vyplývá, že rozdíly jsou zcela nepodstatné - místy skryty v tloušťce čáry grafu. Proto nebyly na obr. III. vynášeny.



OBR. III

$a/L = 0,01$					
$z/L$	$k_{\infty} = 50$ $(a/L)(2k-1) \doteq 1,0$	$k_{\infty} = 150$ $(a/L)(2k-1) \doteq 3,0$	$k_{\infty} = 350$ $(a/L)(2k-1) \doteq 7,0$	$k_{\infty} = 1000$ $(a/L)(2k-1) \doteq 20$	$\cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)$
0,000	0,5896	1,041	1,008	1,000	1,000
0,001	0,5873	1,023	0,9912	0,9876	0,98769
0,002	0,5805	0,9715	0,9457	0,9512	0,95106
0,005	0,5344	0,6638	0,7157	0,7070	0,70711
0,008	0,4549	0,2928	0,2920	0,3097	0,30902
0,009	0,4225	0,1907	0,1480	0,1546	0,15643
0,01	0,3880	0,1077	0,04563	0,01597	0,0000
0,011	0,3518	0,04544	-0,004738	-0,001839	0,0000
0,012	0,3143	0,003502	-0,01363	0,0006924	0,0000
0,013	0,2761	-0,02025	-0,003528	-0,0002994	0,0000
0,014	0,2377	-0,02924	0,005531	0,0002224	0,0000
0,015	0,1995	-0,02762	0,005591	-0,0001064	0,0000
0,017	0,1258	-0,009088	-0,003722	-0,0000547	0,0000
0,020	0,02816	0,01230	0,002632	0,0000363	0,0000
0,022	-0,02433	0,01009	-0,0008876	0,0000159	0,0000
0,025	-0,07983	-0,003295	0,0008832	-0,00004102	0,0000
0,030	-0,1078	-0,001926	-0,0001755	-0,0000223	0,0000
0,040	-0,006463	-0,003149	-0,0005563	-0,0000056	0,0000
0,050	0,06408	0,0004277	0,00006602	0,0000367	0,0000
0,100	0,0009968	0,0005042	0,0000848	0,0000014	0,0000
0,150	-0,02145	-0,0000474	-0,0000340	-0,0000321	0,0000
0,200	-0,0002406	-0,0001245	-0,0000208	0,00000082	0,0000

## 8. DODATEK

Reziduum  $\mathcal{L}$ -obrazu funkce s násobným pólem

Nechť je  $F(p)$   $\mathcal{L}$ -obraz s násobným pólem. Pro naše úvahy postačí předpokládat pól řádu dvě. Pak má  $F(p)$  Laurentův rozvoj - pro pól v místě  $p_k$ :

$$F(p) = \frac{A_{-2}}{(p-p_k)^2} + \frac{A_{-1}}{(p-p_k)} + A_0 + A_1(p-p_k) + A_2(p-p_k)^2 + \dots$$

Reziduum výrazu  $F(p) \cdot e^{pt}$  v pólu je dáno vztahem

$$\text{Rez} \left\{ \left[ \frac{A_{-2}}{(p-p_k)^2} + \frac{A_{-1}}{(p-p_k)} + A_0 + A_1(p-p_k) + A_2(p-p_k)^2 + \dots \right] e^{pt} \right\}_{p=p_k}$$

Substitucí  $p - p_k = \zeta$  se řada převede na tvar

$$\text{Rez} \left[ \left( \frac{A_{-2}}{\zeta^2} + \frac{A_{-1}}{\zeta} + A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \dots \right) e^{\zeta t} \right]_{\zeta=0} e^{p_k t}$$

$$\begin{aligned} \text{Rez} &= e^{p_k t} \left( \frac{A_{-2}}{\zeta^2} + \frac{A_{-1}}{\zeta} + A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \dots \right) \left( 1 + \zeta t + \frac{\zeta^2}{2} t^2 + \dots \right) = \\ &= e^{p_k t} \left[ \frac{A_{-2}}{\zeta^2} + \underbrace{(A_{-1} + A_{-2}t)}_{= \text{Rez}} \frac{1}{\zeta} + \left( A_0 + A_{-1}t + \frac{A_{-2}}{2} t^2 \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\text{Rez} = A_{-1} e^{p_k t} + A_{-2} t e^{p_k t}.$$

Z výsledku plyne, že  $A_{-1}$  je reziduum jen funkce  $F(p)$ . Druhý člen ovšem obsahuje "rozbíhající" (divergující) funkci času  $A_{-2}t$ . Z fyzikálního důvodu není možné, aby výchylky radiálně zatížené skořepiny s pevnými okraji narůstaly bez omezení s časem. Musí proto být  $A_{-2} = 0$ , čili  $F(p)$  může mít jen jednoduché póly!