

5. PLOCHY V POČÍTAČOVÉ GRAFICE



Cíl Po prostudování této kapitoly budete umět

- popsat plochy používané v počítačové grafice
- řešit příklady z praxe, kdy jsou použity plochy



Výklad

Interpoláční plochy - plochy, které procházejí křivkami resp. body, které plochu určují.

V technické praxi se používají převážně plochy přímkové, kdy jednotlivé body tvořících křivek jsou spojeny úsečkami. Plochy, které neprocházejí všemi zadanými body se nazývají aproximační.

5.1. Bilineární plochy- plochy určené dvěma okrajovými křivkami.

Jsou dány dvě okrajové křivky a_0 , a_1 určené vektorovými funkcemi $\underline{a}_0(w)$, $\underline{a}_1(w)$ parametru w z intervalu $w \in \langle 0, 1 \rangle$.

Rovnice $\underline{R}(u,w) = (1-u) \cdot \underline{a}_0(w) + u \cdot \underline{a}_1(w)$, $u, w \in \langle 0, 1 \rangle$. (5.1)

obsahuje křivky a_0 a a_1 jako své okrajové parametrické w_u - křivky,

$$\underline{R}(0, w) = 1 \cdot \underline{a}_0(w) + 0 \cdot \underline{a}_1(w) = \underline{a}_0(w)$$

$$\underline{R}(1, w) = \underline{a}_1(w)$$

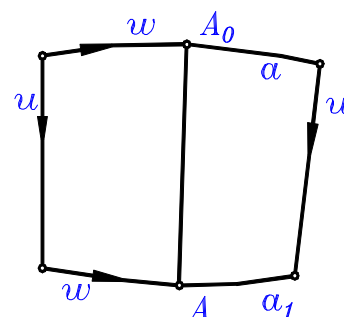
Rovnice (5.1) je tedy interpoláční plochou procházející křivkami a_0 , a_1 .

Parametrické u -křivky plochy (5.1) jsou pro každé

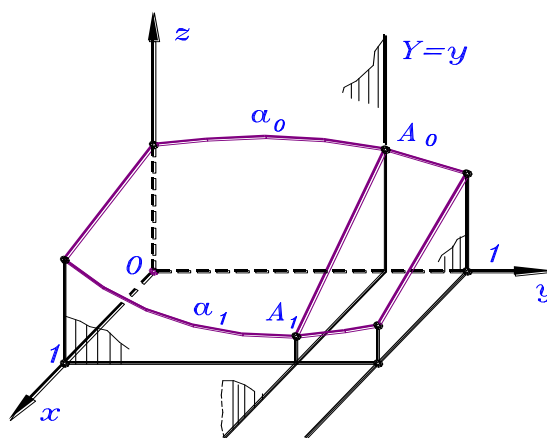
$W \in I$ úsečky

$$\underline{R}(u, W) = (1-u) \cdot \underline{a}_0(W) + \underline{a}_1(W),$$

spojující body A_0 a A_1 určené vektory $\underline{a}_0(W)$ a $\underline{a}_1(W)$. Spojnice krajních bodů křivek tvoří okrajové křivky plochy. První krajnice je určena vektory $\underline{a}_0(0)$ a $\underline{a}_1(0)$, druhá $\underline{a}_0(1)$ a $\underline{a}_1(1)$.



Obr. 5.1



Obr.5.2

Příklad 1. Pro
$$\left. \begin{array}{l} x = u \\ y = w \end{array} \right\} x, y \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$z = (1-x) \cdot a_0(Y) + x \cdot a_1(Y).$$

Jde o přímkovou plochu určenou hraničními křivkami a_0 a a_1 , které leží v rovině $x = 0$ a $x = 1$. Plocha je dále určena rovnicemi $z = a_0(y)$ a $z = a_1(y)$ v rovinách $y = Y$.

Rovnice
$$z = (1-x) \cdot a_0(Y) + x \cdot a_1(Y)$$

určuje úsečky plochy, které spojují body A_0 a A_1 v nichž rovina $y = Y$ protíná křivky a_0 a a_1 .

5.2. Bikubická plocha.

Jestliže místo lineární funkce (přímky) $(1-u)$ a u je použita kubická funkce $F_0(u)$ a $F_1(u)$, dostaneme kubickou plochu, která je křivkami $F_0(u)$ a $F_1(u)$,

$$\underline{R}(t) = F_0(t) \cdot \underline{G} + F_1(t) \cdot \underline{H} + F_2(t) \cdot \underline{g} + F_3(t) \cdot \underline{h} \quad \dots \text{ po úpravách}$$

$$\begin{aligned} \underline{R}(t) &= (2\underline{G} - 2\underline{H} + \underline{g} + \underline{h}) \cdot t^3 + (-3\underline{G} + 3\underline{H} - 2\underline{g} - \underline{h}) \cdot t^2 + \underline{g} \cdot t + \underline{G} = \\ &= \underbrace{(2t^3 - 3t^2 + 1)}_{F_0} \cdot \underline{G} + \underbrace{(-2t^3 + 3t^2)}_{F_1} \cdot \underline{H} + \underbrace{(t^3 - 2t^2 + t)}_{F_2} \cdot \underline{g} + \underbrace{(t^3 - t^2)}_{F_3} \cdot \underline{h} \end{aligned}$$

Rovnice (5.1) bude:

$$\underline{R}(u, w) = F_0(u) \cdot \underline{a}_0(w) + F_1(u) \cdot \underline{a}_1(w). \quad (5.2)$$

Protože $F_0(0) = F_1(0) = 1$ a $F_0(1) = F_1(1) = 0$, jsou okrajové křivky pro $u = 0$ resp. $u = 1$ určeny rovnicí

$$\underline{R}(0, w) = \underline{a}_0(w) \quad \text{resp.} \quad \underline{R}(1, u) = \underline{a}_1(w),$$

takže plocha (5.2) má dané křivky za své okrajové.

Parametrická u -křivka je určena rovnicí

$$\underline{R}(u, W) = F_0(u) \cdot \underline{a}_0(W) + F_1(u) \cdot \underline{a}_1(W).$$

$F_0(u)$ a $F_1(u)$ jsou kubické funkce je $\underline{R}(u, W)$ kubická vektorová funkce a parametrická u -křivka plochy (5.2) je **kubika**.

$$\text{Obdobně pro } x = u, y = w, z = F_0(x) \cdot a_0(y) + F_1(x) \cdot a_1(y) \quad (5.3)$$

je interpolační plocha spojující křivku $z = a_1(y)$ v rovině $x = 0$ s křivkou $z = a_0(y)$ v rovině $x = 1$.

Hlavní křivkou ploch (5.3) v rovině $y = Y$ je kubika

$$z = F_0(x) \cdot a_0(Y) + F_1(x) \cdot a_1(Y) \Rightarrow$$

Vektorová rovnice

$$\underline{R}(u, w) = a_0(u) \cdot F_0(w) + a_1(u) \cdot F_1(w) \quad (5.4)$$

a explicitně

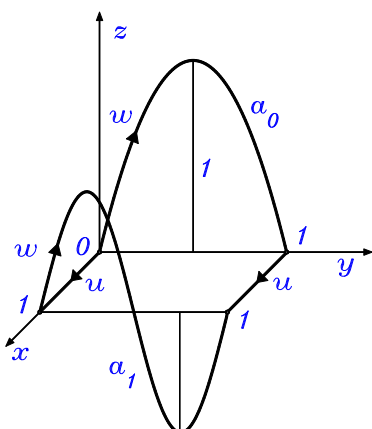
$$z = a_0(x) \cdot F_0(y) + a_1(x) \cdot F_1(y) \quad (5.5)$$

jsou interpolační plochy obsahující křivky a_0 a a_1 .

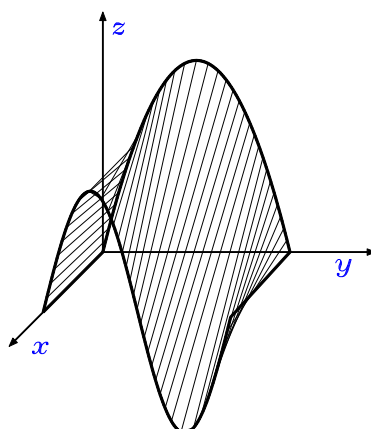
Příklad 2.

Proložte bilineární a bikubickou plochu nad jednotkovým čtvercem, kde v rovině (y, z) je křivkou a_0 - parabola $a_0: z = 4 \cdot y \cdot (1 - y)$

a křivkou a_1 je sinusoida $a_1: z = \sin(2\pi \cdot y)$ v rovině $x = 1$.



Obr. 5.3



Obr.5.4

Explicitní rovnice dle (5.5) jsou:

$$z = (1-x) \cdot a_0(Y) + x \cdot a_1(Y) \Rightarrow z = (1-x) \cdot 4y(1-y) + x \cdot \sin(2\pi \cdot y)$$

pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ {krok = 0.1}

Kubika: Ze(5.4) $\Rightarrow z = F_0(x) \cdot a_0(Y) + F_1(x) \cdot a_1(Y) \Rightarrow$

$$z = F_0(x) \cdot 4y(1-y) + F_1(x) \cdot \sin(2\pi \cdot y) \quad \text{pro } x, y \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$z = (2x^3 - 3x^2 + 1) \cdot 4y(1-y) + (-2x^3 + 3x^2) \cdot \sin(2\pi \cdot y)$$

pro $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ {krok = 0.1}

5.3. Coonsova bilineární plocha je plocha určená (omezená) čtyřmi křivkami (křivočarý čtyřúhelník), které se musí v koncových bodech protínat.

Křivky a_0 , a_1 , b_0 a b_1 jsou vektorové funkce

$\underline{a}_0(w)$, $\underline{a}_1(w)$, $\underline{b}_0(u)$ a $\underline{b}_1(u)$, aby platilo:

$$\underline{a}_0(0) = \underline{b}_0(0) = \underline{00} \quad \underline{a}_0(1) = \underline{b}_1(0) = \underline{01}$$

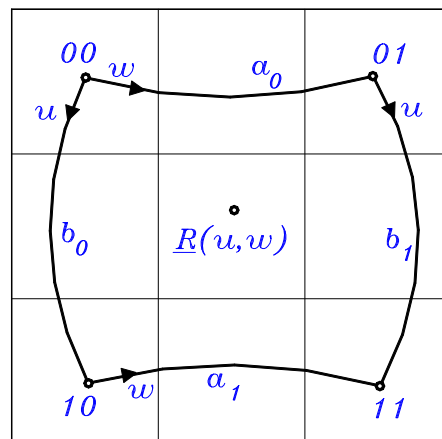
$$\underline{a}_1(0) = \underline{b}_0(1) = \underline{10} \quad \underline{a}_1(1) = \underline{b}_1(1) = \underline{11}$$

tj. křivky v bodech 00, 01, 10 a 11 se protínají

- navazují na sebe.

Rovnice

$$\begin{bmatrix} 1-u \\ -1 \\ u \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{00} & \underline{a}_0(w) & \underline{01} \\ \underline{b}_0(u) & \underline{R}(u,w) & \underline{b}_1(u) \\ \underline{10} & \underline{a}_1(w) & \underline{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-w \\ -1 \\ w \end{bmatrix} = 0 \quad (5.6)$$



Obr.5.6

určuje tzv. **Coonsovu bilineární plochu**.

Jde o interpolační plochu určenou křivkami a_0 , a_1 , b_0 , a b_1 .

Zvolíme např. $u = 0$ a dosadíme do (5.6), získáme vektorovou rovnici

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{00} & \underline{a}_0(w) & \underline{01} \\ \underline{b}_0(0) & \underline{R}(0,w) & \underline{b}_1(0) \\ \underline{10} & \underline{a}_1(w) & \underline{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-w \\ -1 \\ w \end{bmatrix} = \underline{0}$$

a po vynásobení matic obdržíme $\underline{R}(0,w) = \underline{a}_0(w)$.

Proto plocha (5.6) obsahuje křivku \underline{a}_0 , která je její okrajovou křivkou. Obdobně lze ukázat, že křivky a_1 , b_0 a b_1 jsou okrajové křivky plochy.

Jestliže položíme $x = u$, $y = w$ jsou okrajové křivky a_0 , a_1 , b_0 a b_1 v rovinách

$$x = 0, x = 1, y = 0 \quad \text{a} \quad y = 1$$

určené explicitními rovnicemi

$$z = a_0(y), \quad z = a_1(y), \quad z = b_0(x), \quad z = b_1(x) \quad (5.7)$$

které splňují podmínky

$$a_0(0) = b_0(0) = 00, \quad a_0(1) = b_1(0) = 01, \quad (5.8)$$

$$a_1(0) = b_0(1) = 10, \quad a_1(1) = b_1(1) = 11,$$

kde body 00,01,10 a 11 jsou z-tové souřadnice 'těchto' bodů.

Rovnicí

$$\begin{bmatrix} 1-x \\ -1 \\ x \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 00 & a_0(y) & 01 \\ b_0(x) & z & b_1(x) \\ 10 & a_1(1) & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-y \\ -1 \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (5.9)$$

je určena interpolační plocha, obsahující křivky a_0 , a_1 , b_0 a b_1 .



Úlohy k řešení 5.1.

Dle (5.9) určete rovnici interpolační plochy, která obsahuje

- parabolu $z = 4y(1-y)$ v rovině $x = 0$;
- sinusoidu $z = 2\pi y$ v rovině $x = 1$;
- přímku $z = 0$ v rovině $y = 0$;
- půlkružnici $z = -\sqrt{x(1-x)}$ v rovině $y = 1$.

(Proveďte v kosoúhlém promítání.)

Klíč. (Řešení.)

Z (5.9) plyne

$$\begin{bmatrix} 1-x \\ -1 \\ x \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 4y(1-y) & 0 \\ 0 & z & -\sqrt{x(1-x)} \\ 0 & \sin(2\pi y) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-y \\ -1 \\ y \end{bmatrix} = 0$$

Po vynásobení dostaneme:

$$z = (1-x) \cdot 4y(1-y) + \sin(2\pi y) - \sqrt{x(1-x)} \cdot y$$

5.4. Coonsova bikubická plocha

Stejně jako v předešlém zvolíme křivky a_0 , a_1 , b_0 a b_1 , které budou tvořit křivočarý čtyřúhelník. Plocha, která je určena vektorovou rovnicí

$$[F_0(u) - 1 \cdot F_1(u)] \cdot M \cdot [F_0(w) - 1 \cdot F_1(w)]^T = 0 \quad (5.10)$$

v níž jsou funkce $F_0(t)$ a $F_1(t)$ určeny rovnicemi (5.9) a matice M je stejná jako v rovnici (5.6) je **Coonsova bikubická plocha**.

Zvolíme $u = 1$ a dosadíme do (5.10).

Jelikož $F_0(1) = 0$, $F_1 = 1$ dostaneme rovnici $\underline{R}(1, w) = \underline{a}_1(w)$.

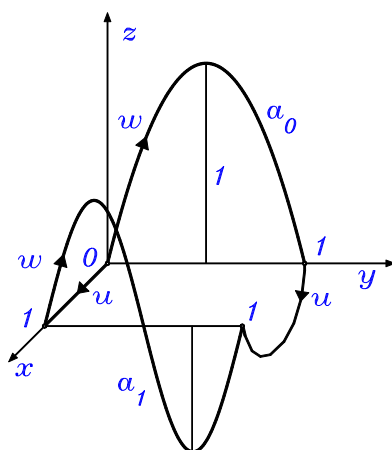
Po vynásobení matic vzhledem k (5.4) dostaneme

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{00} & \underline{a(w)} & \underline{01} \\ \underline{b(1)} & \underline{R(1,w)} & \underline{b(1)} \\ \underline{10} & \underline{a(w)} & \underline{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0(w) \\ -1 \\ F_1(w) \end{bmatrix} = 0$$

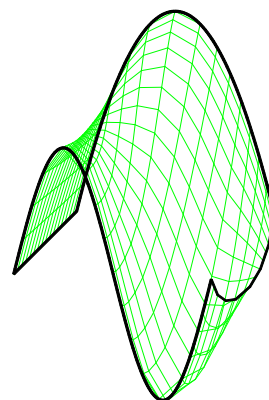
Tedy křivka a_1 je okrajovou křivkou plochy pro $u = 1$. Obdobně toto platí i pro ostatní okrajové křivky plochy.

Zvolíme-li místo funkcí $F_0(t)$ a $F_1(t)$ lineární funkce $1-t$ a t , změní se rovnice (5.10) na (5.6). Coonsova bikubická plocha je tedy zobecněním bilineární plochy.

Jestliže $x = u$, $y = w$, jsou křivky a_0 , a_1 , b_0 a b_1 v rovinách $x=0$, $x=1$, $y=0$ a $y=1$ určeny explicitními rovnicemi (5.7) a splňují vztahy (5.8).



Obr. 5.7



Obr. 5.8

$$\text{Rovnicí } [F_0(x) - 1 \cdot F_1(x)] \cdot M \cdot [F_0(y) - 1 \cdot F_1(y)]^T = 0 \quad (5.10)$$

je určena interpolační plocha obsahující čtyřúhelník a_0 , a_1 , b_0 a b_1 .

Zvolíme $y = 0$ a dosadíme do (5.10).

Protože $F_0(0) = 1$, $F_1(0) = 0$ dostaneme:

$$\begin{bmatrix} F_0(x) \\ -1 \\ F_1(x) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{00} & a_0(0) & \underline{01} \\ \underline{b_0(x)} & z & \underline{b_1(x)} \\ \underline{10} & a_1(0) & \underline{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ kde}$$

křivky a_0 , a_1 , b_0 a b_1 tvoří okraj plochy.



Úlohy k řešení 5.2.

Předcházející příklad na bilineární plochu proveďte jako plochu bikubickou

5.5. Bézierovy plochy



Výklad

Bézierova plocha je dána sítí $m \cdot n$ bodů. Hranice plochy tvoří Bézierovy křivky, které jsou určeny okrajovými lomenými čarami sítě.

Obecně je tedy zadána plocha:

1) Rohovými body sítě

$$U_{0m}, U_{0n}, U_{m0}, U_{mn}.$$

2) Tečné roviny plochy v rohových bodech sítě

jsou určeny rohovými stranami sítě, tj. jsou

to roviny

$$U_{00}U_{10}U_{01}, U_{0n-1}U_{1n}U_{0n}, U_{m-10}U_{m0}U_{m1}$$

$$\text{a } U_{m-1n-1}U_{mn}U_{m-1n}.$$

Pro síť 4×4 je plocha určena šestnácti uzlovými body U_{ij} , pro $i, j = 0, 1, 2, 3$. Síť se skládá z devíti čtyřúhelníků. Takovéto síti je přiřazena plocha rovnicí

$$\underline{R}(u, v) = [B_0(u) \ B_1(u) \ B_2(u) \ B_3(u)] \cdot M \cdot [B_0(w) \ B_1(w) \ B_2(w) \ B_3(w)]^T \quad (5.11)$$

V rovnici je M maticí polohových vektorů \underline{U}_{ij} , určených uzlovými body U_{ij} ,

pro $i, j = 0, 1, 2, 3$:

$$M = \begin{bmatrix} \underline{U}_{00} & \underline{U}_{01} & \underline{U}_{02} & \underline{U}_{03} \\ \underline{U}_{10} & \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} & \underline{U}_{13} \\ \underline{U}_{20} & \underline{U}_{21} & \underline{U}_{22} & \underline{U}_{23} \\ \underline{U}_{30} & \underline{U}_{31} & \underline{U}_{32} & \underline{U}_{33} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

a funkce $B_0(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ a $B_3(t)$ jsou kubické polynomy $B_{03}(t)$, $B_{13}(t)$, $B_{23}(t)$ a $B_{33}(t)$,

kde

$$B_0(t) = (1 - t)^3$$

$$B_1(t) = 3t(1 - t)^2$$

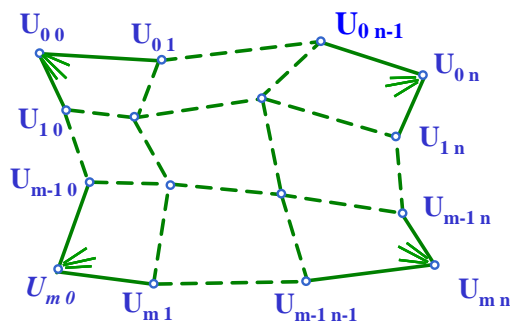
$$B_2(t) = 3t^2(1 - t)$$

$$B_3(t) = t^3$$

(5.13)

Příklad 3.

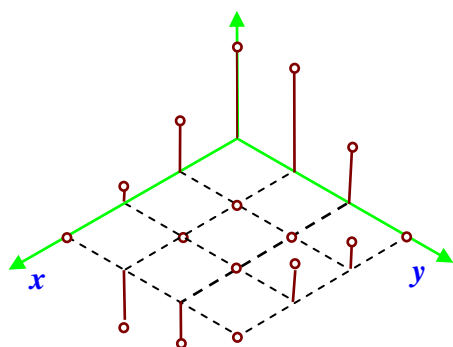
Na obrázku 6.10. a 6.11. jsou dány uzlové body U_{ij} , pro $i, j = 0, 1, 2, 3$ pro $m = 3$.



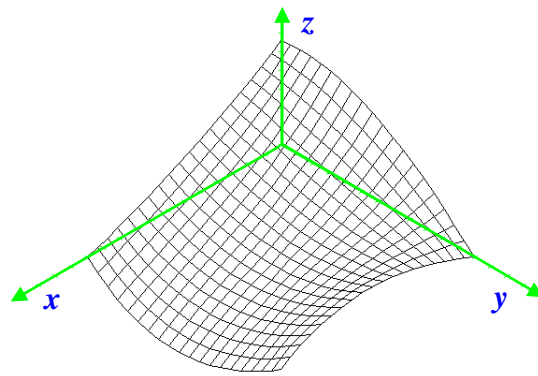
Obr. 5.9

Tj. 16 bodů nad jednotkovým čtvercem. Matici M polohových vektorů rozepíšeme do matic M_x , M_y a M_z , jejíž prvky jsou souřadnice těchto vektorů.

Dostaneme:



Obr. 5.10



Obr. 5.11

$$M_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_y = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \quad M_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -2/3 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Po dosazení do (5.11) získáme nejprve parametrické rovnice

$$x = \left(\frac{1}{3} B_1(u) + \frac{2}{3} B_2(u) + B_3(u) \right) (B_0(w) + B_1(w) + B_3(w)) = u \cdot 1 = u$$

$$y = (B_0(u) + B_1(u) + B_2(u)) \left(\frac{1}{3} B_1(w) + \frac{2}{3} B_2(w) + B_3(w) \right) = 1 \cdot w = w$$

a proto lze rovnici (9.11) použít ve zjednodušeném explicitním tvaru. Matici vektorů \underline{U}_{ij} nahradíme z -souřadnicemi z_{ij} uzlových bodů U_{ij} a explicitní rovnice plochy je

$$z = [B_0(x) \ B_1(x) \ B_2(x) \ B_3(x)] \cdot M_z \cdot [B_0(y) \ B_1(y) \ B_2(y) \ B_3(y)]^T$$

Po vynásobení matic a po úpravách vyjde explicitní vyjádření:

$$z = 3x(1 - 3x + 2x^2) + 3y(1 - 6x + 9x^2 - 6x^2) + 3y^2(-1 + 9x - 6x^2 + x^3) + 3y^3(-4x + 2x^2 + x^3)$$

Obdobně síť 5×3 .

Bézierovu plochu můžeme vytvořit i pomocí sítě 5×3 . Tedy U_{ij} , $i = 0, 1, 2, 3, 4$ a $j = 0, 1, 2$.

Plocha určená touto sítí má rovnici

$$\underline{R}(u, w) = \begin{bmatrix} B_{04}(u) \\ B_{14}(u) \\ B_{24}(u) \\ B_{34}(u) \\ B_{44}(u) \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{00} & \underline{U}_{01} & \underline{U}_{02} \\ \underline{U}_{10} & \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{20} & \underline{U}_{21} & \underline{U}_{22} \\ \underline{U}_{30} & \underline{U}_{31} & \underline{U}_{32} \\ \underline{U}_{40} & \underline{U}_{41} & \underline{U}_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{02}(w) \\ B_{12}(w) \\ B_{22}(w) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Funkce $B_4(u)$, $i = 0, \dots, 4$ jsou kvartiky z (viz. Ferg. křivky)

$$\begin{aligned} B_{04}(u) &= (1-u)^4 & B_{24}(u) &= 6u(1-u)^4 & B_{14}(u) &= 4u(1-u)^4 \\ B_{34}(u) &= 4u^3(1-u) & B_{44}(u) &= u^4, \end{aligned} \quad (5.15)$$

kde funkce $B_{i2}(w)$, pro $i = 0, 1, 2$ jsou paraboly (viz. Fergusonovy křivky – kap.3.4.3.)

$$\begin{aligned} B_{02}(w) &= (1-w)^2 \\ B_{12}(w) &= 2w(1-w) \\ B_{22}(w) &= w^2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pro $w = 0$ po dosazení (5.16) dostaneme: $B_{02}(0) = 1$, $B_{12}(0) = 0$, $B_{22}(0) = 0$,

$$\text{tedy} \quad \underline{R}(u, 0) = B_{04}(u) \cdot \underline{U}_{00} + B_{14}(u) \cdot \underline{U}_{10} + B_{24}(u) \cdot \underline{U}_{20} + B_{34}(u) \cdot \underline{U}_{30} + B_{44}(u) \cdot \underline{U}_{40}$$

je rovnice Bézierovy křivky, která je určena okrajovou lomenou čarou sítě s vrcholy

$$\underline{U}_{00}, \underline{U}_{10}, \underline{U}_{20}, \underline{U}_{30}, \underline{U}_{40}.$$

Obdobně pro parametry $w = 1$, $u = 0$ a $u = 1$ lze ukázat, že i ostatní okrajové strany plochy jsou Bézierovy křivky určené příslušnou okrajovou lomenou čarou.

Příklad 4.

Na následujícím obrázku 5.12 je zobrazena síť

s patnácti uzly U_{ij} , $i = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\text{a } j = 0, 1, 2,$$

které jsou rozmístěny rovnoměrně

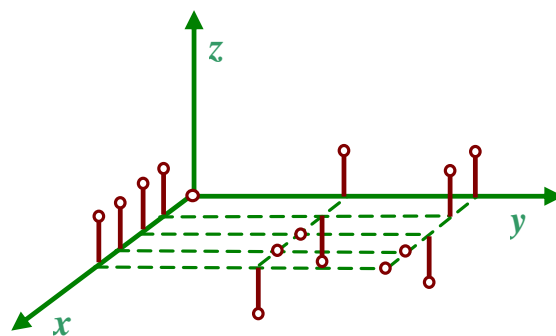
v jednotkovém čtverci. Obdobně, jako

v předcházejícím příkladě vyjádříme matici M

vektorů U_{ij} tak, že souřadnice uzlů U_{ij}

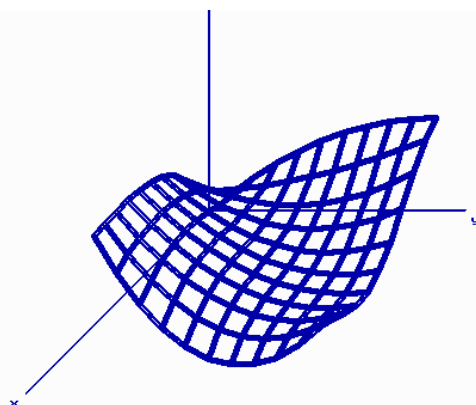
nahradíme z - souřadnicemi.

Matice M má tvar



Obr. 5.12

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Z rovnic (5.15) a (5.16) (po vynásobení a úpravách dostaneme explicitní tvar:

Obr. 5.13

$$z = x^2(6 - 8x + 3x^2) + 2y(1 - 8x + 12x^2 - 8x^3 + x^4) + y^2(-1 + 16x - 42x^2 + 44x^3 - 14x^4).$$

Plocha je zobrazena na obrázku 5.13.



Úlohy k řešení 5.3.

Zobrazte v různých druzích promítání Bézierovu plochu, která je dána sítí 3×4 .

Řešte obecně i pro body zadané souřadnicemi.

5.6. Coonsova B-spline plocha



Výklad

Coonsova B-spline plocha je určena sítí 4×4 uzlových bodů.

$$U_{ij}, i, j = 0, 1, 2, 3. \leftarrow \text{uzlové body.}$$

Rovnice plochy je:

$$\underline{R}(u, w) = [C_0(u) \ C_1(u) \ C_2(u) \ C_3(u)] \cdot M \cdot [C_0(w) \ C_1(w) \ C_2(w) \ C_3(w)]^T / 36 \quad (5.17)$$

M je maticí (5.12), jejíž prvky jsou radiusvektory \underline{U}_{ij} uzlových bodů U_{ij} a funkce $C_i(t)$,

pro $i = 0, 1, 2, 3$ jsou kubické polynomy

$$\begin{aligned} C_0(t) &= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 = (1 - t)^3 & C_2(t) &= 1 + 3t + 3t^2 - 3t^3 \\ C_1(t) &= 4 - 6t^2 + 3t^3 & C_3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

Určení okrajových křivek je stejné, jako v minulé části. Pro $u = 0$ platí:

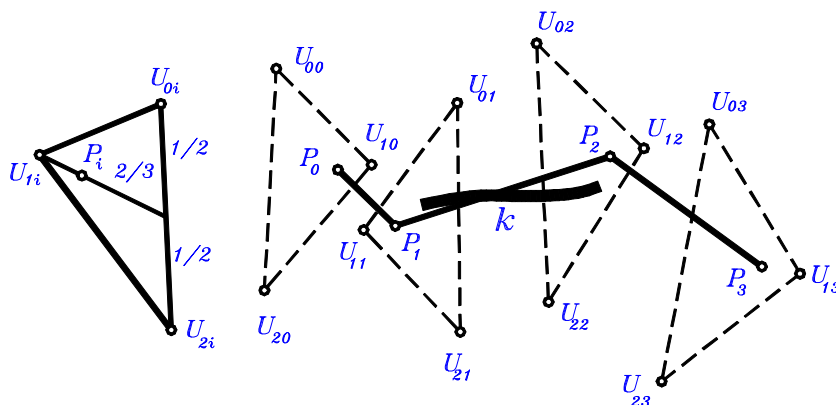
$$C_0(0) = 1, C_1(0) = 4, C_2(0) = 1, C_3(0) = 0.$$

Po dosazení do rovnice (5.17) dostaneme:

$$\underline{R}(0, w) = [1 \ 4 \ 1 \ 0] \cdot M \cdot [C_0(w) \ C_1(w) \ C_2(w) \ C_3(w)]^T / 36 = \sum_{i=0}^3 (\underline{U}_{0i} + 4 \cdot \underline{U}_{1i} + \underline{U}_{2i}) \cdot C_i(w) / 36$$

Jde tedy o B-spline kubiku, která je určena lomenou čarou s vrcholy P , danými vektory

$$\underline{P}_i = (\underline{U}_{0i} + 4\underline{U}_{1i} + \underline{U}_{2i}) / 6, \quad \text{pro } i = 0, 1, 2, 3.$$

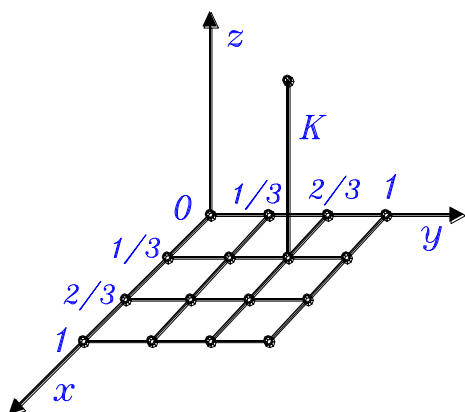


Obr. 5.14

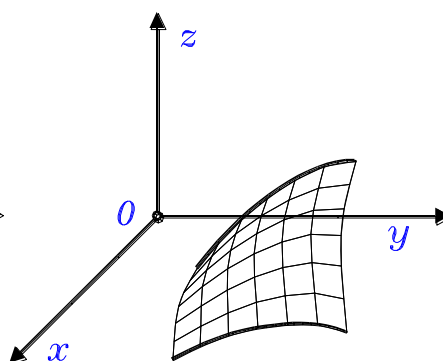
Tento vztah lze upravit

$$\text{(obdobně jako u 2D) do tvaru} \quad \underline{P}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} (\underline{U}_{0i} + \underline{U}_{2i}) - \underline{U}_{1i} \right) + \underline{U}_{1i}$$

$\underline{P}_i = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} (\underline{U}_{0i} + \underline{U}_{2i}) - \underline{U}_{1i} \right) + \underline{U}_{1i}$, z čehož plyne, že bod P_i určený polohovým vektorem \underline{P}_i je antitěžiskem trojúhelníka U_{0i} , U_{1i} a U_{2i} . To je bod, který leží v jedné třetině těžnice jdoucí z vrcholu U_{1i} . Odvození okrajových křivek plochy provedeme obdobně jako při



Obr. 5.15



Obr. 5.16

rovinné křivce. Okrajovou křivkou plochy (5.17) je pro $u = 0$ B-spline křivka, která je určena vrcholy P_1 , které získáme jako antitěžiště trojúhelníků U_{0i}, U_{1i} a U_{2i} pro $i = 0, 1, 2, 3$.

Stejně je tomu i pro další okrajové křivky plochy. Jde tedy o B-spline křivky, které jsou určeny antitěžišti ve čtyřech trojúhelnících. Tyto trojúhelníky tvoří příslušných dvanáct uzlových bodů.

B-spline plocha je k původně zadaným bodům - sítí - ve volnějším vztahu, než B-spline křivka. **Neprochází žádným** bodem sítě.

Na obrázku 6.14 je zadání a výsledek Coonsovy B-spline plochy, která je dána nad jednotkovým čtvercem 16-ti body. Výsledná plocha je zobrazena na obrázku 6.15.

Vektory jednotlivých bodů - uzlů plochy - rozepíšeme do matic pro jednotlivé x, y a z souřadnice:

$$M_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_y = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ze základní rovnice (5.17) dostaneme

$$x = [C_0(u) \quad C_1(u) \quad C_2(u) \quad C_3(u)] \cdot M_x \cdot [C_0(w) \quad C_1(w) \quad C_2(w) \quad C_3(w)]^T / 36$$

Po vynásobení matic a příslušných úpravách dostaneme: $x = (1+u)/3$ a obdobně

$$y = (1+w)/3$$

$$z = K \cdot C_1(u) \cdot C_2(w) = K \cdot (3u^3 - 6u^2 + 4) \cdot (-3w^3 + 3w^2 + 3w + 1) / 36$$



Kontrolní otázky 5.

1. Charakterizujte typy ploch, které se používají v počítačové grafice?
2. Dejte příklad na použití Bézierových ploch.
3. Jak je určena Coonsova plocha?