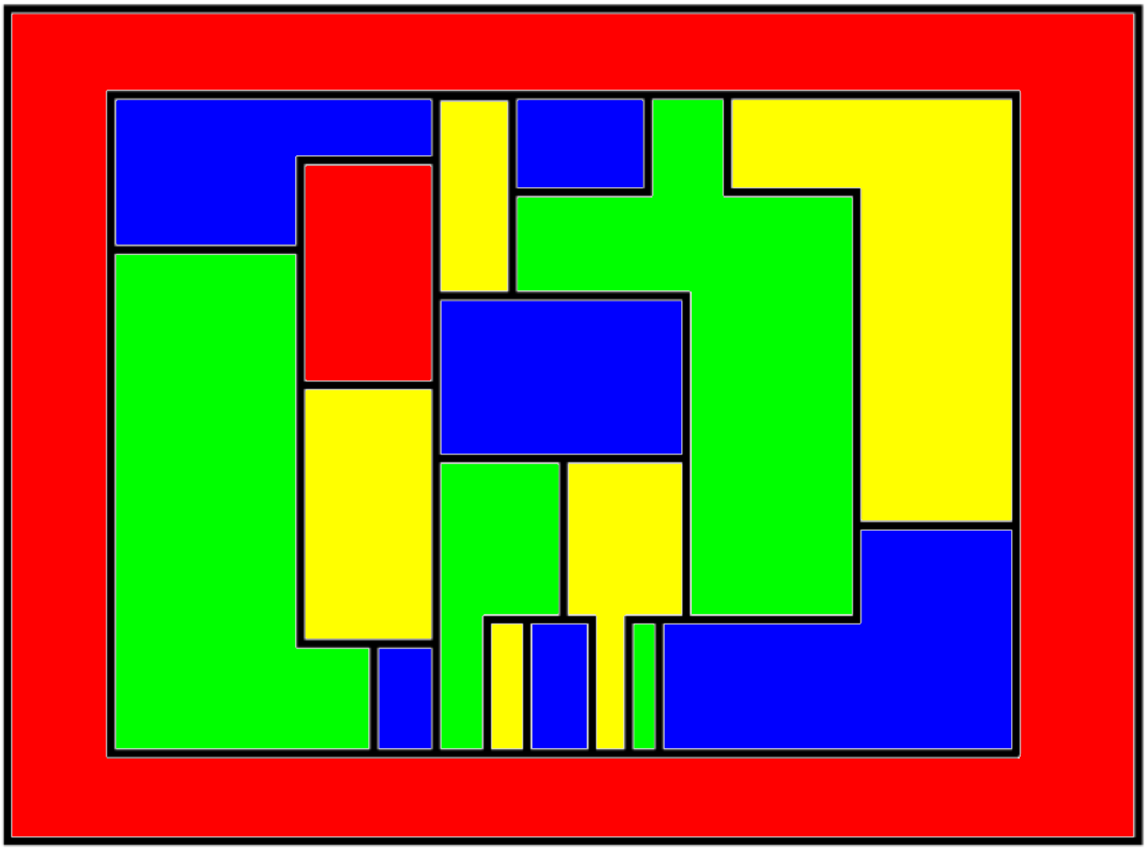

Con sólo 4 colores

Carlos Velázquez

El 21 de junio de 1976 un par de matemáticos, Kenneth Apple y Wolfgang Haken de la Universidad de Illinois, anunciaron que habían demostrado la hipótesis de los cuatro colores con ayuda de una computadora. Como si hubieran presentado un nuevo proyecto de ley en la Cámara de Diputados, se desató de inmediato una gran discusión. Muchos aplaudieron la demostración y pudieron dormir en paz sabiendo que la endemoniada hipótesis era verdadera, mientras que otros quedaron escandalizados de que se aceptara como cierto el primer teorema matemático que ningún ser humano podía verificar a mano. Así comenzó una tormenta que persiste hasta este momento en que lees este artículo, y así seguirá por mucho tiempo; así que no te extrañe que tus matemáticos de cabecera estén en conflictos. Pero seguramente ya te estarás preguntando qué demonios es el teorema de los cuatro colores. Y dado que ha adquirido una dimensión mítica, lo mejor que podemos hacer es explicar cómo se inició.

En un oscuro lugar de Inglaterra de cuyo nombre no quiero acordarme...

En tiempos decimonónicos, un héroe anónimo se aburría mortalmente durante sus clases de derecho. Se trataba de un personaje multifacético que fue célebre en todas las áreas que pisó, ya que sobrándole entusiasmo, tiempo y recursos, logró titularse de matemático, abogado y botánico. No puedo mantener por más tiempo en secreto el nombre de este hombre que solía aburrirse como ostra en sus clases de derecho y gracias a lo cual trascendió en la historia: se trata de Francis Guthrie quien solía pasar esas horas de aburrimiento en el salón pintando mapas de los condados de Inglaterra. No se sabe por qué pero en estos dibujos se puso un pequeño reto: pintar los condados del mapa usando el menor número posible de colores y cuidando que los que fueran colindantes tuvieran un color distinto. Como suele suceder, su ocio degeneró en una hipótesis matemática ya que se dio cuenta de que con cuatro colores siempre era capaz de pintar el mapa siguiendo esta regla (figura 1). Fue entonces que se percató del lado claro de la hipótesis de los cuatro colores, pero en su afán también cometió el peor de los errores: trató de demostrarla matemáticamente.

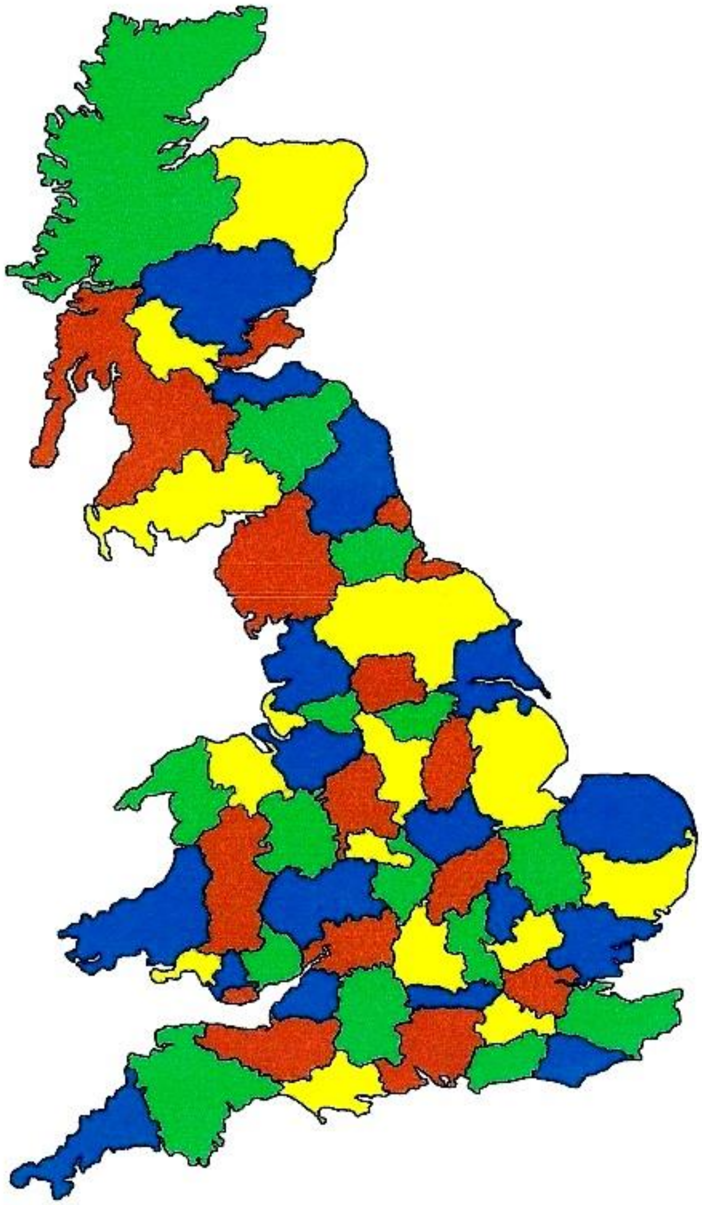

Figura 1. Mapa de los condados de Inglaterra pintado correctamente con cuatro colores. Imagen de: Robin Wilson. *Four color suffice.* Princenton Science Library.

Demostrar con matemáticas quiere decir verificar la validez de un enunciado que llamamos hipótesis, deduciéndolo a partir de otros enunciados que sabemos que son ciertos. Los enunciados que ya sabemos que son ciertos, se derivan a su vez de otros enunciados verdaderos, a los que llamamos teoremas, y si son el tipo de enunciados que creemos que son ciertos de manera evidente, los llamamos axiomas. Si tu mente retorcida quiere saber más sobre esto, puedes leer " Pruebas y demostraciones" en Cienciorama. Fue así que Guthrie se convirtió en el primero de una larga cadena de matemáticos frustrados.

Aparentemente sin mala intención, pero realmente disgustado, Guthrie decidió arrojar la maldición de la hipótesis de los cuatro colores a toda la humanidad comunicándola a su hermano, un famoso matemático de aquella época: Augustus De Morgan, quien ahora es mundialmente conocido por un par de teoremas, las Leyes de De Morgan, pero esa es otra historia. De Morgan cayó de inmediato bajo el nocivo encanto del teorema y vio consumirse su existencia sin poder demostrarlo jamás. Pero también actuó como el vector de transmisión más efectivo de la epidemia de los cuatro colores, pues al no poder con el teorema escribió cartas a varios matemáticos famosos de la época y lo publicó en una revista especializada. Esto es sólo una demostración de la “malignidad” de los medios de comunicación. La hipótesis cautivó a todos los que supieron de ella y sólo unos cuantos pudieron ponerse a resguardo de su nociva influencia, por ejemplo Arthur Cayley quien le respondió a De Morgan con una prudencia digna de elogio diciendo: “No podré atender su problema de los cuatro colores en un futuro cercano, sin embargo la epidemia ya se había propagado.

El remedio de los 5 colores

Por varios años la epidemia de los cuatro colores invadió todos los círculos matemáticos. Pero a todo teorema por más pernicioso que sea le llega su hora, o al menos eso pensó Alfred Bray Kempe, cuando en 1879 mandó un célebre artículo al *American Journal of Mathematics* donde decía haberlo demostrado. ¡Victoria! gritaban algunos, el nocivo microbio había sido vencido. Pero esto resultó ser falso porque 11 años después –¡nada más!– un impertinente lector de esta revista llamado Percy John Heawood encontró un error en la demostración de Kempe.

Pero no todo fue contraproducente, las ideas de Kempe le sirvieron a Heawood para mostrar que si bien no se podía decir algo con los cuatro colores, si sumamos un color más a nuestra paleta y usamos cinco, siempre podremos pintar correctamente un mapa. Por otra parte, Kempe tuvo la satisfacción de ver cómo Heawood dedicó toda su vida a intentar resolver el teorema de los cuatro colores sin lograrlo.

Pero impertinencias aparte, por dónde iban las ideas de Kempe. Como en todas las cosas importantes en matemáticas, le dejaremos al lector la verdadera demostración en uno de los textos de las referencias y aquí sólo lo marearemos un poco.

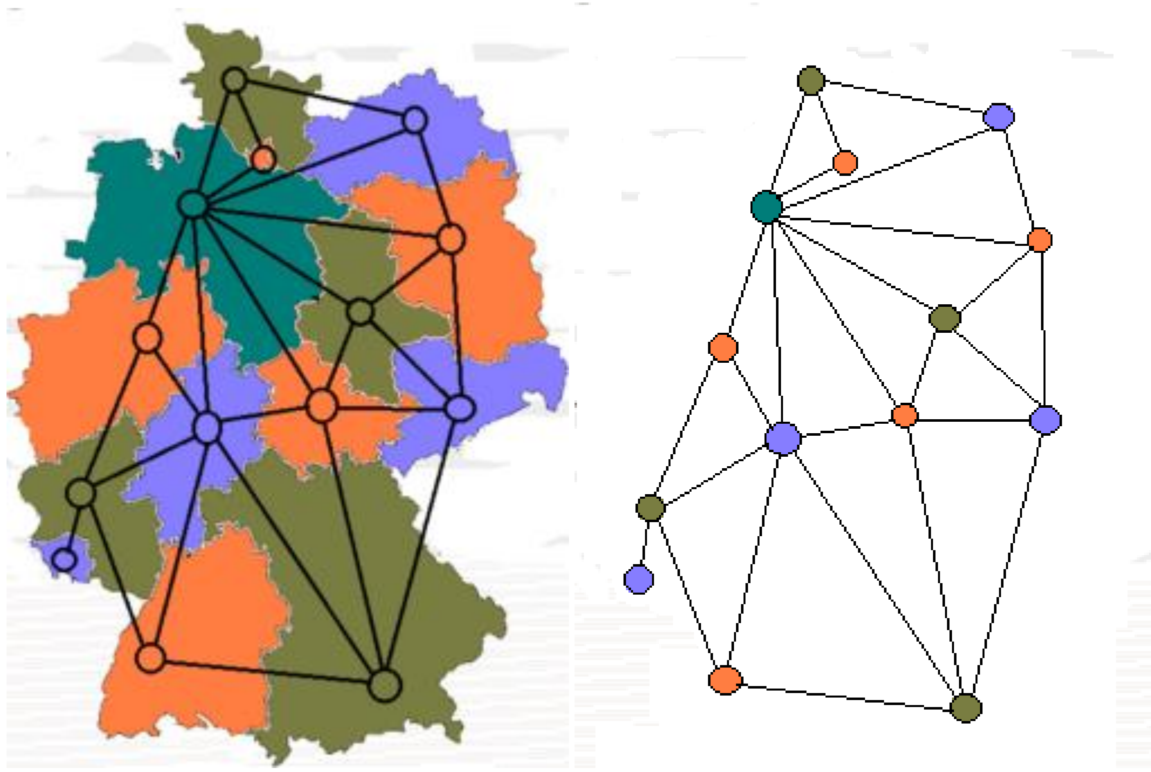

Figura 2. Un mapa de Alemania y su grafo asociado. El grafo es una representación que nos permite concentrarnos en lo realmente importante: las colindancias.
Imágenes de: http://en.citizendium.org/wiki/Four_color_theorem

Comenzaremos diciendo algo que en realidad no hizo Kempe, pero que a nosotros nos facilitará la vida. Observa la figura 2, para empezar elegimos un punto dentro de las regiones del mapa y lo dejamos pintado con el color del país o región, ésta será nuestra nueva representación de los países. Para representar las fronteras simplemente conectamos cada uno de los puntos con líneas, siempre y cuando los países o regiones compartan una frontera. Es como si sustituyéramos a los países por sus capitales y a las fronteras por las carreteras que van de país a país. Obviamente sólo puede haber carreteras entre dos países cuando hay una frontera común. Una vez que hemos obtenido este esquema, podemos variar la longitud de las aristas que unen los puntos, ya que esto no varía las fronteras que representan (figura 3).

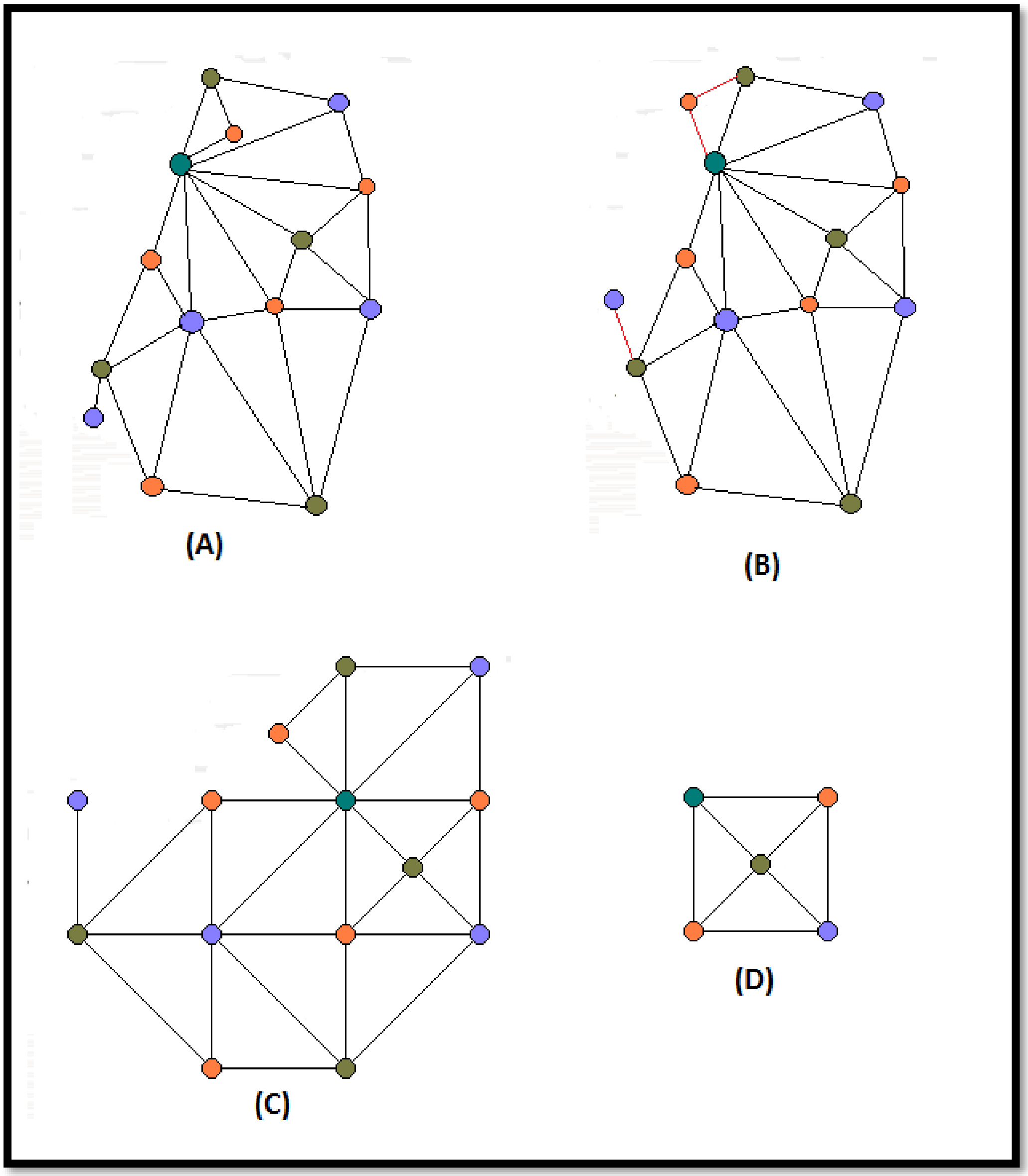

Figura 3. Transformaciones del grafo del mapa de Alemania. En (A) tenemos el grafo inicial, en (B) hemos hecho una pequeña modificación que hace que las conexiones iniciales no varíen. La figura (C) también es equivalente a (A) y (B). Aunque el mapa de Alemania no es uno de los mapas complicados de Kempe, podemos ver cómo en (C) aparece la figura (D) que es una de las figuras características de Kempe.

¿Adelantamos algo? Sí, porque con este esquema nos concentramos en lo importante, los países y sus colindancias, y nos olvidamos del detalle de cómo son las fronteras, y todo lo que tenemos que hacer es pintar cada punto con un color diferente al color de los puntos que se unen a él y *¡voilà!* A este esquema de puntos y rayas que cualquier infante podría dibujar, los matemáticos lo tienen en alta estima, o más bien eso dicen ya que le pusieron el horrible nombre de grafo. Faltas de gusto aparte, al grafo que se obtiene a partir de un mapa lo conocemos como grafo asociado, y a cada uno de los puntos del grafo los llamamos vértices, en analogía a los vértices de un polígono.

Con estas nociones es más fácil saber qué hizo Kempe. Para empezar demostró que había una clase de mapas que eran más difíciles de colorear que el resto, ya que tienen la mayor cantidad posible de fronteras. Demostró también que si el teorema de los 4 colores es cierto para estos mapas complicados, entonces se cumple para todos los demás mapas… ¿Simple? ¿No?

El siguiente paso es oro puro: Kempe demostró que en todos los mapas complicados –y de hecho también en los otros– existe un país que tiene cinco vecinos o menos. Después demostró que si trazamos el grafo correspondiente a un mapa complicado con más de cuatro países, forzosamente una de las siguientes figuras es parte de su grafo:

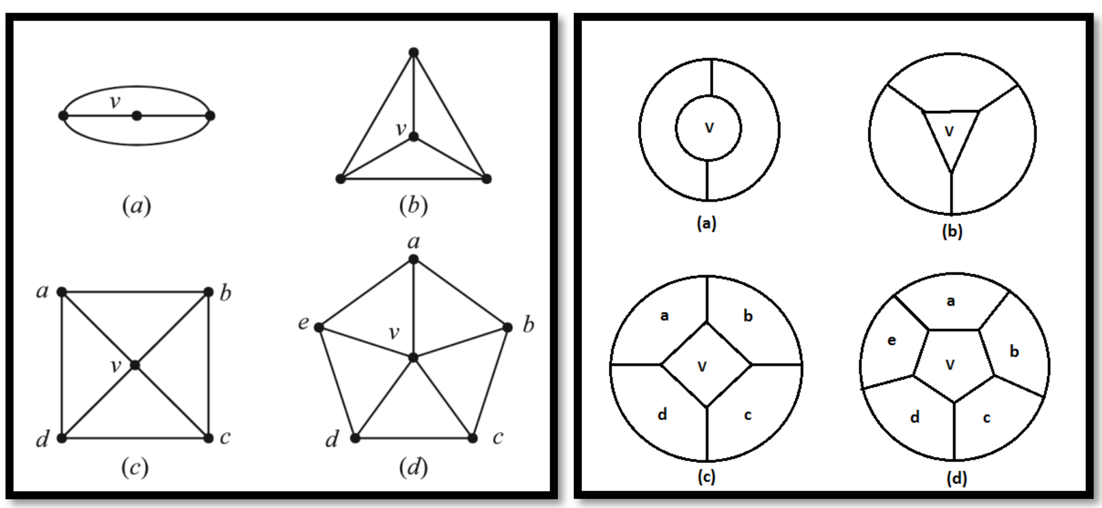

Figura 4. A la izquierda los cuatro grafos que siempre aparecen en los mapas complicados, y a la derecha una representación equivalente en forma de mapas. Ilustración a la izquierda tomada de Alexander Soifer, *The mathematical coloring book,* Spinger.

El vértice v de los grafos en la figura 4, representa al país con cinco o menos vecinos. Hasta aquí todo lo hecho por Kempe es cierto y válido.

Por último, Kempe razonó de esta manera: si los mapas que no se pueden colorear con cuatro colores existen, entonces uno de ellos tiene la menor cantidad de países posible, llamemos a este mapa ***M***. Realmente no importa cuántos países tiene pero para especificar digamos que tiene 100 países. ***M*** tiene un grafo asociado, llamémoslo ***G***.

Pero hasta aquí no hemos hecho nada, ahora viene la acción. Dentro de ***G*** debe haber uno, o quizá más de uno, de los grafos de Kempe (ver parte izquierda de la figura 3), como pasa en todos los mapas. Si dentro de esa parte de ***G*** removemos el vértice ***v*** (figura 4), entonces obtenemos un nuevo grafo, que llamaremos ***g*** con 99 vértices y que está asociado a un nuevo mapa ***m*** con 99 países. Este nuevo mapa con un país menos sí se puede colorear con cuatro colores porque tiene menos países que ***M***, que es el mapa no coloreable con menos países que existe. Por último, Kempe demostró que es posible extender el coloreo del mapa ***m***, para que el mapa original ***M*** pueda ser coloreado con cuatro colores, por lo tanto no pueden existir mapas que no se puedan colorear con cuatro colores ¡Soberbio!

Sin embargo Kempe tuvo razón en el caso de que ***G*** tenga dentro de sí uno de los primeros tres grafos de la figura 4 (casos a, b y c), pero creyó erróneamente que su argumento también era válido en el caso del último grafo (figura 4.d), pero como ya dijimos, Heawood se dio cuenta de que en este caso no se puede asegurar nada a menos que usemos cinco colores ¡Qué fastidio! (Para ver los detalles de la demostración de Kempe te recomiendo que consultes el primer libro de la bibliografía).

La hipótesis invencible

Otro intento muy recordado fue el de Peter Tait, un físico y matemático escocés que contribuyó a campos tan distintos como el electromagnetismo, la termodinámica y la teoría de nudos, aunque no hay forma de saber si su contribución se debe a las corbatas o las matemáticas. En 1880 publicó su propuesta para solucionar la cuestión de los cuatro colores. Esta solución es mucho más sencilla que la de Kempe, pero su argumento también se derrumba al considerar el mismo caso en el que Kempe se equivocó.

El teorema de los 4 colores se fue convirtiendo poco a poco en la mejor ratonera de las matemáticas: todo el que se acercaba a él terminaba atrapado sin poder salir bien librado. Pero los matemáticos también empezaron a visualizar dónde parecía estar el nudo del problema: el conjunto de figuras de Kempe no era el apropiado y había que modificarlo para poner figuras donde éste no se presentara. Éste fue el camino que siguió, a partir de 1955, Heinrich Heesch, un matemático alemán. El método era promisorio pero en su trabajo surgió un problema inesperado: las configuraciones que había que considerar fueron creciendo de modo que la cantidad de trabajo para comprobar la efectividad de cada una de ellas se extendió y extendió. De estas comprobaciones muchas eran relativamente sencillas, así que Heesch pensó que podría hacerlo con ayuda de un esclavo, es decir, un estudiante de doctorado, como suelen llamarse, pero por alguna razón poco clara prefirió usar una computadora.

La polémica demostración

Pero la ciencia es tan vulnerable al capricho de los políticos como todo en este mundo, y justo cuando las investigaciones de Heesch iban viento en popa le suspendieron el apoyo financiero. Esto ocurrió a inicios de 1970 y se quedó como un marinero a punto de descubrir un continente al que le acababan de incautar el barco. Pero como con todo lo bueno que se hace en este mundo, un par de estadounidenses, los polémicos Kenneth Appel y Wolfgang Haken, retomaron su idea para convertirla en algo malvado.

En términos generales la demostración dice que a Kempe sólo se le olvidaron 1,931 configuraciones, de modo que considerando 1,936 casos todo se resuelve de inmediato. Siendo más específicos Appel y Haken demostraron dos cosas:

A) La propiedad de inevitabilidad: si un mapa no se puede colorear con cuatro colores, forzosamente una de estas 1,936 configuraciones (figura 5) está dentro de su grafo asociado; o sea, es inevitable encontrar las configuraciones de Apple y Haken en un mapa que no se pinta con cuatro colores. Esta primera parte de la demostración se hizo casi completamente a mano y el texto correspondiente tenía más de 400 páginas, una minucia.

B) La propiedad de reducibilidad: si un mapa tiene una de las 1,936 configuraciones, entonces podemos encontrar un mapa con un número menor de países que se puede colorear si el mapa original se puede colorear y que no se puede colorear si el mapa original no se puede colorear. ¡Excelente! la trampa está tendida.

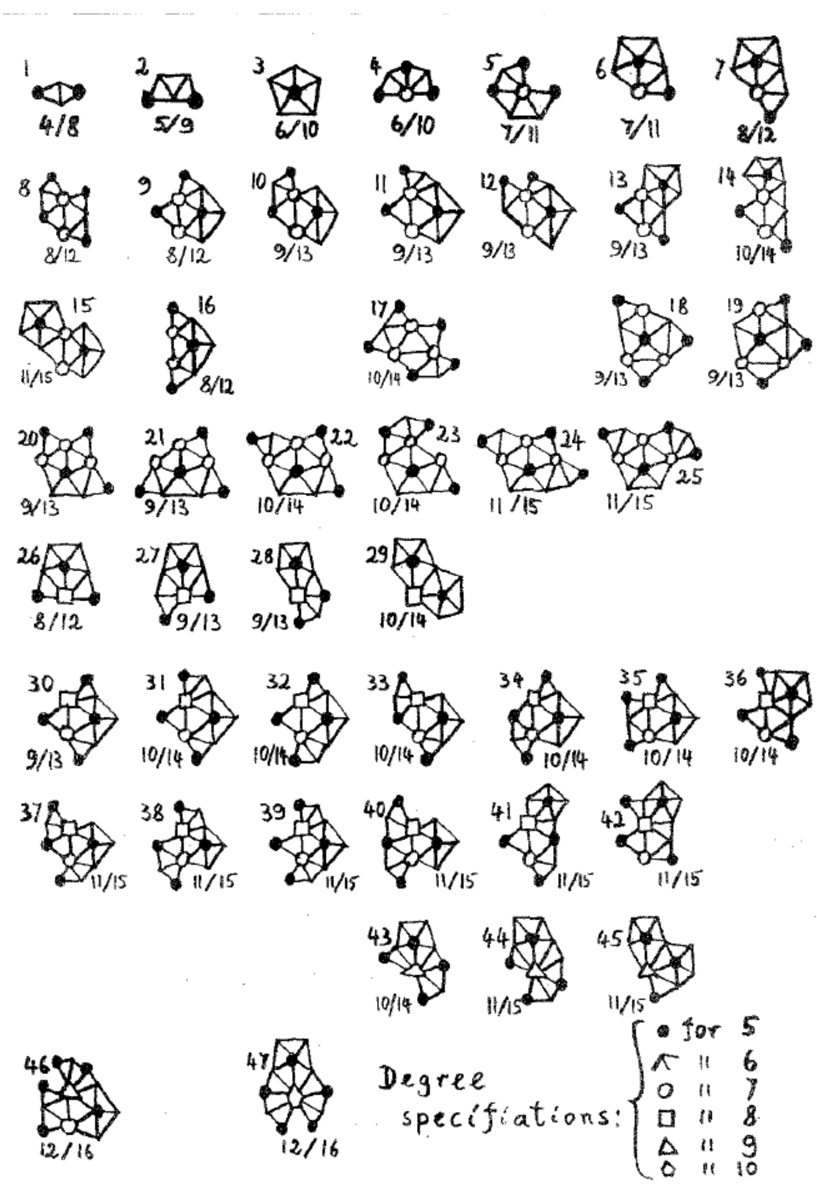

Figura 5. Apariencia de algunas de las nuevas configuraciones de Apple y Haken. Imagen de: K. Appel y W. Haken, “An unavoidable set of configurations in planar triangulations”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B 26, 1-21 (1979.)

A partir de aquí el razonamiento es muy parecido al de Kempe: si los mapas no coloreables con cuatro colores existen entonces hay uno, que llamaremos ***M***, con el menor número de países posibles qué no se puede colorear. Imaginemos que ***M*** tiene 1000 países. Por la propiedad de inevitabilidad, M tiene dentro una de las 1,936 configuraciones de Apple y Haken. Sabiendo esto invocamos la propiedad de reducibilidad que nos asegura que podemos crear un mapa ***m*** de 999 países (o menos) que tampoco se puede colorear con cuatro colores, pero esto es una contradicción porque ***M*** era el mapa no coloreable con menos países posibles. La única manera de evitar la contradicción es darnos cuenta de que el mapa no coloreable con el menor número de países no existe. Fin.

La tormenta

Si alguien tenía la esperanza de que con el trabajo de Appel y Haken se acabarían los problemas estaba muy equivocado. Como si de una película de horror se tratara, al destruir al monstruo malvado, fue liberado su espectro mucho más poderoso y mortífero: ahora había que decidir ¡si la demostración era una demostración!

La polémica no es para menos. Hasta ese momento todas las conjeturas matemáticas habían sido probadas o refutadas con argumentos que cualquiera podría seguir –bueno, en realidad no, ésta sólo sería la frase de un matemático atacado por fiebres –y que en todo caso cabe en unas cuantas hojas. No es que la prueba de Apple y Kenneth careciera de lógica, sino que la cantidad de información en ella es enorme.

¿Qué tan grande es grande? Basta con decir que para comprobar el teorema se necesitaron 1,200 horas de cálculos continuos en la computadora. Además, la sección que se tiene que comprobar a mano tampoco es corta. Cierto, cualquiera puede revisar el código del programa que utilizaron Apple y Haken, pero quién puede asegurar que las computadoras no están manipuladas por alguna agencia de investigación china o brasileña.

Nos podemos dar una idea de la magnitud de la discusión suscitada por el teorema si escuchamos las opiniones de algunos de los más eminentes matemáticos. Martin Gardner dijo en su columna en *Scientific American* en 1980: "Esta prueba es un logro extraordinario…. Sin embargo, para la mayoría de los matemáticos esta prueba del teorema de los cuatro colores es altamente insatisfactoria.” Hubo también llamados más histéricos para desconocer el teorema de los 4 colores, como el de Paul Halmos, quien no dudó al decir:

> [En matemáticas existen las explosiones, y] Por una explosión me refiero a algo que hace un ruido tremendo, a un anuncio inesperado y emocionante, pero no por eso es algo necesariamente bueno. Algunas explosiones nos abren nuevos caminos y nos prometen grandes desarrollos futuros; otras cierran por completo un tema y no nos llevan a ningún lado. La conjetura de Mordell es una explosión del primer tipo, la solución del teorema de los 4 colores es del segundo tipo.

Ésta era una postura compartida por muchos matemáticos que veían en la entrada de las computadoras el fin de ~~su salario~~ las matemáticas clásicas. Sin embargo, la prueba del teorema y el método utilizado por Apple y Kenneth también tuvo apoyo desde un inicio. Uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, Paul Erdós, dijo en 1991:

> Me sentiría mucho más feliz con una prueba del teorema de los 4 colores que no hiciera uso de la computadora, sin embargo, no tengo problema en aceptar la prueba de Appel y Kenneth... los mendigos no se pueden poner a desdeñar.

Al final los matemáticos se han tenido que ir resignando y han inventado excusas como la de Ronald Graham:

> Las cosas que podemos probar deben ser más bien pequeñas islas, tan sólo unas cuantas excepciones, comparado con el vasto mar de los resultados que el pensamiento humano es incapaz de probar por sí solo.

¡Una nueva prueba!... igual de mala

En 1996 cuatro matemáticos, Neil Robertson y Paul Seymour de la Bell Comunications Research, Daniel Sanders de la Universidad de Ohio y Robin Thomas del Instituto Georgiano de Tecnología, crearon un nuevo algoritmo basado en las ideas de Apple y Kenneth en el que introdujeron muchas simplificaciones. Esta prueba demuestra que en lugar de las 1,936 configuraciones basta con tener 633. Esto es algo tan tranquilizador como decirle a un hombre que lo matarán con sólo 600 pedradas en lugar de las 1,600 del decreto del juez.

Desdén aparte, el tiempo de cómputo para esta prueba se redujo de 1,200 a sólo 24 horas y el tiempo estimado para poder comprobar la demostración a mano son seis meses de trabajo continuo y sin descanso...una bagatela.

Como ves, en el simple entretenimiento de un alumno de derecho parece estar resumida la historia de la desgracia de las matemáticas. Como una nota optimista para cerrar toda esta discusión, no me queda más que recordar las palabras que dijo uno de mis más queridos maestros cuando le preguntaron si el fin del mundo comenzaría el 21 de diciembre de 2012: "No, el fin del mundo comenzó el 21 de junio de 1976".

Bibliografía

-Alexander Soifer, *The mathematical coloring book*, Spinger. (aquí puedes ver los detalles de la demostración de Kempe de la página 176 a 186).

-K. Appel y W. Haken, "An unavoidable set of configurations in planar triangulations", *Journal of Combinatorial Theory*, Series B 26, 1-21 (1979)

-Padraic Bartlett, "*A (false) proof of the four color theorem*", UCSB, 2014.

-Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas, "A new proof of the four color theorem", *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society,* Vol. 2, N. 1, 1996.

- Brendan D. McKay, *A note on the history of the four-colour conjecture*, Research School of Computer Science, Australian National University, Canberra, Australia. 2012.

-Pieter Maritz y Sonja Mouton, "Francis Guthrie: A colorful life", The Mathematical Intelligencer, Vol. 34 N. 2, 2012.

-Oscar Leward, "*Graph Theory. The four color theorem*", Department of Mathematics, Upssala University, 2014.

-Jesús Alcolea Banegas, "*Razonamientos no rigurosos y demostraciones asistidas por ordenador. Contrastes*", Revista Internacional de Filosofía, volumen XII (2007).

-Andreea S. Calude, "*The Journey of the four color theorem through time*". New Zealand Mathematical Magazine. 38:3:27-35, 2001.

-Oscar Daniel Lopez Osorio, "*Una formulación equivalente al teorema de los cuatro colores*", Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Facultad de Ciencias, 2009.

Imagen inicial tomada de: http://i.stack.imgur.com/DDSDN.png