

Rozpoznawanie obrazów: Przetwarzanie obrazów

Krzysztof Krawiec

Przetwarzanie i Rozpoznawanie Obrazów

March 16, 2018

Wprowadzenie

Algorytm (funkcja) F przetwarzający obraz to algorytm który, otrzymując na wejściu obraz wejściowy f , na wyjściu zwraca także obraz (g).

$$f \xrightarrow{F} g$$

Uwagi:

- Obraz wynikowy nie musi mieć takich samych rozmiarów od obrazu wejściowego (choć zazwyczaj ma).
- Zazwyczaj zakładamy że $f, g \in [0, 1]$ lub $f, g \in [0, 255]$

- 1 Wprowadzenie
- 2 Przetwarzanie jednopunktowe
 - Przetwarzanie jednopunktowe
 - Operacje arytmetyczne na obrazach
 - Przekształcenia geometryczne
 - Przetwarzanie jednopunktowe obrazów wielokanałowych
- 3 Przetwarzanie splotowe
 - Inne popularne filtry splotowe
 - Uzasadnienie matematyczne dla wybranych filtrów splotowych
- 4 Filtrowanie nieliniowe
- 5 Morfologia matematyczna
 - Morfologia matematyczna binarna
 - Morfologia obrazów z gradacją stopni szarości
- 6 Przetwarzanie obrazów w dziedzinie częstotliwości
 - Wprowadzenie
 - Przykłady

Przetwarzanie jednopunktowe

Przetwarzanie jednopunktowe

Przetwarzanie jednopunktowe

Właściwość: jasność g punktu wynikowego zależy jedynie od jasności f odpowiedniego punktu w obrazie źródłowym.

$$g(x,y) = F(f(x,y))$$

Zalety:

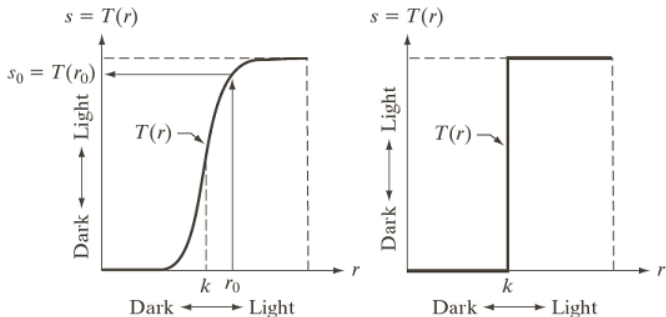
- łatwe w implementacji,
- może być zrealizowane 'in place',
- bardzo dobrze się zrównoległa,
- szybkie w działaniu,

Wady:

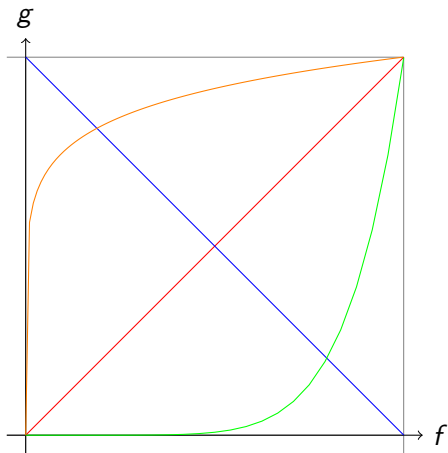
- Ignoruje charakterystykę przestrzenną obrazu

Ponieważ F ma skończoną dziedzinę, technicznie dogodnie jest zrealizować ją jako tablicę adresowaną zawartością (*look-up table* - w wielu programach takie operacje są właśnie tak nazywane).

Wizualizacja funkcji F (inaczej: zawartości tablicy F):



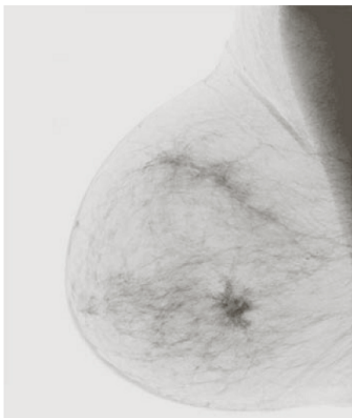
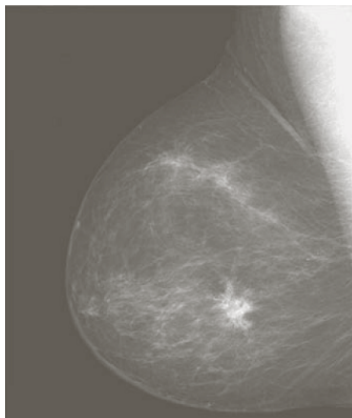
Typowe przekształcenia F



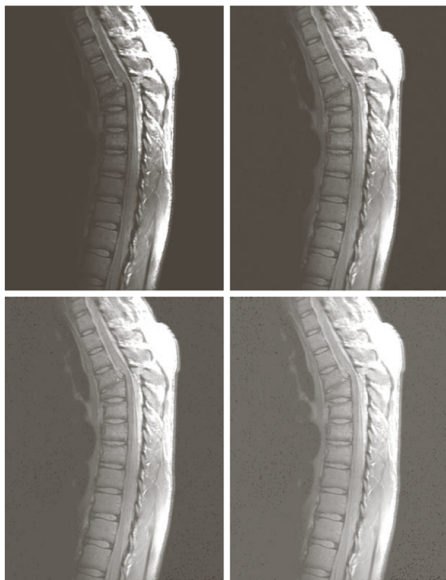
Uwagi:

- większość „rozsądnych” przekształceń F jest ma monotoniczną (niekoniecznie ściśle) charakterystykę
- z racji dyskretnego charakteru dziedziny i przeciwdziedziny F większość praktycznie stosowanych funkcji F prowadzi do utraty informacji; dokładniej:
 - F różnowartościowe \Rightarrow brak utraty informacji, przetwarzanie bezstratne (istnieje transformata odwrotna F^{-1})
 - F nieróżnowartościowe \Rightarrow utrata informacji nieunikniona (brak przekształcenia odwrotnego)
- jeżeli celem przetwarzania jest jedynie wizualizacja, przetwarzanie jednopunktowe da się efektywnie zaimplementować jako manipulacje na paletce barw.

Przykład: negatyw



Przykład: złamanie kręgosłupa



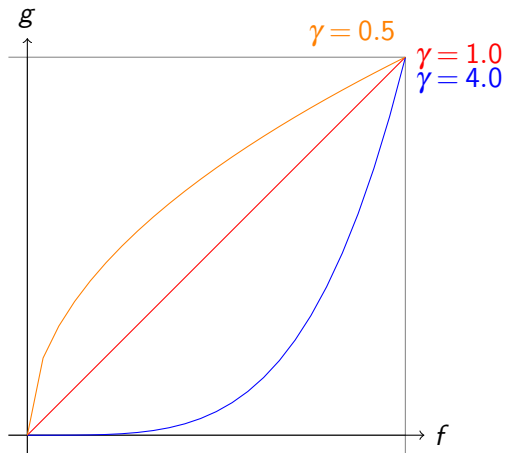
Cel: zapewnienie percepcyjnej liniowości pomiędzy kolejnymi poziomami jasności w obrazie (i dopasowanie jej do rozdzielczości bitowej).

Przebiega wg wzoru potęgowego (power law):

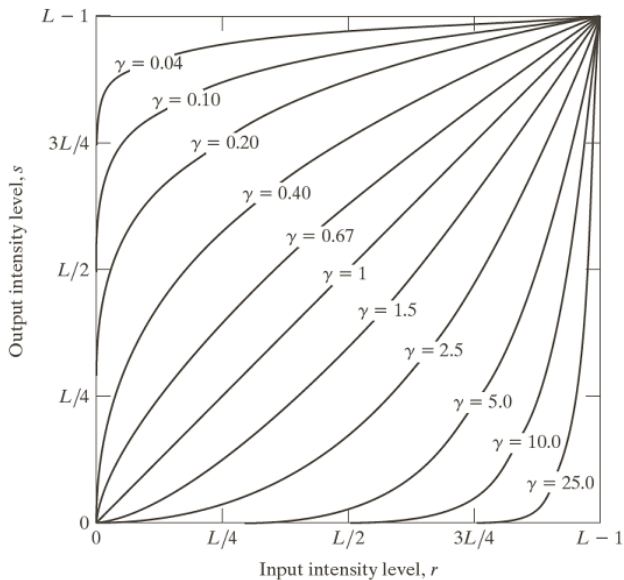
$$g(x, y) = f(x, y)^\gamma$$

gdzie $f, g \in [0, 1]$

- $\gamma < 1$ – kompresja (kodowanie) gamma (*gamma compression*)
- $\gamma > 1$ – ekspansja (dekodowanie) gamma (*gamma expansion*)

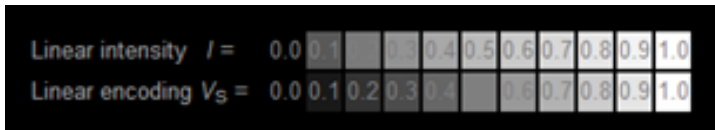


Korekcja gamma



Przykład korekcji gamma

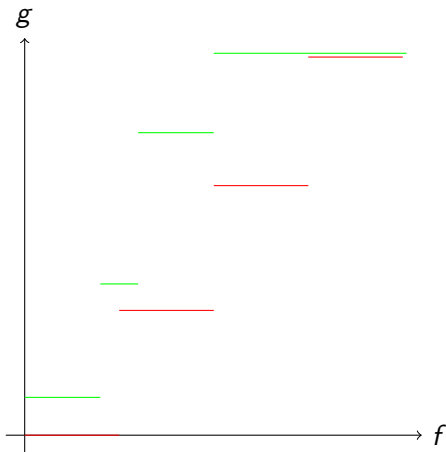
The screenshot shows a software window titled "Image Histogram and Intensity Adjustment Demo". The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Window, Help), a "Select an Image:" dropdown menu set to "Flower", and two image thumbnails: the original "Flower" image and the "Adjusted Image". Below the images are two histograms, both labeled "Histogram", showing the intensity distribution of the original and adjusted images. To the right, a graph titled "Output vs. Input Intensity" plots the gamma correction curve, with a yellow dot at (0.5, 0.5) and a green square at (0, 0). A "Gamma:" input field is set to 0.5. At the bottom right, an "Operations:" panel contains a dropdown menu set to "Intensity Adjustment" and buttons for "+ Brightness", "- Brightness", "+ Contrast", "- Contrast", "+ Gamma", "- Gamma", "Info", and "Close".



- Większość urządzeń nie odzwierciedla intensywności w sposób liniowy (np. monitory CRT)
- Różne systemy operacyjne i okienkowe używają różnych wartości do kodowania i dekodowania gamma (np. PC vs. Mac) .

Przykład

Istotne zastosowanie: redukcja liczby stopni szarości (dyskretyzacja, segmentacja)



Parametry: liczba przedziałów, końce przedziałów

Statystyka odzwierciedlająca rozkład jasności punktów w obrazie (estymata rozkładu jasności oryginalnego obrazu analogowego).

Odmiany:

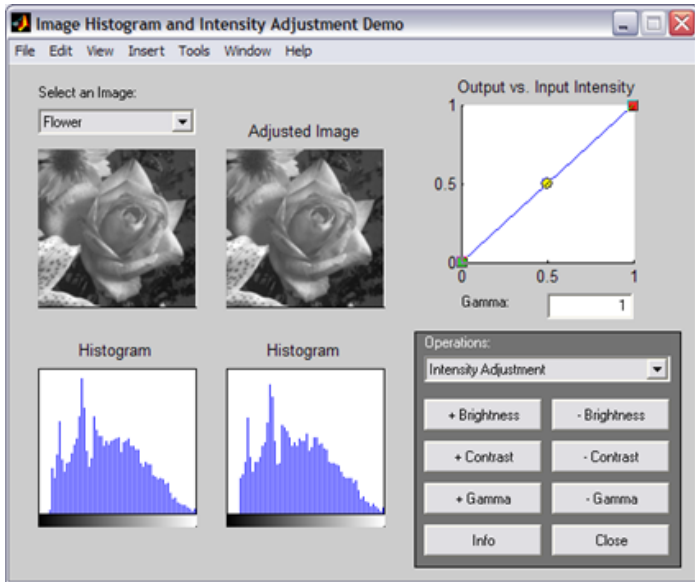
- Absolutny (liczby pikseli)

$$h_f(n) = |\{(x, y) : f(x, y) = n\}|$$

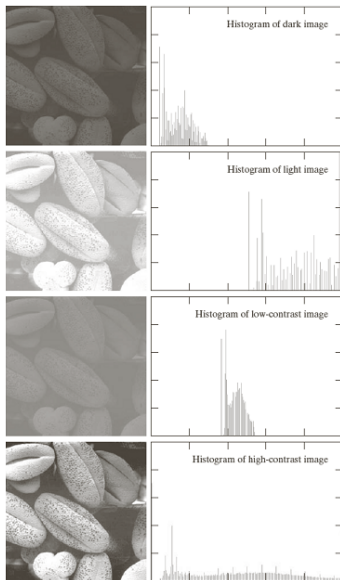
- Względny (prawdopodobieństwa)

$$h_f(n) = \Pr(f(x, y) = n)$$

Histogram: przykład



Histogram: przykład



Nowa jasność punktu zdefiniowana jako:

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) - \underline{f}}{\bar{f} - \underline{f}}$$

gdzie \underline{f} i \bar{f} to odpowiednio minimalna i maksymalna jasność w oryginalnym obrazie.

Efekt: $\underline{g} = 0$ i $\bar{g} = 1$ (lub $\bar{g} = 255$ po dodatkowym przemnożeniu przez 255)

Słaba strona: w praktyce, dla dużych obrazów $\underline{f} = 0$ i $\bar{f} = 1$ (lub bardzo bliskie 0 i 1), i rozciągnięcie staje się niemożliwe lub mało efektywne.

Wykorzystanie całki z histogramu (dystrybuanty) do ustalania jasności docelowych (wyjściowych).

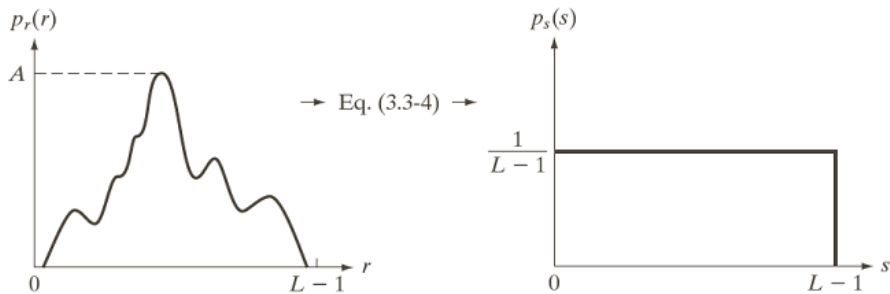
Przypadek ciągły (definicja dystrybuanty):

$$F(n) = \int_0^n h_f(x) dx$$

Przypadek dyskretny (stosowany w praktyce):

$$F(n) = \sum_{i=0}^n h_f(i)$$

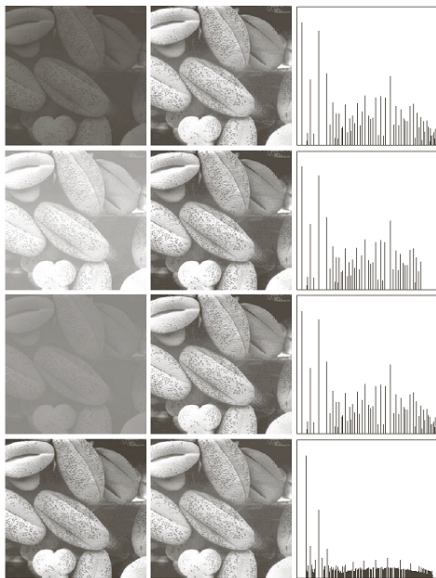
Jasności silnie reprezentowane w obrazie wejściowym zostaną oddalone od siebie ('rozciągnięte') w obrazie wynikowym.



a b

FIGURE 3.18 (a) An arbitrary PDF. (b) Result of applying the transformation in Eq. (3.3-4) to all intensity levels, r . The resulting intensities, s , have a uniform PDF, independently of the form of the PDF of the r 's.

Wyrównywanie histogramu: przykład



Wyrównywanie histogramu: przykład

The screenshot displays a software window titled "Image Histogram and Intensity Adjustment Demo". The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Window, Help) and a "Select an Image:" dropdown menu currently set to "Tire".

Two grayscale images of a tire are shown side-by-side. The left image is the original, and the right image is labeled "Equalized Image", showing significantly improved contrast. Below each image is a histogram plot. The left histogram shows a high concentration of pixels at low intensity values, while the right histogram shows a more uniform distribution across the intensity range.

On the right side of the window, a graph titled "Output vs. Input Intensity" plots the transfer function. The x-axis is labeled "Gamma" and ranges from 0 to 1. The y-axis ranges from 0 to 1. A blue curve starts at (0,0) and rises steeply, then levels off towards (1,1), representing the cumulative distribution function of the original image. Below the graph is a "Gamma:" input field with the value "1".

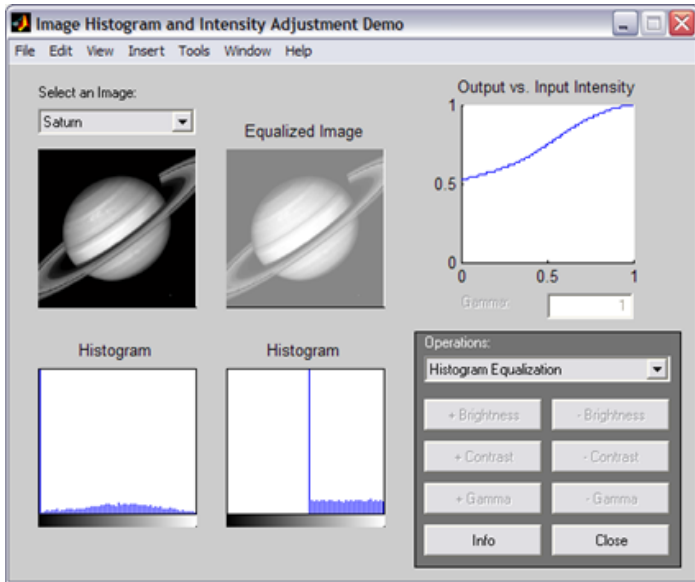
At the bottom right, an "Operations:" panel contains a dropdown menu set to "Histogram Equalization". Below this are several buttons: "+ Brightness", "- Brightness", "+ Contrast", "- Contrast", "+ Gamma", and "- Gamma". At the very bottom of this panel are "Info" and "Close" buttons.

Wyrównywanie histogramu: przykład

The screenshot displays a software window titled "Image Histogram and Intensity Adjustment Demo" with a menu bar (File, Edit, View, Insert, Tools, Window, Help). The interface is divided into several sections:

- Select an Image:** A dropdown menu shows "Flower".
- Original Image:** A grayscale image of a rose.
- Equalized Image:** The same rose image, but with enhanced contrast, making the details more visible.
- Histograms:** Two histograms are shown below the images. The left histogram represents the original image, showing a peak in the lower intensity range. The right histogram represents the equalized image, showing a more uniform distribution of intensities across the range.
- Output vs. Input Intensity:** A graph showing a blue curve that maps input intensity to output intensity. The curve is an S-shape, characteristic of histogram equalization, with axes ranging from 0 to 1.
- Gamma:** A text input field containing the value "1".
- Operations:** A dropdown menu is set to "Histogram Equalization". Below it are buttons for: "+ Brightness", "- Brightness", "+ Contrast", "- Contrast", "+ Gamma", "- Gamma", "Info", and "Close".

Wyrównywanie histogramu: przykład

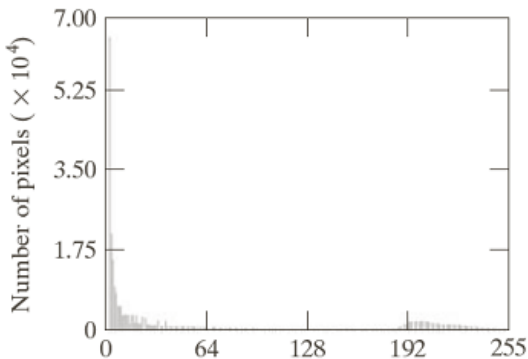
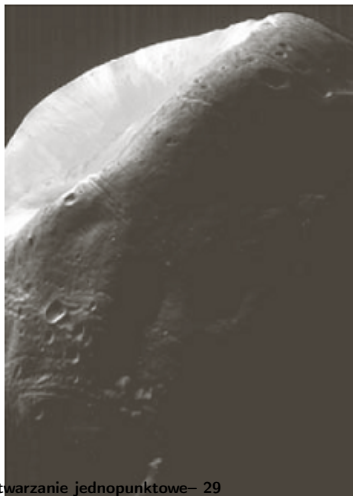


Histogram matching

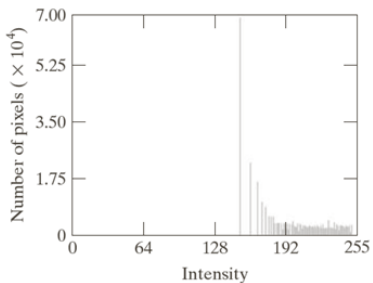
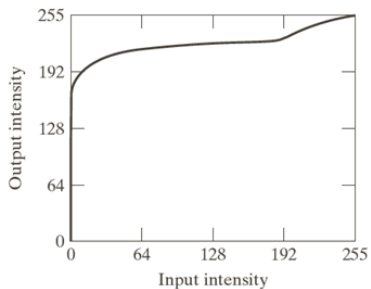
Uogólnienie wyrównywania histogramu

Cel: przekształcić obraz tak aby uzyskać zadany (niekoniecznie równomierny) rozkład jasności w obrazie wynikowym

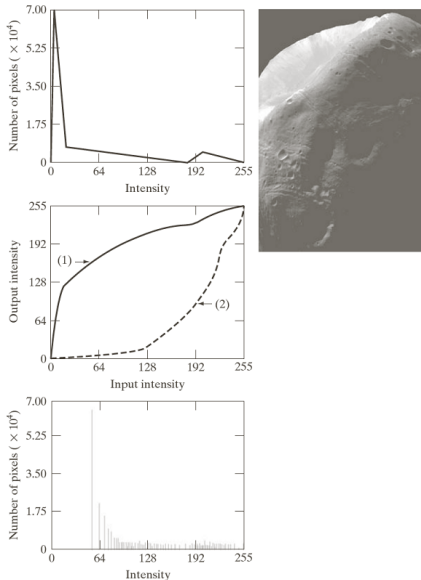
Przykład:



Wynik zwykłego wyrównywania histogramu



Wynik histogram matching



Przetwarzanie jednopunktowe

Operacje arytmetyczne na obrazach

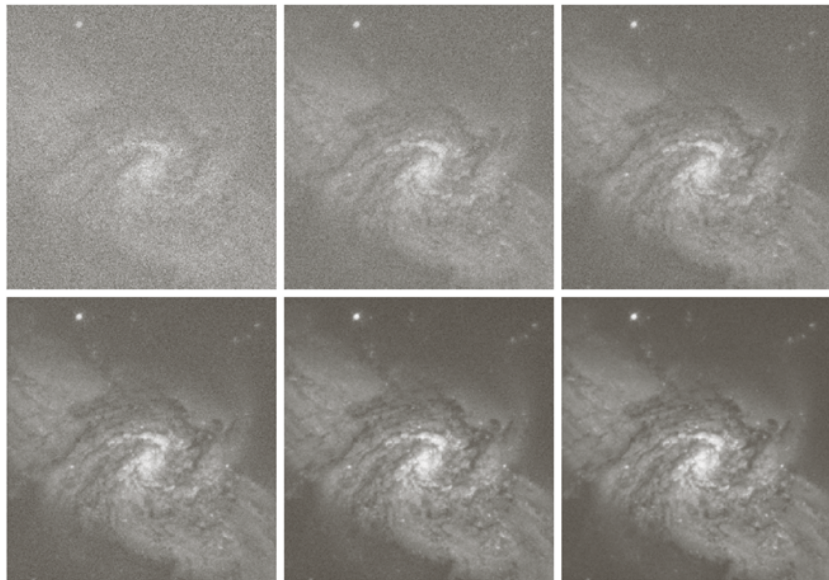
Zazwyczaj sprowadza się do operacji jednopunktowych przy ≥ 2 obrazach wejściowych f_1, f_2, \dots

- dodawanie: $g(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$,
- odejmowanie: $g(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$,
- mnożenie: $g(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y)$,
- dzielenie: $g(x, y) = f_1(x, y)/f_2(x, y)$, założenie: $f_2(x, y) \neq 0$,
- mieszanie liniowe (suma ważona):
 $g(x, y) = \alpha f_1(x, y) + (1 - \alpha)f_2(x, y)$, $\alpha \in [0, 1]$,

Problemy:

- wynik może wykraczać poza zakres (dziedzinę); niezbędne skalowanie (*scaling*) lub przycinanie (*clamping*)
- istotne wymaganie: bardzo precyzyjna korejstracja przestrzenna

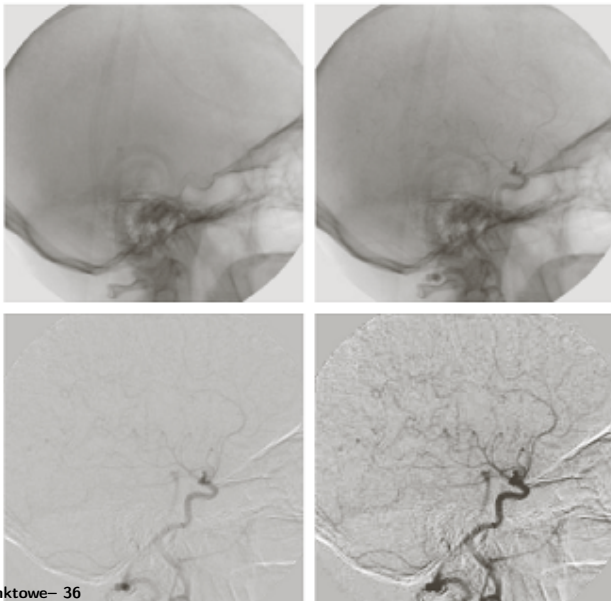
Redukcja szumu przez uśrednianie wielu ekspozycji

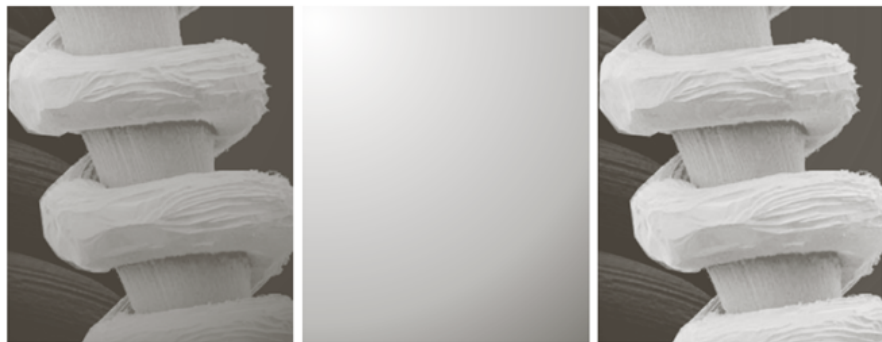


- pozbywanie się szumu przez stworzenie tzw. ramek:
 - bazowej - przez krótką ekspozycję przy zamkniętej migawce => rejestracja szumu przyrządu,
 - równomierności - obraz pustego ekranu (pola widzenia) => rejestracja zmienności w strukturze CCD.
- tak otrzymane ramki odejmuje się od rejestrowanego obrazu (lub dzieli się obraz zarejestrowany przez ramki, zależnie od modelu).

Zastosowania arytmetyki obrazowej: odejmowanie obrazów

Angiografia: odjęcie obrazu otrzymanego po podaniu środka cieniującego





a b c

FIGURE 2.29 Shading correction. (a) Shaded SEM image of a tungsten filament and support, magnified approximately 130 times. (b) The shading pattern. (c) Product of (a) by the reciprocal of (b). (Original image courtesy of Mr. Michael Shaffer, Department of Geological Sciences, University of Oregon, Eugene.)

Operacje logiczne na obrazach

- Not, And, Or, Xor,
- Wymaga przyjęcia pewnej interpretacji, np.

$$g(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) & f_2(x,y) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Technicznie często realizowane przez operacje na bitach.
- Przykładowe zastosowanie: maskowanie/wycinanie (*masking*)



FIGURE 2.30 (a) Digital dental X-ray image. (b) ROI mask for isolating teeth with fillings (white corresponds to 1 and black corresponds to 0). (c) Product of (a) and (b).

Przetwarzanie jednopunktowe

Przekształcenia geometryczne

- Inaczej: operacje przestrzenne (spatial operations, spatial transforms)
- Szeroko stosowana klasa: operacje afiniczne (affine transforms):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

- (x, y) – współrzędne piksela w obrazie źródłowym
- (x', y') – współrzędne piksela w obrazie docelowym
- T – macierz transformacji (macierz afiniczna) o wymiarach 3×3

Lub alternatywnie (dla potrzeb kolejnego slajdu):

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & w & 1 \end{bmatrix} T$$

TABLE 2.2

Affine transformations based on Eq. (2.6.–23).

Transformation Name	Affine Matrix, T	Coordinate Equations	Example
Identity	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} x &= v \\ y &= w \end{aligned}$	
Scaling	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} x &= c_x v \\ y &= c_y w \end{aligned}$	
Rotation	$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} x &= v \cos \theta - w \sin \theta \\ y &= v \sin \theta + w \cos \theta \end{aligned}$	
Translation	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} x &= v + t_x \\ y &= w + t_y \end{aligned}$	
Shear (vertical)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} x &= v + s_v w \\ y &= w \end{aligned}$	
Shear (horizontal)	$\begin{bmatrix} 1 & s_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{aligned} x &= v \\ y &= s_h v + w \end{aligned}$	



FIGURE 2.36 (a) A 300 dpi image of the letter T. (b) Image rotated 21° clockwise using nearest neighbor interpolation to assign intensity values to the spatially transformed pixels. (c) Image rotated 21° using bilinear interpolation. (d) Image rotated 21° using bicubic interpolation. The enlarged sections show edge detail for the three interpolation approaches.

Interpolacja wartości funkcji charakterystycznej w punktach o współrzędnych niecałkowitych (*resampling*, [re]próbkiowanie).

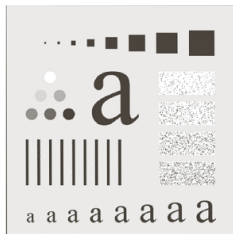
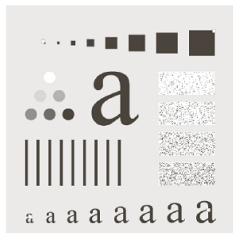
Metody interpolacji:

- Najbliższy sąsiad (nearest neighbour)
- Interpolacja dwuliniowa (bilinear interpolation)
- Interpolacja sześcienna (cubic interpolation)

Inny problem charakterystyczny dla przekształceń geometrycznych:

- współrzędne punktów mogą wykraczać poza oryginalny zakres,

Artefakty wynikające z przekształceń geometrycznych - przykład



Przetwarzanie jednopunktowe

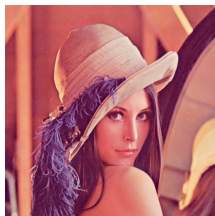
Przetwarzanie jednopunktowe obrazów wielokanałowych

Dotyczy przypadku w którym piksel wejściowy i/lub piksel wyjściowy opisany jest więcej niż jednym parametrem.

Przykłady:

- dekompozycja obrazu wielokanałowego na obrazy jednokanałowe (*channel split*),
- konwersja obrazu wielokanałowego do jednokanałowego (np. RGB→GRAYSCALE)
- pseudokolorowanie

Channel split – przykład (RGB)



Konwersja RGB → GRAYSCALE



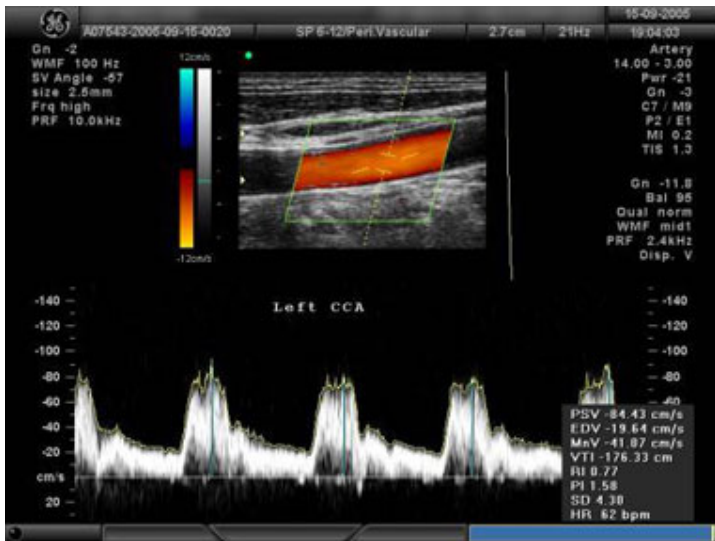
$$g(x, y) = 0.3f_r(x, y) + 0.59f_g(x, y) + 0.11f_b(x, y)$$

Cel: sztuczna wizualizacja wielkości związanej z innym niż widzialne podpasmem fal EM.

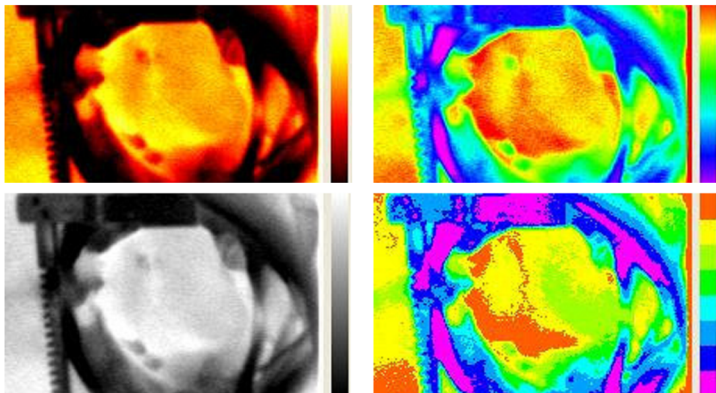
Typowe pseudokolorowania:

- RAINBOW - skala barw z inwersją koloru zielonego,
- SPECTRUM - skala barw odpowiadająca kolorom widma promieniowania widzialnego,
- BLACKBODY - skala barw uwypuklająca kolor żółty i kolor czerwony,
- IRON - skala barw uwypuklająca kolor czerwony.

Przykładowe zastosowanie: USG Dopplera



Przykładowe zastosowanie: Termografia



Histogram wielowymiarowy

- Statystyka odzwierciedlająca ilości punktów obrazu o określonych kombinacjach składowych.
- Inaczej: łączny rozkład prawdopodobieństwa, np.

$$h_f(r, g, b) = \Pr(f(x, y) = (r, g, b))$$

- Uwaga: w ogólności bardziej 'rzadki' w porównaniu z histogramem jednowymiarowym (jednej zmiennej)
- Przykład histogramu dwuwymiarowego:

		red			
		0-63	64-127	128-191	192-255
blue	0-63	43	78	18	0
	64-127	45	67	33	2
	128-191	127	58	25	8
	192-255	140	47	47	13

Przetwarzanie splotowe

Ang. *convolution*, znane także jako filtrowanie liniowe.

$$g(x) = (f * M)(x) = \sum_{h=-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} M(h)f(x-h)$$

gdzie:

- * – operacja splotu
- M – maska, jądro (wektor współczynników)
- m – rozmiar maski (mała liczba nieparzysta, zazwyczaj 3, 5, lub 7), elementy numerowane od $-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ do $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$

Niech $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ($m = 3$, maska symetryczna)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	0	0	0	1	1	2	2	1	-2
M									
g	-	0	1	4	6	9	9	3	-

$$g(x, y) = (f * M)(x, y) = \sum_{k=-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{h=-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} M(h, k) f(x - h, y - k)$$

Tym razem: M – macierz współczynników.

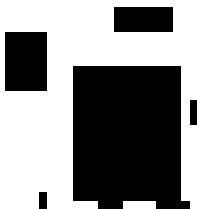
Interpretacja: Splot zastępuje jasność piksela ważoną jasnością wypadkową pikseli sąsiednich.

- Twierdzenie o splocie: Transformata Fouriera splotu $I * A$ jest prostym iloczynem transformaty obrazu i transformaty maski.
- Zatem: Maska o odpowiednio dobranej charakterystyce może osłabiać (lub zupełnie wytłumiać) wybrane częstotliwości (przestrzenne) w obrazie.

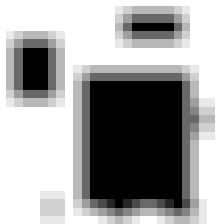
- Każda maska o nieujemnych wartościach wag przeprowadza jakiś rodzaj wygładzania.
- Szczególny przypadek: filtr uśredniający:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \hline \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \hline \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \hline \end{array} = \frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

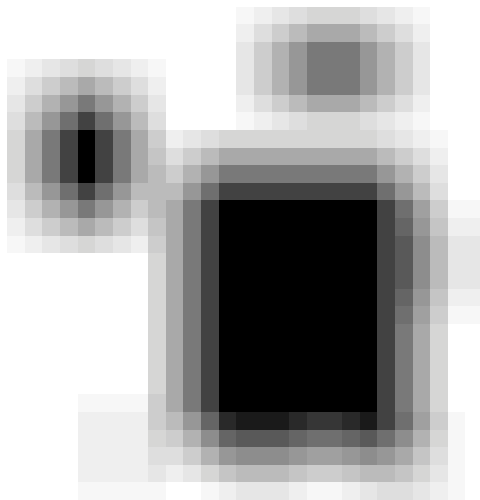
- Uwaga: Suma wag maski powinna wynosić 1
- Dlaczego taki filtr wytłumia szum? Niwelowanie drobnych zmienności jasności pikseli; uśrednienie m^2 zaszumionych wartości pikseli zmniejsza odchylenie standardowe szumu m -krotnie.

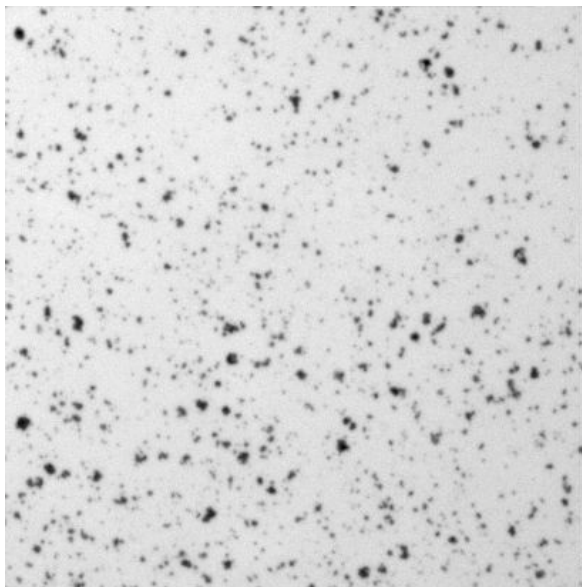


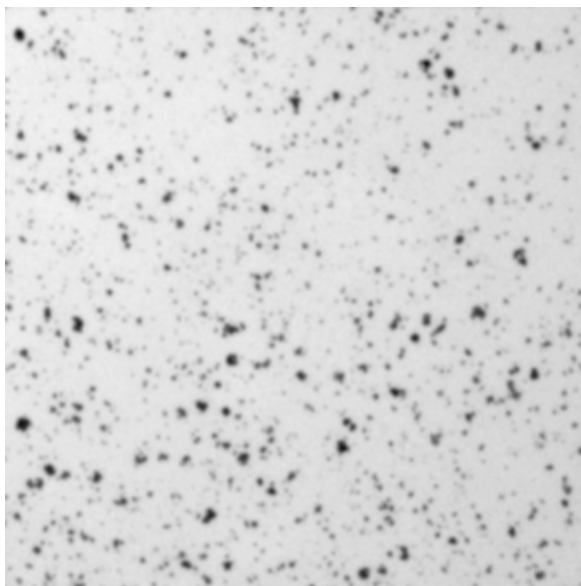
Splot z maska (3x3)



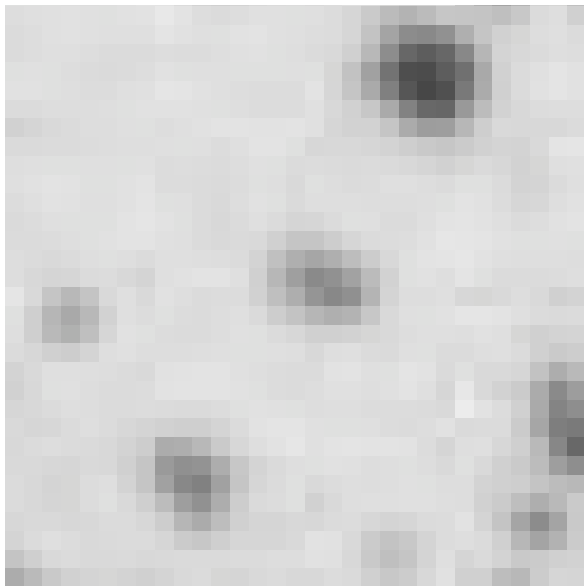
Splot z maska (5x5)







Powiększony fragment obrazu (32x32 piksele)





Jak przetwarzać piksele brzegowe? (piksele, dla których maska sięga poza obraz)

Stosowane rozwiązania:

- Zaakceptować mniejszy rozmiar obrazu wynikowego.
- Dogenerować jasności brakujących 'wirtualnych' pikseli:
 - Powielić jasności otrzymane najbliżej brzegu.
 - Odbić fragment obrazu symetrycznie względem brzegu obrazu.

Szczególny przypadek uśredniania, w którym maska jest dyskretnym przybliżeniem 2-wymiarowego rozkładu norm.

$$M(h, k) = \exp\left(-\frac{h^2 + k^2}{2\sigma^2}\right)$$

gdzie h i k to współrzędne względne, przyjmujące wartości jak poniżej:

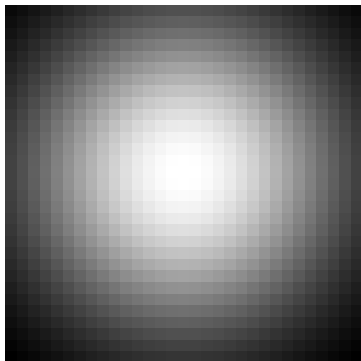
(-1,1)	(0,1)	(1,1)
(-1,0)	(0,0)	(1,0)
(-1,-1)	(0,-1)	(1,-1)

Właściwości:

- Charakterystyka kołowa – środkowosymetryczna.
- Dobór wariancji filtru do rozmiaru: Sugerowana zależność $m = 5\sigma$, daje pole powierzchni pod krzywą 0.9876
- Sugerowane stosowanie $m \geq 7$; dla $m = 3$ znaczne zniekształcenia.
- Lepsza charakterystyka częstotliwościowa od filtru uśredniającego: transformata Fouriera nie zawiera komponentów o wyższych częstotliwościach

Interpretacja graficzna filtru Gaussowskiego

Obraz 32x32 piksele wypełniony wartościami wag, $\sigma = 10$ pikseli.



Nieźle przybliżenie filtru Gaussowskiego 5x5 wykorzystujące jedynie całkowite wartości wag.

$$\frac{1}{159} \times \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ \hline 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ \hline 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ \hline 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ \hline \end{array}$$

- Minus: Przybliżenie rzeczywistych wartości
- Plus: Pozwala na realizację obliczeń na zmiennych całkowniczbowych, co może poprawić wydajność obliczeniową.

Separowalność filtru Gaussowskiego

Dwuwymiarowy splot z maską Gaussowską można zastąpić dwukrotnym sekwencyjnym splotem z jednowymiarowymi filtrami Gaussowskimi.

$$\begin{aligned}g(x, y) &= \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} M(h, k) f(x - h, y - k) \\&= \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{h^2 + k^2}{2\sigma^2}\right) f(x - h, y - k) \\&= \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) f(x - h, y - k) \\&= \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{h=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) f(x - h, y - k)\end{aligned}$$

Separowalność filtru Gaussowskiego

$$\exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right) = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 12 \\ \hline 15 \\ \hline 12 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

Przypomnienie: Uogólnienie pojęcia pochodnej na przypadek funkcji wielu zmiennych (tu: dwóch zmiennych, $f(x, y)$).

Definicja (założenie: f jest funkcją ciągłą i różniczkowalną):

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

Wynik jest parą liczb (wektorem dwuelementowym).

Najprostsze przybliżenie dla obrazów rastrowych: splot z następującymi maskami:

1	0	-1
1	0	-1
-1	0	1

(da się to przybliżyć lepiej, patrz dalszy ciąg wykładu)

Ilustracja działania – przypadek jednowymiarowy

Maska:

1	0	-1
---	---	----

f	0	0	0	1	1	1	1	0	0
M	1	0	-1						
		1	0	-1					
			1	0	-1				
				...					
g	-	0	-1	-1	0	0	1	1	-

Przetwarzanie splotowe

Inne popularne filtry splotowe

Używa dwóch masek, osobnej do wykrywania pionowej i poziomej składowej gradientu.

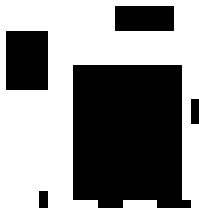
$$M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad M_v = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Uwaga: w masce pojawiają się wartości ujemne – odpowiedź filtra też może być ujemna.

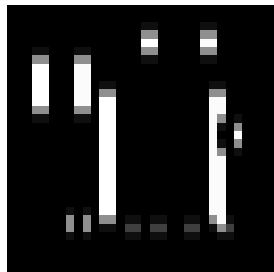
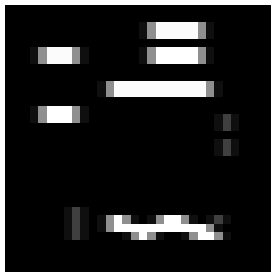
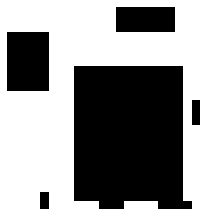
Zagregowana odpowiedź filtra to długość wektora gradientu:

$$g(x, y) = \sqrt{[M_h * f(x, y)]^2 + [M_v * f(x, y)]^2}$$

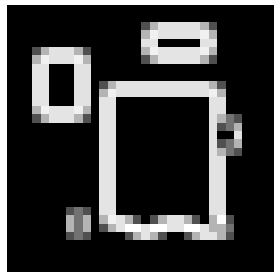
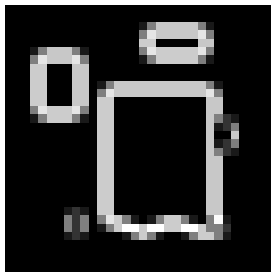
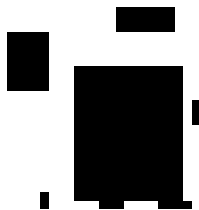
(W praktyce dość często pomija się pierwiastkowanie, bo jest to przekształcenie monotoniczne, a zatem zachowuje porządek wartości)



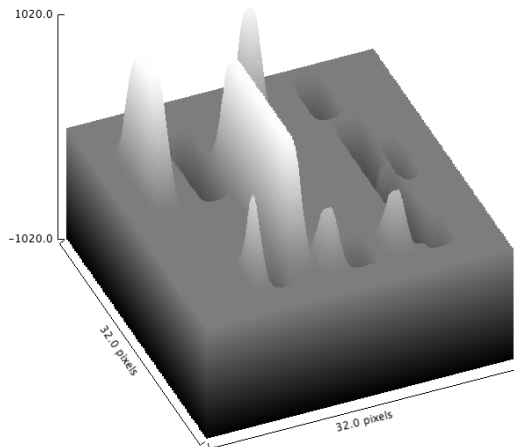
Interpretacja: kolor szary = 0, czerń – wartości ujemne, biel – wartości dodatnie (technicznie: wynik 32 bitowy ze znakiem)



(po podniesieniu do kwadratu)



(po agregacji przez sumę i po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego)



Działanie filtru Sobela



Działanie filtru Sobela



Działanie filtru Sobela – suma kwadratów



Daje wyniki bardzo zbliżone do filtra Sobela, ale zapewnia lepszą niezmienniczość ze względu na obrót:

$$M_h = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 0 & -3 \\ \hline 10 & 0 & -10 \\ \hline 3 & 0 & -3 \\ \hline \end{array} \quad M_v = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 10 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & -10 & -3 \\ \hline \end{array}$$

Ang. Robert's cross; inny, bardzo niedoskonały sposób przybliżenia gradientu:

$$M_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \quad M_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

- Postępowanie przy obliczaniu – tak jak dla filtra Sobela.
- Szybki, ale wrażliwy na szumy

Inne filtry:

- Filtr Prewitta: 8 masek gradientowych (lub innych) wrażliwych na krawędzie zorientowane na wielokrotności kąta 45° .

Działanie filtru Roberta



Operator różniczkowy drugiego rzędu, mierzący lokalną zmienność gradientu ('pierwszej pochodnej').

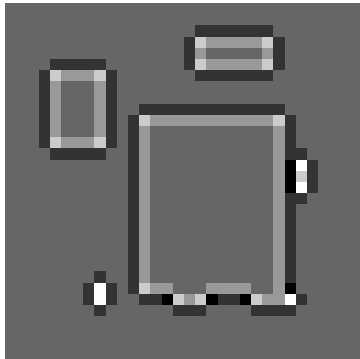
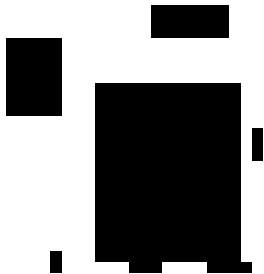
Definicja dla funkcji f ciągłych i dwukrotnie różniczkowalnych:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

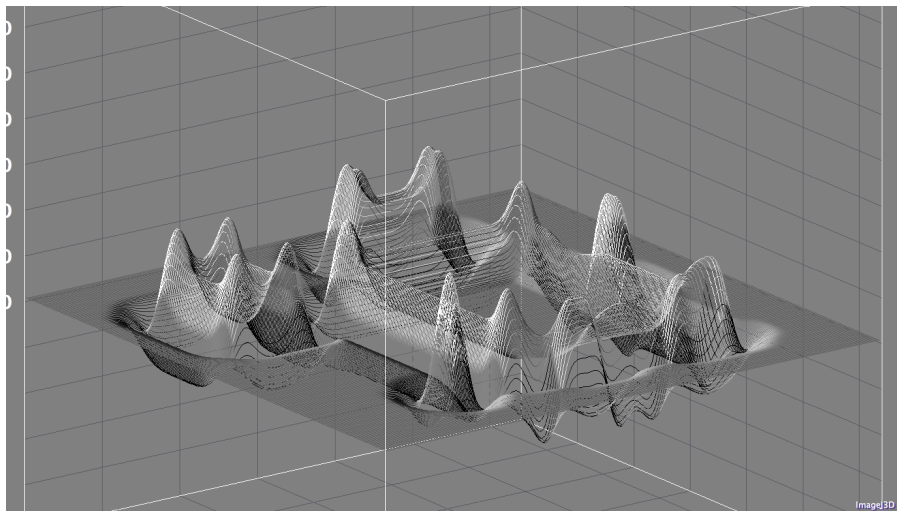
Przybliżenie dyskretne przy pomocy maski:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Podobnie jak składowe gradientu, laplasjan może dać wynik ujemny.



- Każda krawędź odzwierciedlana jest przejściem wartości Laplasjanu przez zero (ang. *zero crossing*). Przejście to *dokładnie* lokalizuje 'środek' krawędzi (w sensie grubości).
 - Interpretacja 1D: punkt przegięcia krzywej jasności
- Znak Laplasjanu odzwierciedla relacje obiekt-tło
- Działa często lepiej niż filtr Sobela gdy krawędzie są rozmyte





Przetwarzanie splotowe

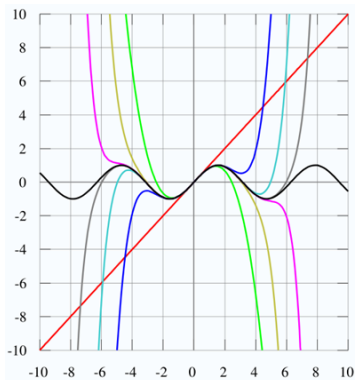
Uzasadnienie matematyczne dla wybranych filtrów splotowych

Szereg Taylora (Taylor expansion)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1} (x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6} (x-a)^3 + \dots$$

Rozwinięcie Taylora

Funkcja $\sin(x)$ i jej kolejne przybliżenie rozwinięciami Taylora: wielomiany 1,3,5,7,9,11, i 13 stopnia



'Rachunek różniczkowy' obrazu

Jak obliczyć pochodną jasności w danym punkcie, biorąc pod uwagę fakt że dziedzina funkcji f jest dyskretna?

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + O^+(h^3)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + O^-(h^3)$$

gdzie: $O()$ to wyrazy wyższego rzędu (błąd przybliżenia).

Odejmując te równania stronami od siebie dostajemy:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Podobnie dla drugiej pochodnej:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h)$$

Filtrowanie nieliniowe

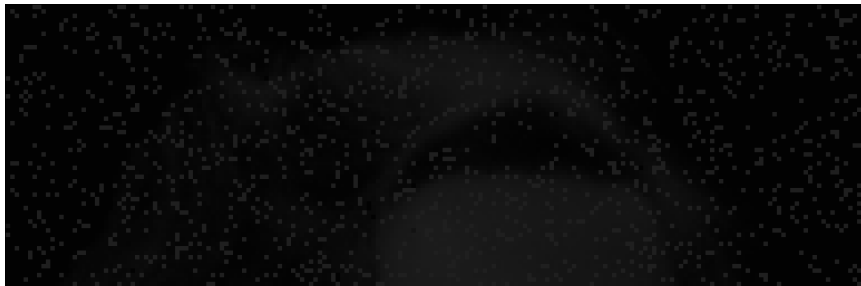
- Każde filtrowanie nie dające przedstawić się przy pomocy splotu.
- Najczęściej stosowany reprezentant: filtr medianowy (ang. median filter).
 - Maska nie zawiera żadnych wag, ma tylko wymiary $m \times m$
 - Wynik zastosowania filtru: mediana jasności pikseli leżących pod maską (w sąsiedztwie).
 - Bardzo skuteczna redukcja szumu, w szczególności szumu typu „pieprz i sól”.
 - Uwaga: Mediana nie musi wymagać sortowania – istnieje algorytm o niższej złożoności obliczeniowej.

Filtr medianowy – przykład (filtr 5×5)



Porównanie z działaniem filtru uśredniającego filtr 5×5

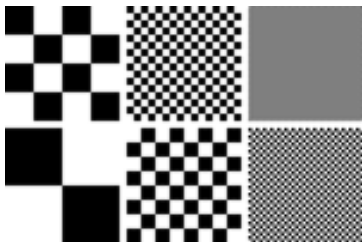




- Filtr „minimum” – działa „erozyjnie” na obraz, zmniejsza globalną jasność
- Filtr „maksimum” – działa „ekspansywnie” na obraz, zwiększa globalną jasność
- Inne filtry których nie da się wyrazić przy pomocy sumy ważonej
 - Przykład: $g(x, y) = f(x - 1, y) / f(x + 1, y)$

Mikrowzory

- Próba stworzenia iluzji koloru (lub stopnia szarości) przy wykorzystaniu ograniczonej palety kolorów (czyli z paletą zkwantyzowaną), poprzez wymieszanie wielu pikseli.
- Oko postrzega kolor wypadkowy (zmieszany).



Realizuje dystrybucję błędu na sąsiedztwo

Dla każdego punktu obrazu:

Znajdź najbliższy kolor

Oblicz błąd przybliżenia (różnica)

Rozdystrybuuj błąd na sąsiednie, jeszcze nie odwiedzone piksele

Wagi dystrybucji błędu dobrane następująco (punkt modyfikowany znajduje się w środku maski):

	x	7
3	5	1

- Suma wag wynosi 16, co umożliwia szybką implementację dzielenia przez przesunięcie bitowe.
- Dla jednolitego obszaru o jasności 128 i dostępnych w paletce jedynie bieli i czerni, algorytm wyprodukuje szachownicę.

Symulacja działania algorytmu Floyd-Steinberga

Założenie: redukcja do 2 poziomów szarosci: 0 i 32

		7
3	5	1

	16	16	16	16
16	16	16	16	16

	32	9	16	16
13	11	15	16	16

Error=16

	32	0	20	16
13	13	18	17	16

Error=9

Porównanie algorytmów ditheringu



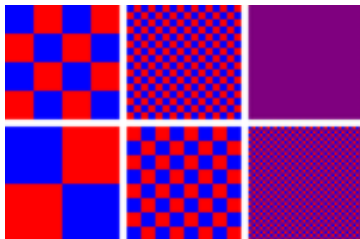
original (256 greys)

ordered

Floyd-Steinberg

Jarvis

Dithering można stosować także do tworzenia iluzji barwy:



Morfologia matematyczna

Morfologia matematyczna

Morfologia matematyczna binarna

- Jedna z najlepiej sformalizowanych i najbardziej eleganckich gałęzi analizy i przetwarzania obrazów.
- W wersji podstawowej, najbardziej rozpowszechnionej, da się ją stosować do obrazów binarnych. Istnieją też rozszerzenia na przypadek ciągły.

Oznaczenia:

- $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}^d$ – punkty w d -wymiarowej przestrzeni (równoważne wektorom)
- A, B, C, \dots – zbiory punktów (obrazy)
- A_b – zbiór A przesunięty o przemieszczenie (punkt) b
- A^c – dopełnienie zbioru A
- \hat{A} – symetryczne odbicie A względem początku układu współrzędnych

Def. Dodawanie Minkowskiego

$$A \oplus_m B = \bigcup_{b \in B} A_b$$

Def. Odejmowanie Minkowskiego

$$A \ominus_m B = \bigcap_{b \in B} A_b$$

Dualność dodawania i odejmowania Minkowskiego: dla dowolnych A, B :

$$(A \ominus_m B)^c = A^c \oplus_m B$$

Przykład (podkreślenie oznacza początek układu współrzędnych):

A	B	$A \oplus_m B$	$A \ominus_m B$
<u>11</u>	1	11	
1	<u>11</u>	<u>111</u>	<u>1</u>
		11	

Zazwyczaj: A – obraz wejściowy, B - element strukturyzujący (strukturalny)

Def. Dylatacja A przez element strukturalny B

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_{-b}$$

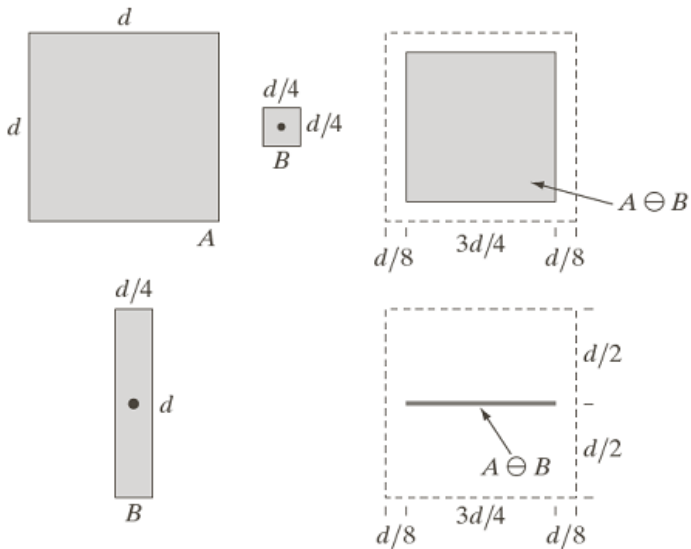
Czyli: suma przemieszczeń A o takie $-b$, że $-b \in B$

Def. Erozja A przez element strukturalny B

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_{-b}$$

Czyli: przecięcie przemieszczeń A o takie $-b$, że $-b \in B$

Ilustracja dla przypadku ciągłego



Przykład erozji obrazu rastrowego

Obraz
ory-
gi-
nalny:

```
-----  
-----  
-----  
  11111  
-----  
  11111  
-----  
  11111  
-----  
  111111111  
-----  
  111111111  
-----  
  111111111  
-----
```

6cm6cm

Element
struk-
tu-
ralny:

```
-----  
-----  
-----  
  111  
-----
```

Obraz
po
erozji:

```
-----  
-----  
-----  
   111  
-----  
   111  
-----  
   111  
-----  
  1111111  
-----  
-----  
-----
```

6cm6cm

Obraz
po
dy-
lat-
acji:

```
-----  
  1111111  
-----  
  1111111  
-----  
  1111111  
-----
```

Wpływ odwracania elementu

Obraz:

```
XXX  X XXX
XXX  XX XX
XXX  XXX X
```

Element:

```
X
XX
```

```
XX  X
X  XX
```

Wynik erozji bez obracania elementu:

```
XX_  _ _X_
XX_  X_ _-
---  --- -
```

```
X_  _
-  --
```

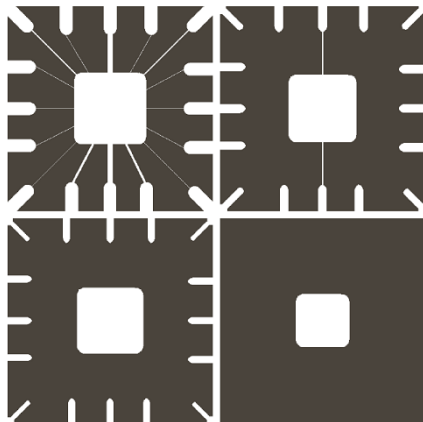
Wynik erozji z obracaniem elementu:

```
---  - - - -
_XX  - - - X
_XX  _X_ -
```

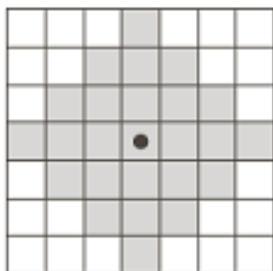
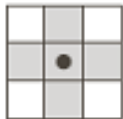
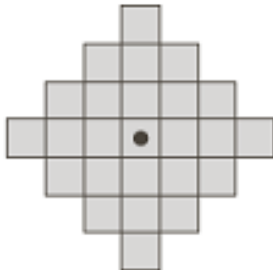
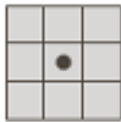
```
--  -
-  _X
```


Przykład erozji

Obraz o rozmiarach 486x486 pikseli zerodowany kwadratowymi maskami o rozmiarach 11x11, 15x15, i 45x45 pikseli.



Przykłady elementów strukturalnych



Niezmienniczość względem translacji:

$$A_d \oplus B = (A \oplus B)_d$$

$$A_d \ominus B = (A \ominus B)_d$$

Monotoniczność

$$A \subseteq B \implies (A \oplus C) \subseteq (B \oplus C)$$

Dylatacja: ekstensywność

$$A \subseteq A \oplus B$$

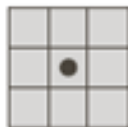
Erozja: antyekstensywność (pod warunkiem, że $(0,0) \in B$)

$$A \ominus B \subseteq A$$

Zastosowanie: wykrywanie brzegu obiektu



A



B



$A \ominus B$



$\beta(A)$

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



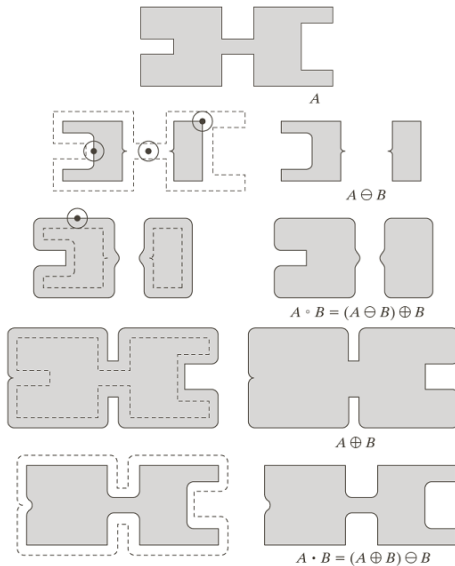
0	1	0
1	1	1
0	1	0

Def: *Otwarcie* obrazu A obrazem (elementem strukturalnym) B : złożenie erozji i dylatacji przy czym w pierwszej operacji używa się lustrzanego odbicia B .

$$A \circ B \equiv (A \ominus \hat{B}) \oplus B$$

Def: *Zamknięcie* obrazu A obrazem (elementem strukturalnym) B : złożenie dylatacji i erozji przy czym w pierwszej operacji używa się lustrzanego odbicia B .

$$A \bullet B \equiv (A \oplus \hat{B}) \ominus B$$



Właściwości otwarcia i zamknięcia istotne z praktycznego punktu widzenia:

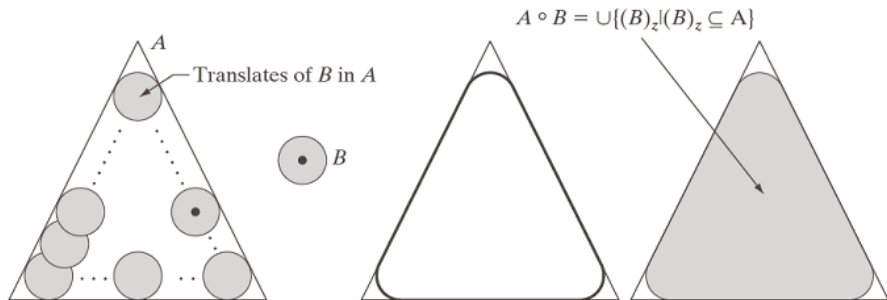
- zachowanie względem 'cienkich' elementów,
- zachowanie względem 'cienkich' wpustów,
- zachowanie względem 'ostrzych' narożników wypukłych,
- zachowanie względem 'ostrzych' narożników wklęsłych.

- Niezmienniczość względem translacji
- Monotoniczność
- Otwarcie: antyekstensywność
- Domknięcie: ekstensywność
- Idempotentność: jednokrotne zastosowanie daje wynik „ostateczny”, ponowne stosowanie nie wprowadza już zmian:

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B, (A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$$

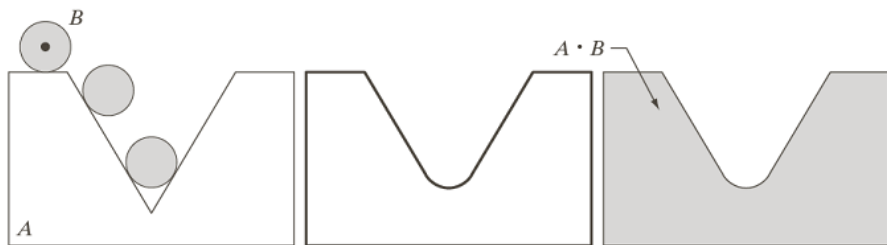
Interpretacja geometryczna otwarcia

Założmy, że element strukturalny B ma kształt dysku. Brzeg (kontur) wyniku otwarcia A elementem B to zbiór wszystkich punktów które sięgają najdalej w kierunku brzegu przetwarzanej figury A gdy B jest „toczony” wewnątrz A .



Interpretacja geometryczna zamknięcia

Brzeg (kontur) wyniku zamknięcia A elementem B to zbiór wszystkich punktów które sięgają najdalej w kierunku brzegu przetwarzanej figury A gdy B jest „toczony” na zewnątrz A .



Filtr morfologiczny to dowolne odwzorowanie monotoniczne i niezmiennicze względem translacji.

Tw. Matherona o reprezentacji:

1. każdy filtr morfologiczny jest sumą pewnych erozji

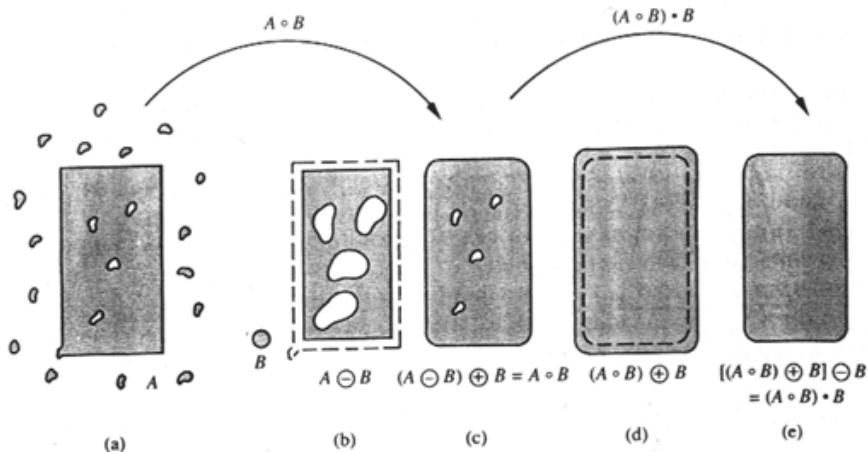
$$\Psi(A) = \bigcup_{B \in \text{Ker}[\Psi]} A \ominus B$$

2. każdy filtr morfologiczny jest przecięciem pewnych dylatacji

$$\Psi(A) = \bigcap_{B \in \text{Ker}[\Psi^*]} A \oplus B$$

Przykład filtrowania morfologicznego

(czasami nazywane wygładzaniem morfologicznym)



Przykład rzeczywisty



Operacja trafi-nie trafi (hit-or-miss)

Działa jednocześnie na obiekt i jego tło.

Idea: wykorzystanie dwóch elementów strukturalnych A, B , $A \cap B = \emptyset$, 'pozytywnego' i 'negatywnego':

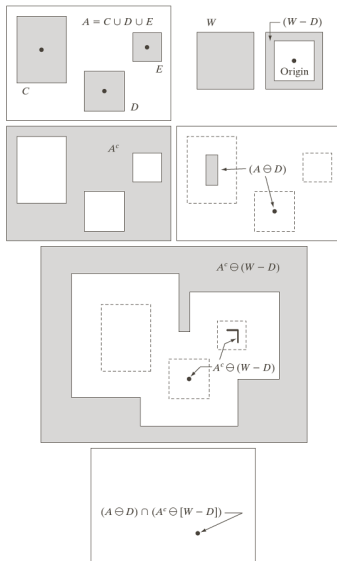
$$X \otimes (A, B) = \{h \in \mathbb{R}^d : A_h \subseteq X \wedge B_h \subseteq X^c\}$$

Zastosowanie: wykrywanie charakterystycznych punktów/elementów obrazu/objektu, np. narożników:

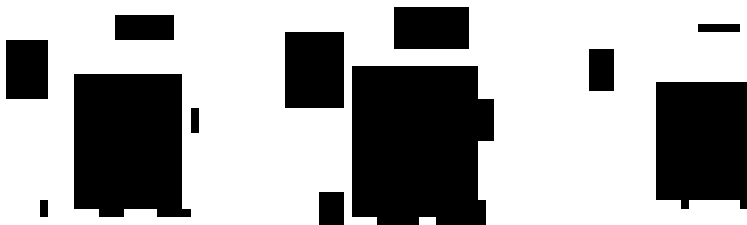
$$(A, B) = \begin{bmatrix} & T & \\ N & T & T \\ N & N & \end{bmatrix}$$

(puste miejsca oznaczają 'don't care')

Hit-or-miss (w innym ujęciu [DIP])



- Erozja = filtr minimum
- Dylatacja = filtr maksimum



Morfologia matematyczna

Morfologia obrazów z gradacją stopni szarości

Motywacja: zastosowanie morfologii binarnej do rzeczywistych obrazów wymaga ich uprzedniej binaryzacji, co prowadzi do znaczącej utraty informacji.

Założenie: obraz = wielowartościowa (i zazwyczaj nieciągła) funkcja charakterystyczna f

Podejścia morfologii z gradacją funkcji szarości:

- 1 Podejście oparte na umbrach,
- 2 Podejście funkcyjne

Idea:

- przejście z dwuwymiarowych obrazów z gradacją stopni szarości na trójwymiarowe obrazy binarne,
- przeprowadzanie 'zwykłych' operacji morfologicznych na tak powstałych obrazach trójwymiarowych,
- powrót do dziedziny obrazów dwuwymiarowych

Def: Przecięcie f na poziomie $t \in \mathbb{R}$ (progowanie)

$$X_t(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$$

Tw. (Serra): Przecięcia X_t są zbiorami domkniętymi spełniającymi warunek monotoniczności

$$t_1 < t_2 \implies X_{t_1}(f) \supseteq X_{t_2}(f)$$

pod warunkiem, że f jest półciągła z góry.

- Przecięcia można układać w stosy (umbry).
- Def. *Umbra* (cień) $U(f)$ funkcji f zdefiniowanej na \mathbb{R}^2 to zbiór domknięty (jeśli istnieje) składający się ze wszystkich punktów w $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ znajdujących się na powierzchni wyznaczonej przez f lub poniżej.
- Przykład umbry (jednowymiarowy):

$$f = \{ 2 \ 0 \ 4 \ 6 \ 6 \ 2 \ 4 \ 5 \}$$

$$U(f) =$$

$$(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$$

$$(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$$

$$(0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$$

$$(1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$(1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$$

Tw.: Dłwolnej funkcji rzeczywistej (półciągłej z góry) odpowiada jedna i tylko jedna umbra.

Przejsie z umbry na funkcję:

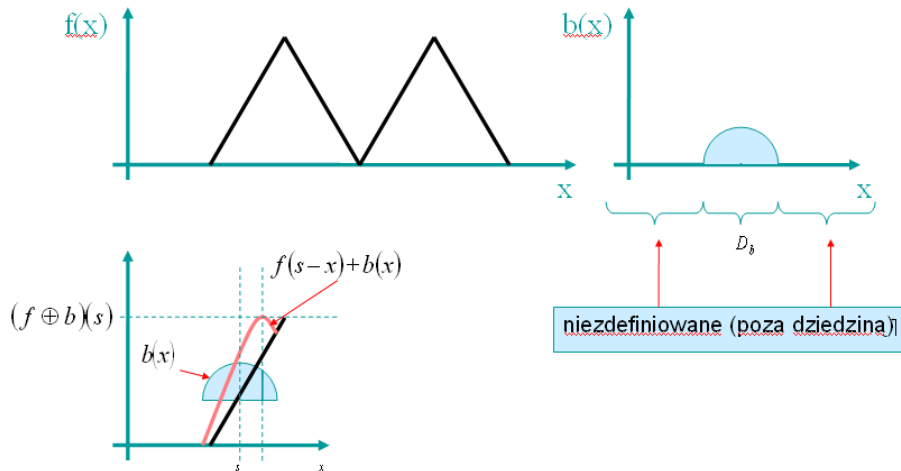
$$f(x) = \sup\{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in U(f)\}$$

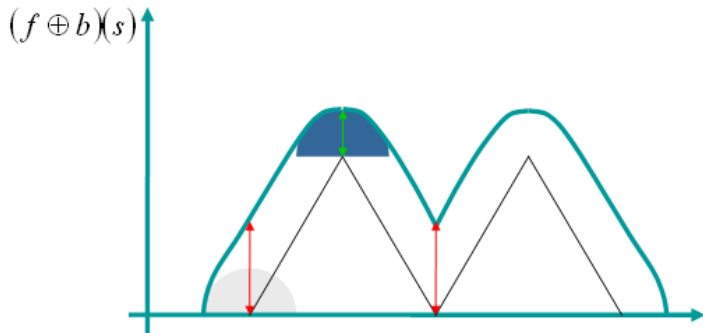
Pozwala to na przejsie z funkcji f na zbory i zdefiniować operacje (morfologiczne) na funkcjach przy użyciu zbiorów (w przestrzeni umbr):



$$\begin{array}{ccc}
 f & & f' \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 U(f) & \xrightarrow{\text{operacje na zbiorach}} & U'
 \end{array}$$

- Funkcje (w miejsce zbiorów): $f(x, y), b(x, y) \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{Z}$
- Dziedziny (analogia do wsparcia l. rozmytej): D_f, D_b
- Dylatacja:
 - 1D: $(f \oplus b)(s) = \max\{f(s-x) + b(x) : (s-x) \in D_f, x \in D_b\}$
 - 2D: $(f \oplus b)(s, t) = \max\{f(s-x, t-y) + b(x, y) : (s-x, t-y) \in D_f, (x, y) \in D_b\}$
- (Warunek analogiczny do morfologii binarnej: obiekty muszą nakładać się przynajmniej jednym punktem)

Dylatacja: Przykład (1D)





- 
zmiany większe niż $\max(b)$
- 
zmiany równe $\max(b)$

1D:

$$(f \ominus b)(s) = \min\{f(s+x) - b(x) : (s+x) \in D_f, x \in D_b\}$$

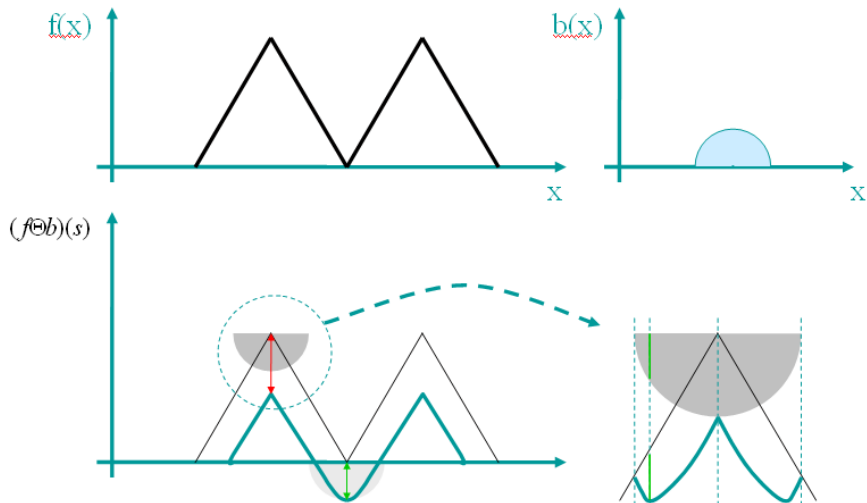
2D:

$$(f \ominus b)(s, t) = \min\{f(s+x, t+y) - b(x, y) : (s+x, t+y) \in D_f, (x, y) \in D_b\}$$

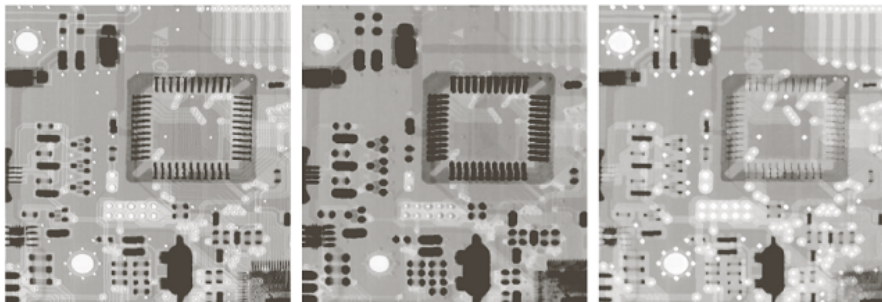
Efekty:

- pociemnienie obrazu (dla ściśle nieujemnego b),
- zmniejszenie jasnych detali (?).

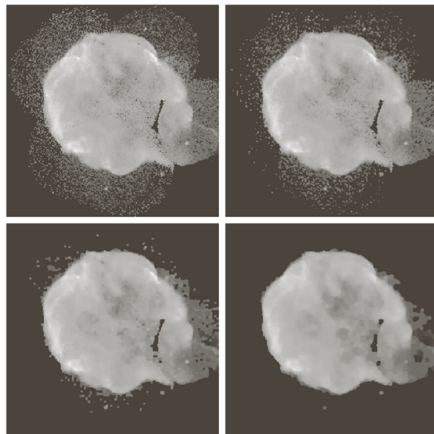
Przykład



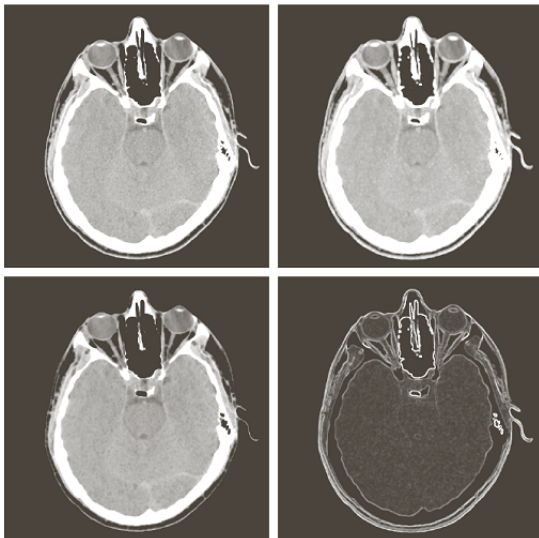
Erozja i dylatacja płaskim dyskiem o promieniu 2 piksele



Obraz supernowej Cygnus Loop po otwarciu i zamknięciu dyskami i promieniach 1, 3, i 5 pikseli



Erozja, dylatacja, i różnica pomiędzy dylatacją a erozją (tzw. gradient morfologiczny)



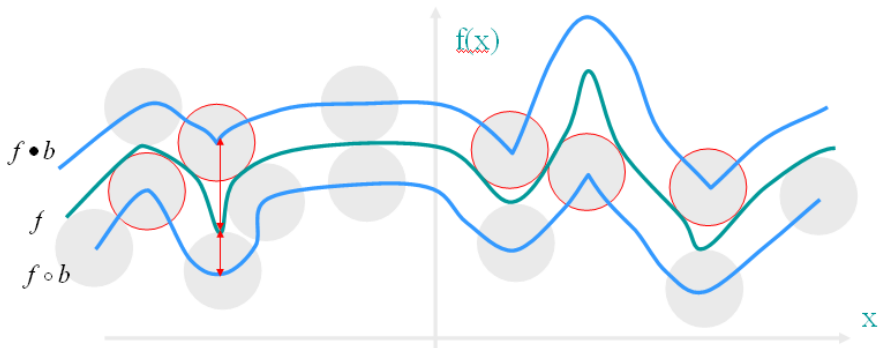
Otwarcie i zamknięcie

Analogicznie do morfologii binarnej:

$$f \circ b = (f \ominus b) \oplus b, \quad f \bullet b = (f \oplus b) \ominus b$$

Elegancka interpretacja geometryczna: „rolling ball” (dla sferycznego elementu strukturalnego).

Przykład 1D:



- Gradient morfologiczny:

$$(f \oplus b) - (f \ominus b)$$

gdzie '−' oznacza arytmetyczne odejmowanie obrazów (pixel-wise).
W przeciwieństwie do tradycyjnych operatorów mniej zależny od konkretnego kierunku krawędzi, ale bardziej złożony obliczeniowo.

- Top-hat:

$$f - (f \circ b)$$

(polepsza widoczność detali w obecności „cienia” i przy słabym kontraście)

Opis charakterystyki teksturalnej

Idea: sekwencja operacji morfologicznych na całym obrazie, każda z operacji przekształca obraz z użyciem elementu strukturalnego:

- o tym samym kształcie,
- ale o różnej wielkości.

Przykład:

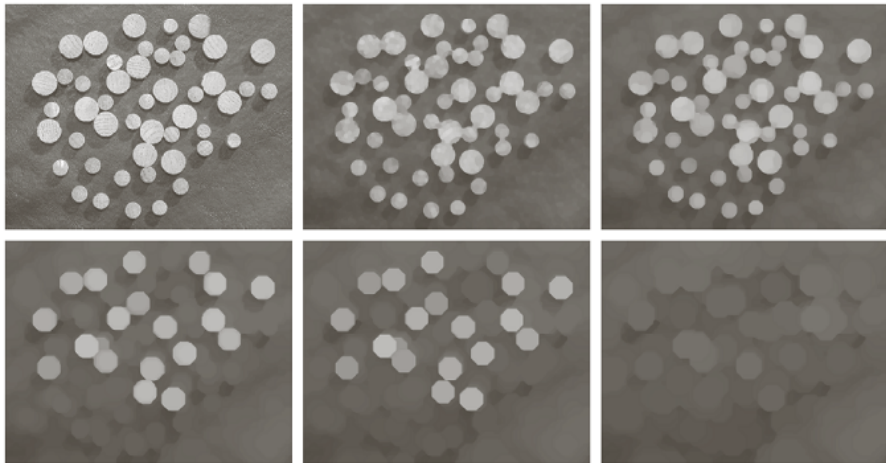
1. W kolejnych iteracjach dokonuj otwarcia obrazu i oblicz globalny spadek jasności:

$$I(d_i) = \int_I |f \circ d_i - f|$$

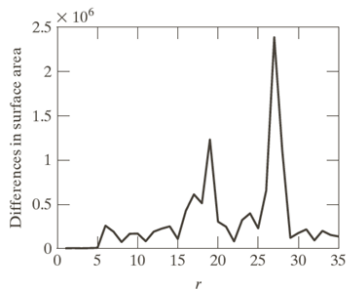
gdzie: f - obrazy oryginalny, d_i - element strukturalny o wielkości i ,

2. Przeanalizuj I jako funkcję i (lub d_i).

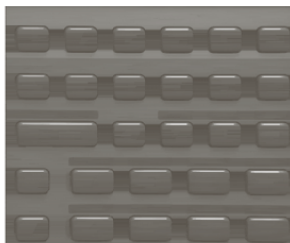
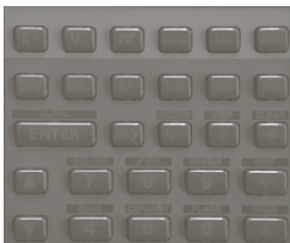
Obraz oryginalny, obraz wygładzony, i efekt otwarcia dyskami o promieniach 10, 20, 25, i 30 pikseli



Wykres pola powierzchni w funkcji promienia dysku



Megaprzykład – morfologia rulez :)



- ekstrakcja brzegu figury,
- wypełnianie obszaru,
- określanie składowych spójnych,
- powłoka wypukła,
- pocienianie,
- pogrubianie,
- znajdowanie szkieletu,
- pruning,
- ...

Przetwarzanie obrazów w dziedzinie czestotliwosci

Przetwarzanie obrazów w dziedzinie czestotliwosci Wprowadzenie

Liczba zespolona C to para składająca się z części rzeczywistej R i urojonej I :

$$C = R + jI$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$. Liczba *sprzężona* względem C to liczba $C^* = R - jI$.

Każda liczba zespolona może być utożsamiana z punktem na płaszczyźnie o współrzędnych (R, I) .

LZ można reprezentować we współrzędnych biegunowych:

$$C = |C|(\cos \theta + j \sin \theta)$$

gdzie $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$ to *moduł* liczby zespolonej.

Ponieważ jest prawdą że (wzór Eulera):

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

zatem

$$C = |C|e^{j\theta}$$

Zarys dowodu wzoru Eulera (jednego z dowodów): niech

$$f(\theta) = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(\cos \theta + j \sin \theta) = -\sin \theta + j \cos \theta \\ &= j(j \sin \theta + \cos \theta) = j(\cos \theta + j \sin \theta) = jf(\theta) \end{aligned}$$

Czyli f spełnia to samo równanie różniczkowe co $e^{j\theta}$, bo $\frac{d}{d\theta} e^{j\theta} = j e^{j\theta}$.

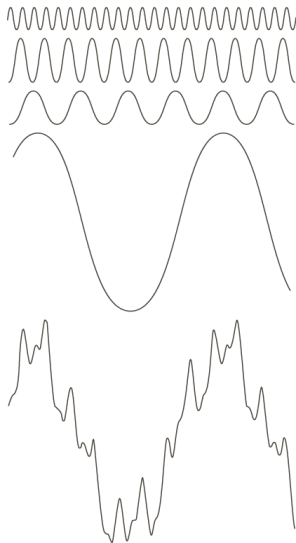
Każda funkcja o okresie T może być wyrażona jako suma funkcji sinusoidalnych i cosinusoidalnych wymnożonych przez odpowiednie wagi (współczynniki):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

gdzie:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Ciągła transformata Fouriera funkcji jednej zmiennej

Ang. *Continuous Fourier Transform*

Ciągła transformata Fouriera ciągłej funkcji $f(t)$ ciągłej zmiennej t :

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt$$

gdzie μ jest zmienna ciągłą.

Czyli: transformata to *funkcja* pewnej zmiennej μ .

Transformata odwrotna:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

Czyli: można odtworzyć funkcję na podstawie jej transformaty.

Używając wzoru Eulera dostajemy:

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)]dt$$

Ang. *Discrete Fourier Transform* (DFT)

Dyskretna transformata Fouriera jednej zmiennej:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{-j2\pi ux/M}$$

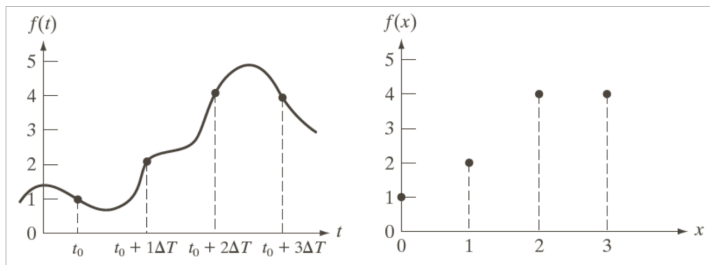
gdzie $f(x)$ to obraz 1D o rozmiarze M , $u = 0, 1, \dots, M-1$

Transformata odwrotna:

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{j2\pi ux/M}$$

gdzie $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$

Dyskretna 1D transformata Fouriera – przykład



$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 2 + 4 + 4 = 11$$

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x)e^{-j2\pi(1)x/4} = 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j$$

$$F(2) = -(1 + 0j)$$

$$F(3) = -(3 + 2j)$$

Dyskretna dwuwymiarowa transformata Fouriera:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

gdzie $f(x, y)$ to obraz o rozmiarach $M \times N$, $u = 0, 1, \dots, M - 1$,
 $v = 0, 1, \dots, N - 1$.

Dyskretna odwrotna transformata Fouriera:

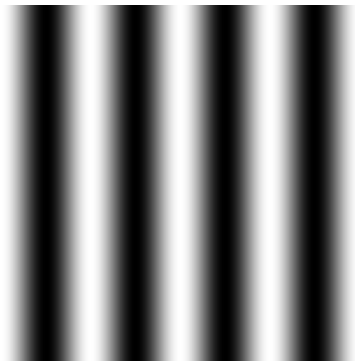
$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

gdzie $x = 0, 1, \dots, M - 1$, $y = 0, 1, \dots, N - 1$.

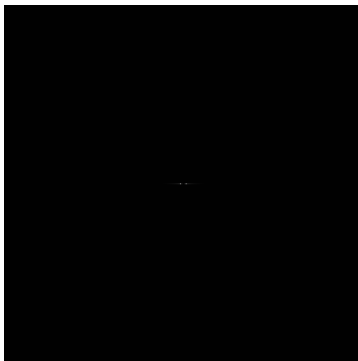
- Ang. *Fast Fourier Transform* (FFT)
- Grupa algorytmów pozwalających na wyliczenie jednowymiarowej DFT w czasie rzędu $O(n \log n)$ (podczas gdy liczenie wg. definicji ma złożoność $O(n^2)$)
- Najbardziej popularny algorytm: Cooley–Tukey (a przedtem C.F. Gauss, 1805)

Przetwarzanie obrazów w dziedzinie czestotliwosci Przykłady

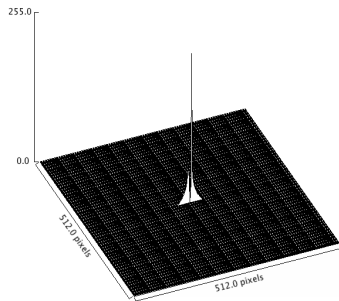
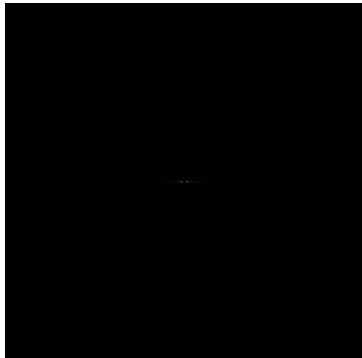
Przykład: Prążki sinusoidalne (4 okresy)



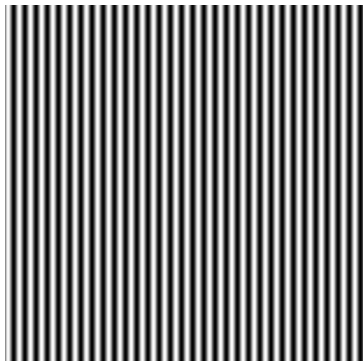
FFT
→
←
 FFT^{-1}



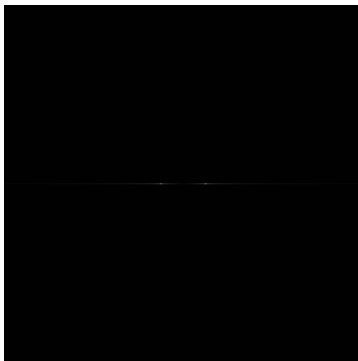
Przykład: Prążki sinusoidalne (4 okresy)



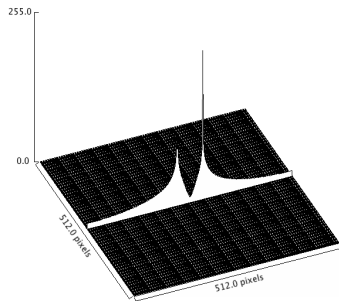
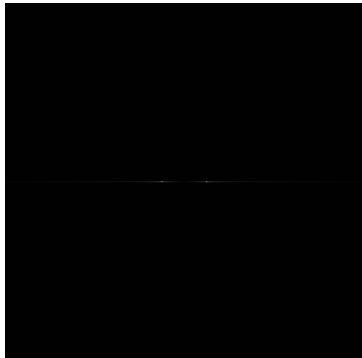
Przykład: Prążki sinusoidalne (32 okresy)



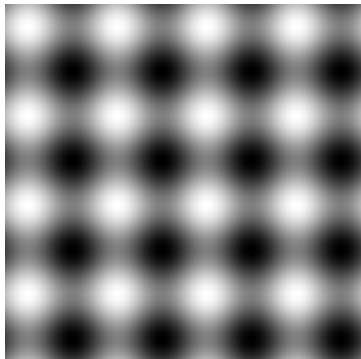
FFT
→
←
 FFT^{-1}



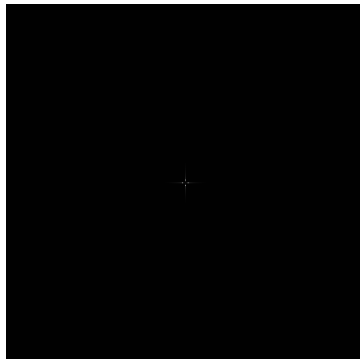
Przykład: Prążki sinusoidalne (32 okresy)



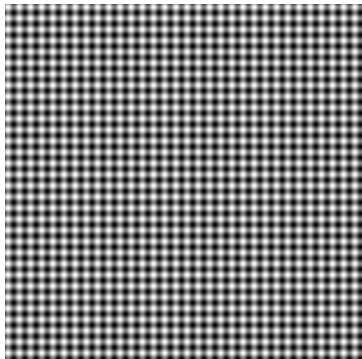
Przykład: Złożenie prążków w osi X i Y



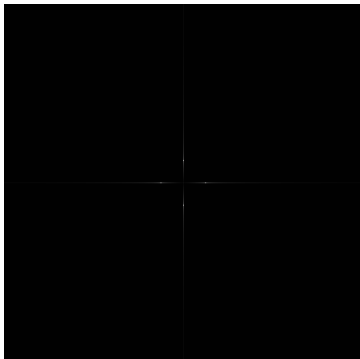
FFT
→
←
 FFT^{-1}



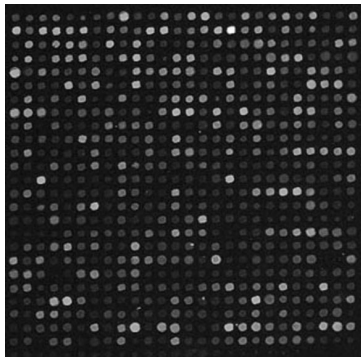
Przykład: Złożenie prążków w osi X i Y



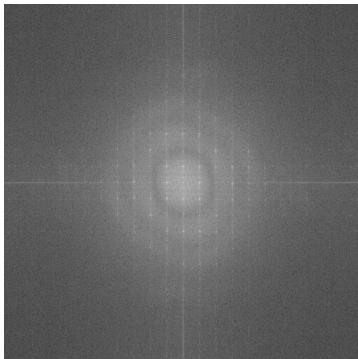
FFT
→
←
 FFT^{-1}



Przykład: Obraz rzeczywisty



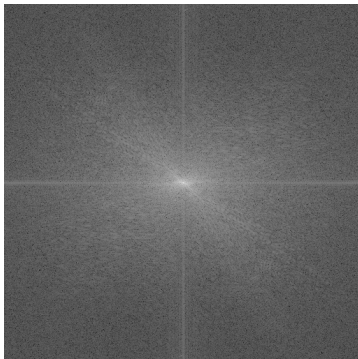
\xrightarrow{FFT}
 $\xleftarrow{FFT^{-1}}$



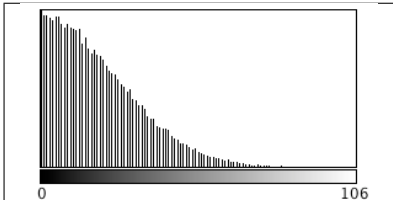
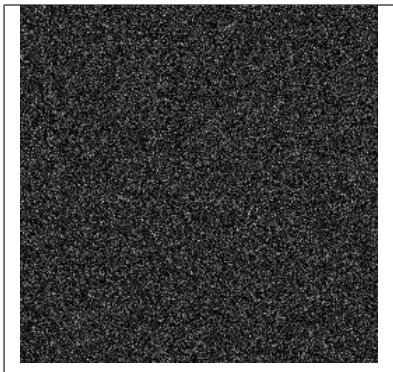
Przykład: Obraz rzeczywisty



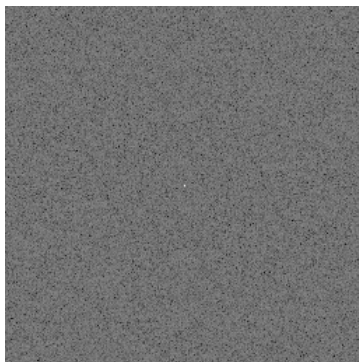
FFT
→
←
 FFT^{-1}



Przykład: Szum (biały, rozkład normalny)

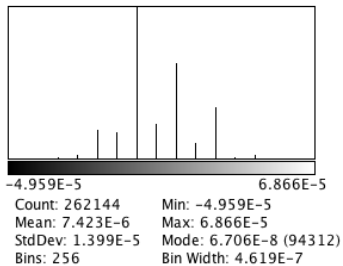


Count: 65536 Min: 0
Mean: 19.610 Max: 106



FFT
→
←
 FFT^{-1}

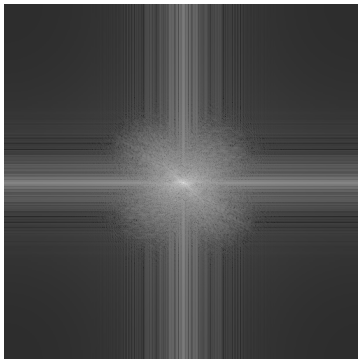
Wierność transformaty odwrotnej



Wpływ przefiltrowania obrazu na widmo (Gauss $\sigma = 2.0$)



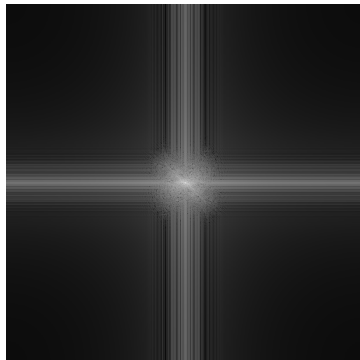
FFT
→
←
 FFT^{-1}



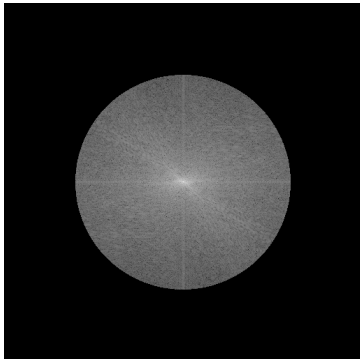
Wpływ przefiltrowania obrazu na widmo (Gauss $\sigma = 4.0$)



FFT
→
←
 FFT^{-1}



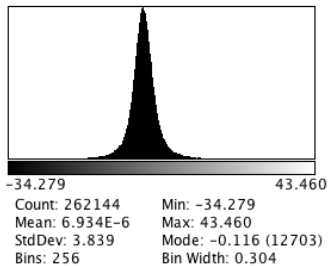
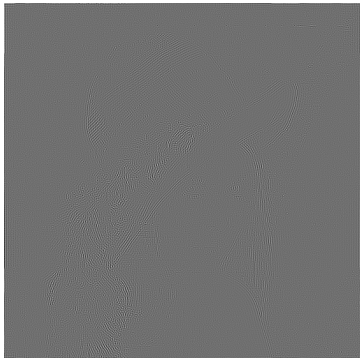
Manipulacja na widmie $r = 150$



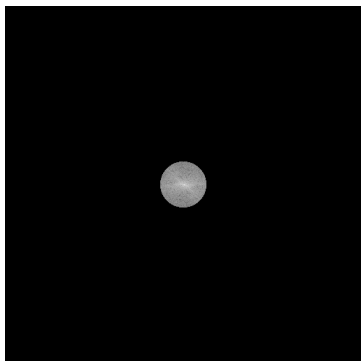
FFT^{-1}
→



Wierność transformaty odwrotnej



Manipulacja na widmie $r = 64$



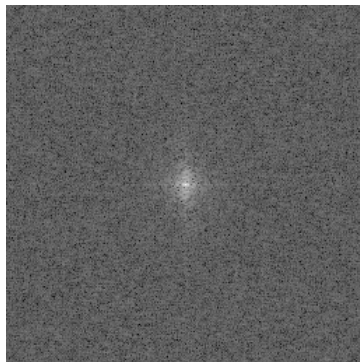
FFT^{-1}
→



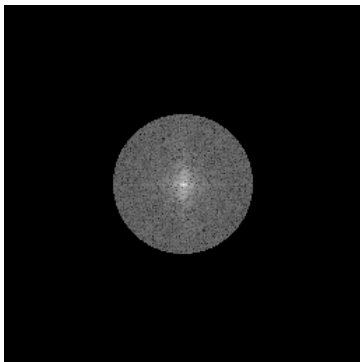
Filtrowanie w dziedzinie częstotliwości



\xrightarrow{FFT}
 $\xleftarrow{FFT^{-1}}$



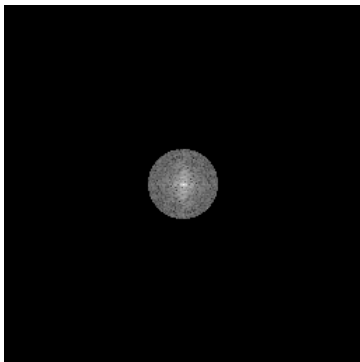
Wycinanie składowych o wyższych częstotliwościach $r = 50$



FFT^{-1}
→



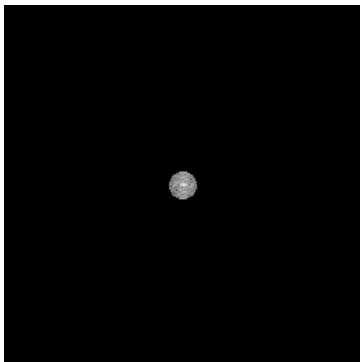
Wycinanie składowych o wyższych częstotliwościach $r = 25$



FFT^{-1}
→



Wycinanie składowych o wyższych częstotliwościach $r = 10$



FFT^{-1}
→

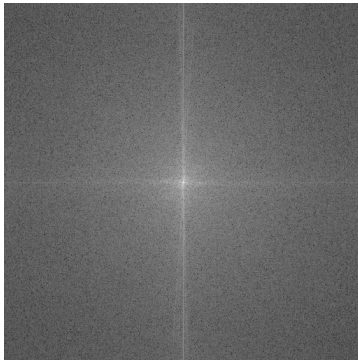


Spot a filtrowanie w dziedzinie częstotliwości



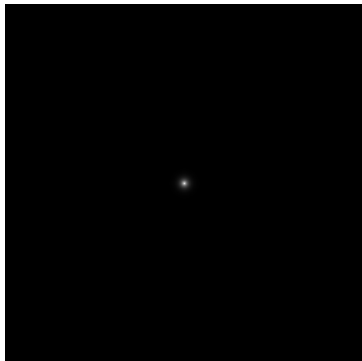
FFT
→

←
 FFT^{-1}



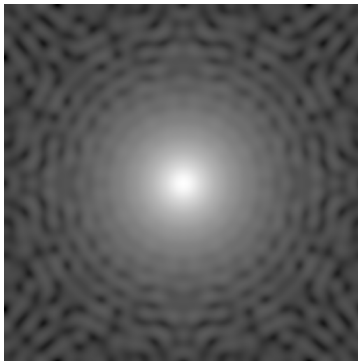
(obraz)

Spłot a filtrowanie w dziedzinie częstotliwości

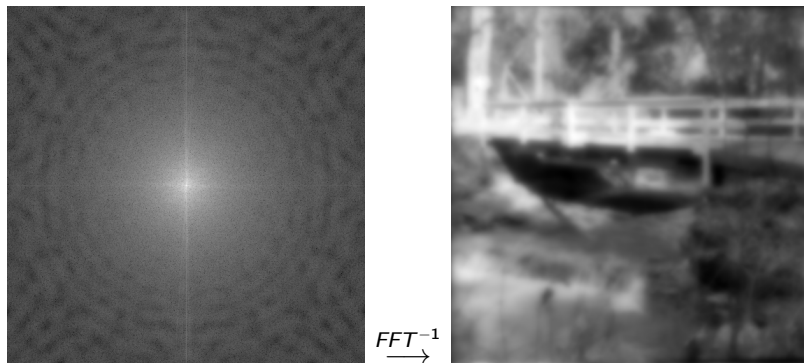


(filtr)

FFT
 \longrightarrow
 \longleftarrow
 FFT^{-1}



Spot a filtrowanie w dziedzinie częstotliwości



(lewa strona: obraz będący korelacją DFT obrazu i filtra)