Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Mechanika tekutin

učební text

Sylva Drábková a kolektiv

Ostrava 2007

Recenze: prof. Ing. Mária Čarnogurská, CSc.

Název: Mechanika tekutin
Autor: Sylva Drábková
Vydání: první, 2007
Počet stran: 257
Náklad: -
Vydavatel a tisk: Ediční středisko VŠB – TUO

Studijní materiály pro studijní program“Strojírenství“ Fakulty strojní
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:
Operační program Rozvoj lidských zdrojů
Název: E-learningové prvky pro podporu výuky odborných a technických předmětů
Číslo: CZ.O4.01.3/3.2.15.2/0326
Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava
Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Sylva Drábková
© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-1508-4

Obsah

	Obsah	1
	Pokyny ke studiu	3
1	**Úvod**	5
1.1	Historie	6
1.2	Základní pojmy mechaniky tekutin	9
1.3	Fyzikální vlastnosti tekutin	11
1.4	Matematický základ pro odvození bilančních rovnic v mechanice tekutin	19
2	**Tlakové poměry v kapalině za klidu**	26
2.1	Tlak a jeho působení	27
2.2	Eulerova rovnice hydrostatiky	29
2.3	Kapalina za působení zemské tíže	33
2.4	Pascalův zákon	35
3	**Tlakové síly**	40
3.1	Tlakové síly na vodorovné rovinné plochy	40
3.2	Tlakové síly na šikmé rovinné plochy	42
3.3	Tlakové síly na křivé plochy	48
3.4	Síly na tělesa ponořená do kapaliny	55
4	**Relativní klid kapaliny**	60
4.1	Přímočarý, rovnoměrně zrychlený pohyb nádoby s kapalinou	60
4.2	Rovnoměrně otáčivý pohyb válcové nádoby kolem svislé osy	64
5	**Úvod do proudění tekutin**	71
5.1	Základní pojmy	71
5.2	Rozdělení proudění	73
5.3	Druhy proudění skutečných kapalin	76
6	**Základní rovnice pro proudění ideální tekutiny**	82
6.1	Rovnice kontinuity	82
6.2	Eulerova rovnice pro proudění ideální tekutiny	87
6.3	Bernoulliho rovnice pro ideální tekutinu	91
7	**Základní rovnice pro proudění skutečné kapaliny**	100
7.1	Rovnice kontinuity	100
7.2	Navierova-Stokesova rovnice	101
7.3	Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu	104
8	**Měření a tlaku a průtoku v potrubí**	109
8.1	Měření tlaku	109
8.2	Měření rychlostí	120
8.3	Měření průtoků	128
9	**Ustálené proudění v potrubí**	138
9.1	Laminární proudění v úzké štěrbině	138
9.2	Laminární proudění v potrubí kruhového průřezu	142
9.3	Turbulentní proudění v trubici kruhového průřezu	145
10	**Hydraulický výpočet potrubí**	154
10.1	Hydraulické odpory v potrubí	154
10.2	Příklady hydraulického výpočtu potrubí	163
10.3	Charakteristika potrubí, základy grafického řešení	168
11	**Výtok kapaliny z nádob, přepady**	176
11.1	Výtok malým otvorem	176
11.2	Výtok velkým otvorem v boční stěně	180
11.3	Výtok ponořeným otvorem	181

11.4 Výtok při současném přítoku 182
11.5 Vyprázdnění nádoby 183
11.6 Přepady 184
12 Nestacionární proudění v potrubí 190
12.1 Nestacionární proudění nestlačitelné kapaliny potrubím 190
12.2 Nestacionární proudění nestlačitelné kapaliny-hydraulický ráz 192
13 Čerpadlo v potrubním systému 199
13.1 Bernoulliho rovnice pro rotující kanál 199
13.2 Kinematické poměry v oběžném kole, 202
13.3 Eulerova čerpadlová rovnice 204
13.4 Čerpací systém, parametry čerpání 207
14 Proudění v korytech 214
14.1 Rovnoměrný průtok korytem - Chézyho rovnice 215
14.2 Neovnoměrný průtok korytem 219
15 Silové účinky proudící tekutiny na plochy a tělesa 222
15.1 Věta o změně hybnosti 222
15.2 Aplikace věty o změně hybnosti 223
16 Obtékání těles 230
16.1 Síly působící na obtékaná tělesa 230
16.2 Mezní vrstva 232
16.3 Odpor těles 238
17 Fyzikální podobnost a teorie modelování 246
17.1 Fyzikální podobnost při proudění tekutin 246
17.2 Dimenzionální analýza (PI-teorém) 250
18 Doporučená literatura 253
19 Přehled použitého značení 254

POKYNY KE STUDIU PŘEDMĚTU

„Mechanika tekutin“

Pro předmět Mechanika tekutin jste obdrželi studijní materiál obsahující

- strukturovaný text obsahující i pokyny ke studiu
- kontrolní otázky ke každé kapitole, řešené vzorové příklady
- doplňkové animace a videa vybraných částí kapitol
- kontrolní testy

Prerekvizity

Pro studium tohoto předmětu se předpokládá absolvování předmětu fyzika a matematika.

Cílem předmětu

je seznámení se základními problémy mechaniky tekutin. Mechanika tekutin je základem pro řešení praktických inženýrských úloh v řadě oborů. Nachází uplatnění nejen v oblasti strojírenství, ale také ve stavebnictví, energetice, ekologii, biologii, medicíně a dalších disciplínách. Kromě teoretických vědomostí je podmínkou řešení úloh i schopnost aplikovat nabyté poznatky v praxi.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do bakalářského programu „Strojírenství“, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splňuje požadované prerekvizity.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:

Čas ke studiu: xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden **čas** potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat ...
- definovat ...
- vyřešit ...

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.

Výklad

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.

Řešený příklad

Řešené příklady ilustrují aplikaci probrané teorie při řešení praktických úloh.

Shrnutí kapitoly

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.

Kontrolní otázka

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

Úkol k řešení

Protože většina teoretických pojmů tohoto předmětu má bezprostřední význam a využití v databázové praxi, jsou Vám nakonec předkládány i praktické úlohy k řešení. V nich je hlavní význam předmětu a schopnost aplikovat čerstvě nabyté znalosti při řešení reálných situací hlavním cílem předmětu.

1. Úvod

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• vysvětlit, čím se zabývá mechanika tekutin • vyjmenovat nejznámější vědce v historii mechaniky tekutin • definovat základní pojmy mechaniky tekutin • pochopit význam matematických operací používaných pro odvození základních rovnic	

Mechanika tekutin je částí obecné mechaniky, stejně jako mechanika tuhých těles. Zabývá se rovnováhou sil za klidu a pohybu kapalin a plynů. Při vyšetřování tohoto pohybu se využívá mnoha poznatků a zákonitostí z mechaniky tuhých těles.

Obdobně jako je v obecné mechanice zaveden pojem hmotného bodu, vystupuje v úlohách hydromechaniky pojem „elementární objem“ kapaliny nebo plynu. Je to objem velmi malý proti rozměrům proudu kapaliny, ale dostatečně velký vzhledem ke střední délce volné dráhy molekuly. Lze tedy předpokládat, že pro počet molekul obsažených v tomto objemu platí statistické střední hodnoty kinetické teorie. Nezkoumáme tedy „mikrostrukturu“ pohybu skutečné tekutiny, tj. pohyb jejích molekul, který je předmětem kinetické teorie kapalin a plynů.

Pro „elementární objem“ se odvozují podmínky rovnováhy sil za klidu a pohybu tekutin a definují základní zákony, tj. zákon zachování hmoty, resp. energie. Pro jejich odvození se předpokládá, že tekutina je spojité a stejnorodé (izotropní) prostředí. Získané diferenciální rovnice se integrují s využitím okrajových, případně počátečních podmínek.

Matematický model popisující zkoumaný jev se řeší buď exaktně, či hlavně v posledních letech s využitím numerických metod a výpočetní techniky. Pokud je exaktní řešení z hlediska složitosti rovnic nedostupné, a také z důvodu verifikace numerického řešení, jsou pro získání informací o zkoumaném jevu realizovány fyzikální experimenty. Z naměřených dat jsou pak odvozeny empirické či poloempirické závislosti. Při organizaci experimentu a zevšeobecnění získaných výsledků se využívá teorie fyzikální podobnosti. Experimentální práce tak stále zůstává významnou složkou poznání. Odvozené vztahy pak umožňují řešit praktické problémy mechaniky tekutin a jsou tak nástrojem pro řadu inženýrských úloh.

1.1. Historie

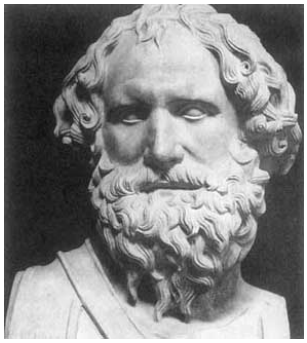
Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

vyjmenovat nejznámější badatele, kteří přispěli svým poznáním k rozvoji mechaniky tekutin

Výklad

Úplný historický přehled vývoje v oboru mechaniky tekutin by byl velmi obsáhlý. V této kapitole jsou proto uvedeny významné postavy, jejichž dílo a dosažené výsledky souvisí s učivem probíraným v dalších kapitolách.



Archimédes (287-212, př.n.l.) - starověký řecký matematik a fyzik, mechanik a vynálezce. Zkoumal měření nepravidelného objemu těles jejich ponořením do vody. Zavedl pojmy těžiště, tíhová síla a statický moment. Je vynálezcem šroubového čerpadla, jež je využíváno až do dnes, hlavně v čistírnách odpadních vod. Do oblasti fyziky Archimédes přispěl pracemi na téma teorie páky, výpočet těžiště pro rotační plochy atd. Snad nejznámější je tzv. **Archimédův zákon**: „*Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené.*“

Leonardo da Vinci (1452-1519) - je velkou postavou renesanční doby. Jeho tvůrčí činnost zasahovala do různých vědních oborů: malířství, sochařství, architektura, anatomie, přírodní vědy. Leonardovy technické vynálezy lze rozdělit do čtyř základních skupin: létací stroje, pracovní nástroje, válečné stroje, s vodou související vybavení. V oboru proudění je nutno uvést návrh mlýna s vodním kolem, objevení zákona rychlosti a průřezu $v \cdot S = konst$, návrhy vhodných tvarů pro čluny, padáku, atd.

Simon Stevin (1548-1620) - holandský matematik, jedna z největších postav po Leonardu da Vinci. V roce 1586 publikoval knihu „Statika a hydrostatika“. Zabýval se rovnováhou sil v kapalině za klidu, objevil tzv. hydrostatické paradoxon. Zabýval se využitím síly větru, na počátku sedmnáctého století v Holandsku postavil dva plachetní vozy.

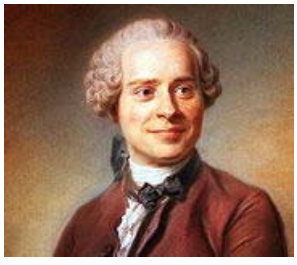
Galileo Galilei (1564 – 1642) - toskánský astronom, filosof a fyzik těsně spjatý s vědeckou revolucí. Mezi jeho úspěchy řadíme vylepšení dalekohledu, rozmanitá astronomická pozorování, první z Newtonových zákonů pohybu a účinnou podporu Koperníka. Často je uváděn jako „otec moderní astronomie“, „otec moderní fyziky“ a dokonce „otec vědy“. Studoval mimo jiné i teoreticky i experimentálně průtok násoskou, ověřil, že tlak v kapalině závisí na „výšce“ sloupce kapaliny.

Evangelista Torricelli (1608-1647) - italský matematik, žák G. Galileiho, zkoumal účinky zemské tíže na kapaliny, definoval vztah pro rychlost výtoku z nádoby rychlost výtoku otvorem ve stěně nádoby v hloubce *h* pod hladinou, zavedl označení atmosférický tlak vzduchu, vynalezl rtuťový barometr. Je po něm pojmenována jednotka tlaku "torr". Roku 1641 vydal dílo Trattato del Moto, kde lze nalézt první ucelené základy hydrodynamiky.

Blaise Pascal (1623-1662) - francouzský fyzik a matematik navazoval na Torricelliho. Je autorem zásadního díla Pojednání o tlaku vzduchu. Jeho pokusy vyústily ve vynález výškoměru a posléze i barometru – přístroje jež ukazuje kolísání tlaku ve vzduchu. Stalo se tak v roce 1648. Sestrojil hydraulický lis a vyslovil zákon pro rovnoměrné šíření tlaku v tekutinách, který se nyní po něm nazývá: "*Tlak vyvolaný vnější silou v kapalině je ve všech směrech a ve všech místech stejný.*"

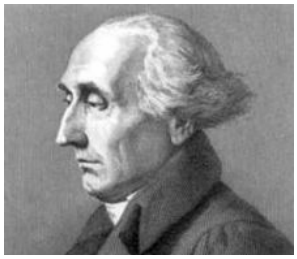
Isaac Newton (1643-1727) - britský fyzik, matematik a astronom, je zakladatelem klasické mechaniky. Newtonovy pohybové zákony představují základy pozemské i nebeské mechaniky. Studiem odporu kladeného prostředím pohybujícímu se tělesu položil základy hydrodynamiky. Uvažoval setrvačnost tekutiny, tření o obtékaný povrch, definoval formuli pro smykové napětí při laminárním proudění. Ve svém slavném díle Matematické základy přírodních věd zobecnil a uspořádal do přehledného logického systému výsledky práce svých předchůdců.

Leonhardo Euler (1707-1783) - švýcarský matematik. Tvůrce moderní hydromechaniky objevil pojem ideální (neviskozní) kapaliny a sestavil její základní diferenciální pohybovou rovnici. Mimo to vynalezl vodní turbínu, pro níž odvodil základní vztah. V roce 1733 byl jmenován profesorem a vedoucím matematického oddělení petrohradské Akademie, kam jej pozval Daniel Bernoulli. Roku 1741 Euler z Ruska odešel a přijal pozvání pruského krále Fridricha II. Velikého do Berlína. Strávil pak v Pruské akademii celých 25 let. Z tohoto období pochází jeho nejvýznamnější objev - vlnová rovnice.



Jean le Rond d'Alembert (1717 -1783) - francouzský matematik a fyzik, osvícenský filosof. V roce 1744 publikoval své dílo o rovnováze a pohyb kapalin "Traité de l'equilibre et du mouvement des fluides". Jeho práce byla alternativním zpracováním teorie kapalin, které publikoval Daniel Bernoulli. Zavedl pojem náběhový bod při obtékání nekonečně tenkých těles, zavedl představu laminárního proudění jako klouzání rovnoběžných vrstev kapaliny.

Daniel Bernoulli (1700-1782) - švýcarský matematik a fyzik. Početná rodina Bernoulliů sehrála v 18. stol. mimořádnou úlohu v rozvoji evropské matematiky a fyziky. Celkem 9 členů tohoto rodu vyniklo v přírodních vědách. Daniel Bernoulli se v roce 1725 se stal profesorem matematiky v nově zařízené petrohradské Akademii věd. V r. 1733 z Ruska odešel, působil na univerzitách v rodném Groningenu a v Basileji. Jeho stěžejní dílo Hydrodynamica vyšlo r. 1738. Touto prací položil základy hydrodynamiky. Zintegroval Eulerovu pohybovou rovnici a experimentálně prokázal její platnost. Vytvořil první kinetickou teorii plynů.



Joseph - Louis Lagrange (1736-1813) – narozen v Itálii, matematik a astronom, který významně rozvinul matematickou analýzu, teorii čísel, a klasickou a nebeskou mechaniku. Je zakladatelem oblasti matematiky nazývané variační počet. Byl jedním z největších matematiků 18. století, podobně jako Leonhard Euler. Zdokonalil analytické metody hydrodynamiky, zavedl Lagrangeovu metodu sledování pohybu částic kapaliny.

Jean-Charles Chevalier de Borda (1733 – 1799), francouzský matematik a astronom. Měřil délku poledníkového stupně a sekundového kyvadla, sestavil tabulky trigonometrických funkcí pro setinné dělení kruhu, založil námořní školu v Brestu. Zkoumal výtok kapalin z nádoby otvory a nátrubky, zavedl součinitel zúžení paprsku, rychlostní a výtokový součinitel.

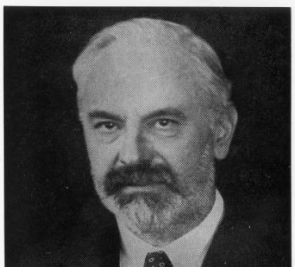
J. L. M. Poiseuille (1797-1869) - francouzský fyzik. Vyvinul metodu měření krevního tlaku. Zkoumal také proudění tekutin trubicemi. Společně s G.H.L. Hagenem (1797-1884) se zabývali laminárním prouděním. V roce 1838 zjistili, že rychlost proudění závisí na průměru a délce trubice a na rozdílu tlaku mezi konci trubice a formulovali Hagen- Poiseuilleův zákon.

Gabriel Stokes (1819-1903), jeden z nejvýznamnějších irských vědců. Je považován za jednoho ze zakladatelů hydrodynamiky. Určil metodu pro měření kinematické viskozity (Stokesův viskozimetr). Ukázal na prostou lineární závislost napětí na deformační rychlosti, čímž zobecnil Newtonův zákon a společně s **Louisem Navierem** (1785-1836) tak přispěli k odvození obecné pohybové rovnice pro proudění vazké kapaliny.

Hermann Helmholtz (1821-1894) - německý fyziolog, lékař, matematik, fyzik, meteorolog a filozof. Formuloval obecný zákon o zachování energie zahrnující všechny druhy energií. Jako první podal matematický výklad tohoto zákona a přispěl k teorii potenciálního a vířivého proudění dokonalé kapaliny.

William Thomson Kelvin (1824-1907) - britský fyzik. Jeho vědecké práce se týkají mnoha oblastí matematiky a fyziky (termodynamika, hydrodynamika, elektromagnetizmus, pevnost, teplota atd.). Zavedl vysvětlení absolutní teploty a absolutní stupnice teploty, nazvanou jeho jménem (stupnice Kelvinova). Definoval 2. termodynamický zákon a rozpracoval 3. termodynamický zákon (Thomsonův efekt). Zabýval se cirkulací v kapalině.

Osborn Reynolds (1842-1912) - britský vědec a inženýr. Od roku 1873 zkoumal Reynolds dynamiku tekutin, díky které se stal světově uznávaným odborníkem. Reynolds zkoumal změny proudění uvnitř potrubí při přechodu mezi laminárním a turbulentním prouděním. Určil kritérium pro přechod laminárního proudění na turbulentní, které bylo později označeno jako Reynoldsovo číslo. V roce 1886 formuloval teorii mazání. O tři roky později vytvořil důležitý teoretický model pro turbulentní proudění.



Ludwig Prandtl (1875-1953) – německý fyzik, byl průkopníkem v oblasti aerodynamiky. Je objevitelem mezní vrstvy, odvodil diferenciální rovnici pro její popis, působil v oboru měření dynamického tlaku proudění tekutiny. Prandtlova trubice je kombinací Pitotovy trubice (udává celkový tlak) a sondy měřící statický tlak. Rozdíl obou je dynamický tlak, úměrný čtverci rychlosti proudění. Podílel se na vývoji aerodynamických tunelů.

James Bicheno Francis (1815-1892) - britský technik, žijící od roku 1833 v USA. V roce 1849 vynalezl a zkonstruoval radiální přetlakovou vodní turbínu, která nese jeho jméno. V této oblasti se dále prosadili **Lester Allen Pelton** (1829-1908) a **Victor Kaplan** (1876-1934), profesor na brněnské technice.

1.2. Základní pojmy mechaniky tekutin

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

vysvětlit základní pojmy mechaniky tekutin

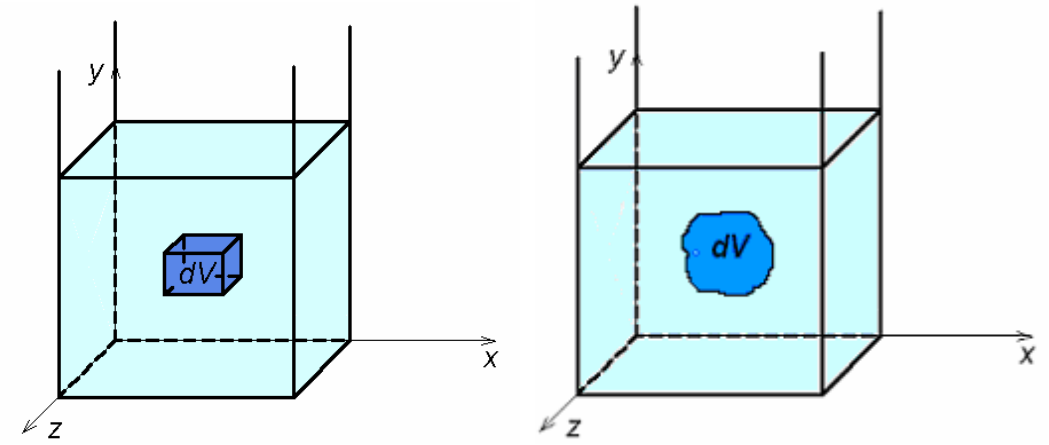
Výklad

Základním rozdílem mezi tekutinou a tuhým tělesem je pohyblivost molekul kapalin a plynů. Tuhé těleso se pohybuje jako tuhý celek hmotných bodů, nepřihlížíme-li k nepatrným deformacím. **Tekutina** je látka, která se na rozdíl od tuhých těles vždy nevratně deformuje. Nemá vlastní tvar a za působení nepatrných tečných sil se její částice snadno uvedou do

pohybu (výjimkou jsou některé anomální – nenewtonské kapaliny). Tekutiny tečou v proudu omezeném pevnými stěnami nebo tvoří rozhraní (hladiny).

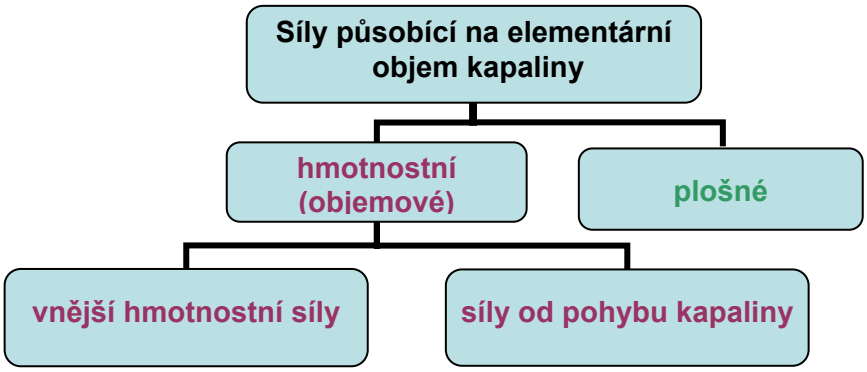
Při řešení úloh v mechanice tekutin se vychází z představy tekutiny jako spojitého, stejnorodého prostředí. Stejnorodostí neboli izotropií rozumíme stejné vlastnosti všech částeček kapaliny nezávislé na jejich poloze a směru působení sil. Tento předpoklad umožňuje výhodně řešit úlohy mechaniky tekutin na zvoleném, velmi malém objemu, zvaném „**elementární objem tekutiny**“ a odvozené zákonitosti rozšířit na celý objem.

Jak již bylo řečeno v úvodu, jedná se o objem velmi malý vzhledem k rozměru nádoby či proudu, avšak dostatečně velký vzhledem ke střední volné dráze molekuly. Tento objem si můžeme představit např. jako objem hranolku $dV = dxdydz$ nebo jako obecný objem dV , viz obr. 1.1.



obr. 1.1 Elementární objem kapaliny

Síly, které mohou působit na tento elementární objem tekutiny působit, lze rozdělit obecně do dvou skupin, tj. na **síly hmotnostní** (neboli objemové) a **síly plošné,** jak je znázorněno na obr. 1.2.



obr. 1.2 Síly působící na elementární objem kapaliny

Hmotnostní síly (v případě nestlačitelné kapaliny - objemové) - závisí na hmotnosti makroskopické částice a zrychlení podle vztahu $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, působí v těžišti objemu tekutiny. K vnějším hmotnostním silám lze zařadit tíhovou sílu, odstředivou sílu a setrvačnou sílu od pohybu nádoby, ve které se tekutina nachází. Pokud tekutina proudí, patří sem síly setrvačné od vlastního pohybu tekutiny a také síly hybnostní. **Plošné síly** jsou úměrné velikosti plochy (tlaková síla, třecí síla, síly povrchového napětí).

V kartézském souřadném systému jsou **síly** definovány jako **vektory** o třech souřadnicích, např. $\vec{F}_p = (F_{px}, F_{py}, F_{pz})$. Přitom velikost vektoru se označuje $\left|\vec{F}_p\right| = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2 + F_{pz}^2}$.
Pokud bude předpokládáno proudění jednorozměrné nebo v daném směru, od vektorového označení se upouští, neboť směr je dán jednoznačně a síla bude zadána pouze velikostí, tedy souřadnicí.

1.3. Fyzikální vlastnosti tekutin

Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat základní fyzikální vlastnosti tekutin a odvodit jejich jednotky

Výklad

Tekutiny jsou látky, u nichž soudržnost mezi molekulami je velmi malá. Dělíme je do dvou skupin:

- **nestlačitelné tekutiny**, které působením tlaku, normálových sil, jen nepatrně mění svůj objem – sem patří **kapaliny**. Malé objemy kapalin tvoří kapky. Kapaliny zaujímají tvar nádoby, za působení zemské tíže vyplňují její spodní část a vytvářejí volnou hladinu.
- **stlačitelné tekutiny**, tedy i rozpínavé, které vyplňují vždy celý objem nádoby. Podle toho zda jejich stav je blízko či daleko bodu zkapalnění jsou to buď **páry nebo plyny**. Společný název je vzdušiny.

Stav tekutiny nacházející se v rovnováze může být určen tlakem, hustotou a teplotou.
Hustota ρ (měrná hmotnost) je rovna poměru hmotnosti elementární částice tekutiny *dm* k jejímu elementárnímu objemu *dV*, v němž hustotu určujeme

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad [\mathrm{kg.m^{-3}}] \tag{1.3.1}$$

Převrácená hodnota hustoty je měrný objem *v*

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \qquad [\mathrm{m^3.kg^{-1}}] \tag{1.3.2}$$

Hustota plynů a par je funkcí stavových veličin tj. tlaku *p* a teploty *T* (K). Pro její výpočet se bude používat jednoduchá **stavová rovnice ideálního plynu**

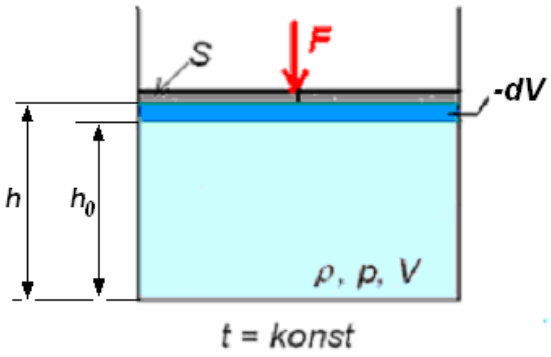
$$\frac{p}{\rho} = rT\,, \qquad pV = mrT \tag{1.3.3}$$

kde *r* je měrná plynová konstanta [$\mathrm{J.kg^{-1}K^{-1}}$], jejíž velikost závisí na druhu plynu.

Hustota kapalin se mění s tlakem a teplotou jen nepatrně a ve většině výpočtů ji budeme považovat za konstantní $\rho = konst$. Přesto mají kapaliny schopnost zmenšovat svůj objem při zvyšování tlaku a můžeme definovat jejich objemovou stlačitelnost.

Objemová stlačitelnost se vyjadřuje součinitelem stlačitelnosti δ, kdy úbytek objemu vyvolaný stlačením při konstantní teplotě splňuje rovnici

$$\delta = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right) \qquad [\mathrm{Pa^{-1}}] \tag{1.3.4}$$



obr. 1.3 Objemová stlačitelnost kapaliny

Představme si, že na počátku je v nádobě kapalina o hustotě ρ, objemu *V* a tlaku *p*, viz obr. 1.3. Síla *F* působící na plochu pístu *S* vyvodí změnu tlaku Δp. Objem kapaliny pod pístem se zmenší o ΔV, takže po stlačení je $V_0 = V - \Delta V$ a tlak se zvýší na $p_0 = p + \Delta p$. Objem, tlak a hustota kapaliny po stlačení jsou V_0, p_0, ρ_0.

Po dosazení rozdílu objemů a tlaků před a po stlačení do rovnice (1.3.4) se dostane vztah

$$\delta = -\frac{1}{V}\frac{(V - V_0)}{(p - p_0)} = \frac{1}{V}\frac{(V - V_0)}{(p_0 - p)} = \frac{\Delta V}{V \Delta p} \qquad [\mathrm{Pa^{-1}}] \tag{1.3.5}$$

který vyjadřuje změnu objemu kapaliny $\Delta V = V - V_0$ připadající na jednotku původního objemu V při změně tlaku $\Delta p = (p_0 - p)$.

Z předcházejících rovnic vyplývá vztah pro objem kapaliny po stlačení

$$V_0 = V - \Delta V = V - \delta V \Delta p = V(1 - \delta \Delta p) \tag{1.3.6}$$

Hustota po stlačení je dána rovnicí (1.3.7).

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{m}{V(1-\delta\Delta p)} = \frac{\rho}{(1-\delta\,\Delta p)} \quad [\mathrm{kg.m^{-3}}] \tag{1.3.7}$$

Modul objemové stlačitelnosti kapaliny K je definován jako převrácená hodnota součinitele objemové stlačitelnosti δ

$$K = \frac{V\,\Delta p}{\Delta V} = \frac{1}{\delta} \quad [\mathrm{Pa}] \tag{1.3.8}$$

Při stlačování kapaliny se její hmotnost nemění, proto lze psát $m = \rho V = konst.$ Diferencováním se dostane $\rho.dV + V.d\rho = 0$, z čehož pro měrnou objemovou změnu vyplývá vztah $\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$. Po dosazení do definičního vztahu $\delta = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)$ lze modul objemové stlačitelnosti kapaliny tedy vyjádřit vztahem $K = \rho\frac{dp}{d\rho}$.

Rozměr modulu objemové stlačitelnosti kapaliny K připomíná modul pružnosti v tahu E tuhých látek, pro vodu je $K \cong 2{,}1 \cdot 10^9$ Pa. Obecně závisí na stavových veličinách, tj. tlaku a teplotě.

Stlačitelnost lze rovněž charakterizovat rychlostí zvuku, to je rychlostí, kterou se ve stlačitelném prostředí šíří tlakový rozruch.

Teoretická rychlost šíření zvuku v kapalině je dána vztahem

$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad [\mathrm{ms^{-1}}] \tag{1.3.9}$$

Pro šíření zvuku ve vodě po dosazení za K a ρ dostaneme

$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{2{,}1\cdot 10^9}{1000}} = \sqrt{2{,}1\cdot 10^6} = 1449 \ [\mathrm{ms^{-1}}]$$

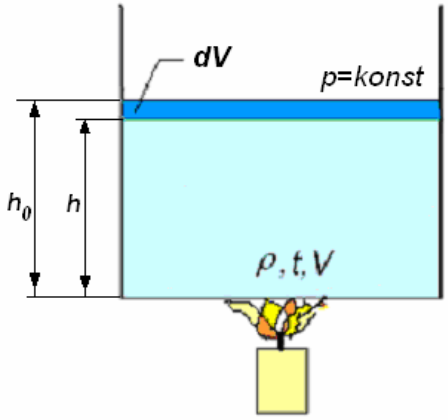
Pro teoretickou **rychlost zvuku ve vzduchu** platí za předpokladu izoentropické (adiabatické) stavové změny (při T = 273,15 K a měrné plynové konstantě r = 287 $\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$)

$$a_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa r T} = 331 \ [\mathrm{ms^{-1}}] \tag{1.3.10}$$

kde $\kappa = 1.4$ je izotermický exponent.

Teplotní roztažnost je schopnost kapaliny zvětšovat při zahřátí svůj objem. Vyjadřuje se součinitelem teplotní roztažnosti β

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{p=konst} \quad [^{O}C^{-1}] \tag{1.3.11}$$



obr. 1.4 Teplotní roztažnost kapaliny

Představme si, že na počátku je v nádobě kapalina o hustotě ρ, teplotě t objemu V, viz obr. 1.4. Po zahřátí kapaliny Δt kapalina zaujímá objem $V_0 = V + \Delta V$. Objem, teplota a hustota kapaliny po zahřátí jsou V_0, t_0, ρ_0. Po dosazení rozdílu objemů a teplot po a před zahřátím do rovnice (1.3.12) dostaneme vztah (1.3.12), který vyjadřuje změnu objemu kapaliny $\Delta V = V_0 - V$ připadající na jednotku původního objemu V při změně teploty $\Delta t = (t_0 - t)$.

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{V_0 - V}{t_0 - t} = \frac{\Delta V}{V.\Delta t} \quad [^{O}C^{-1}] \tag{1.3.12}$$

Z předcházejících rovnic vyplývá vztah pro objem kapaliny po zahřátí

$$V_0 = V + \Delta V = V + \beta V \Delta t = V(1 + \beta \Delta t) \quad [m^3] \tag{1.3.13}$$

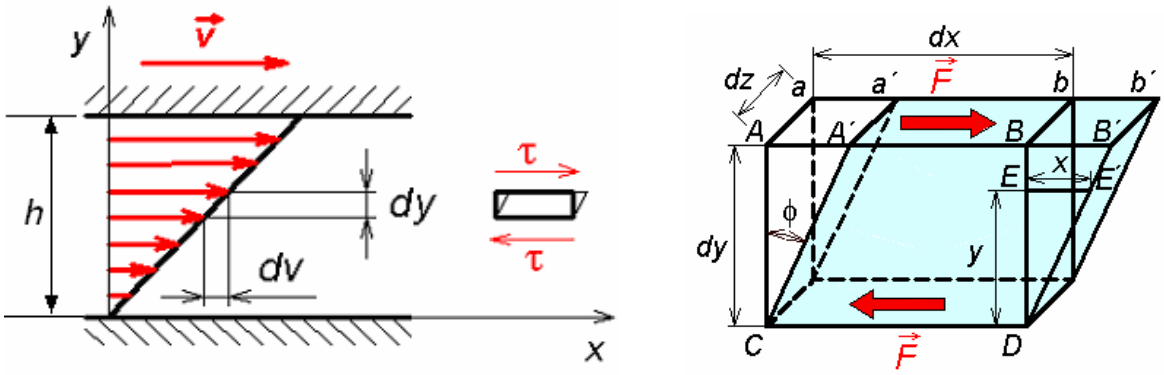
Hustota po zahřátí je dána následující rovnicí.

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{m}{V(1 + \beta \Delta t)} = \frac{\rho}{(1 + \beta \Delta t)} \quad [kg.m^{-3}] \tag{1.3.14}$$

Viskozita tekutin se projevuje za pohybu skutečných kapalin. Pohybují-li se sousední vrstvy kapaliny různými rychlostmi, vzniká na jejich rozhraní smykové napětí, které brání pohybu. Pomalejší vrstva je zrychlována a naopak zase rychlejší zbrzďována. Tečné (smykové) napětí je vyvoláno vnitřním třením neboli viskozitou tekutiny. Je úměrné změně rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu podle Newtonova vztahu

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \frac{v}{h} \quad [Pa] \tag{1.3.15}$$

kde η je dynamická viskozita (vazkost) a $\frac{dv}{dy}$ je gradient rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu, viz obr. 1.5. Tuto formulaci uvedl v roce 1687 anglický fyzik Isaac Newton pro laminární proudění. Smykové napětí způsobuje úhlovou deformaci elementárního objemu tekutiny (obr. 1.5).



obr. 1.5 Smykové napětí při laminárním proudění

Jednotka součinitele dynamické viskozity η se definuje ze vztahu pro smykové napětí

$$[\eta]=\frac{[\tau][y]}{[v]}=\frac{\text{N.s}}{\text{m}^2}=\frac{\text{kg}}{\text{m.s}}=\text{Pa.s}$$

Rozměr obsahuje jednotku síly, proto byla tato vazkost označena jako dynamická, neboť v dynamice se vyšetřují příčiny pohybu, tj. síly. Fyzikální soustava jednotek (stále používaná v příručkách a tabulkách) zavádí pro jednotku dynamické viskozity označení 1 P (Poise), což je 1P = 1g $cm^{-1}s^{-1}$ = 0,1 Pas.

Kinematická viskozita dána podílem dynamické viskozity a hustoty podle vztahu

$$\nu=\frac{\eta}{\rho} \qquad [\nu]=\frac{\text{kg}}{\text{ms}}\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}=\text{m}^2\text{s}^{-1} \tag{1.3.16}$$

Rozměr kinematické viskozity neobsahuje jednotky hmotnosti ani síly. V praxi je dosud stále důležitá jednotka kinematické viskozity v soustavě fyzikální – Stokes, pro niž platí 1S = cm^2s^{-1} = 10^{-4} m^2s^{-1}.

Vazkost kapalin se měří viskozimetry, z nichž nejběžnější jsou kapilární, výtokové, průtokové, rotační, tělískové a jiné. Z měření vazkosti kapalin Englerovým viskozimetrem vyplývá další jednotka viskozity Englerův stupeň, která se definuje se jako poměr doby výtoku τ zkoumané kapaliny o objemu 200 cm^3 při dané teplotě k době výtoku destilované vody o teplotě t = 20 °C, tedy

$$\nu_E=\frac{\tau}{\tau_{H_2O}} \qquad [^\circ\text{E}] \tag{1.3.17}$$

Viskozitu vyjádřenou v Englerových stupních lze převádět na kinematickou viskozitu v SI jednotkách pomocí empirického vztahu

$$\nu=\left(7{,}31\nu_E-\frac{6{,}31}{\nu_E}\right)\cdot 10^{-6}\ [\text{m}^2\text{s}^{-1}] \tag{1.3.18}$$

Dynamická a kinematická vazkost závisí na druhu tekutiny. Jejich hodnoty jsou pro většinu tekutin tabelovány. Vazkost každé tekutiny závisí na teplotě a tlaku, tedy na stavových veličinách. Tyto závislosti jsou dány poloempirickými rovnicemi, tyto jsou uváděny v odborné literatuře. Mimo závislosti pro vodu a vzduch, jsou technicky důležité závislosti dynamické viskozity na teplotě pro minerální oleje. Tyto závislosti lze dobře aproximovat exponenciální funkcí ve tvaru

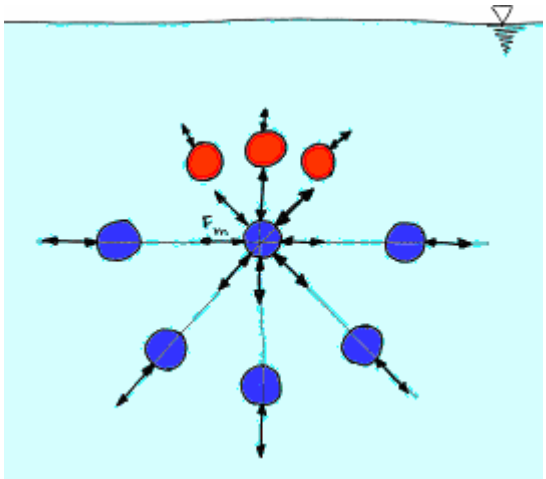
$$\eta = \eta_0 \cdot e^{(-k \cdot T)} \text{ nebo } \eta = \eta_0' \cdot e^{\frac{A}{t+B}} \qquad (1.3.19)$$

kde η_0, η_0', k, A, B - jsou konstanty, které je nutno pro jednotlivé druhy olejů určit experimentálně a statisticky např. metodou nejmenších čtverců (např. pomocí software EXCEL).

U plynů tepelný pohyb molekul převládá nad silami mezimolekulárními, se zvýšením teploty vzrůstá rychlost tepelného pohybu molekul a tím vzroste i viskozita plynu. Tento poznatek je ve shodě se skutečností.

U kapalin je tomu obráceně. U nich jsou ještě dosti výrazné mezimolekulární síly proti tepelnému pohybu molekul. Zvýšením teploty dochází k intenzivnější výměně hybností částic v pohybujících se vrstvách kapalin a tečné napětí se zmenšuje. U kapalin klesá vazkost s rostoucí teplotou.

Povrchové napětí je způsobeno silami působící mezi molekulami kapaliny. Uvnitř kapaliny je každá molekula obklopena molekulami stejné látky ze všech stran, takže se jejich přitažlivé síly vyrovnávají. U rozhraní jsou molekuly obklopeny jen z jedné strany, jejich síly se nevyrovnávají z druhé strany, viz obr. 1.6 a proto na molekulu působí síla směřující dovnitř kapaliny.

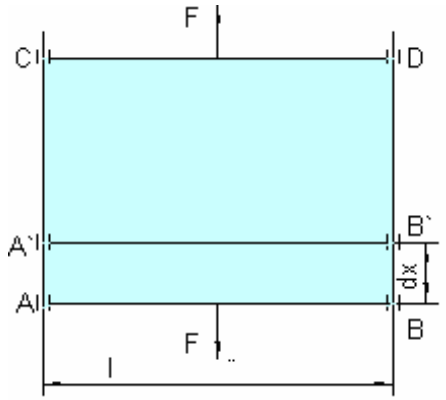


obr. 1.6 Povrchové napětí

Poněvadž působení jednotlivých molekul je omezeno na velmi malou oblast, projevuje se tato nerovnováha mezimolekulárních sil jen v nepatrné vrstvě kapaliny na hladině. Kapalina na rozhraní se vyznačuje odlišnými vlastnostmi, typickými pro ostatní objem kapaliny. Molekuly na rozhraní mají vyšší potenciální energie proti molekulám uvnitř kapaliny a rozhraní kapaliny se jeví jako potažené velmi tenkou a napjatou vrstvou.

Povrchové napětí je definováno jako poměr povrchové energie k ploše rozhraní nebo jako síla, která působí na jednotku délky rozhraní, a to kolmo k této délce, a v rovině povrchu.

$$\sigma = \frac{E_a}{S} = \frac{F}{l} \quad [\mathrm{N \cdot m^{-1}}] \tag{1.3.20}$$



obr.1.7 Povrchové napětí

Příkladem může být např. síla, kterou je mydlinková blána roztahována v rámečku s posuvnými tyčkami AB a CD (každá délky *l*), viz obr.1.7. Síla je dána výrazem $F = \sigma \cdot l$, neboť délka namáhaného povrchu je *l* a povrchové napětí je σ. Zvětší -li se povrch blány o délku *dx*, vykoná se práce $dA = F\,dx = \sigma\, l\, dx$. Touto prací se zvětší povrchová energie kapaliny.

Na jednotku délky rozhraní připadá tedy síla

$$\frac{F}{l} = \frac{dA}{l\,dx} = \frac{\sigma\, l dx}{l\,dx} = \sigma \quad [\mathrm{N \cdot m^{-1}}] \tag{1.3.21}$$

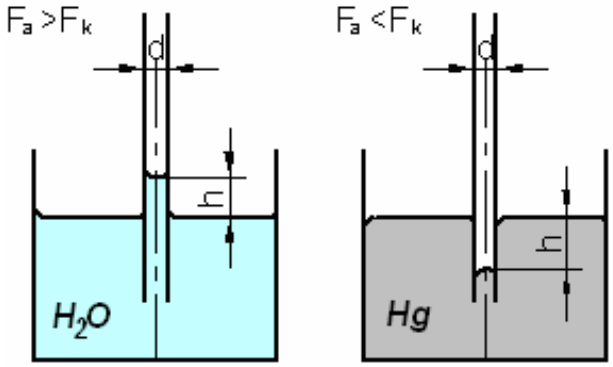
Povrchové napětí určité kapaliny závisí na druhu látek, které tvoří rozhraní. Kapalina se může stýkat s pevnou látkou, kapalinou nebo plynem. Vznik povrchového napětí byl vysvětlen nerovnováhou molekulárních sil za předpokladu, že kapalina s ničím nesousedí. Ve skutečnosti je vždy obklopena jinou látkou, ať pevnou, kapalnou, či plynnou, a proto mezimolekulární síly od vlastní kapaliny se budou vyrovnávat s kvalitativně stejnými silami sousedního prostředí. Výsledné povrchové napětí bude dáno vektorovým součtem obou složek.

Účinky povrchového napětí se projeví například vzlínáním u stěn nádoby, tvorbou kapek, při vytváření vln na hladině, zúžením paprsku kapaliny a jeho rozpadem, stoupáním, nebo klesáním sloupce kapaliny v kapiláře.

Kapilarita se vyskytuje u trubiček velmi malého průměru – kapilár, nebo v porézním prostředí. Když adhezní síly jsou větší než kohezní, vystupuje kapalina v kapiláře do výšky *h*.

V opačném případě, kdy kohezní síly jsou větší než adhezní, zůstává kapalina v kapiláře o výšku *h* níže než je hladina okolní kapaliny, viz obr. 1.8. Příslušné výšky *h* se dají spočítat z podmínky rovnováhy mezi gravitačními silami a povrchovými silami:

$$\pi d\sigma = \frac{\pi}{4} d^2 h \rho g \quad \text{z čehož} \quad h = \frac{4\sigma}{\rho g d} \tag{1.3.22}$$



obr. 1.8 Kapilární elevace a deprese

Poslední vztah se dá použít též k určení povrchového napětí σ. Povrchové napětí vody je σ = 0,072 Nm^{-1} = 0,072 kg s^{-2}.

Řešený příklad

V plynojemu se uchovává plyn o objemu V při teplotě t a přetlaku p_p. Měrná plynová konstanta je r, R je univerzální plynová konstanta. Určete hmotnost plynu m v plynojemu, látkové množství plynu n a objem plynu V_n při teplotě 0 ^{O}C a tlaku 101325 Pa (tj. při normálních podmínkách).

Zadáno:		Vypočtěte:		Výsledky:
V =	100000 m^3	m = ?	kg	52 336.57
t =	20 ^{0}C	n = ?	kmol	4 135.81
p_p =	2.4 kPa	V_n = ?	m_n^3	92 694.77
r =	657 $J.kg^{-1}K^{-1}$			
p_0 =	984 hPa			
R =	8314 $J.K^{-1}.kmol^{-1}$			

Řešení:

$$pV = mrT \Rightarrow m = \frac{pV}{rT}$$

$$pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

$$\frac{p_n V_n}{T_n} = \frac{pV}{T} \Rightarrow V_n = \frac{pV}{T} \cdot \frac{T_n}{p_n}$$

Řešený příklad

Válcová nádrž o rozměrech d a h je zcela naplněna vodou o atmosférickém tlaku a teplotě t. Určete změnu tlaku v nádrži při změně teploty na hodnotu t_1. Součinitel teplotní roztažnosti vody je β a modul stlačitelnosti vody je K. Poddajnost stěn nádoby zanedbejte.

Zadáno:		
d =	1 m	
h =	3 m	
K =	2000 MPa	
t =	20 ^{O}C	
t_1 =	30 ^{O}C	
β =	0.00064 $(^{O}C)^{-1}$	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Δp = ?	MPa	12.80

Řešení:

Při zahřátí kapaliny se zvětší její objem vlivem teplotní roztažnosti. V uzavřené, zcela zaplněné nádobě nemůže kapalina zvětšit svůj objem a proto v důsledku objemové stlačitelnosti dojde ke změně tlaku.

$$K = \frac{V\Delta p}{\Delta V} \Rightarrow \Delta p = \frac{K\Delta V}{\Delta V}$$

$$V_0 = V + \Delta V = V + \beta V \Delta t \Rightarrow \Delta V = V\beta\Delta t$$

$$\Delta p = \frac{KV\beta\,\Delta t}{V} = K\beta(t_1 - t)$$

1.4. Matematický základ pro odvození bilančních rovnic v mechanice tekutin

Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

rozlišovat absolutní a relativní souřadné systémy a užívat je, definovat derivace podle času

orientovat se v pojmech vektor, skalár, složka souřadnice vektoru

definovat objemové a plošné integrály sil a převod mezi nimi-Gaussovu Ostrogradského větu

Výklad

1.4.1. Souřadné systémy

Představme si, že stojíme na mostě a pozorujeme, jak se koncentrace ryb právě pod námi mění s časem. Tak zjistíme, jak se koncentrace mění s časem v nehybném místě

prostoru pevně spojeným s povrchem země. Tento prostor se nazývá **absolutní prostor** a je základní prostor. Veličina $\frac{\partial c}{\partial t}$ je **parciální derivace** koncentrace c podle t při konstantních souřadnicích x, y, z.

Nyní místo, abychom stáli na mostě, nasedneme do motorového člunu a jezdíme po řece, někdy proti proudu, někdy napříč řeky a někdy po proudu. Změna koncentrace ryb s časem bude záviset nějak na pohybu člunu. Pak **totální derivace** koncentrace podle času je dána vztahem

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (1.4.1)$$

kde $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ a $\frac{dz}{dt}$ jsou složky rychlosti člunu.

Nyní nasedneme do člunu, necháme se unášet proudem a budeme počítat ryby. Rychlost pozorovatele je teď stejná, jako rychlost proudu $\vec{v}$. Udáváme-li změnu koncentrace ryb s časem, závisí na místní rychlosti proudu. Tato derivace je zvláštní druh totální derivace a nazývá se **substanciální derivace** nebo „derivace sledující pohyb“. Její vztah k parciální derivaci podle času je

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x}v_x + \frac{\partial c}{\partial y}v_y + \frac{\partial c}{\partial z}v_z \qquad (1.4.2)$$

kde v_x, v_y a v_z jsou složky místní rychlosti vody. **Prostor je relativní,** tj. je to malý prostor, který se vzhledem k absolutnímu prostoru může pohybovat.

1.4.2. Vektory a skaláry

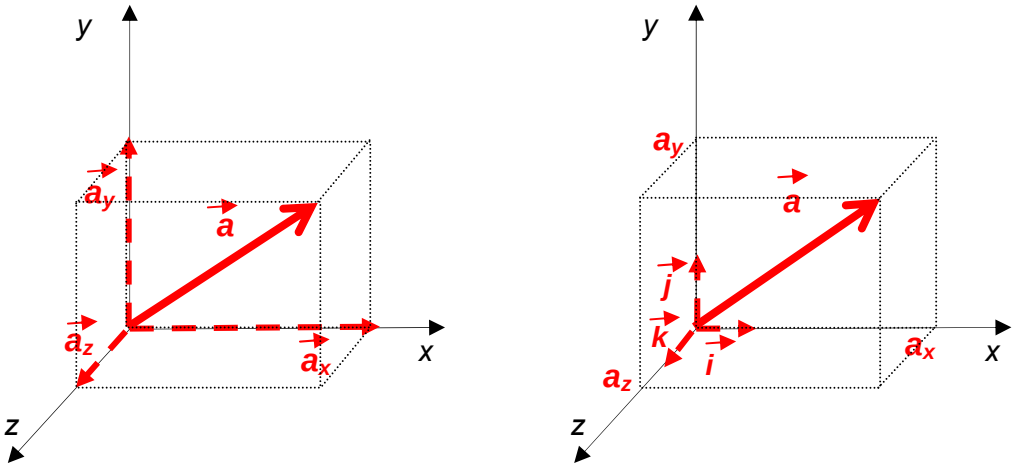
Veličiny, které lze určit pouhým číslem, jakmile je zvolena jednotka míry, se nazývají **skaláry**. Vektor je veličina jež poskytuje různé údaje. Jeden je aritmetický (jeho velikost), ostatní jsou geometrické. **Vektor** je orientovaná úsečka.

Předpokládejme pravoúhlou soustavu souřadnic. Nechť $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ jsou průměty vektoru $\vec{a}$ do os souřadnic. Tyto vektory se nazývají **složky** vektoru $\vec{a}$ a platí

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \qquad (1.4.3)$$

Je-li $\vec{i}$ jednotkový vektor osy x, je $\vec{a}_x = \vec{i}\, a_x$, kde a_x je číslo, vyjadřující velikost vektoru $\vec{a}_x$ a nazývá se x-ová **souřadnice vektoru,** viz obr. 1.9. Podobně platí $\vec{a}_y = \vec{i}\, a_y$ a $\vec{a}_z = \vec{i}\, a_z$. Dále je možno psát

$$\vec{a} = \vec{i}\, a_x + \vec{j}\, a_y + \vec{k}\, a_z \tag{1.4.4}$$



obr. 1.9 Složky vektoru, souřadnice vektoru, jednotkové vektory

Vektor je v daném souřadném systému definován jako uspořádaná trojice čísel a zapíše se

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ resp. } \vec{a}(a_x, a_y, a_z) \tag{1.4.5}$$

Skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ o souřadnicích $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ a $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ je skalár

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a \cdot b \cos\alpha \tag{1.4.6}$$

Je-li dána skalární funkce $f(x, y, z)$, pak **gradient** této skalární funkce $grad f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$ je vektor o souřadnicích $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a $\frac{\partial f}{\partial z}$, tedy

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \text{ je možno psát} \tag{1.4.7}$$

Nechť $\vec{a}$ je vektor o souřadnicích a_x, a_y, a_z. Pak **divergence** vektoru $\vec{a}$ je skalár

$$\text{div}\, \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{1.4.8}$$

a **rotace** vektoru $\vec{a}$ je vektor o souřadnicích

$$\text{rot}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \tag{1.4.9}$$

Každý vektor $\vec{a}$, který je funkcí polohy, a jehož rotace je identicky rovna nule, lze považovat za **gradient skalární funkce** bodu $U = U(x,y,z)$ (např. **skalární potenciál silového pole**), tj.

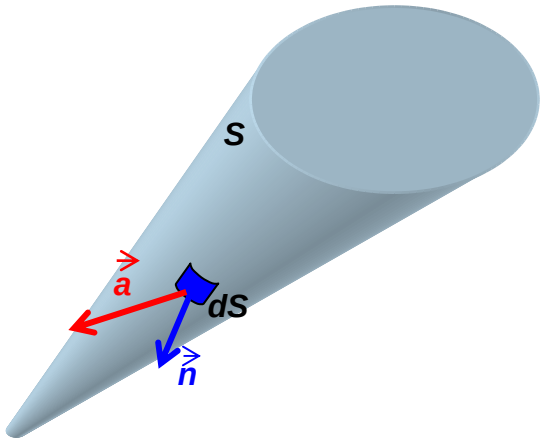
$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \text{grad}\,U \tag{1.4.10}$$

Derivace vektoru $\vec{a}$ podle vektoru $\vec{b}$ se označuje $\left(\vec{b}.\text{grad}\right)\vec{a}$ a je výraz definovaný následovně

$$\left(\vec{b}.grad\right)\vec{a} = \left(b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z} \right)\vec{a} = \begin{pmatrix} b_x \frac{\partial a_x}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_x}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ b_x \frac{\partial a_y}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_y}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ b_x \frac{\partial a_z}{\partial x} + b_y \frac{\partial a_z}{\partial y} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.4.11}$$

Pro **plošný integrál** vektoru $\vec{a}$ po orientované po částech hladké ploše s jednotkovou vnější normálou $\vec{n}$ o velikosti 1 (viz obr. 1.10) platí

$$\iint_S \vec{a}.d\vec{S} = \int_S \vec{a}.\vec{n}\,dS \tag{1.4.12}$$



obr. 1.10 Vnější normála k ploše

Objemový integrál divergence vektoru lze vyjádřit plošným integrálem skalárního součinu vektoru a vnější normály

$$\iiint_V div\,\vec{a}\,dV = \iint_S \vec{a}.\vec{n}\,dS \qquad (1.4.13)$$

kde $\vec{a}$ je vektor a $\vec{n}$ je vektor vnější normály k ploše dS.

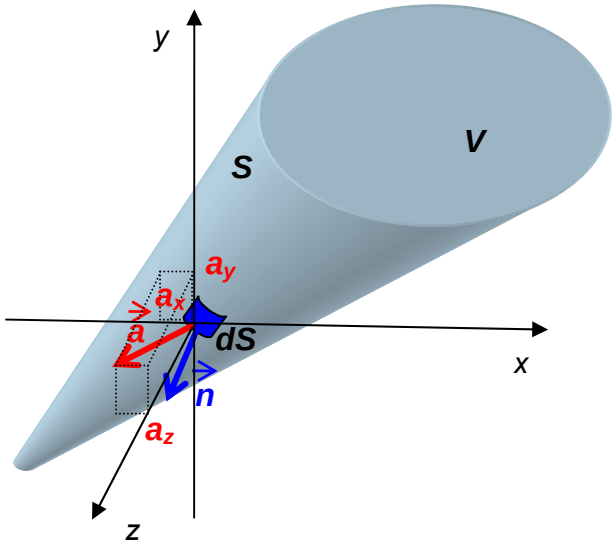
Objemový integrál gradientu skaláru lze vyjádřit plošným integrálem součinu skaláru a vnější normály

$$\iiint_V \mathrm{grad} f\,dV = \iint_S \vec{n} f\,dS \qquad (1.4.14)$$

kde f je skalární veličina a $\vec{n}$ je vektor vnější normály k ploše dS.

1.4.3. Gaussova Ostrogradského věta

Nechť je dán kartézský souřadný systém a uzavřené těleso o objemu V. Nechť souřadnice vektoru $\vec{a}$, tj. a_x, a_y, a_z a jejich derivace jsou funkce spojité v uzavřeném tělese.



obr. 1.11 Souřadný systém a souřadnice vektoru

Nechť vnější normála příslušná vnější straně hranice S má obvyklý směr vně tělesa, pak platí pro elementární objem $dV = dxdydz$ a průměty elementární plochy dS do souřadnicových rovin x,z, x,y a y,z

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S \left(a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdz \right) \qquad (1.4.15)$$

Je tedy možné převést objemový integrál na plošný pomocí Gauss-Ostrogradského věty, čehož využijeme v dalších kapitolách při odvození základních bilančních rovnic v mechanice tekutin.

Pokud má vektor $\vec{a}$ směr shodný s některou ze souřadných os, např. s osou *x*, tj. $a_y = 0$ a $a_z = 0$, pak se předchozí vztah zjednoduší takto:

$$\iiint_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dxdydz = \iint_S a_x dydz = a_{x2}S_2 - a_{x1}S_1 \qquad (1.4.16)$$

což lze použít u jednorozměrných případů proudění.

Shrnutí kapitoly

Fyzikální vlastnosti tekutin, souřadné systémy, substanciální derivace, skalární součin, gradient skaláru, divergence vektoru, Gaussova – Ostrogradského věta

Kontrolní otázka

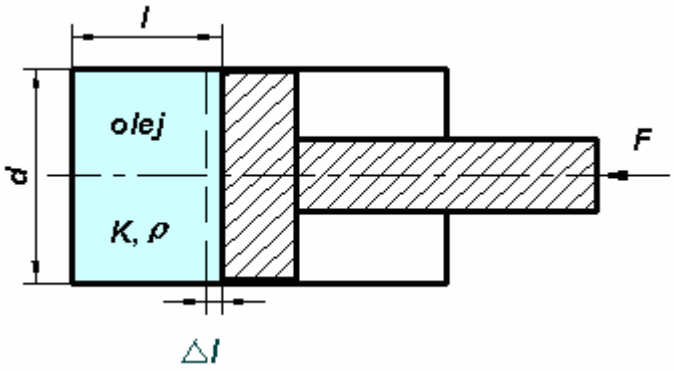
Kdo vynalezl barometr?
Jak je definováno smykové napětí při laminárním proudění?
Na čem závisí viskozita tekutin?
Jaká je rychlost šíření zvuku ve vodě?
Co je to absolutní a relativní prostor?
Co znamená substanciální derivace?
Jak je definován vektor?
Jak je definována divergence vektoru a gradient skaláru?
Vysvětli význam Gaussovy – Ostrogradského věty.

Úkol k řešení

Příklad 1.1

Stanovte posunutí pístu Δl hydraulického válce vlivem stlačitelnosti kapaliny při zatížení pístnice silou F. Určete teoretickou rychlost zvuku v oleji a_t, vypočtěte součinitel objemové stlačitelnosti kapaliny δ.

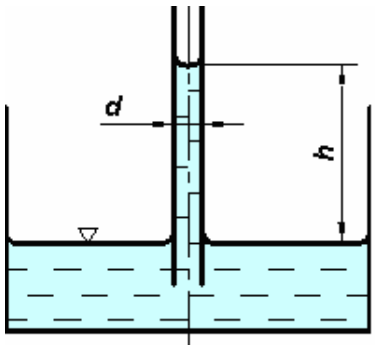
Zadáno:			
l =	1000 mm		
d =	80 mm		
F =	28000 N		
ρ =	900 kg.m^{-3}		
K =	1300 MPa		
Vypočtěte:			Výsledky:
Δp = ?		MPa	5.57043
Δl = ?		m	0.00428
a_t = ?		ms^{-1}	1 201.85
δ = ?		MPa^{-1}	0.00077



Příklad 1.2

Stanovte povrchové napětí σ vody, jestliže ve skleněné kapiláře o průměru d byla naměřena kapilární elevace h.

Zadáno:			
h =	15 mm		
d =	2 mm		
ρ =	1000 kg.m^{-3}		
Vypočtěte:			Výsledky:
σ = ?		N.m^{-1}	0.07358

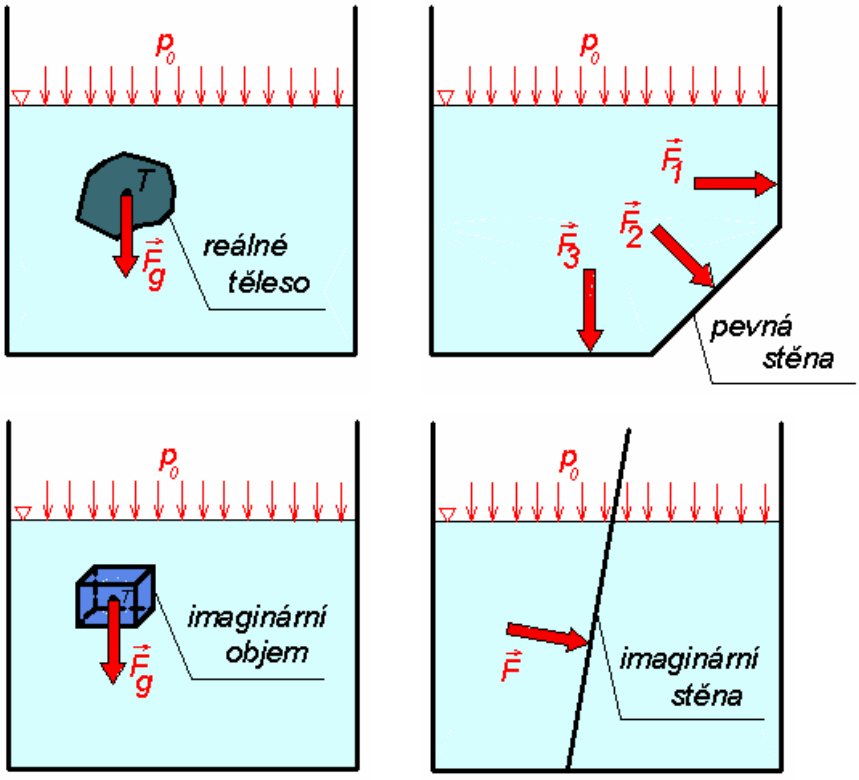


2. Tlakové poměry v kapalině za klidu

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat tlak, tlakovou sílu. • používat hydrostatický tlak a tlakové hladiny v jednodušších úlohách hydrostatiky • řešit tlakové poměry v hydraulickém lisu	

Hydrostatika se zabývá rovnováhou sil působících na kapalinu za klidu. Rovnováha sil za klidu nastane tehdy, když její částice se vůči sobě nepohybují, to znamená, že tvar objemu kapaliny se nemění. V tom případě je u skutečné kapaliny smykové napětí od vazkosti nulové a všechny rovnice platí i pro skutečnou kapalinu. Do hydrostatiky patří i případy relativního klidu, kdy kapalina vůči stěnám je v klidu, ale celá soustava (nádrž + kapalina) konají pohyb.



hmotnostní síly plošné síly

obr. 2.1 Působení sil v tekutině

Plošné síly (též povrchové) působí na povrch uvažovaného objemu kapaliny, proto jejich velikost závisí na velikosti plochy a jsou dány tlakem kapaliny na danou plochu. Hmotnostní síly jsou úměrné hmotnosti (objemu kapaliny pro kapalinu s konstantní hustotou) a jsou dány zrychlením daného objemu (např. tíha kapaliny, odstředivá síla apod.).

2.1. Tlak a jeho působení

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat tlak, tlakové síly,
popsat šíření tlaku v kapalinách

Výklad

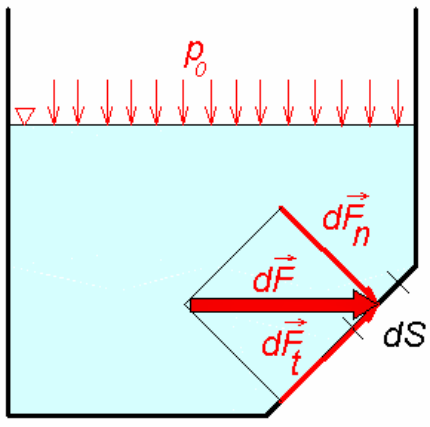
Tlak kapaliny je **dán velikostí tlakové síly, působící kolmo na jednotku plochy**. Je-li tlaková síla rovnoměrně rozložena, je tlak dán poměrem velikosti síly a plochy

$$p = \frac{|\vec{F}|}{S} \tag{2.1.1}$$

Při nerovnoměrném rozložení síly je dán obecně

$$p = \frac{d|\vec{F}|}{dS} \tag{2.1.2}$$

a označuje se jako **místní tlak**.

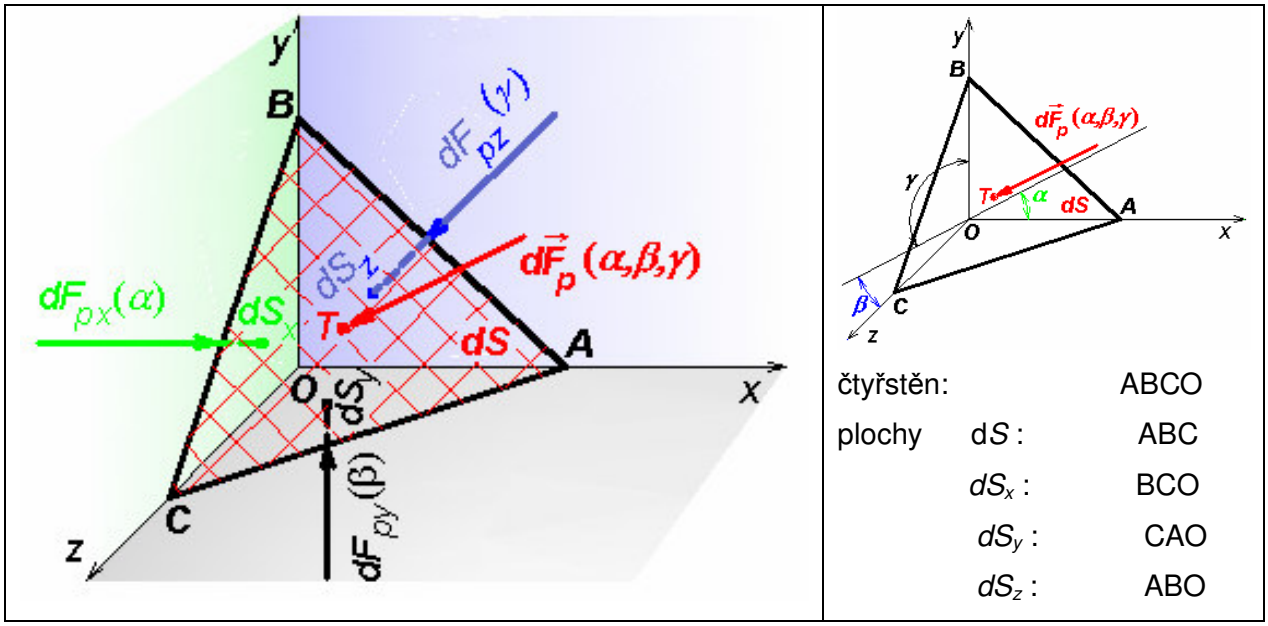


obr. 2.2 Působení tlakových sil na stěnu nádoby

Tlaková síla v hydrostatice působí vždy kolmo na plochu. Toto tvrzení si nyní dokážeme negací, viz obr. 2.2. Kdyby působila na plošku dS síla dF nikoliv ve směru normály, dala by se rozložit na složku normálovou a tečnou. Tečná složka síly by si vynutila pohyb částeček kapaliny, které nekladou vzájemnému posunutí odpor. Protože tekutina je v klidu, je tečná složka rovna nule a tlaková síla musí působit ve směru normály k ploše.

V určitém místě je tlak ve všech směrech stejný, nezávisí tedy na sklonu plošky, na kterou působí, tzn. že **tlak je skalární veličina,** což lze jednoduchým způsobem dokázat z podmínek statické rovnováhy sil na plochách čtyřstěnu.

Předpokládejme, že tlak působí na čtyřstěn ABCO o trojúhelníkových stranách, viz obr. 2.3 a je různý ve směru x, y a z, to znamená, že p_x, p_y a p_z jsou odlišné.



obr. 2.3 Odvození zákona o šíření tlaku

Na šikmou stěnu dS působí tlaková síla $d\vec{F}_p$ ve směru normály k ploše, tedy $d\vec{F}_p = p\vec{n}\,dS$, a svírá s osami *x, y, z* úhly α, β, γ. Její složky ve směru osy *x, y, z* jsou $dF_p.\cos\alpha$, $dF_p.\cos\beta$ a $dF_p.\cos\gamma$.

Boční stěny čtyřstěnu jsou průmětem plochy dS do roviny yz, xz a xy. Označíme je jako dS_x, dS_y a dS_z, přitom platí $dS_x = \cos\alpha.dS$, $dS_y = \cos\beta.dS$, $dS_z = \cos\gamma.dS$. Na tyto plošky působí tlakové síly $d\vec{F}_{px}$, $d\vec{F}_{py}$, $d\vec{F}_{pz}$.

Poněvadž je tekutina v klidu, musí být splněny statické podmínky rovnováhy sil a momentů

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0; \qquad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

Tíhovou sílu můžeme zanedbat, protože je o řád menší než tlaková. Těžiště ploch dS_x, dS_y a dS_z jsou průmětem těžiště T plochy dS ve směru osy *x, y, z*. Tlakové síly působí

v těchto těžištích a tedy jejich momenty jsou nulové. Dále se tedy budeme zabývat pouze podmínkou rovnováhy sil.

Z podmínky rovnováhy sil ve směru *x, y, z* po dosazení za jednotlivé síly platí:

$$dF_{px} - dF_p.\cos\alpha = 0 \Rightarrow p_x dS_x - p.dS.\cos\alpha = 0 \Rightarrow p_x dS.\cos\alpha - p.dS.\cos\alpha = 0 \Rightarrow p_x = p$$
$$dF_{py} - dF_p.\cos\beta = 0 \Rightarrow p_y dS_y - p.dS.\cos\beta = 0 \Rightarrow p_y dS.\cos\beta - p.dS.\cos\beta = 0 \Rightarrow p_y = p$$
$$dF_{pz} - dF_p.\cos\gamma = 0 \Rightarrow p_z dS_z - p.dS.\cos\gamma = 0 \Rightarrow p_z dS.\cos\gamma - p.dS.\cos\gamma = 0 \Rightarrow p_z = p$$

Obecně tedy vyplývá z podmínek statické rovnováhy sil rovnost tlaků na plochách čtyřstěnu

$$p = p_x = p_y = p_z \qquad (2.1.3)$$

Šikmá plocha *dS* byla zvolena libovolně. Výsledek lze zevšeobecnit: **Tlak působí v daném místě kapaliny všemi směry stejně** a nezávisí na sklonu plochy, tzn., že **tlak je skalární veličina**. Tento zákon platí obecně. Je třeba poznamenat, že v jiném místě kapaliny bude hodnota tlaku obecně jiná, matematicky vyjádřeno *p = p(x, y, z).*

2.2. Eulerova rovnice hydrostatiky

Čas ke studiu: **3/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat princip Eulerovy rovnice hydrostatiky
popsat odvození této rovnice a rovnice pro tlakovou funkci
vyřešit úlohy o rozložení tlaku v tekutině za klidu

2.2.1. Eulerova rovnice hydrostatiky v trojrozměrném prostoru

Rovnováha hmotnostních a objemových sil

Obecným úkolem hydrostatiky je určení tlaku v libovolném místě tekutiny, která je v rovnováze, tj. stanovení skalárního pole $p = p(x, y, z)$ v kartézském souřadném systému. **Eulerova rovnice hydrostatiky je obecná podmínka rovnováhy sil působících na tekutinu v klidu, a to sil hmotnostních a tlakových.** V libovolném objemu tekutiny se zvolí kontrolní objem $dV = dx.dy.dz$. Na tento objem tekutiny působí vektor hmotnostní resp. vnější objemové síly $\vec{F}_o$ o souřadnicích F_{ox}, F_{oy}, F_{oz}, tedy lze zapsat $\vec{F}_o = (F_{ox}, F_{oy}, F_{oz})$ (např. gravitační nebo odstředivá síla) a vektor tlakové síly $\vec{F}_p = (F_{px}, F_{py}, F_{pz})$. Podle Eulera je **vektorový součet hmotnostní a tlakové síly roven nule** viz obr. 2.4. , tj.

$$\vec{F}_o + \vec{F}_p = 0 \qquad (2.2.1)$$

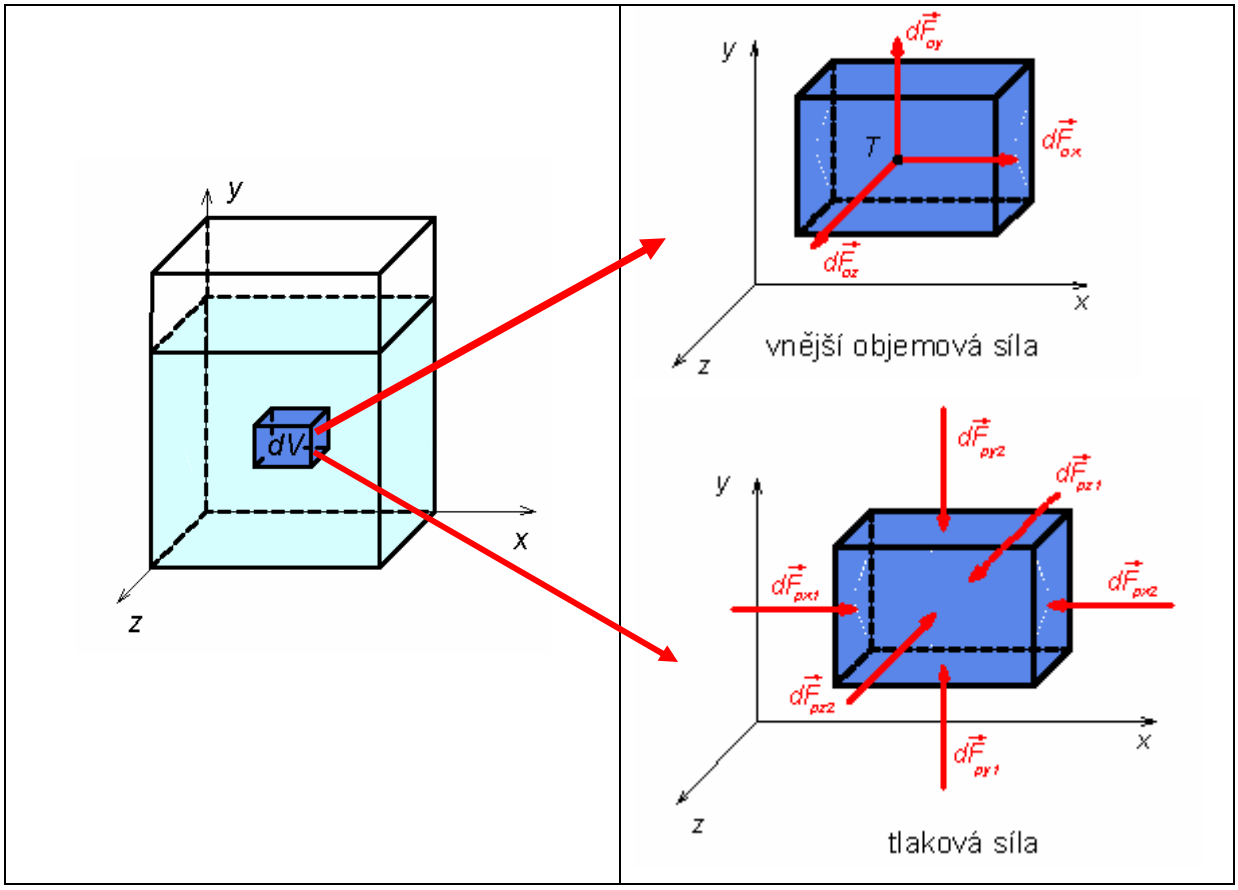
Protože hmotnostní síla není v celém objemu tekutiny konstantní, je nutné definovat diferenciál této síly pro elementární objem dV jako vektor

$$d\vec{F}_o = \vec{a}\, dm = \rho\, \vec{a}\, dV \qquad (2.2.2)$$

kde zrychlení hmotnostní síly je vektor $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Celková síla je pak dána trojným integrálem $\vec{F}_o = \iiint_V \vec{a}\, \rho dV$.

Diferenciál tlakové síly ve směru vnější normály na plochu elementárního objemu je dán obecně ve tvaru

$$d\vec{F}_p = p\, \vec{n}\, dS, \qquad (2.2.3)$$



obr. 2.4 Působení vnějších objemových sil $\vec{F}_o$ a tlakových (plošných) sil $\vec{F}_p$ na element objemu dV

Přitom skalární veličina p je tlak, $\vec{n}$ je vnější normála k elementu dS uzavřené plochy. Protože **tlaková síla v hydromechanice je definována ve směru vnitřní normály**, je nutno tuto tlakovou sílu definovat se znaménkem mínus, tedy

$$d\vec{F}_p = -p\vec{n}\,dS \tag{2.2.4}$$

a celková tlaková síla je opět dána integrálem, ale plošným $\vec{F}_p = \iint_S -p\vec{n}\,dS$.

Eulerova rovnice hydrostatiky v integrálním tvaru je definována součtem hmotnostních a objemových sil:

$$\iiint_V \vec{a}\,\rho dV - \iint_S p\vec{n}\,dS = 0 \tag{2.2.5}$$

Plošný integrál je možno dle Gaussovy Ostrogradského věty nahradit objemovým integrálem:

$$\iiint_V \vec{a}\,\rho dV - \iiint_V \mathrm{grad}p\,dV = 0, \tag{2.2.6}$$

kde **gradient** je vektor derivací tlaku podle x, y, z $\mathrm{grad}p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$.

Odvození Eulerovy rovnice v diferenciálním tvaru

Rovnice (2.2.6) platí pro libovolný objem V, bude tedy platit i pro výraz pod integrálem :

$$\vec{a}\,\rho - \mathrm{grad}p = 0 \text{ a po vydělení hustotou } \vec{a} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p = 0 \tag{2.2.7}$$

Rovnici (podmínku rovnováhy sil) lze rozepsat do směru os *x,y,z*:

$$\begin{aligned} a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Tyto podmínky rovnováhy sil za klidu kapaliny odvodil poprvé Leonard Euler v r. 1755. Eulerova rovnice hydrostatiky vyjadřuje **rovnováhu hmotnostních a tlakových sil pro jednotku hmotnosti 1 kg** .

2.2.2. Diferenciální rovnice pro tlakovou funkci a hladinová plocha

Eulerova rovnice hydrostatiky je základní rovnicí k určení tlaků v poli tlakových sil. Z Eulerovy rovnice vyplývá, že tlak v kapalině závisí na hmotnostních silách. Obecně lze psát změnu tlaku pomocí totálního diferenciálu

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz \tag{2.2.9}$$

neboť tlak je funkcí souřadnic, tj. $p = p(x,y,z)$. Poněvadž derivace tlaku ve všech směrech se dají vyjádřit hmotnostními silami z Eulerových rovnic $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x$, $\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y$, $\frac{\partial p}{\partial z} = \rho a_z$, je hledaná obecná **diferenciální rovnice pro tlakovou funkci** daná vztahem

$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) \tag{2.2.10}$$

Integrací se určí tlaková funkce

$$p(x,y,z) = \int \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) \tag{2.2.11}$$

Její integrací můžeme určit tlak v určitém místě, tedy v závislosti na souřadnicích.

Hladinové plochy jsou místa s konstantní hodnotou skalární veličiny tlaku, tj. $p = konst$. Přírůstek tlaku mezi dvěma body ležícími na stejné hladině musí být roven nule, tj. $dp = 0$, což platí i pro soumezné body. Dle rovnice (2.2.10) se dostane obecná rovnice hladinových ploch v diferenciálním tvaru

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = 0 \tag{2.2.12}$$

Hladinové plochy jsou vždy kolmé na výslednou hmotnostní sílu. Hladinové plochy mají v úlohách hydrostatiky velký význam, především však hladinová plocha rozhraní mezi okolním ovzduším a kapalinou. Jsou to **plochy konstantního potenciálu, teploty, hustoty**.

Řešený příklad

Jaký je rozdíl tlaků Δp ve vodorovném potrubí (ve kterém proudí voda), který je měřen U - trubicí naplněnou rtutí. Rozdíl výšek hladin je Δh.

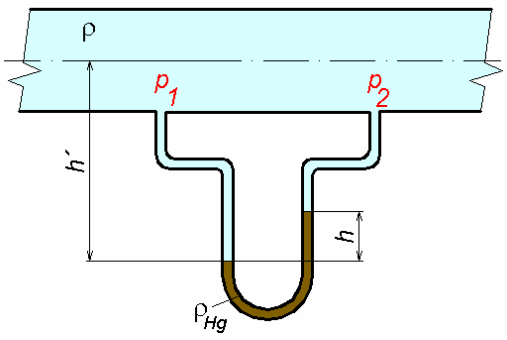
Zadáno:

Δh = 0.35 m

ρ = 1000 kg.m^{-3}

ρ_{Hg} = 13600 kg.m^{-3}

	Vypočtěte:	Výsledky:
Δp = ?	Pa	43262.10



Řešení: Podmínka rovnováhy v levém a pravém rameni diferenciálního U-manometru:

$$p_L = p_p \Rightarrow p_1 + \rho_v.g.h' = p_2 \rho_v.g(h' - \Delta h) + \rho_{Hg}.g.\Delta h$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_{Hg} - \rho_v) g.\Delta h$$

2.3. Kapalina za působení zemské tíže

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat hladinové plochy, konkrétně hladinovou plochu za působení zemské tíže
popsat odvození a definovat hydrostatický tlak
rozlišit pojmy absolutní tlak, relativní tlak, přetlak a podtlak, atmosférický tlak

Výklad

2.3.1. Hladinová plocha při působení zemské tíže

Na kapalinu v nádobě za klidu působí z hmotnostních sil jen tíže zemská. V libovolném místě kapaliny bude tlak *p(x,y,z)* určen diferenciální rovnicí (2.2.10) odvozenou v předchozích odstavcích.

$$dp = \rho\left(a_x dx + a_y dy + a_z dz\right)$$

Za působení jen tíže zemské jsou souřadnice zrychlení definovány následovně

$$\begin{aligned} a_y &= -g \\ a_x &= a_z = 0 \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

Zrychlení tíže zemské je nutno dosadit se záporným znaménkem, poněvadž tíže působí v opačném smyslu, než je zvolená orientace osy *y*. Diferenciální rovnice se tedy zjednoduší

$$dp = -\rho g dy$$

a integrál je

$$p = -\rho g y + konst. \qquad (2.3.2)$$

Integrační konstanta se určí z okrajové podmínky. Na rozhraní kapaliny a vzduchu je tlak ovzduší, tj. pro $y = h_0$ je $p = p_0$. Dosazením do poslední rovnice se vypočte integrační konstanta:

$$p_0 = -\rho g h_0 + konst \Rightarrow konst = p_0 + \rho g h_0$$

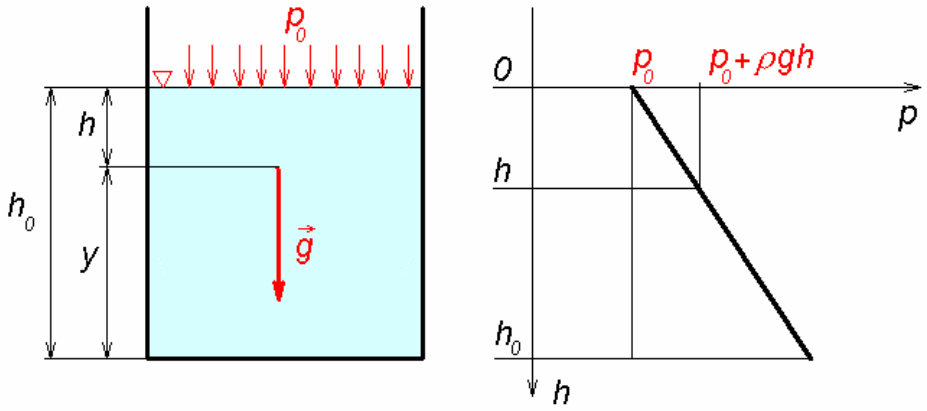
a hledaná závislost tlaku je

$$p = -\rho g y + p_0 + \rho g h_0 = p_0 + \rho g\left(h_0 - y\right)$$

Nechť je $h = h_0 - y$ svislá vzdálenost uvažovaného místa v kapalině od hladiny tlaku ovzduší (obr. 2.5), pak

$$p = p_0 + \rho g h \qquad (2.3.3)$$

Jestliže uvažovaný bod leží pod hladinou, je $h > 0$ (kladné); když je bod výše než hladina tlaku ovzduší je $h < 0$ (záporné). Uvedený vztah platí pro nestlačitelné kapaliny, na něž působí tíže zemská, neboť při integraci byla měrná hmotnost považována za konstantní.



obr. 2.5 Kapalina při působení síly tíže zemské.

Tlakové hladiny v kapalině za působení tíže zemské jsou vodorovné roviny, neboť se předpokládá, že nádoba s tekutinou není rozlehlá tak, aby bylo nutné přihlížet k zakřivení povrchu zemského. Za tohoto předpokladu je rovnice tlakových hladin

$$dp = -g\,dy = 0\,, \tag{2.3.4}$$

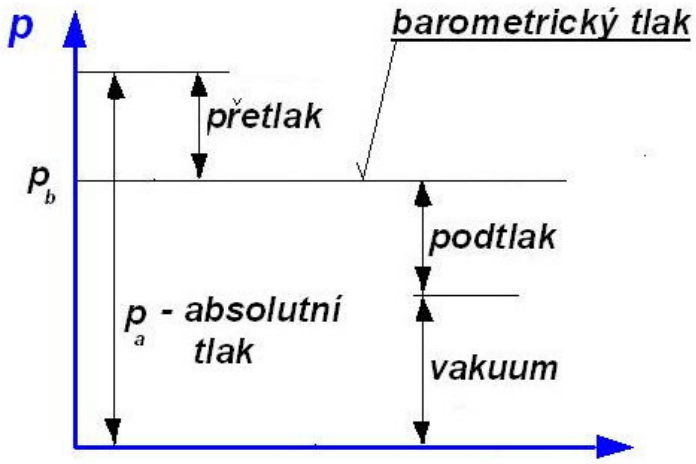
což vyplývá z obecné diferenciální rovnice pro tlakové hladiny po dosazení hmotnostních sil uvažovaného případu $a_y = -g, \quad a_x = a_z = 0$. Integrací se dostane rovnice tlakových hladin $g\,y = konst \Rightarrow y = konst$, což jsou rovnice vodorovných ploch.

2.3.2. Přetlak, podtlak, hydrostatický tlak

Tlak se dá vyjádřit absolutní nebo relativní hodnotou. Absolutní tlak je vztažen k absolutní nule, tj. k vakuu, zatímco relativní tlak je vztažen od smluvené hodnoty tlaku, kterým je tlak ovzduší. Platí tedy

$$p_{abs} = p_0 + p_{rel} \tag{2.3.5}$$

kde p_{abs} je absolutní tlak, p_{rel} je relativní tlak a p_0 je atmosférický tlak. Porovnáním s výrazem $p = p_0 + \rho gh$ vyplývá, že tlak takto definovaný je **absolutní tlak** a **relativní tlak** je dán vztahem $p = \rho gh$. Kladná hodnota relativního tlaku se nazývá **přetlak** a záporná hodnota relativního tlaku se nazývá **podtlak** (obr. 2.6). K označení absolutní a relativní hodnoty tlaku se nepoužívá indexů, avšak je třeba údaj doplnit, o který tlak jde, např. $p = 8 \cdot 10^5$ Pa abs.; $p = 7{,}1 \cdot 10^4$ Pa rel. Relativní tlak je daný vztahem $p = \rho gh$ v kapalině je nazýván **hydrostatický tlak**, vyjadřující tlak sloupce kapaliny v hloubce h pod hladinou.



obr. 2.6 Absolutní tlak, atmosférický tlak p_0, relativní tlak

Dle obr. 2.6 je $p_1(absolutní) = p_0 + p_1(relativní)$ a $p_2(absolutní) = p_0 - p_2(relativní)$.

Poněvadž tlak kapaliny závisí na výšce sloupce kapaliny a její měrné hmotnosti $p = \rho g h$, lze tlak vyjádřit výškou kapalinového sloupce, tj. stanovit **tlakovou výšku** $h = \frac{p}{\rho g}$ v metrech.

2.4. Pascalův zákon

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat Pascalův zákon a jeho aplikace
pochopit princip hydraulického lisu
určit sílu, kterou je nutné vyvinout ke zvednutí předmětů při použití hydraulického zvedáku

Výklad

Jak již bylo řečeno v kapitole 2.2, působí na kapalinu v nádobě hmotnostní a tlakové síly. Tedy rovnováhu sil lze vyjádřit Eulerovou rovnicí statiky ve tvaru

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} gradp = 0 \qquad (2.4.1)$$

V hydraulických systémech (lisy, akumulátory, servomotory, multiplikátory) jsou hmotnostní síly vyjádřené zrychlením $\vec{a}$ zanedbatelné vůči silám tlakovým a tedy $\vec{a} \to 0$. Z Eulerovy rovnice hydrostatiky (2.4.1) pak plyne

$$\frac{1}{\rho} gradp = 0 \Rightarrow p = konst \tag{2.4.2}$$

Již dříve jsme odvodili, že tlak v určitém místě kapaliny působí ve všech směrech stejně, nyní, když zanedbáme hmotnostní síly, můžeme také konstatovat, že tlak v uzavřeném objemu kapaliny je všude stejný (obecně však, pokud jsou objemové síly významné, je tlak funkcí polohy). Pascalův zákon se využívá u hydraulických zvedáků a lisů, jejichž princip je dále vysvětlen.

Princip hydraulických lisů a zvedáků

V zařízení je uzavřena kapalina obr. 2.7. Píst P_1 má plochu S_1, píst P_2 má plochu S_2, oba písty jsou pohyblivé a platí $S_1 \rangle S_2$. Na píst P_1 působí kolmo síla F_1, která vyvolá kapalině tlak $p = \frac{F_1}{S_1}$. Tento tlak p se šíří rovnoměrně všemi směry. Působí i na píst P_2, který se začne pohybovat a vyvolá sílu $F_2 = p \cdot S_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2$. Tedy

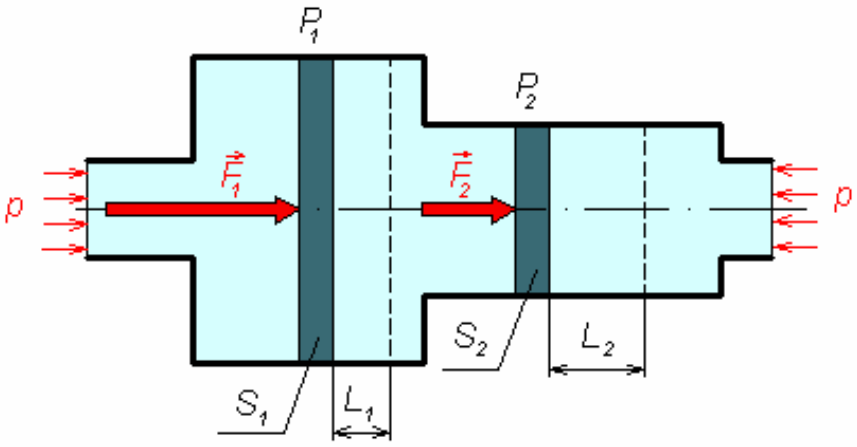
$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ a poměr sil $\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$ (2.4.3)

Dráhy L_1 a L_2 jsou v převráceném poměru než příslušné plochy

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{L_2}{L_1} \tag{2.4.4}$$

Práce W_1 pístu P_1 je stejná jako práce W_2 pístu P_2

$$W_1 = F_1 \cdot L_1 = F_2 \cdot L_2 = W_2 \tag{2.4.5}$$

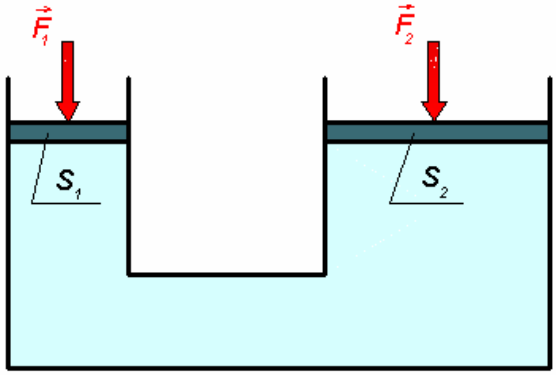


obr. 2.7 Princip přenosu tlaku

Řešený příklad

Do nádrže naplněné kapalinou jsou vestavěny dva písty o průřezech S_1 a S_2. Na první z nich působí síla F_1. Určete tlak p v kapalině a sílu F_2 udržující píst v rovnováze.

Zadáno:		
d_1 =	0.29 m	
d_2 =	0.55 m	
F_1 =	1407 kN	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
p = ?	MPa	21.30135
F_2 = ?	kN	5060.84929



Řešení:

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi \cdot d_1^2}$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} = F_1 \cdot \frac{\frac{\pi \cdot d_2^2}{4}}{\frac{\pi \cdot d_1^2}{4}} = F_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

Shrnutí kapitoly

Vnější objemová síla, tlak, tlaková síla, šíření tlaku, princip Eulerovy rovnice hydrostatiky, gradient tlaku, tlaková funkce, hladinová plocha, přetlak, podtlak, hydrostatický tlak, tlaková výška, absolutní, relativní tlak, Pascalův zákon a jeho využití.

Kontrolní otázka

Z jaké podmínky vychází odvození Eulerovy rovnice hydrostatiky?

Jaké je znění Eulerovy rovnice hydrostatiky ve složkovém a vektorovém tvaru?

Jak je definován tlak, jakou má jednotku, co pro něj platí?

Co je tlaková funkce a hladinová plocha?

Jaký je rozdíl mezi absolutním a relativním tlakem?

Jak je definován hydrostatický tlak a tlaková výška, jaký má rozměr?

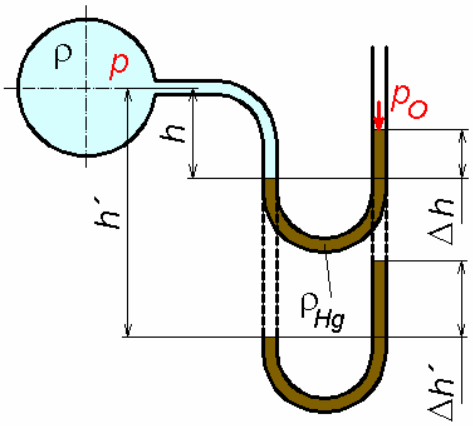
Vysvětlete princip hydraulického lisu.

Úkol k řešení

Příklad 2.1

Tlak vody v potrubí se měří U-trubicí s otevřeným koncem. Rozdíl hladin rtuti v U-trubici je Δh. Poloha spodní hladiny rtuti ve vztahu k ose potrubí je dána výškou h. Jak veliký je měřený tlak p? Jak se při stejném tlaku p v nádobě změní údaj v U-trubici, změní-li se h na h'. Tlak ovzduší je p_0.

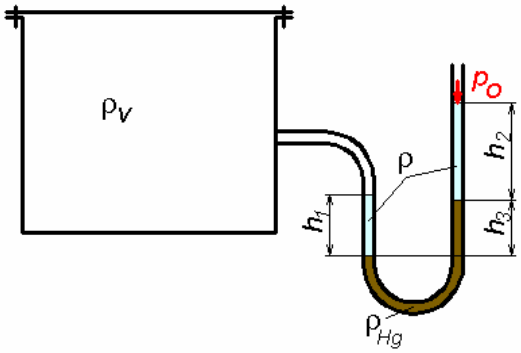
Zadáno:		
Δh =	0.3 m	
h =	1 m	
h' =	1.5 m	
p_0 =	0.1 MPa	
ρ_v =	1000 kg.m^{-3}	
ρ_{Hg} =	13600 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
p = ?	Pa	0.13021
$\Delta h'$ = ?	m	0.33673



Příklad 2.2

Určete absolutní tlak vzduchu v nádobě, jsou-li údaje na dvoukapalinovém manometru následující : h_1, h_2, h_3 a tlak ovzduší je p_0.

Zadáno:		
h_1 =	700 mm	
h_2 =	600 mm	
h_3 =	300 mm	
ρ_{Hg} =	13600 kg.m^{-3}	
ρ_v =	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
p = ?	Pa	139043.8



Příklad 2.3

Dva válce o různých velikostech jsou pevně spojeny tyčí. Jestliže na plochu S_1 působí tlak daný p_1, pak na tuto plochu působí síla F_1, která je přenášena na plochu S_2 a na výstupu se získá tlak p_2. Určete hodnotu tohoto tlaku.

Zadáno:

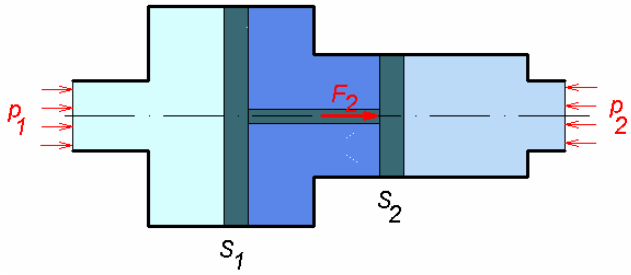
S_1 =	20	cm^2
S_2 =	16	cm^2
p_1 =	1	MPa

Vypočtěte:

p_2 =	?	Pa

Výsledky:

1 250 000.0



3. Tlakové síly

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat rozdíl mezi pojmem tlak a tlaková síla • zdůvodnit si některé jevy běžné v životě • vypočítat tlakové síly na rovinné a křivé plochy	

3.1. Tlakové síly na vodorovné rovinné plochy

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat pojem tlak, tlaková síla
vyřešit jednoduchou úlohu výpočtu tlakové síly na rovinnou plochu
vysvětlit hydrostatický paradoxon

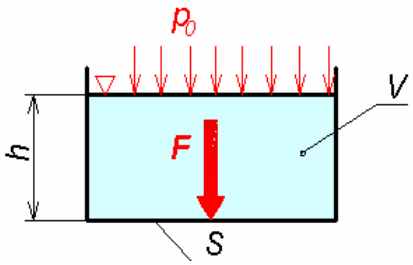
Výklad

Při výpočtu tlakové síly na vodorovné dno nádoby vycházíme ze skutečnosti, že tlak v každém bodě vodorovného dna nádoby je stejný

$$h = konst \Rightarrow p = \rho gh = konst \tag{3.1.1}$$

Je tedy rovnoměrně rozložen po celé ploše a výsledná **tlaková síla** je rovna

$$F = pS = \rho ghS = \rho gV \tag{3.1.2}$$



obr. 3.1 Síla na vodorovné dno nádoby

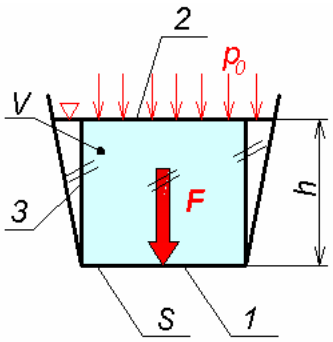
Tlaková síla působí **kolmo** na plochu. Součin hS v poslední rovnici představuje objem kapaliny vyznačený v obrázku obr. 3.1 modře, protože $h \perp S$. Lze tedy psát též rovnici

$$F = \rho gV = F_g \tag{3.1.3}$$

Tlaková síla na vodorovné dno nádoby představuje tíhu objemu V naplněného kapalinou o měrné hmotnosti ρ. Tento tzv. **zatěžovací objem** je omezen následujícími plochami:

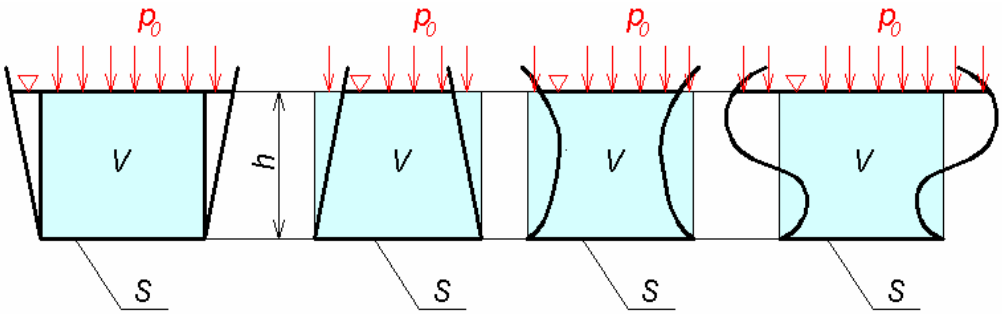
1) plochou S, na níž počítáme tlakovou sílu F
2) tlakovou hladinou tlaku ovzduší $p_0 = konst.$
3) pláštěm (válce nebo hranolu), který vytvoří přímky rovnoběžné s vektorem síly F po obvodu plochy S.

Zatěžovací objem znázorníme pomocí zatěžovacího obrazce, viz obr. 3.1.



obr. 3.2 Zatěžovací obrazec

Jestliže nádoba má boční stěny jiné než svislé (viz obr. 3.3), je výsledná tlaková síla F na dno dána stejným výrazem, neboť svislá vzdálenost h plochy od hladiny je konstantní, a tudíž tlak na dně je $p = \rho g h = konst.$ Objem kapaliny v nádobě může být rozdílný, avšak zatěžovací objem dle výše uvedené definice bude ve všech případech stejný. To znamená, že výsledná tlaková síla je rovněž stejná a nezávisí na tvaru bočních stěn nádoby, což je **hydrostatické paradoxon** (Simon Stevin).



obr. 3.3 Hydrostatický paradoxon – zatěžovací obrazce

Řešený příklad

V jaké hloubce h pod hladinou bude tlak p, má-li olej hustotu ρ?

Zadání:			
p =	0.1	MPa	
ρ =	600	kg.m^{-3}	
Vypočítejte:			Výsledek:
h =		m	16.989

Řešení:

$$p = \rho g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p}{\rho g}$$

3.2. Tlakové síly na šikmé rovinné plochy

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat tlakovou sílu na šikmou rovinnou plochu
určit statický moment plochy
nakreslit zatěžovací obrazec pro tlakovou sílu na rovinnou plochu

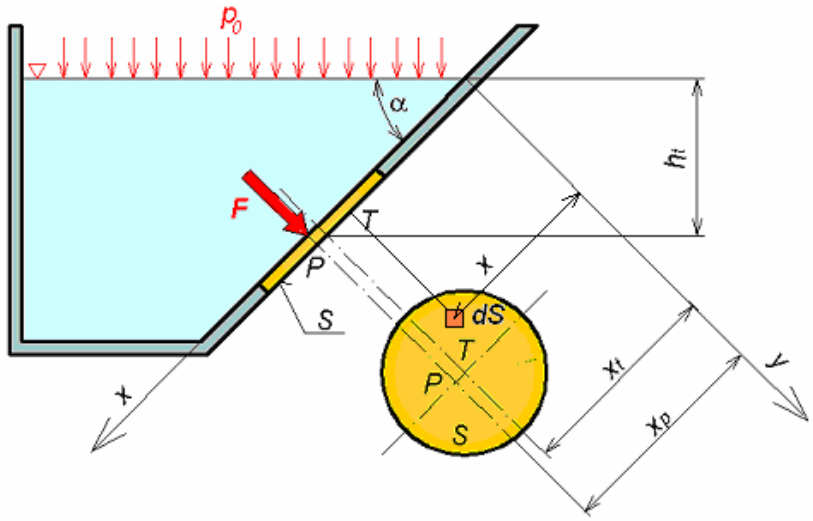
Výklad

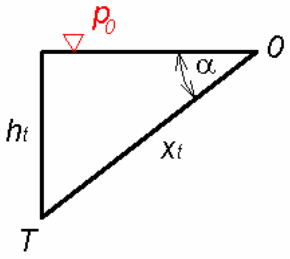
Na rozdíl od vodorovných ploch je na šikmé rovinné stěně nádoby **tlak proměnný**. Výslednice tlakových sil se určí integrací elementární tlakové síly dF na plošce dS (viz obr. 3.4). Na zvolenou plošku dS působí **tlaková síla**

$$dF = \rho g h \, dS \tag{3.2.1}$$

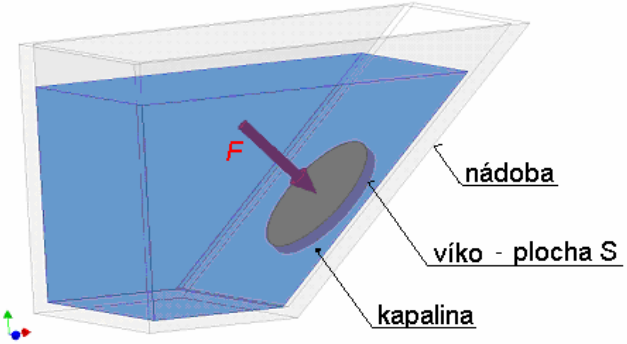
Výslednice je pak dána integrálem:

$$F = \rho g \int_S h \, dS \tag{3.2.2}$$





obr. 3.5 Určení úhlu α



obr. 3.4 Síla na šikmou rovinnou plochu

Z obr. 3.5 platí na celé ploše S vztah $\sin\alpha = \frac{h}{x} = \frac{h_t}{x_t}$ a po dosazení do rovnice pro tlakovou sílu je

$$F = \rho g \sin\alpha \int_S x\, dS = \rho g \sin\alpha M_y \tag{3.2.3}$$

kde $M_y = \int_S x dS$ je **statický moment plochy** S k ose y, která je určena průsečnicí hladiny $p_0 = konst.$ a boční stěny nádoby. Známe-li velikost plochy S a x-ovou souřadnici těžiště x_t, je statický moment plochy S k ose y dán vztahem $M_y = Sx_t$ a výraz pro tlakovou sílu se upraví

$$F = \rho g \sin\alpha M_y = \rho g \sin\alpha x_t S, \quad \text{kde } \sin\alpha\, x_t = h_t \tag{3.2.4}$$

Výsledná tlaková síla na šikmou rovinnou plochu dána vztahem

$$F = \rho g h_t S = p_t S \tag{3.2.5}$$

V poslední rovnici je h_t svislá vzdálenost těžiště plochy S od hladiny tlaku ovzduší p_0; podobně p_t je tlak v těžišti plochy. Tlak p_t představuje střední hodnotu tlaku na ploše S. Směr výslednice tlakové síly F je kolmý na plochu S, to znamená, že je totožný se směrem normály k ploše S. Působiště P tlakové síly na šikmou plochu je vyšetřováno později. Dříve se odvodí výraz pro tlakovou sílu na rovinnou šikmou plochu pomocí objemu zatěžovacího obrazce.

Tlaková síla na element šikmé roviny je $dF = \rho g h dS$, jak bylo uvedeno dříve. Aby součin $h \cdot dS$ představoval elementární objem dV, musí být h kolmé na dS. Sklopením výšky h do směru normály plochy S se dostane hranolek o základně dS a výšce h, jehož objem je dV. Součet všech objemových elementů nad celou plochou S určuje objem V, neboť

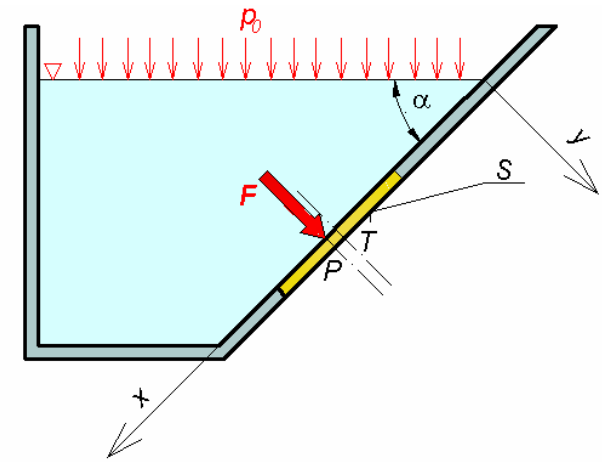
$$F = \rho g \int h\, dS = \rho g \int dV = \rho g V \tag{3.2.6}$$

Sklopené výšky h určují **sklopenou hladinu** (p_0), která je rovinná. K jejímu určení stačí sklopit výšku h v libovolném bodě pod hladinou do směru normály k ploše. Spojnice tohoto bodu s průsečíkem hladiny a šikmé roviny určuje sklopenou hladinu p_0. Plášť zatěžovacího objemu tělesa V je vytvořen přímkami rovnoběžnými s normálou k ploše S. Pro tlakovou sílu na šikmou rovinnou plochu je tedy možno psát $F = \rho g V$.

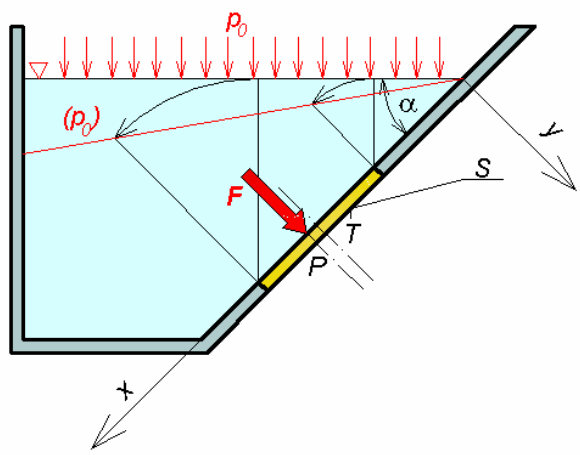
Objem **zatěžovacího obrazce** V se vypočte jako objem zkoseného válce nebo hranolu a je určen těmito plochami (viz. obr. 3.6):

1) plochou S
2) sklopenou hladinovou plochou $p_0 = konst.$
3) pláštěm vytvořeným přímkami rovnoběžnými s tlakovou sílou F po obrysu plochy S.

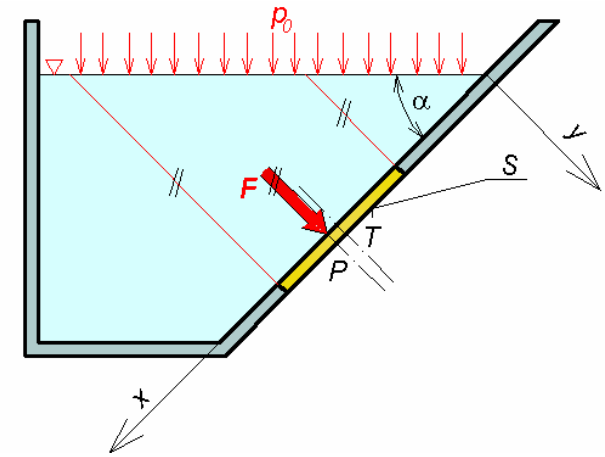
Objem V zkoseného hranolu se určí jako součin základny S a výšky h_t v těžišti plochy S, neboli $V = Sh_t$.



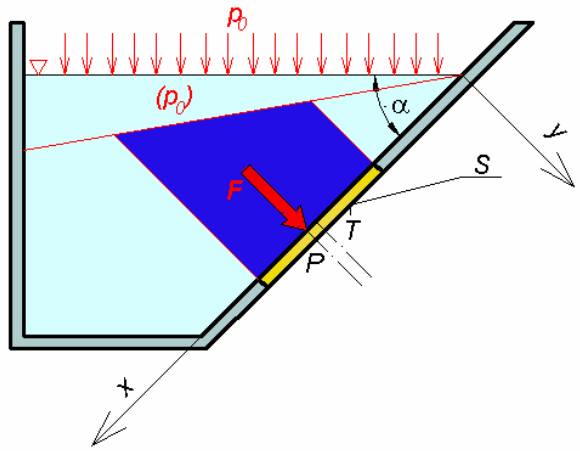
plocha S



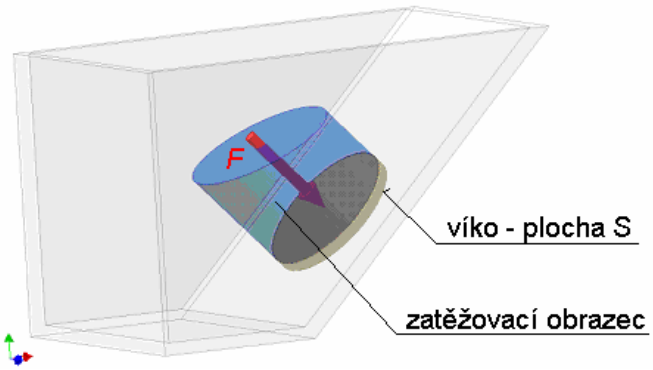
sklopená hladinová plocha $p_0 = konst.$



rovnoběžky s tlakovou sílou F



výsledný zatěžovací obrazec



obr. 3.6 Definice zatěžovacího obrazce pro tlakovou sílu F

Určení působiště tlakové síly

Působiště P tlakové síly se dá určit početně. Moment elementárních tlakových sil k ose y je dán rovnicí $dMy = xdF$. Výsledný moment těchto elementárních tlakových sil musí být stejný jako moment výslednice tlakové síly. Platí tedy

$$M_y = Fx_p = \int_S dM_y = \int_S xdF = \rho g \sin\alpha \int_S x^2 dS = \rho g J_y \sin\alpha \qquad (3.2.7)$$

z čehož:

$$x_p = \frac{\rho g J_y \sin\alpha}{F} = \frac{\rho g J_y \sin\alpha}{\rho g S x_t \sin\alpha} = \frac{J_y}{M_y} \qquad (3.2.8)$$

kde J_y je **moment setrvačnosti** plochy S k ose y a M_y je **statický moment** plochy S k ose y.

Podle **Steinerovy věty** je $J_y = J_{yt} + Sx_t^2$, takže

$$x_p = \frac{J_{yt} + Sx_t^2}{M_y} = \frac{J_{yt}}{Sx_t} + \frac{Sx_t^2}{Sx_t} = x_t + \frac{J_{yt}}{M_y} \qquad (3.2.9)$$

Vzdálenost působiště P tlakové síly od těžiště T plochy S je

$$\Delta x = x_p - x_t = \frac{J_{yt}}{M_y} \qquad (3.2.10)$$

Protože pravá strana rovnice je vždy kladná, je $x_p \rangle 0$. To znamená, že působiště P tlakové síly na šikmou rovinnou plochu je vždy pod těžištěm T.

Podobně se určí **druhá souřadnice** působiště tlakových sil z momentů k ose x:

$$M_x = Fy_p = \int_S dM_x = \int_S ydF = \rho g \sin\alpha \int_S xydS = \rho g J_{xy} \sin\alpha \qquad (3.2.11)$$

z čehož:

$$y_p = \frac{\rho g J_{xy} \sin\alpha}{F} = \frac{\rho g J_{xy} \sin\alpha}{\rho g M_y \sin\alpha} = \frac{J_{xy}}{M_y} \qquad (3.2.12)$$

kde J_{xy} je deviační moment plochy S k osám x, y.

Složky tlakové síly

Někdy je třeba určit **složky tlakové síly** na šikmou rovinnou plochu, a to ve vodorovném a svislém směru. Tyto složky se mohou určit rozkladem výslednice

$$F_x = F\sin\alpha \quad , \qquad \text{a podobně} \qquad F_y = F\cos\alpha \qquad (3.2.13)$$

nebo se určí přímo, aniž se počítá výslednice, pomocí objemů zatěžovacích obrazců.

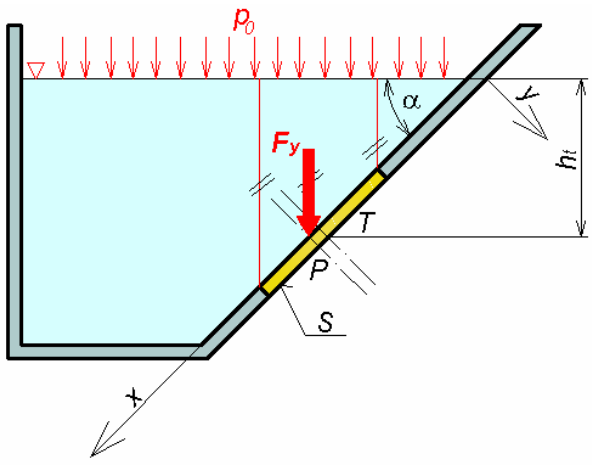
Doplňující (nepovinný) text

Pro elementární **svislou složku tlakové síly** dF_y platí

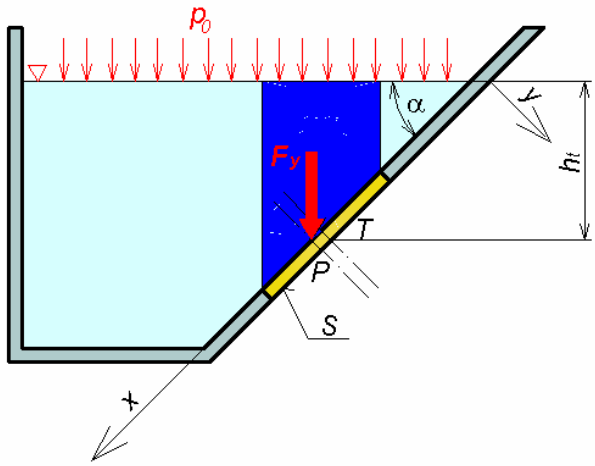
$$\mathrm{d}F_y = \rho g h \mathrm{d}S \cos\alpha = \rho g h \mathrm{d}S_y = \rho g \mathrm{d}V_y \qquad (3.2.14)$$

Integrací se dostane $F_y = \rho g V_y$, kde objem V_y **zatěžovacího obrazce** je podle obrázku (obr. 3.7) určen:

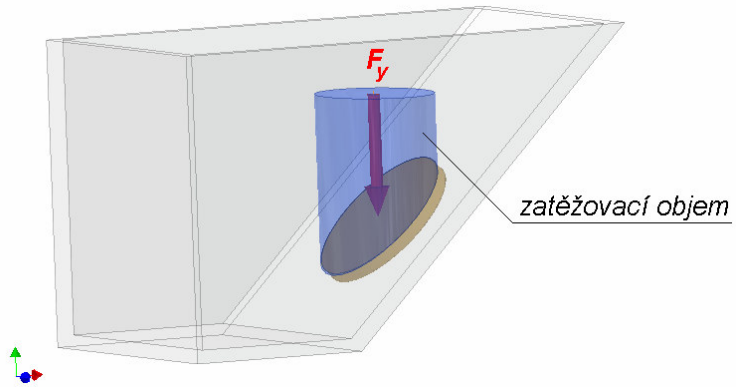
1) plochou S
2) hladinovou plochou $p_0 = konst.$
3) pláštěm vytvořeným svislými přímkami (rovnoběžnými se složkou tlakové síly F_y) nad obrysem plochy.



plocha S, rovnoběžky s tlakovou sílou F_y



výsledný zatěžovací obrazec – objem V_y



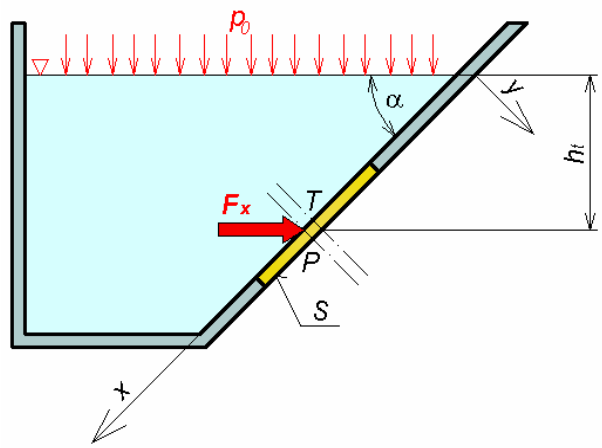
obr. 3.7 Zatěžovací obrazec V_y pro y složku tlakové síly

Zatěžovací obrazec V_y je zkosené těleso. Působiště svislé složky tlakové síly F_y je dáno těžištěm objemu V_y zatěžovacího obrazce.

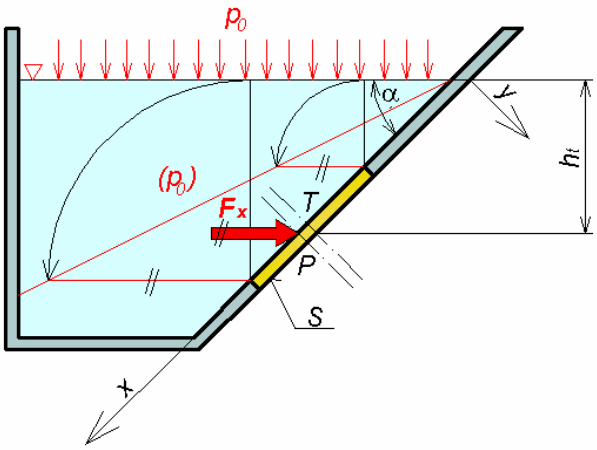
Podobně pro elementární **vodorovnou složku tlakové síly** dF_x platí

$$dF_x = \rho g h dS \sin\alpha = \rho g h dS_x = \rho g dV_x \qquad (3.2.15)$$

Aby součin hdS_x představoval elementární objem dV_x, musí být výška h a ploška dS_x na sobě kolmé. Proto se výšky sklápějí do vodorovného směru (tj. do směru působení uvažované složky F_x) jak je znázorněno na obrázku 3.8.

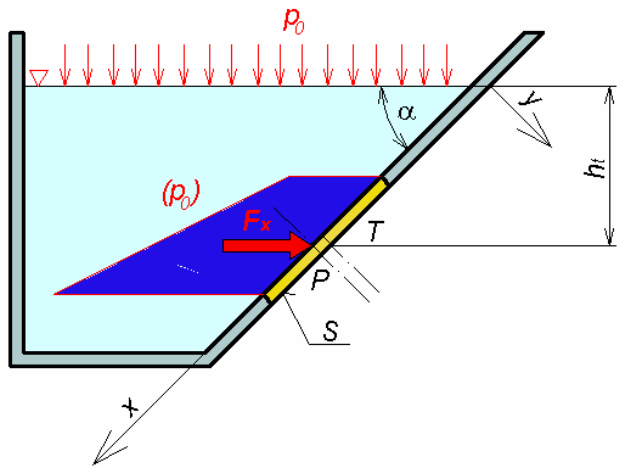


plocha S

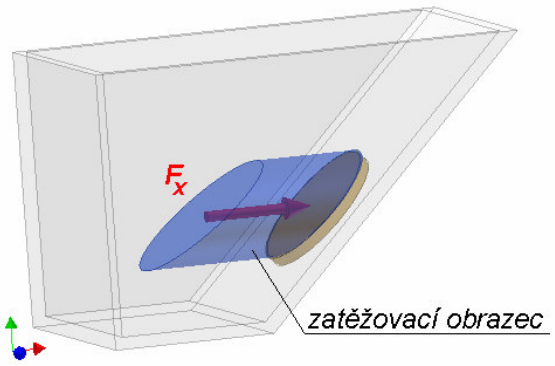


sklopená hladinová plocha $p_0 = konst.$

rovnoběžky s tlakovou silou F_x



výsledný zatěžovací obrazec – objem V_x



obr. 3.8 Zatěžovací obrazec V_x pro x složku tlakové síly

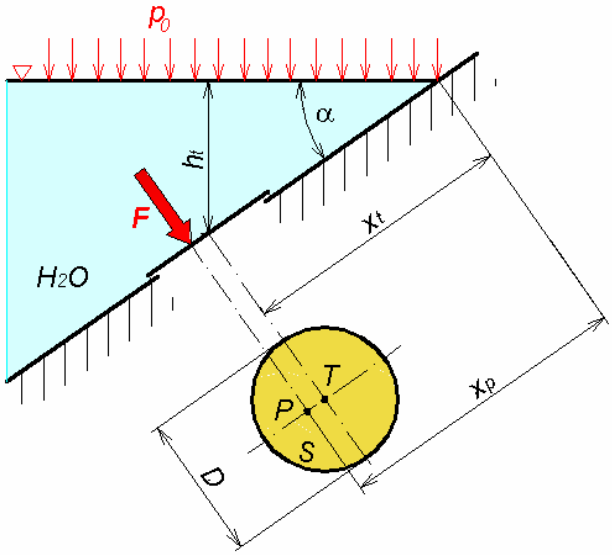
Řešený příklad

Stanovte velikost tlakové síly F na kruhové víko výpustě a souřadnici jejího působiště x_p.

Určete svislou složku tlakové síly F_y.

Zadání:		
D =	1	m
x_T =	1.8	m
α =	40	deg
ρ =	1000	kg.m^{-3}

Vypočítejte:		Výsledek:
F =	N	8914.54
x_p =	m	1.83472
F_y =	N	6828.93



Řešení:

$$F = \rho g h_T S = \rho g x_T \sin(\alpha) \frac{\pi D^2}{4}$$

$$F_y = F \cos\alpha$$

$$x_P = x_T + \frac{J_t}{M_y} = x_T + \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{x_T \frac{\pi D^2}{4}} = x_T + \frac{D^2}{16 x_T}$$

3.3. Tlakové síly na křivé plochy

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat tlakovou sílu na křivou plochu
popsat metodu složkovou a metodu náhradních ploch
nakreslit zatěžovací obrazec pro tlakovou sílu na křivou plochu

Výklad

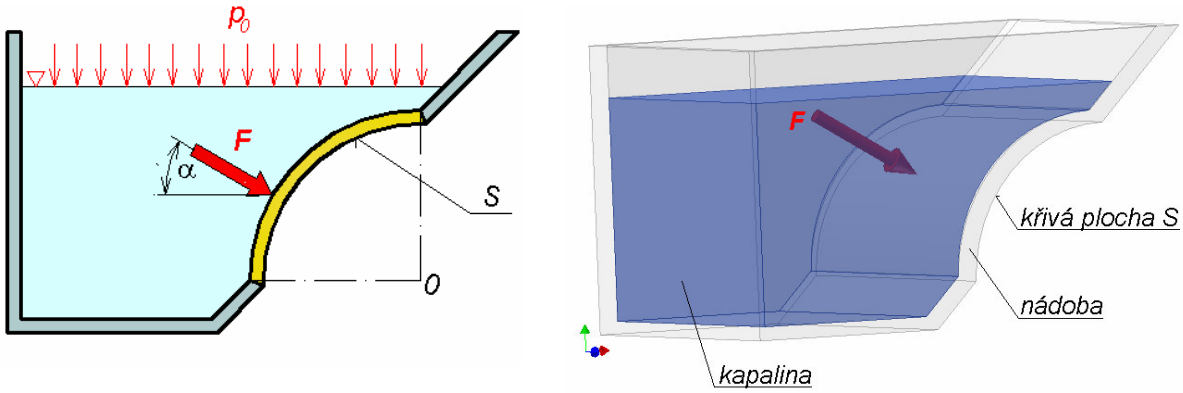
Na křivé ploše je tlak kapaliny v libovolném místě určen výrazem

$$p = \rho g h \qquad (3.3.1)$$

Na zvolený plošný prvek působí tlaková síla:

$$dF = \rho g h dS \tag{3.3.2}$$

ve směru kolmém na dS. Vektorovým součtem těchto elementárních tlakových sil po celé křivé ploše se dostane výslednice tlakové síly F na křivou plochu (viz obr. 3.9). K integraci je zapotřebí analytického vyjádření ploch a rovněž závislost pro výšku, což vede zpravidla ke zdlouhavým výpočtům.



obr. 3.9 Tlaková síla na křivou plochu

Při výpočtu tlakových sil na křivé plochy, kterými jsou často segmenty válce a koule, se používají dvě metody, a to **složková** a metoda **náhradních ploch**.

Složková metoda

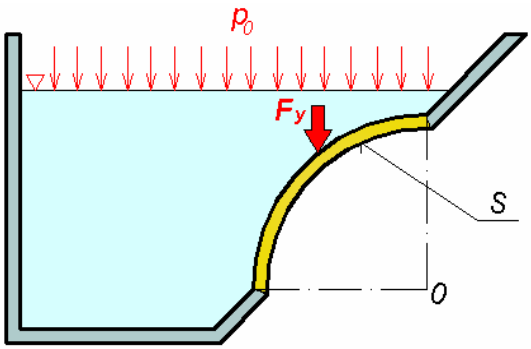
Složková metoda spočívá v tom, že **se určí** nejdříve **složky** ve zvolených směrech, zpravidla svislá a vodorovná. Působí-li na zvolený plošný prvek dS elementární síla dF pod úhlem α, pak **svislá složka tlakové síly** F_y

$$dF_y = dF \sin\alpha = \rho g h dS \sin\alpha = \rho g h dS_y = \rho g dV_y \tag{3.3.3}$$

Výsledná svislá složka tlakové síly F_y (viz obr. 3.10) se dostane integrací

$$F_y = \rho g \int_S h dS_y = \rho g \int_S dV_y = \rho g V_y \tag{3.3.4}$$

Svislá složka F_y je určena tíhou zatěžovacího obrazce V_y.

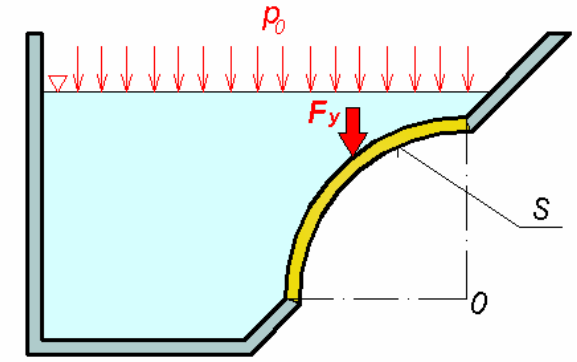


obr. 3.10 Složková metoda určení zatěžovacího obrazce pro svislou složku síly F_y

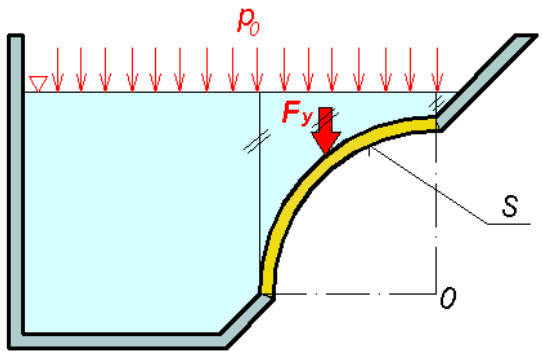
Jak je patrné z obrázku 3.11, objem V_y je určen:

1) křivou plochou S
2) tlakovou hladinou tlaku ovzduší $p_0 = konst.$
3) pláštěm vytvořeným svislými přímkami (rovnoběžnými se složkou tlakové síly F_y) nad obrysem plochy.

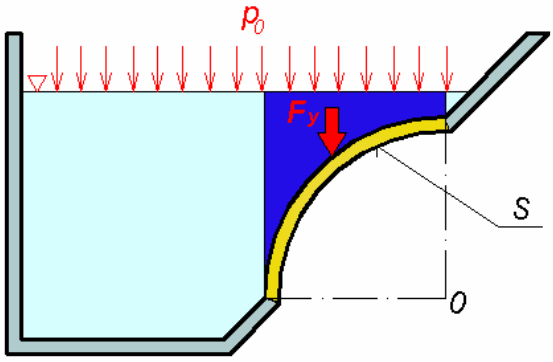
Působiště svislé složky tlakové síly na křivou plochu je v těžišti objemu V_y zatěžovacího objemu.

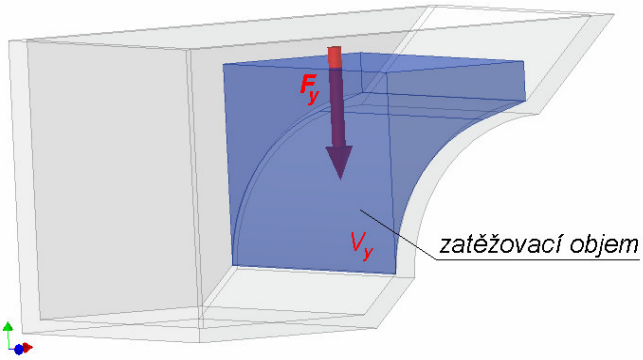


plocha S



rovnoběžky s tlakovou sílou F_y

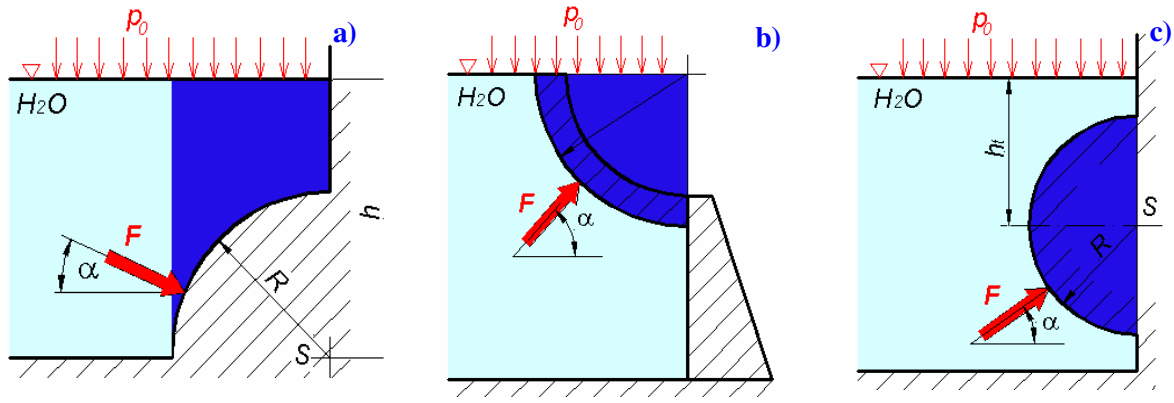




výsledný zatěžovací obrazec – objem V_y

obr. 3.11 Zatěžovací obrazec V_y pro svislou složku tlakové síly

Na obrázku 3.11 působí síla F_y shora na válcový segment, v tomto případě určíme zatěžovací objem jako rozdíl objemu hranolu a čtvrtiny válce. Obecně však na křivé plochy může působit i síla vztlaková, pak musí platit Archimédův zákon a objem V_y určíme jako objem kapaliny tělesem vytlačené, viz obr. 3.12 b, c.



obr. 3.12 Složková metoda – určení zatěžovacího obrazce pro svislou složku síly F_y

Podobně lze určit **vodorovnou složku tlakové síly** F_x:

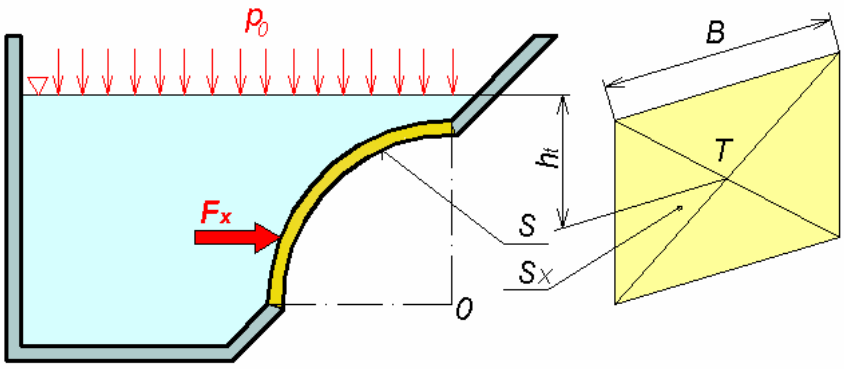
$$F_x = \int_S dF_x = \rho g \int_S h dS \cos\alpha = \rho g \int_S h dS_x = \rho g \int_S dV_x = \rho g V_x \qquad (3.3.5)$$

Součin hdS_x představuje objem dV_x, jestliže výška h je kolmá na průmět plochy dS_x. Proto se v každém bodě křivé plochy sklopí svislá výška h (svislá vzdálenost od tlakové hladiny tlaku ovzduší) do vodorovného směru, čímž je $h \perp dS_x$. Aby výpočet objemu V_x byl snadnější, posunou se elementární objemy dV_x do libovolně zvolené svislé roviny. Poněvadž posunutím se objemy neměnily co do velikosti, je takto upravený objem V_x stejně velký jako původní. Zatěžovací obrazec tvoří skosený válec nebo hranol. Jejich základnou je průmět křivé plochy do svislé roviny. Tím se dospělo k velmi důležitému poznatku o tlakové síle na křivé plochy – **vodorovná složka tlakové síly na křivou plochu se rovná tlakové síle na její průmět do svislé roviny,** viz obr. 3.13**.**

Výsledná vodorovná složka tlakové síly na šikmou rovinnou plochu je dána integrací, čili

$$F_x = \rho g \int_S h dS_x = \rho g V_x \qquad (3.3.6)$$

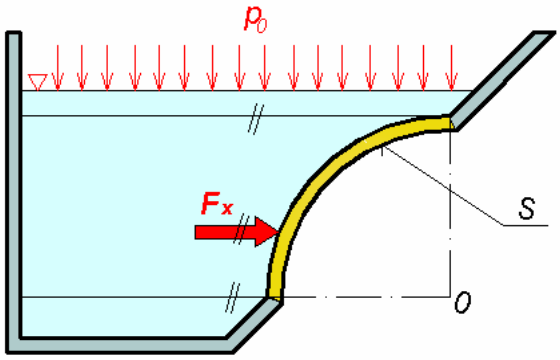
kde objem V_x zatěžovacího obrazce je dán tělesem skoseným dvěma nerovnoběžnými rovinami.



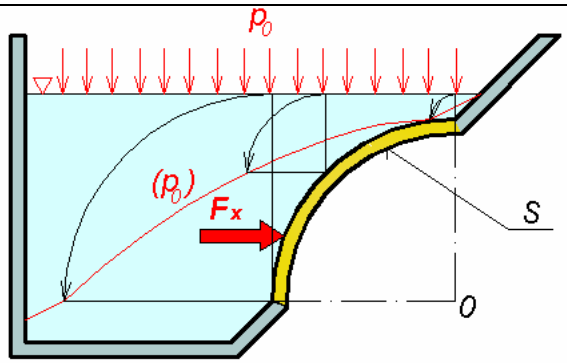
obr. 3.13 Složková metoda určení zatěžovacího obrazce pro svislou složku síly F_x

Posunutím elementárních objemů do libovolně zvolené svislé roviny přemění se tvar tělesa, aniž by se změnila jeho velikost. Je to zkosené těleso, jehož základnou je průmět S_x šikmé roviny do roviny kolmé na směr výslednice. Objem zkoseného tělesa se určí jako součin základny a výšky v jejím těžišti. Vodorovná složka tlakové síly na šikmou rovinu se rovná tlakové síle na její průmět do roviny kolmé na uvažovanou složku, viz obr. 3.14.

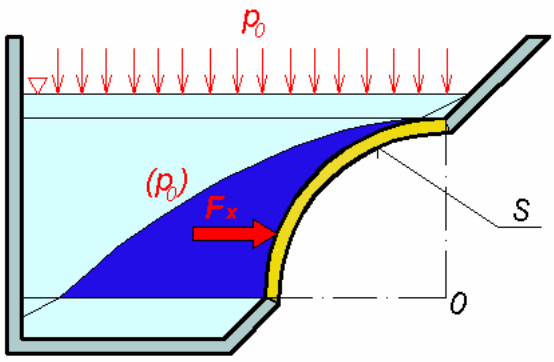
$$F_x = \rho \cdot g \cdot h_t \cdot S_x \qquad (3.3.7)$$



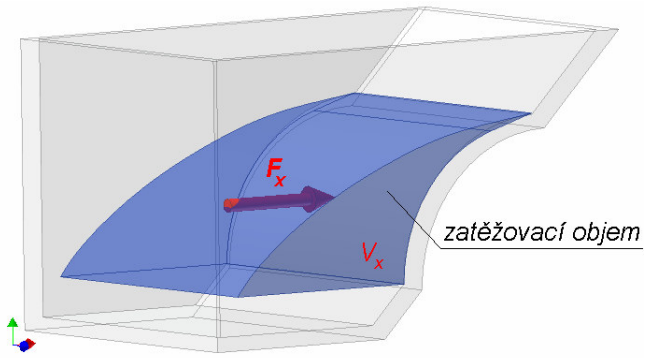
plocha S, rovnoběžky s tlakovou sílou F_x



sklopená hladinová plocha $p_0 = konst.$



výsledný zatěžovací obrazec – objem V_x



obr. 3.14 Zatěžovací obrazec V_x pro x složku tlakové síly

Výslednice tlakové síly na křivou plochu se dostane vektorovým součtem vodorovné a svislé složky. Poněvadž jsou složky na sobě kolmé, platí v prostoru

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad \text{případně pro rovinnou úlohu} \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad (3.3.8)$$

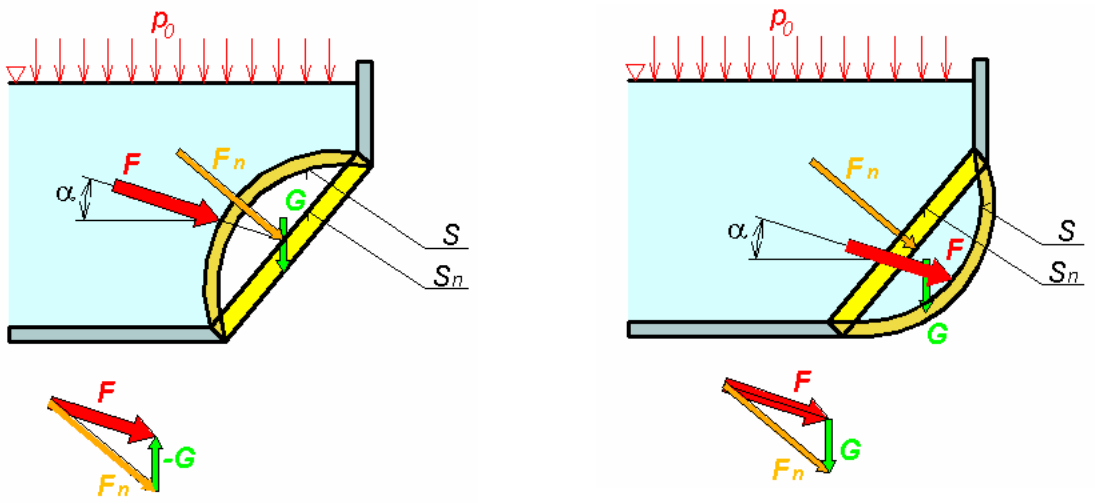
Směr výslednice tlakových sil je dán vztahem

$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x} \qquad (3.3.9)$$

Výslednice tlakové síly F prochází průsečíkem jejích složek F_x, F_y.

Metoda náhradních ploch

Metoda náhradních ploch spočívá v tom, že se **křivá plocha nahradí** jednou nebo více **rovinnými plochami**, a to tak, aby s křivou plochou uzavíraly objem V (obr. 3.15). Vypočítá se **tlaková síla na náhradní plochu** F_n. Nahrazením křivé plochy rovinnými plochami se přidal objem kapaliny V, takže tíhový účinek tohoto objemu kapaliny je zahrnut v tlakové síle na náhradní plochu.



obr. 3.15 Metoda náhradních ploch

Tíhu objemu kapaliny G určíme ze vztahu

$$G = \rho g V \tag{3.3.10}$$

Tíha kapaliny uzavřené v objemu V na křivou plochu nepůsobí (obr. 3.15 a), proto ji musíme od tlakové síly F_n odečíst. V opačném případě, kdy byl zavedením náhradní plochy S_n objem kapaliny V ubrán (obr. 3.15 b), je nutno k tlakové síle F_n na náhradní plochu účinek tíhy kapaliny G přičíst. Výsledná tlaková síla je tedy dána vektorovým rozdílem (součtem) tlakové síly F_n na náhradní plochu a tíhy G:

$$\vec{F} = \vec{F}_n \pm \vec{G} \tag{3.3.11}$$

Náhradní plochy je možno volit libovolně, jednu nebo více. Volí se tak, aby výpočet složek náhradních tlakových sil byl co nejjednodušší. Vždy musí platit, že náhradní a křivá plocha uzavírají objem V.

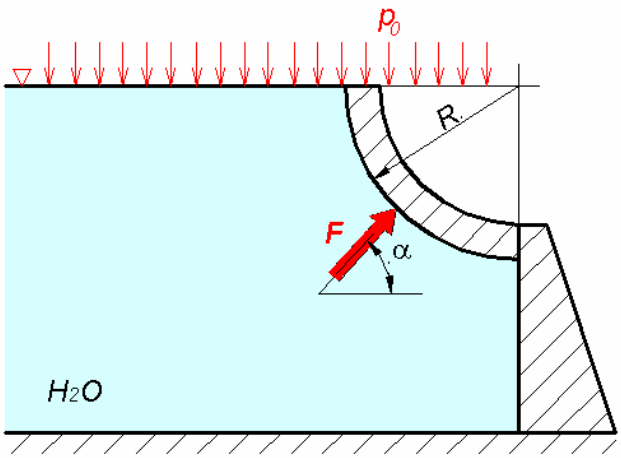
Metoda náhradních ploch je vhodná zejména v případech, kdy křivá plocha leží na šikmé rovině.

Řešený příklad

Stanovte tlakovou sílu F na válcový segmentový uzávěr o poloměru R a šířce B. Určete sklon tlakové síly, tj. úhel α. Určete vodorovnou složku F_x a svislou složku F_y tlakové síly.

Zadání:		
R =	0.8	m
B =	3	m
ρ =	1000	kg.m^{-3}

Vypočítejte:		Výsledek:
F_x =	N	9 417.60
F_y =	N	14 793.12
F =	N	17 536.46
α =	deg	57.5184



Řešení:

$$F_x = \rho g h_t S_x = \rho g \frac{R}{2} RB$$

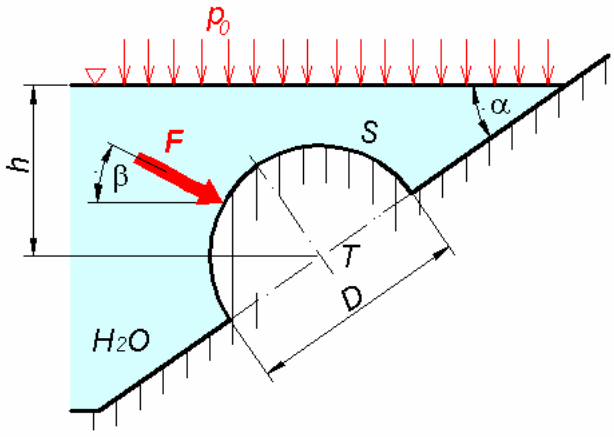
$$F_y = \rho g V_y = \rho g \frac{\pi R^2}{4} B; \qquad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \qquad \alpha = arctg \frac{F_y}{F_x}$$

Řešený příklad

Určete výsledný tlak vody na plochu polokulového víka, které zakrývá kruhový otvor v šikmé stěně nádoby. Těžiště otvoru je v hloubce h, průměr otvoru je d. Šikmá stěna svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Použijte metody náhradních ploch.

Zadání:		
h =	2.5	m
D =	0.4	m
α =	45	°
ρ =	1000	kg.m^{-3}

Vypočítejte:		Výsledek:
F_N =	N	3 081.90
G =	N	164.37
F =	N	2968.0



Řešení:

$$F_N = \rho g h_t S_N = \rho g h \frac{\pi D^2}{4}$$

$$G = \rho g V = \rho g \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3; \qquad \vec{F} = \vec{F}_N - \vec{G} \quad \Rightarrow \quad F = \sqrt{F_N^2 + G^2 - 2F_N G \cos\alpha}$$

3.4. Síly na tělesa ponořená do kapaliny

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat Archimédův zákon
určit jak se bude chovat těleso v kapalině

Výklad

Na těleso ponořené do kapaliny působí obecně síly ve třech na sobě kolmých směrech, tj. např. ve svislém směru a ve dvou směrech vodorovných na sebe kolmých. Poněvadž vodorovné složky tlakové síly na těleso se vypočtou stejně jako vodorovné složky tlakové síly na křivou plochu, určí se nejdříve průměty povrchu ponořeného tělesa. Protože se dostane dvojnásobný průmět z obou stran tělesa, bude výslednice vodorovných tlakových sil na těleso z obou stran stejně velká, stejného směru, ale opačného smyslu, takže se tuhostí tělesa ruší. To platí o obou vodorovných složkách tlakových sil.

Ve svislém směru bude působit na zvolený objem dV tělesa, jež je ponorka – viz. obr. 3.16, svislá složka tlakové síly, jejíž velikost je dána součtem tlakových sil na plošky dS_y (základny válečku dV). Na horní část ponorky působí **tlaková síla**

$$dF_1 = \rho g h_1 dS_y \tag{3.4.1}$$

podobně na spodní část

$$dF_2 = \rho g h_2 dS_y \tag{3.4.2}$$

takže výslednice svislé tlakové síly je:

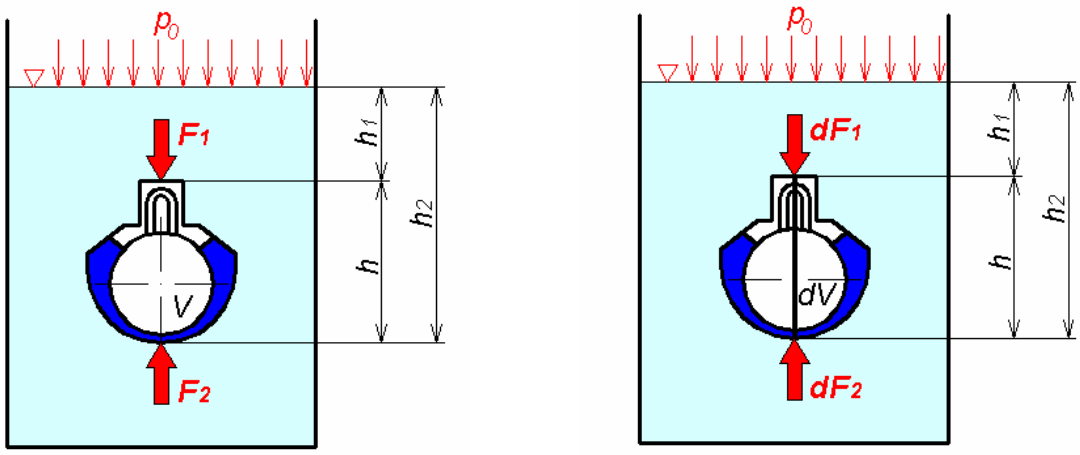
$$dF_y = dF_2 - dF_1 = \rho g\left(h_2 - h_1\right)dS_y = \rho g h dS_y = \rho g dV_y = dG_k \tag{3.4.3}$$

z čehož je patrno, že tlaková síla kapaliny ve svislém směru na prvek tělesa o objemu dV se rovná tíze kapaliny, která je tímto elementem vytlačena. **Výsledná tlaková síla** na celé těleso (ponorku) se dostane integrací, což je součet elementárních tlakových sil, neboli

$$F_v = \rho g V = G_k \tag{3.4.4}$$

Výsledek je známý **Archimedův zákon**:

Na těleso ponořené do kapaliny působí vztlaková síla rovná tíze objemu kapaliny tělesem vytlačené.



obr. 3.16 Vztlak tělesa – ponorky

Na těleso ponořené do kapaliny působí dvě síly, a to **vztlaková síla** F_v v těžišti objemu vytlačené kapaliny, a vlastní **tíha tělesa** G, působící v těžišti tělesa.

Podle výslednice

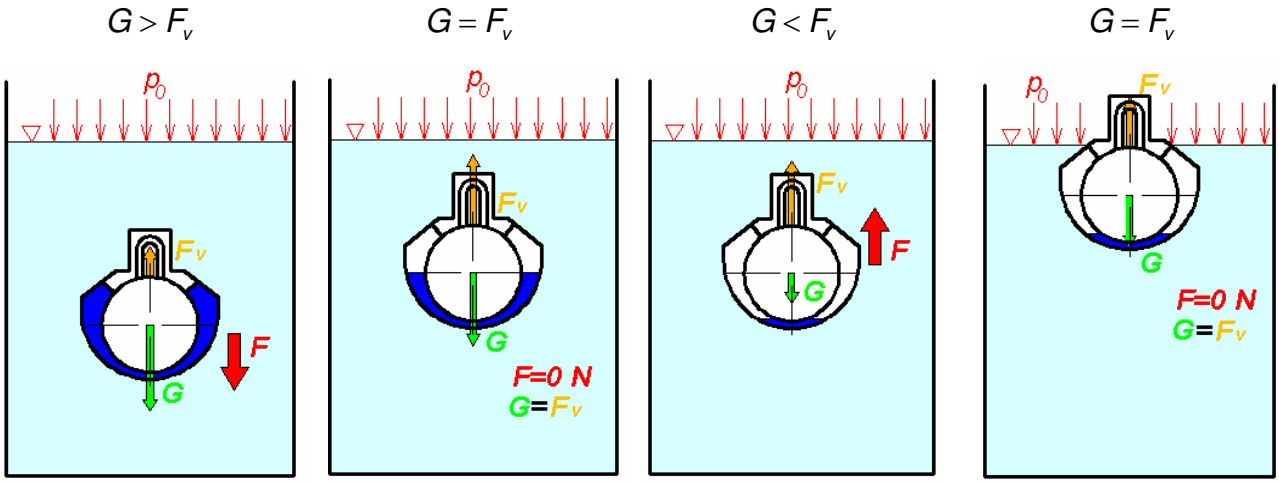
$$F = F_v - G \tag{3.4.5}$$

která působí na těleso ponořené v kapalině, mohou nastat obecně tři případy (obr. 3.17):

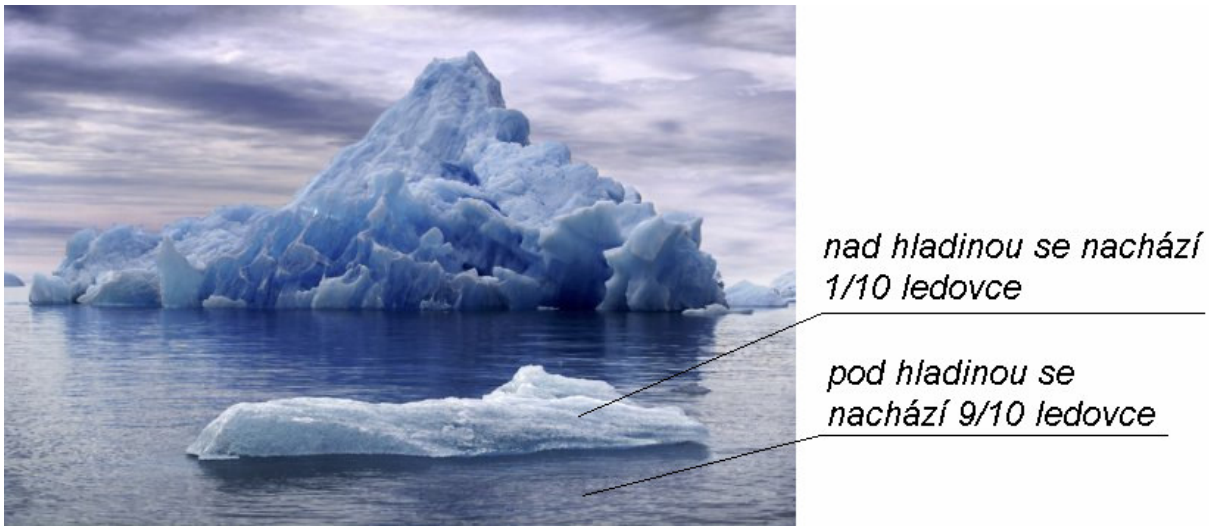
$G > F_v$ - tíha tělesa je větší než vztlaková síla, takže výslednice působí ve směru svislém dolů a **těleso klesá ke dnu**.

$G = F_v$ - tíha tělesa je v rovnováze se vztlakovou silou, výslednice je nulová a těleso setrvává v libovolné poloze – **vznáší se v kapalině**.

$G < F_v$ - vlastní tíha tělesa je menší než vztlaková síla, takže výslednice působí svisle nahoru a těleso **vznáší k hladině**. Vynořením tělesa se zmenší vztlaková síla, až nastane **rovnováha** s vlastní tíhou tělesa, které **plave**.



obr. 3.17 Plavání a vznášení ponorky – síly na těleso ponořené do kapaliny



obr. 3.18 Ponor ledovce

Shrnutí kapitoly

Hydrostatický tlak, tlaková síla, plochy vymezující zatěžovací obrazec, hydrostatický paradoxon, výsledná tlaková síla na šikmé rovinné plochy, statický moment plochy, určení působiště síly, určení tlakové síly na křivé plochy metodou složkovou a metodou náhradních ploch, vztlaková síla, Archimedův zákon.

Řešený příklad

Co je těžší? Na jedné misce vah stojí nádoba naplněná až po okraj vodou, na druhé misce je stejná nádoba, také plná až po okraj, ale plave v ní kousek dřeva. Která z nich je těžší?

Řešení: Obě nádoby jsou stejně těžké. V druhé nádobě je sice vody méně, protože dřevo vytlačí určitý objem vody, ale podle Archimédova zákona každé plovoucí těleso vytlačí svou ponořenou částí množství kapaliny vážící právě tolik jako samo (celé) těleso. A proto musí váhy zůstat v rovnováze.

Kontrolní otázka

Vysvětli pojem tlak a tlaková síla.

Vysvětli pojem hydrostatický paradoxon.

Proč není působiště tlakové síly na rovinnou šikmou plochu totožné s těžištěm plochy?

Je tlak působící na šikmou rovinnou stěnu proměnný?

Co je to zatěžovací obrazec, k čemu slouží a jak je určen?

Jaký je rozdíl mezi tlakovou sílou a vztlakem?

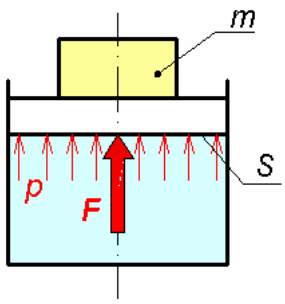
Jak se dá dokázat Archimédův zákon?

Úkol k řešení

Příklad 3.1

Na píst o ploše S působí závaží o hmotnosti m. Jak velký tlak p je v nádrži, je-li píst v rovnováze?

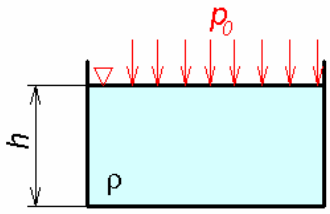
Zadání:			
S =	100	cm^2	
m =	50	kg	
Vypočítejte:			Výsledek:
F =		N	490.5
p =		kPa	49.05



Příklad 3.2

Jaký bude absolutní p_a a relativní p_r tlak vody v hloubce h pod volnou hladinou? Měrnou hmotnost uvažujte ρ a atmosférický tlak p_0.

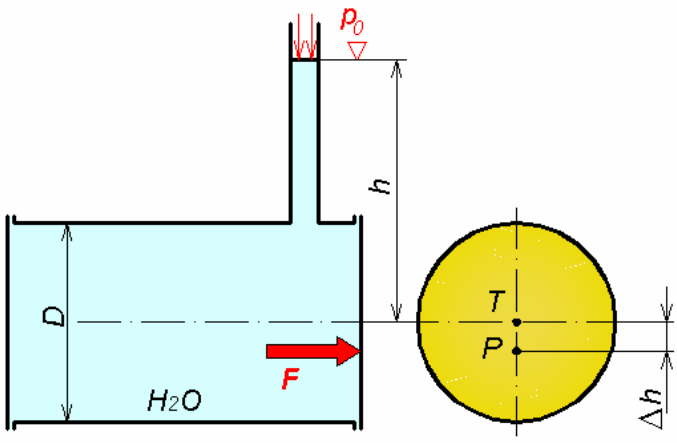
Zadání:			
h =	12	m	
ρ =	1000	$kg.m^{-3}$	
p_0 =	101	kPa	
Vypočítejte:			Výsledek:
p_a =		kPa	218.72
p_r =		kPa	117.72



Příklad 3.3

Stanovte velikost síly F na kruhové víko nádrže, jestliže v připojené trubce je hladina ve výšce h. Vypočtěte vzdálenost Δh působiště P tlakové síly od těžiště T plochy. Nakreslete zatěžovací obrazec. Měrnou hmotnost vody uvažujte ρ.

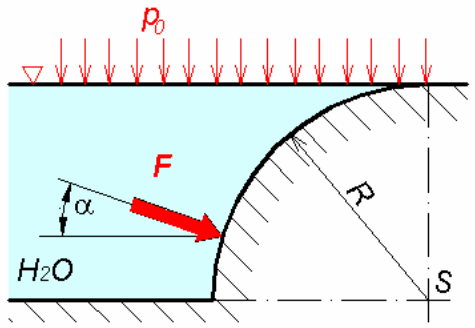
Zadání:			
h =	1.4	m	
D =	0.8	m	
ρ =	1000	$kg.m^{-3}$	
Vypočítejte:			Výsledek:
F =		N	6 903.46
Δh =		m	0.02857



Příklad 3.4

Určete velikost síly F a její sklon α na válcovou plochu. Nakreslete zatěžovací objem pro svislou složku tlakové síly F_y. Vypočtěte vodorovnou složku tlakové síly F_x.

Zadání:			
R =	0.8	m	
B =	4	m	
ρ =	1000	kg.m^{-3}	
Vypočítejte:			Výsledek:
F_x =		N	12 556.80
F_y =		N	5 389.44
F =		N	13 664.53
α =		deg	23.22919



Příklad 3.5

Ve které z kapalin bude těleso plavat na hladině? Tělesová hmotnost je m a objem V.

Zadání:					
m =	4	kg		a) voda	1000 kg.m^{-3}
V =	2	cm^3		b) líh	700 kg.m^{-3}
Vypočítejte:			Výsledek:	c) rtuť	13600 kg.m^{-3}
ρ =		kg.m^{-3}	2000		
správná odpověď			c)		

Příklad 3.6

Většina z nás snad zná onu záludnou otázku: co je těžší, tuna dřeva nebo tuna železa? Odpoví-li někdo, že těžší je tuna dřeva, zřejmě všichni budou takovou odpověď považovat za nesmyslnou. Jenže, ta odpověď je správná! Proč?

Řešení: Archimédův zákon platí nejen pro kapaliny, ale i pro plyny. Proto každé těleso váží ve vzduchu o tolik méně, kolik váží vzduch, který samo vytlačuje. Proto i železo a dřevo váží ve vzduchu méně. Abychom zjistili jejich skutečnou hmotnost, museli bychom je vážit ve vzduchoprázdnu (vakuu). V tomto případě je tedy skutečná hmotnost dřeva = 1 tuna + hmotnost vzduchu o objemu 1 tuny dřeva, kdežto hmotnost železa = 1 tuna + hmotnost vzduchu o objemu 1 tuny železa. A protože tuna dřeva má asi patnáctkrát větší objem než tuna železa, je také skutečně hmotnost tuny dřeva větší než hmotnost tuny železa. Přesněji bychom mohli říci, že skutečná hmotnost dřeva, které ve vzduchu váží 1 tunu, je větší než skutečná hmotnost železa, které ve vzduchu váží také jednu tunu.

I když v běžném životě nám tyto rozdíly v hmotnosti nevadí, při přesném měření musíme skutečnost, že vážený předmět i závaží jsou nadlehčovány silou rovnou tíze jimi vytlačeného vzduchu, brát v úvahu a provést opravu na vztlak (redukci na vakuum).

4. Relativní klid kapaliny

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• odvodit tvar hladinové plochy, vypočítat tlak v libovolném místě objemu kapaliny a stanovit velikost tlakových sil na zvolené plochy při přímočarém rovnoměrně zrychleném pohybu nádoby s kapalinou • určit tvar hladinové plochy, vypočítat tlak a tlakové síly při rovnoměrném otáčivém pohybu nádoby s kapalinou.	

Při pohybu nádoby s kapalinou mohou nastat případy, kdy je kapalina vůči stěnám nádoby v klidu. Na kapalinu působí objemové (hmotnostní) síly od vlastního pohybu nádoby s kapalinou, kterou je nutno zahrnout do podmínek hydrostatické rovnováhy. V dalším textu jsou probrány dva jednoduché příklady relativního klidu kapaliny.

4.1. Přímočarý, rovnoměrně zrychlený pohyb nádoby

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

určit u přímočarého, rovnoměrně zrychleného pohybu nádoby s kapalinou tvar hladiny z diferenciální rovnice hladinových ploch, určit tlak kapaliny v libovolném místě nádoby a vypočítat tlakové síly na stěny, dno a víko nádrže.

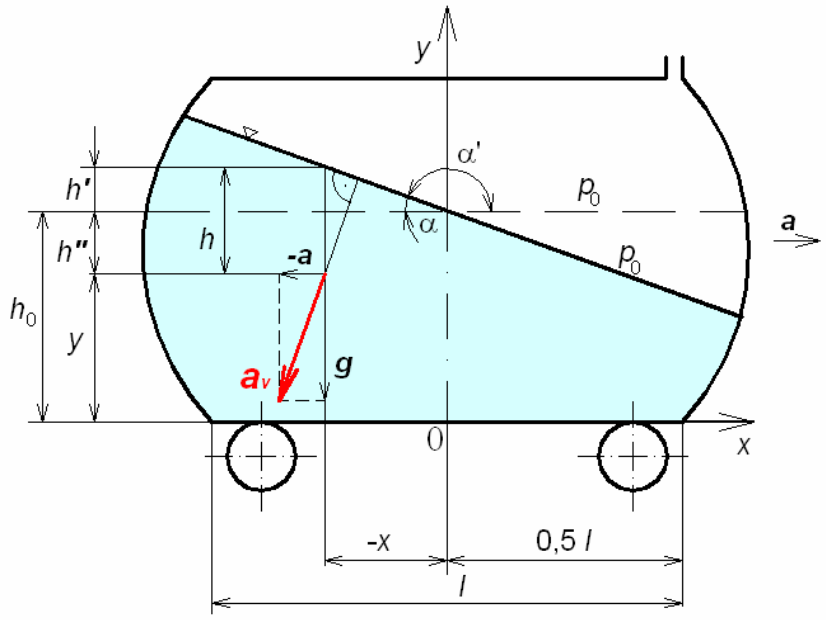
Výklad

Nádoba s kapalinou se pohybuje přímočaře rovnoměrně zrychleně ve vodorovné rovině. Na každou částečku kapaliny v nádobě působí ve svislém směru tíhové zrychlení $a_y = -g$ a ve vodorovném směru síla setrvačné zrychlení $a_x = -a$, viz obr. 4.1. Diferenciální rovnice hladinových ploch je v tomto případě

$$-a\,dx - g\,dy = 0 \qquad (4.1.1)$$

a po integraci

$$-ax - gy + konst = 0 \Rightarrow ax + gy = konst \Rightarrow\ y = konst - \frac{a}{g}x = konst - x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,. \qquad (4.1.2)$$



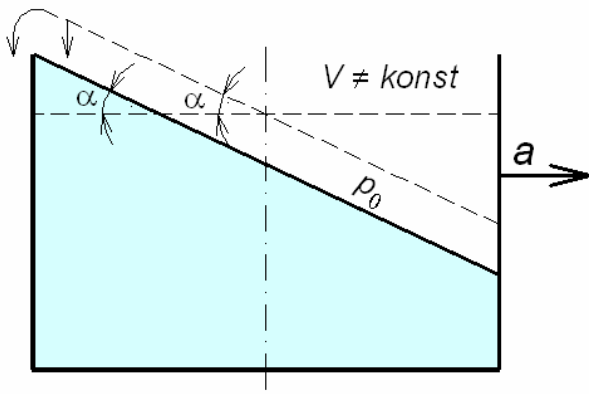
obr. 4.1 Kapalina v relativním klidu, přímočarý, rovnoměrně zrychlený pohyb

Hladinové plochy jsou roviny skloněné, svírající s vodorovnou rovinou (kladná poloosa) úhel α. Z rovnice hladinových ploch je

$$\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{a}{g} = -\operatorname{tg}(180° - \alpha') = -\operatorname{tg}\alpha \quad \text{neboli} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}, (\alpha + \alpha' = 180°). \qquad (4.1.3)$$

Z posledního výrazu rovněž vyplývá, že hladinové plochy jsou kolmé na výsledné zrychlení hmotnostních sil působících na kapalinu.

Pro stanovení tlaku v kapalině je třeba znát alespoň v jednom místě (tj. alespoň na jedné hladinové ploše) velikost tlaku. Zpravidla jím bývá rozhraní kapaliny s ovzduším $(p_0 = konst)$, jehož poloha je závislá na objemu kapaliny v nádobě. Není-li nádoba zcela naplněná a nevyteče-li kapalina během pohybu ani částečně, musí být její objem V_k v nádobě za pohybu stejný jako před uvedením do pohybu $(V_k = konst)$. Skloněním hladiny v jedné části (pravé) nádoby ubude kapalina, ve druhé (levé) naopak přibude. Celková změna objemu kapaliny musí být nulová, proto úbytek a přírůstek objemu musí být stejně velký. V případech, kdy je nádoba válcová nebo má tvar hranolu se základnou symetrickou k ose kolmé na směr pohybu, protíná se rozhraní kapaliny s ovzduším v polovině délky nádoby. Poloha hladinové plochy tlaku ovzduší se tedy určí z podmínky $(V_k = konst)$.



obr. 4.2 Hladinová plocha a její poloha

V případě, kdy je zrychlení velké, vystoupí rozhraní kapaliny s ovzduším $(p_0 = konst)$ nad okraj nádoby a část kapaliny vyteče z nádoby. To vyvolá klesání hladiny. Pokles hladiny ustane, až hladina bude procházet hranou, přes níž kapalina začala vytékat. Hladinová plocha tlaku ovzduší prochází tedy v tomto případě místem, přes které kapalina začala vytékat $(V_k \neq konst)$.

Tlak kapaliny v libovolném místě se vypočte po dosazení dříve uvedených podmínek $a_x = -a$ a $a_y = -g$ do diferenciální rovnice tlakové funkce

$$dp = \rho(-adx - gdy);\ p = \rho(-ax - gy) + konst. \qquad (4.1.4)$$

Pro zvolený počátek souřadnic (uprostřed dna nádoby) je integrační konstanta dána touto okrajovou podmínkou: v místě $y = h_0$; $x = 0$, je relativní tlak $p = 0$; je tedy $konst = \rho g h_0$ a tlak v libovolném místě nádoby je určen tlakovou funkcí

$$p = \rho g\left[h_0 - y - \frac{a}{g}x\right]. \qquad (4.1.5)$$

Protože

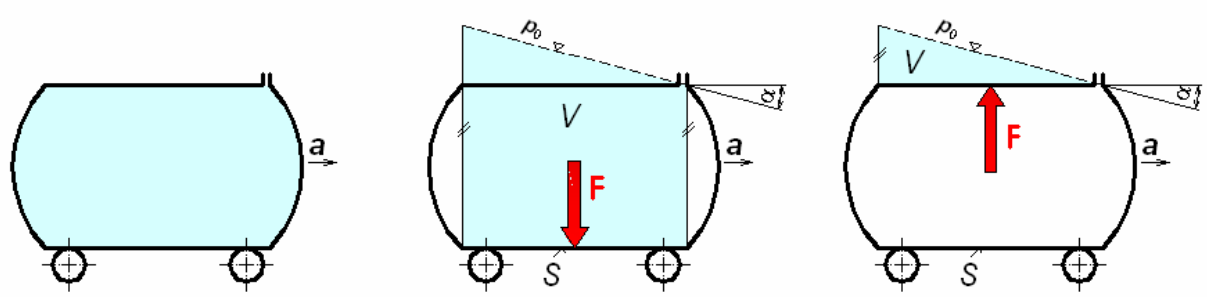
$$h' = -x\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{a}{g}x;\ h'' = h_0 - y \qquad (4.1.6)$$

je

$$p = \rho g(h'' + h') = \rho g h. \qquad (4.1.7)$$

Tento výraz je formálně shodný s tlakem v kapalině, na niž působí jen tíže zemská! Avšak veličina h je svislá vzdálenost uvažovaného bodu od hladiny tlaku ovzduší, což je skloněná rovina. Protože je kapalina v relativním klidu vůči nádobě, nastává hydrostatická rovnováha, a lze proto použít všechny dříve odvozené poznatky o výpočtu tlaku, tlakové síle na plochy apod.

Jako příklad je na obr. 4.3 nakreslen zatěžovací obrazec pro výpočet tlakové síly na dno a víko u uzavřené nádoby zcela naplněné kapalinou. Pro výpočet tlakové síly platí vztah $F = \rho g V$, kde V je objem zatěžovacího obrazce. Ten je omezen plochou S, na níž působí tlaková síla, hladinovou plochou $p_0 = konst.$ a pláštěm vzniklým opsáním přímky rovnoběžné s výslednicí tlakové síly F nad obrysem plochy S.

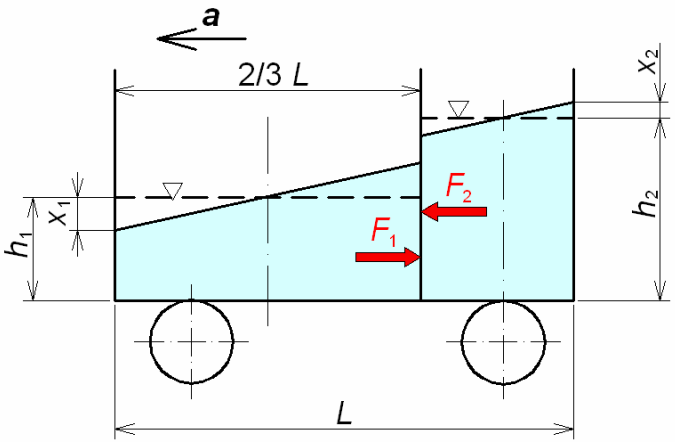


obr. 4.3 Zatěžovací obrazec pro výpočet tlakové síly na dno a víko u uzavřené nádoby zcela naplněné kapalinou

Řešený příklad

Vozík ve tvaru hranolu se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Jeho objem je rozdělen přepážkou na dvě části, v nichž je voda ve výši h_1, h_2. Šířka vozíku je B. Určete výslednou tlakovou sílu F na přepážku.

Zadáno:		
$L =$	3 m	
$h_1 =$	1 m	
$h_2 =$	1.75 m	
$B =$	1 m	
$a =$	3.924 m.s^{-1}	
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$F_1 =$?	N	9 613.80
$F_2 =$?	N	11 784.26
$F =$?	N	2 170.46
$x_1 =$?	m	0.40
$x_2 =$?	m	0.20



Řešení:

$$x_1 = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{L}{3};\ F_1 = \rho g \frac{(h_1 + x_1)}{2}(h_1 + x_1)B$$

$$x_2 = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{L}{6};\ F_2 = \rho g \frac{(h_2 - x_2)}{2}(h_2 - x_2)B;$$

$$F = F_2 - F_1$$

4.2. Pohyb rovnoměrně otáčivý kolem svislé osy

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

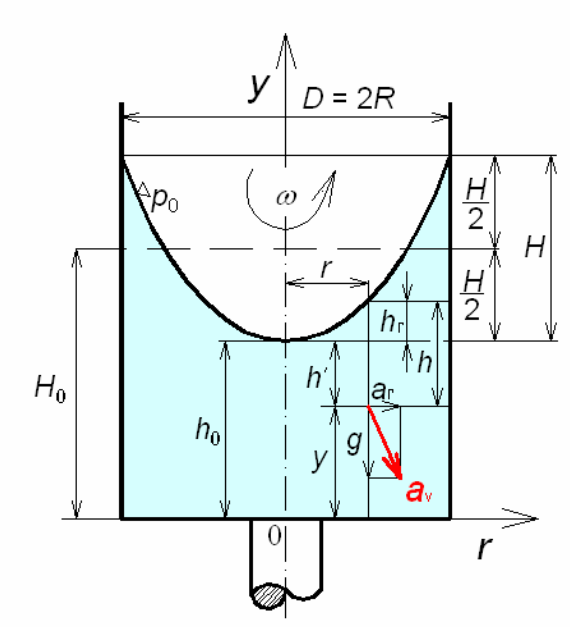
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

určit tvar hladiny z diferenciální rovnice hladinových ploch, vypočítat tlak kapaliny v libovolném místě nádoby a učit tlakové síly na tyto plochy při určitých otáčkách.

Výklad

Válcová nádoba naplněná zčásti kapalinou se otáčí rovnoměrně kolem svislé osy. Předpokládá se, že všechny částečky kapaliny se pohybují unášivou rychlostí odpovídající poloměru, na kterém se nachází. Při otáčivém pohybu působí na každou částečku kromě tíže zemské odstředivé zrychlení $r \cdot \omega^2$.

I když jde o prostorový pohyb, lze řešit tento relativní klid kapaliny v rovině, protože je stejný ve všech rovinách, které procházejí osou rotace. Odstředivé zrychlení působící na částečku kapaliny na poloměru r je $a_r = r\omega^2$. Jeho velikost se mění s poloměrem, a proto výslednice zrychlení bude na různých válcových plochách různá, jak co do velikosti, tak i směru. Je snadné odhadnout, že v tomto případě hladinové plochy nebudou rovinami (obr. 4.4).



obr. 4.4 Rovnoměrné otáčivý pohyb nádoby s kapalinou kolem svislé osy

Protože zrychlení jsou určena vztahy

$$a_r = r\omega^2 \,,\; a_y = -g \qquad (4.2.1)$$

je diferenciální rovnice hladinových ploch $r\omega^2 dr - g dy = 0$. Její integrál je

$$\frac{r^2\omega^2}{2} - gy = konst\,. \qquad (4.2.2)$$

K určení integrační konstanty je okrajová podmínka $r = 0$, $y = h_0$, čili $konst = -gh_0$ a rovnice hladinových ploch pro zvolený počátek souřadnic je

$$\frac{r^2\omega^2}{2} - g(y - h_0) = 0\,, \qquad (4.2.3)$$

což je rovnice paraboly. Hladinové plochy jsou rotační paraboloidy.

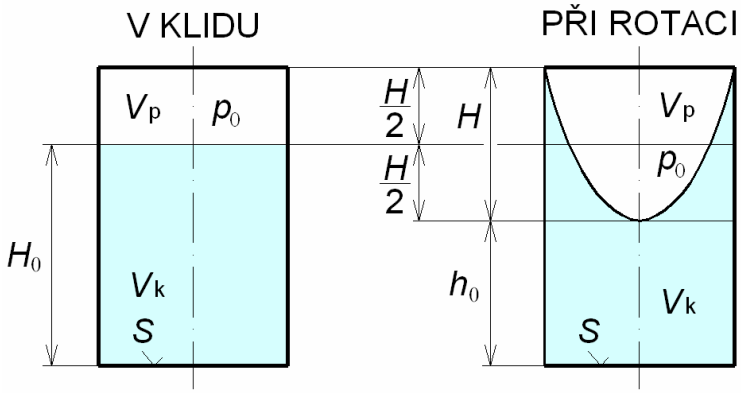
Výška paraboloidu H měřená na plášti válcové nádoby, tj. na poloměru $r = R$ se určí z poslední rovnice

$$H = y_R - h_0 = \frac{R^2\omega^2}{2g} = \frac{u_R{}^2}{2g}. \qquad (4.2.4)$$

Z téže rovnice se dostane výška paraboloidu h_r na libovolném poloměru r

$$h_r = y_r - h_0 = \frac{r^2\omega^2}{2g} = \frac{u_r{}^2}{2g}. \qquad (4.2.5)$$

Výška rotačního paraboloidu na určitém poloměru je rovna rychlostní výšce na tomtéž poloměru. Jestliže z nádoby nemůže kapalina vytékat, musí být objem kapaliny před uvedením do pohybu a za pohybu stejný (obr. 4.5).



obr. 4.5 Určení polohy hladinové plochy

Před uvedením do pohybu je v nádobě objem kapaliny $V_k = SH_0$. Za pohybu je objem $V_k = S(h_0 + H) - V_p$, kde V_p značí objem rotačního paraboloidu, který se rovná polovičnímu objemu opsaného válce, čili $V_p = \frac{1}{2}SH$. Z posledních rovnic vyplývá při rovnosti objemů

$$SH_0 = S(h_0 + H) - \frac{1}{2}SH, \qquad (4.2.6)$$

$$H_0 - h_0 = \frac{1}{2}H. \qquad (4.2.7)$$

To znamená, že **původní hladina tlaku ovzduší za klidu půlí výšku paraboloidu** *H*, představujícího novou hladinu tlaku ovzduší.

Tlak v kapalině se určí z diferenciální rovnice tlakové funkce

$$dp = \rho(r\omega^2 dr - g dy). \qquad (4.2.8)$$

Po integraci je tlaková funkce

$$p = \rho g\left(\frac{r^2\omega^2}{2g} - y + konst\right) \qquad (4.2.9)$$

Okrajová podmínka, která se stanoví po určení nové hladinové plochy tlaku ovzduší, pro $r = 0$, $y = h_0$ je $p = 0$, čili integrační konstanta je $konst = h_0$. Tlaková funkce je tedy

$$p = \rho g\left(\frac{r^2\omega^2}{2g} - y + h_0\right). \qquad (4.2.10)$$

Protože výška paraboloidu na poloměru r je $h_r = \frac{r^2\omega^2}{2g}$ a $h' = h_0 - y$, upraví se rovnice pro tlak kapaliny

$$p = \rho g(h_r + h') = \rho g h \qquad (4.2.11)$$

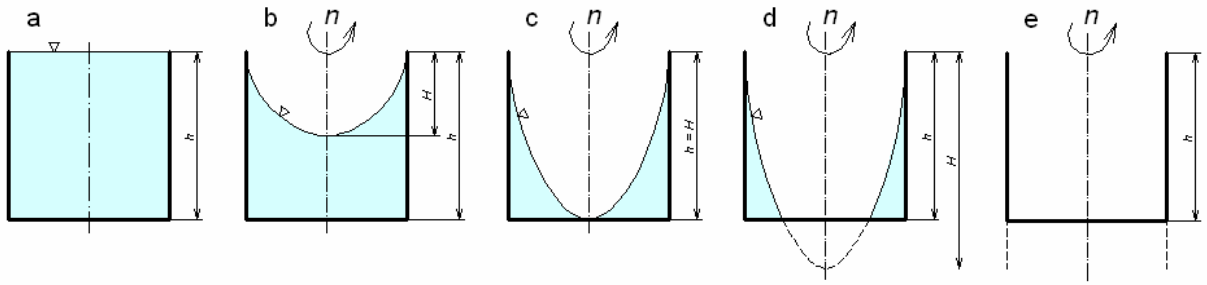
kde h je opět svislá vzdálenost daného místa od hladinové plochy tlaku ovzduší za rotace. Tento výsledek je shodný jako v případě přímočarého, rovnoměrně zrychleného pohybu.

Rovnici $p = \rho g h$ je možno považovat za obecný integrál diferenciální rovnice pro tlak!

Pro vzdálenost h platí dříve uvedená definice. K jejímu správnému určení je nutno vyšetřit hladinové plochy odpovídající relativnímu klidu kapaliny a hlavně hladinovou plochu tvořící rozhraní kapaliny s ovzduším $(p_0 = konst)$. Z toho vyplývá praktický význam hladinových ploch. Je třeba připomenout, že při výpočtu tlakových sil omezuje tatáž hladinová plocha zatěžovací obrazec.

Poloha hladinové plochy

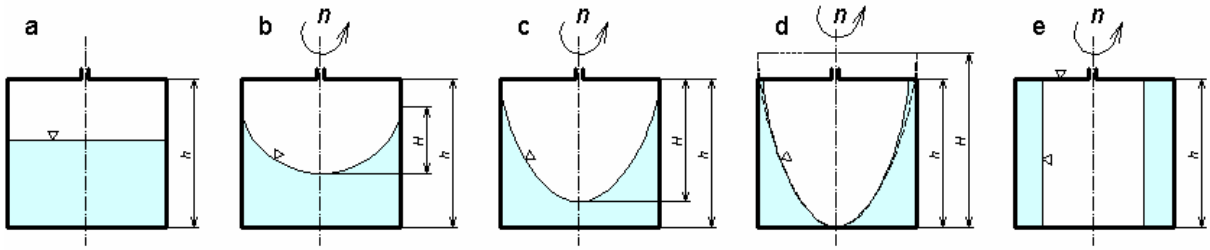
Může-li kapalina během pohybu vytéci z nádoby, nalezne se poloha hladinové plochy tlaku ovzduší stejně jak bylo určeno dříve: musí procházet místem, kde kapalina začala přetékat, tj. horním okrajem nádoby. Na obr. 4.6 je postupně znázorněna poloha hladinové plochy při rostoucích otáčkách válcové nádoby zcela naplněné kapalinou (obr. 4.6a). Hladinová plocha tlaku ovzduší má tvar rotačního paraboloidu (obr. 4.6b) až do okamžiku, kdy se tato plocha dotkne dna, tedy $h = H$ (obr. 4.6c). Při dalším nárůstu otáček se vrchol paraboloidu hladinové plochy posouvá pod dno nádoby (obr. 4.6d) až do okamžiku, kdy celý objem nádoby leží uvnitř tohoto rotačního paraboloidu (obr. 4.6e). V tomto okamžiku se nádoba zcela vyprázdní a hladinová plocha přechází v souosou válcovou plochu.



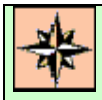
obr. 4.6 Poloha hladinové plochy při rostoucích otáčkách otevřené válcové nádoby

U uzavřené nádoby naplněné zčásti kapalinou (obr. 4.7a) půlí původní hladina tlaku ovzduší výšku paraboloidu H (obr. 4.7b) až do okamžiku, kdy se hladinová plocha dotkne

víka nádoby (obr. 4.7c). Protože kapalina nemůže vytéci, paraboloid se deformuje (obr. 4.7d) až do okamžiku, kdy hladinová plocha přejde v souosou válcovou plochu (obr. 4.7e).



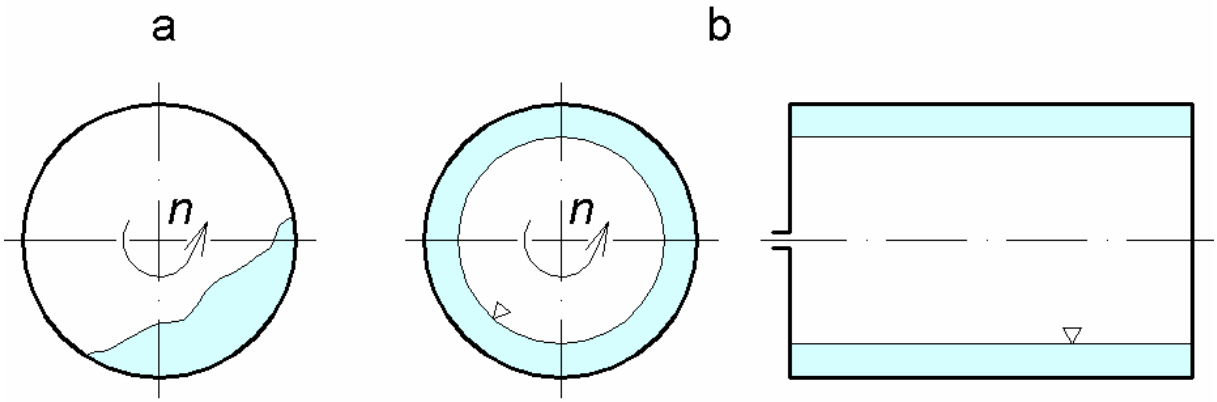
obr. 4.7 Poloha hladinové plochy při rostoucích otáčkách uzavřené válcové nádoby



Doplňující (nepovinný) text

Rovnoměrně otáčivý pohyb nádoby s kapalinou kolem vodorovné osy

U rovnoměrně otáčivého pohybu nádoby s kapalinou kolem vodorovné osy stálou úhlovou rychlostí za působení tíhového zrychlení mohou nastat následující 2 případy:



obr. 4.8 Případy rotace nádoby s kapalinou kolem vodorovné osy

a) v případě, že vliv tíhového zrychlení je značný, relativní rovnováha nenastává, neboť kapalina se vzhledem k nádobě pohybuje – obr. 4.8a,

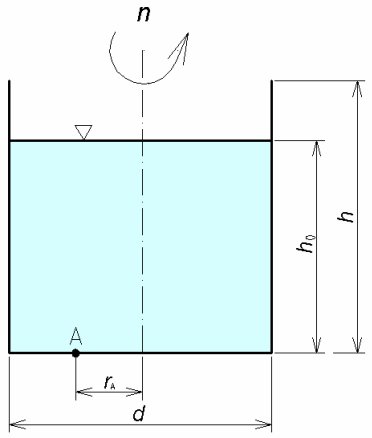
b) tíhové zrychlení je zanedbatelné vzhledem k odstředivému zrychlení $r\omega^2 >> g$, hladinové plochy jsou v tomto případě souosé válcové plochy – obr. 4.8 b.

Řešený příklad

Stanovte otáčky nádoby n, při kterých se hladina $p_0 = konst$ dotkne dna nádoby a nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku. Vyteče zčásti kapalina z nádoby? Když ano, jaký objem V vyteče? Jaký relativní tlak p_A bude v bodě A na poloměru r_A při rotaci nádoby s kapalinou?

Zadáno:		
$h_0 =$	0.0667	m
$h =$	0.1	m
$d =$	0.1	m
$r_A =$	0.025	m
$\rho =$	1000	kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
$H =$?	m	0.10
$n =$?	s^{-1}	4.46
$p_A =$?	Pa	245.40
$V =$?	m^3	
		0.000131



Řešení:
$$H = \begin{cases} 2h_0 \text{ pro } h_0 < \dfrac{h}{2} \\ h \quad \text{pro } h_0 \geq \dfrac{h}{2} \end{cases} \qquad V = \begin{cases} 0 & \text{je - li } h_0 \leq \dfrac{1}{2} \cdot h \\ \dfrac{\pi \cdot d^2}{4} h_0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi \cdot d^2}{4} h & \text{je - li } h_0 \geq \dfrac{1}{2} \cdot h \end{cases}$$

V tomto případě $h_0 = 0.667$ m a $\dfrac{h}{2} = 0.05$ m, tj. $h_0 > \dfrac{h}{2}$, proto má-li se hladina dotknout dna, bude $H = h$, kapalina tedy vyteče a vyteče objem $V = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h_0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$.

Otáčky n, při kterých se má hladina dotknout dna, se vypočtou z výšky paraboloidu:

$$H = \frac{\left(\dfrac{d}{2} \cdot \omega\right)^2}{2g} = \frac{(d \cdot 2\pi n)^2}{8g} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{H \cdot 8g}{(2\pi)^2 d^2}}.$$

Tlak v bodě A na poloměru r_A: $p_A = \rho g h_A = \rho g \dfrac{(2\pi \cdot n \cdot r_A \cdot 2)^2}{8g}$.

Shrnutí kapitoly

Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený, pohyb rovnoměrně otáčivý, hydrostatická rovnováha, hladinová plocha, rotační paraboloid.

Kontrolní otázka

Jaká hladinová plocha se vytvoří při přímočarém rovnoměrně zrychleném pohybu nádoby s kapalinou?

Jak se změní rozložení hydrostatického tlaku u dna válcové nádoby, která byla v klidu a začala se otáčet kolem svislé osy?

Napište vztah pro výpočet objemu rotačního paraboloidu.

Napište vtah pro výšku rotačního paraboloidu při rotaci válcové nádoby s kapalinou kolem svislé osy.

Jaké je rozložení hydrostatické ho tlaku v kapalině u odstředivek s vodorovnou osou rotace?

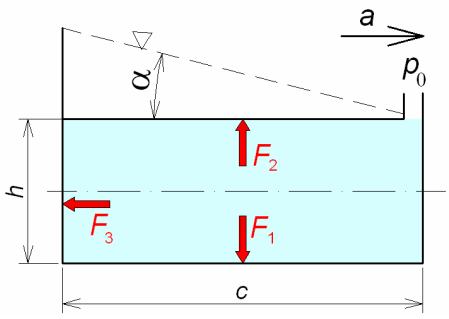
Úkol k řešení

Příklad 4.1

Nádrž ve tvaru hranolu s malým zavzdušňovacím otvorem ve víku u přední hrany se na podvozku pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a. Nádrž byla za klidu zcela zaplněna kapalinou o hustotě ρ. Stanovte za pohybu tlakovou sílu F_1 působící na dno nádrže, sílu F_2 na víko a sílu F_3 na zadní stěnu nádrže.

Zadáno:

a =	4.905	ms^{-2}
b =	0.5	m
c =	1	m
h =	0.5	m
ρ =	720	kg.m^{-3}

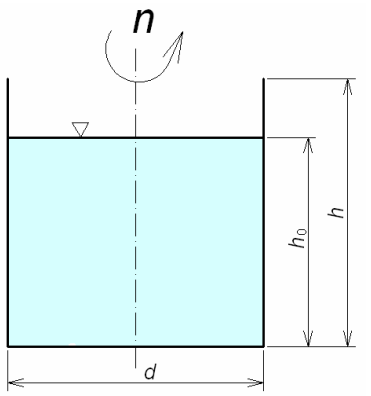


Vypočtěte:			Výsledky:
F_1 = ?		N	2 648.70
F_2 = ?		N	882.90
F_3 = ?		N	1 324.35

Příklad 4.2

Válcová nádoba o průměru d a výšce h je zaplněna kapalinou do výšky h_0 ode dna nádoby. Určete maximální otáčky n, při kterých kapalina nevyteče z nádoby. Jaká bude výška paraboloidu H?

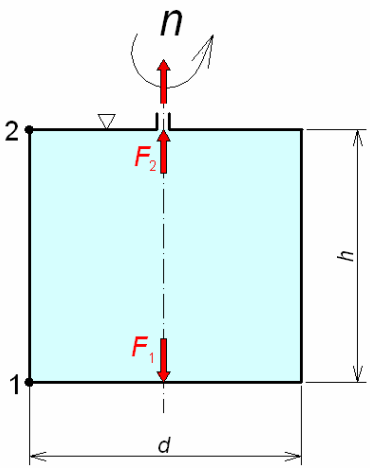
Zadáno:		
h_0 =	6.667 cm	
h =	10 cm	
d =	4 cm	
Vypočtěte:		Výsledky:
H = ?	m	0.066
n = ?	s^{-1}	9.106



Příklad 4.3

Nádoba je až po otvor naplněna vodou. Určete výšku rotačního paraboloidu hladinové plochy H, vypočítejte tlakovou sílu F_1 na dno a F_2 na víko nádoby, tlak p_1 a p_2 v místech 1 a 2 při rotaci nádoby otáčkami n. Nakreslete hladinovou plochu atmosférického tlaku při rotaci. Otvor ve víku je velmi malý. Vypočítejte úhlovou rychlost ω.

Zadáno:		
h =	0.3 m	
d =	0.2 m	
n =	2 $ot.s^{-1}$	
ρ =	1000 $kg.m^{-3}$	
Vypočtěte:		Výsledky:
ω = ?	s^{-1}	12.57
H = ?	m	0.08
F_1 = ?	N	104.87
F_2 = ?	N	12.41
p_1 = ?	Pa	3 733.00
p_2 = ?	Pa	790.00



5. Úvod do proudění tekutin

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat základní pojmy proudění tekutin • rozlišit jednotlivé typy proudění dle různých hledisek • popsat rozdíly mezi laminárním a turbulentním prouděním	

Proudění znamená pohyb tekutin. Prouděním kapalin se zabývá **Hydrodynamika**. Proudění reálných kapalin je složitý proces, který je ovlivňován množstvím faktorů. Při zkoumání tohoto pohybu se tedy záměrně zavádí určitá idealizace. Nejznámějším, a pro zkoumání nejjednodušším příkladem, je pohyb tzv. ideální (nevazké) kapaliny. Aplikovaná hydrodynamika přihlíží více na skutečné poměry, opírá se o výsledky experimentálních prací a využívá teoretické poznatky a je nazývána též hydraulikou.

Aerodynamika pak zkoumá silové působení na tělesa, která jsou obtékána proudem vzduchu. Aerodynamika má největší význam v letectví, automobilismu a architektuře.

5.1. Základní pojmy

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

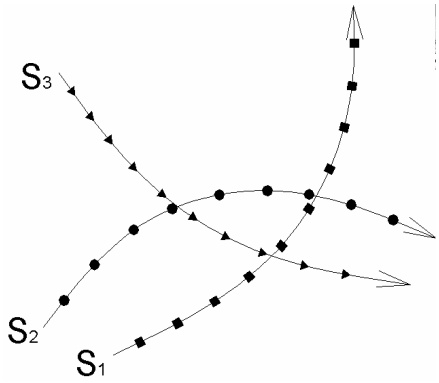
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat základní pojmy proudění tekutin

Výklad

Proudění se vyšetřuje v prostoru, rovině nebo po křivce buď sledováním pohybu určité částice tekutiny jako hmotného bodu, nebo se sleduje celý proud v určitém časovém okamžiku.

Dráha neboli **trajektorie** je obecně čarou, kterou probíhá částice tekutiny. Za ustáleného proudění se dráhy částic nemění s časem, zatím co u neustáleného proudění mohou být v každém časovém okamžiku odlišné viz obr. 5.1

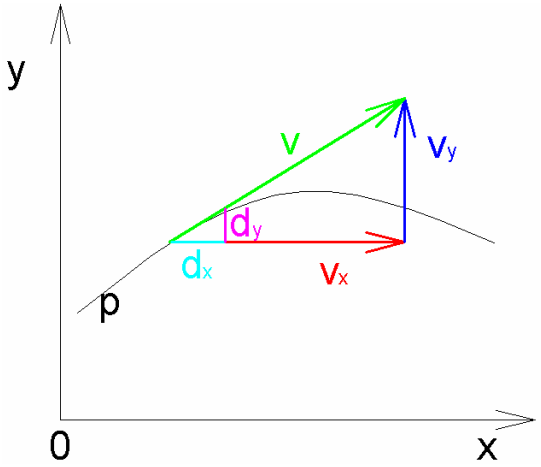


obr. 5.1 Dráha částice při neustáleném proudění

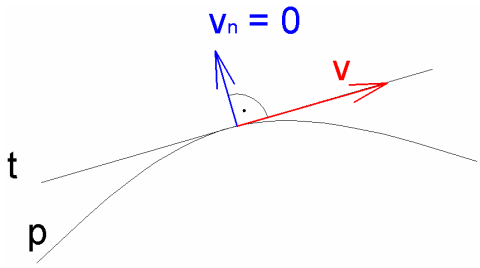
Proudnice *p* (viz -obr. 5.2) jsou obálkou vektorů rychlostí a jejich tečny udávají směr vektoru rychlosti. U neustáleného prudění vytvářejí proudnice různé částice a nejsou totožné s drahami částic. U ustáleného proudění se nemění rychlosti s časem, a proto mají proudnice stále stejný tvar a jsou totožné s drahami částic. Matematické vyšetření proudnice je možné řešením diferenciální rovnice (5.1.1)

$$dx : dy : dz = v_x : v_y : v_z \tag{5.1.1}$$

která vyplývá z podobnosti trojúhelníků složek rychlosti a elementárních drah ve směru příslušných os viz obr. 5.3



obr. 5.2 Proudnice

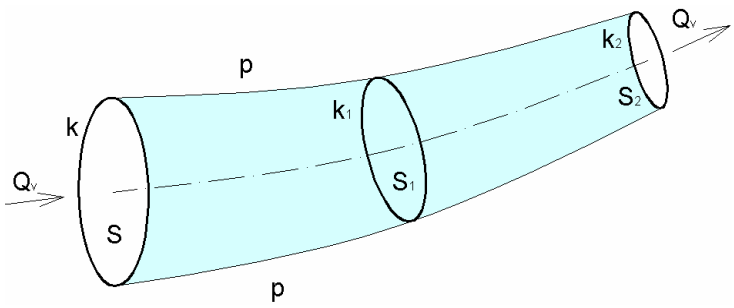


obr. 5.3 Proudnice a složky rychlosti

Proudová trubice je tvořena svazkem proudnic, které procházejí zvolenou uzavřenou křivkou *k*. Plášť proudové trubice má stejné vlastnosti jako proudnice viz obr. 5.4. Protože směr rychlosti je dán tečnami k proudnicím, je v každém bodě pláště proudové trubice normálová složka rychlosti nulová $v_n = 0$. Nemůže tedy žádná částice projít stěnou proudové trubice.

Proudová trubice rozděluje prostorové proudové pole na dvě části. Jednu tvoří vnitřek proudové trubice. Částice tekutiny nemohou přetékat z jedné části proudového pole do

druhého, a proto platí, že všechny částice protékající průřezem S proudové trubice, musí protékat libovolnými průřezy S_1, S_2 téže proudové trubice. Jestliže průřez proudové trubice $S \to 0$, dostane se proudové vlákno. Proudová trubice představuje pomyslné potrubí.



obr. 5.4 Proudová trubice

5.2. Rozdělení proudění

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

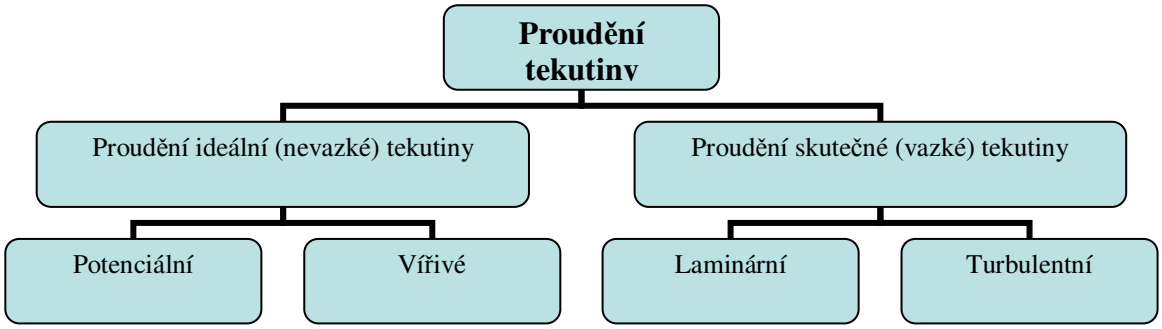
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat základní typy proudění podle fyzikálních a kinematických hledisek

Výklad

Proudění kapalin je možno rozdělit podle několika hledisek:

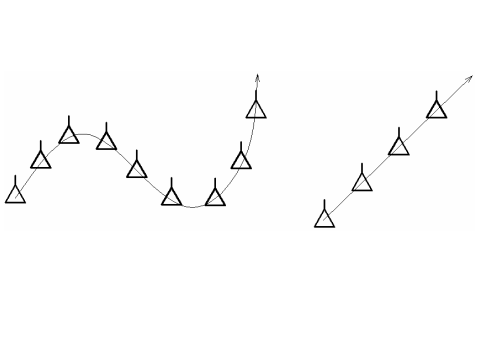
5.2.1. Dělení podle fyzikálních vlastností tekutiny



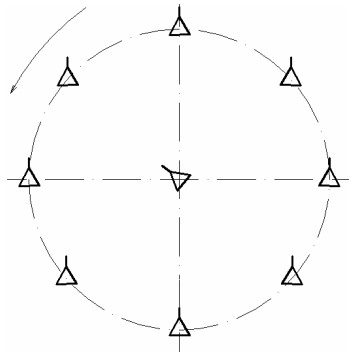
Proudění ideální (dokonalé) tekutiny

1) Potenciální proudění (nevířivé)

Částice tekutiny se pohybují přímočaře nebo křivočaře po dráhách tak, že vůči pozorovateli se neotáčejí kolem vlastní osy viz obr. 5.5. Natočení částice na křivé dráze je kompenzováno stejně velkým natočeném částice kolem vlastní osy, ale v opačném smyslu. Mezi potenciální proudění patří rovněž potenciální vír, u něhož částice krouží kolem vírového vlákna potenciálně s výjimkou částice, která tvoří vlákno viz obr. 5.6.



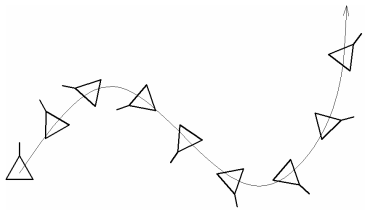
obr. 5.5 Potenciální proudění



obr. 5.6 Potenciální vír

2) Vířivé proudění

Částice tekutiny se vůči pozorovateli natáčejí kolem vlastních os viz obr. 5.7

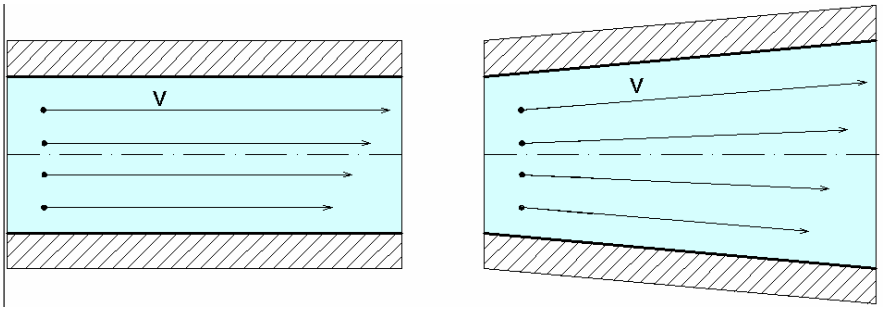


obr. 5.7 Vířivé proudění

Proudění skutečné (vazké) tekutiny

1) Laminární proudění

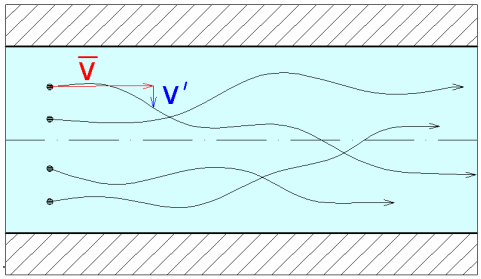
Částice tekutiny se pohybují v tenkých vrstvách, aniž se přemísťují po průřezu viz obr. 5.8.



obr. 5.8 Laminární proudění

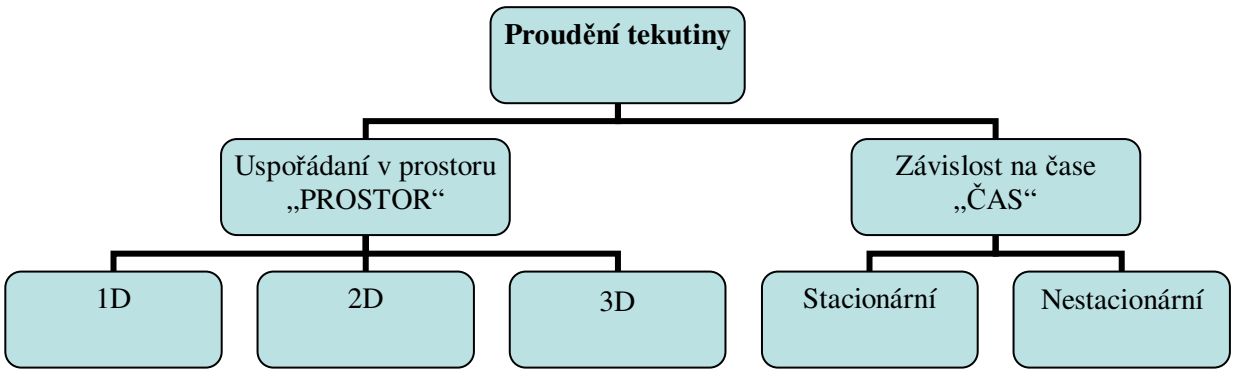
2) Turbulentní proudění

Částice tekutiny mají kromě podélné rychlosti také turbulentní (fluktuační) rychlost, jíž se přemísťují po průřezu viz obr. 5.9.



obr. 5.9 Turbulentní proudění

5.2.2. Dělení podle kinematických hledisek



Podle uspořádání v prostoru

a) Proudění třírozměrné neboli prostorové (3D) - veličiny, např. rychlost, závisí na poloze v prostoru $v = v(x, y, z)$

b) Proudění dvourozměrné neboli rovinné (2D) - rychlost závisí na poloze v rovině $v = v(x, y)$

c) Proudění jednorozměrné (1D) - rychlost závisí na poloze na křivce $v = v(s)$

Podle závislosti na čase

a) Proudění ustálené (stacionární), které je nezávislé na čase $v \neq v(t)\,;\ \frac{\partial}{\partial t} = 0$

b) Proudění neustálené (nestacionární), u něhož veličiny jsou závislé na čase – $v = v(x, y, z, t)\,;\ v = v(s, t)\,;\ v = v(t)\,.$

5.3. Druhy proudění skutečných tekutin

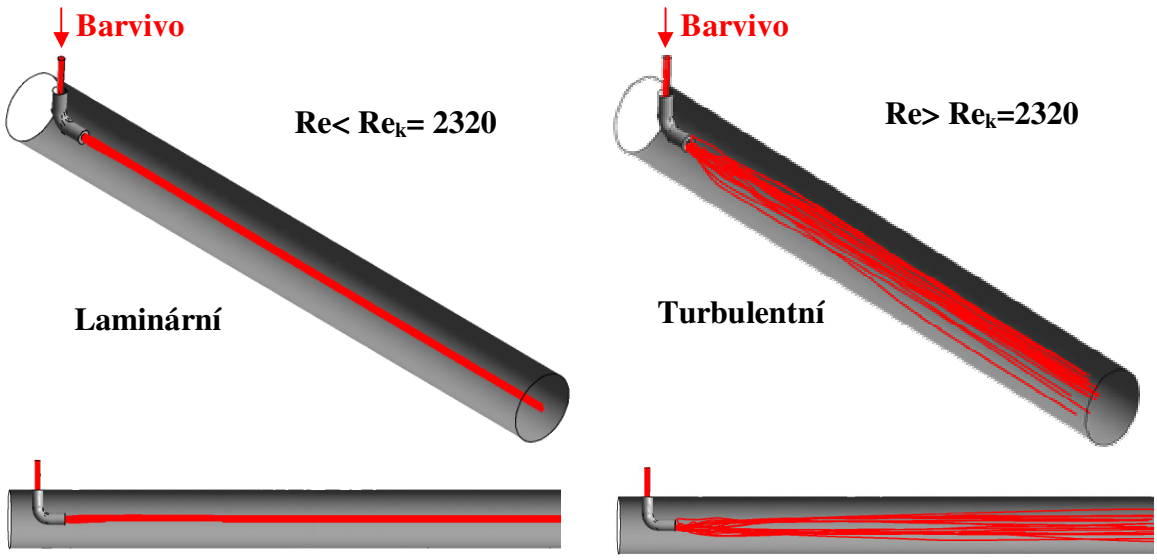
Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat rozdíly mezi turbulentním a laminárním prouděním

Výklad

Jak již bylo uvedeno dříve, skutečná tekutina může proudit buď laminárně nebo turbulentně. Existenci obou proudění názorně ukazuje Reynoldsův pokus, viz obr. 5.10. Do proudící tekutiny v kruhovém potrubí se přivádí tenkou trubičkou obarvená tekutina. Při malých rychlostech proudu zůstane barevné vlákno neporušeno, z čehož vyplývá, že pohyb se děje ve vrstvách a částice tekutiny se nepromíchávají.



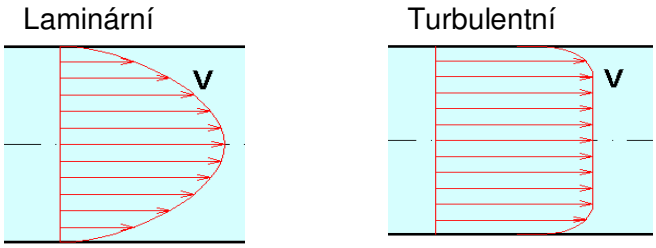
obr. 5.10 Reynoldsův pokus

Zvětší-li se rychlost nad její kritickou hodnotu, dochází k intenzivnímu míšení částic následkem jejich podružných (turbulentních) pohybů ve všech směrech. Částice tekutiny neustále přecházejí z jedné vrstvy do druhé, přičemž dochází k výměně kinetické energie a jejich rychlosti po průřezu se značně vyrovnávají. Takové proudění je turbulentní. Protože při přemístění částic dochází též ke změně hybnosti, což se projevuje brzdícím účinkem, bude výsledný odpor proti pohybu větší než odpovídá smykovému napětí od vazkosti při laminárním proudění.

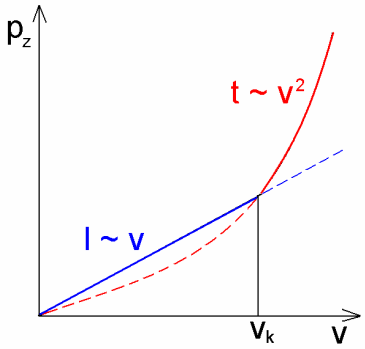
Oba druhy proudění se liší jak rychlostním profilem tak i velikostí hydraulických ztrát. U laminárního proudění v potrubí je rychlostní profil rotační paraboloid. U turbulentního proudění se rychlosti částic vyrovnávají intenzivním přemísťováním spojeným s výměnou kinetické energie. Rychlostní profil turbulentního proudu v potrubí se proto více podobá obdélníku, a to tím více, čím větší je turbulence, tj. čím větší je Re číslo – obr. 5.11.

Rychlostní profil a tlakové ztráty

U laminárního proudění je hydraulický odpor proti pohybu lineárně závislý na rychlosti, u turbulentního prudění je závislý na druhé mocnině rychlosti – obr. 5.12.



obr. 5.11 Rychlostní profil v potrubí



obr. 5.12 Závislost $p_z = f(v)$

Poměry, při níž dochází ke kvalitativním změnám rychlostního profilu a závislosti odporu, tj. při přechodu laminárního proudění v turbulentní, jsou pro určité potrubí a tekutiny dány kritickou rychlostí. Z pokusů i teorie podobnosti vyplývá, že přechod laminárního proudění v turbulentní je určeno Reynoldsovým kritickým číslem, které je definováno vztahem:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} \qquad (5.3.1)$$

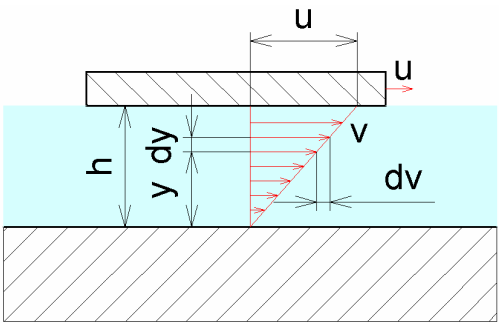
kde v je střední rychlost tekutiny, d je charakteristický rozměr (např. při proudění v potrubí jeho průměr) ν je kinematická viskozita proudící tekutiny. Pro proudění v kruhovém potrubí je kritická hodnota Reynoldsova čísla $\mathrm{Re}_{krit} = 2320$.

Newtonův zákon

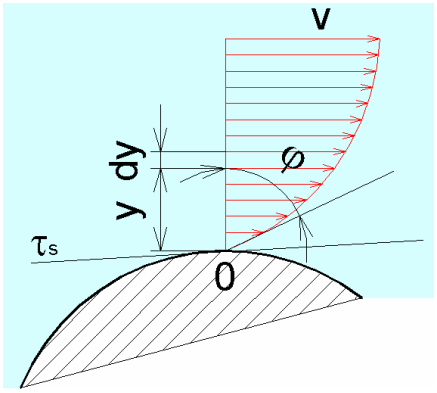
Při proudění skutečné tekutiny mezi dvěma rovinnými deskami viz obr. 5.13 z nichž jedna se pohybuje rychlostí u a druhá stojí, mají částice lpící na povrchu desek jejich rychlosti. To znamená, že na pohybující se desce má částice tekutiny rychlost u, zatímco na stojící je rychlost částice nulová. Pro ostatní částice tekutiny, které proudí v mezeře mezi deskami, jsou rychlosti rozloženy lineárně. Pohybující se částice strhává sousední částice do pohybu v důsledku vazkého tření.

Rychlost částice ve vzdálenosti y od stojící desky bude $v = u\frac{y}{h}$. Smykové napětí od vazkosti je podle Newtona vyjádřeno vztahem

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \frac{u}{h} \qquad (5.3.2)$$



obr. 5.13 Rozložení rychlosti při laminárním proudění mezi dvěmi deskami

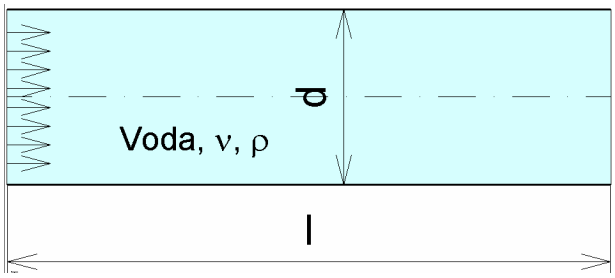


obr. 5.14 Rychlostní profil a tečné napětí

Řešený příklad

Určete kritickou rychlost v potrubí o průměru d, při níž se proudění laminární změní v turbulentní. Proudící kapalinou je voda.

Zadáno:			
d =	0.1	m	
t =	20	°C	
Vypočtěte:			Výsledky:
v_k =	?	$m.s^{-1}$	0.023



Řešení:

Kritickou rychlost vypočteme z kritické hodnoty Reynoldsova čísla Re_k= 2320.

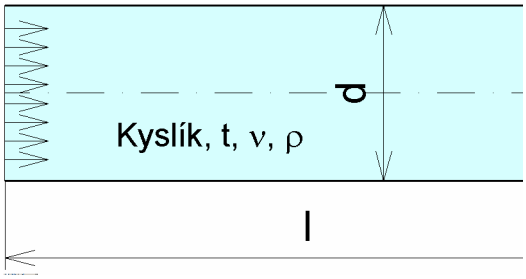
$$Re_k = \frac{v_k d}{\nu} \Rightarrow v_k = \frac{Re_k \nu}{d},$$

Řešený příklad

Kyslík proudí potrubím o světlosti d při absolutním tlaku p a teplotě t. Určete, při jaké rychlosti bude proudění ještě laminární, je-li dynamická viskozita kyslíku η. a jeho měrná

plynová konstanta r. Jaký maximální hmotnostní průtok Q_m se dopraví tímto potrubím při laminárním proudění?

Zadáno:			
d =	0.050 m		
p =	1 MPa		
t =	27 °C		
η =	2.06E-04	Pa.s	
r =	259.8	J.kg^{-1}.K^{-1}	
Vypočtěte:			**Výsledky:**
ρ =	?	kg.m^{-3}	12.82
ν =	?	m^2.s^{-1}	0.0000161
v_k =	?	m.s^{-1}	0.747
Q_m =	?	kg.s^{-1}	0.019



Řešení:

Nejprve musíme určit ze stavové rovnice hustotu kyslíku při daném tlaku a teplotě.

$$\frac{p}{\rho} = rT \Rightarrow \rho = \frac{p}{rT} = \frac{p}{r\left(t + 273{,}15\right)}$$

Dále musíme určit hodnotu kinematické viskozity

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Kritickou rychlost vypočteme z kritické hodnoty Reynoldsova čísla Re_k= 2320

$$\mathrm{Re}_k = \frac{v_k d}{\nu} \Rightarrow v_k = \frac{\mathrm{Re}_k \nu}{d}$$

Průtok vypočteme z rovnice kontinuity pro stlačitelné proudění

$$Q_m = \rho S v_k = \rho \frac{\pi d^2}{4} v_k$$

Shrnutí kapitoly

Proudnice, proudová trubice, dělení proudění podle fyzikálních vlastností tekutiny, dělení proudění podle kinematických hledisek, potenciální proudění, vířivé proudění, Reynoldsovo číslo, laminární proudění, turbulentní proudění, Newtonův zákon

Kontrolní otázka

Vysvětlete pojem proudnice.

Jaké vlastnosti má proudová trubice?

Jaký rozdíl je mezi potenciálním a vířivým prouděním?

Jaký rozdíl je mezi laminárním a turbulentním prouděním?

Jak lze klasifikovat proudění podle kinematických hledisek?

Jak je definováno Reynoldsovo číslo a jaká je jeho jednotka?

Co lze pozorovat během Reynoldsova pokusu?

Jaký rychlostní profil v kruhovém potrubí se ustaví v laminárním režimu proudění?

Jaký rychlostní profil v kruhovém potrubí se ustaví v turbulentním režimu proudění?

Jak rostou ztráty v závislosti na rychlosti u laminárního a turbulentního proudění?

Jak je definován Newtonův zákon?

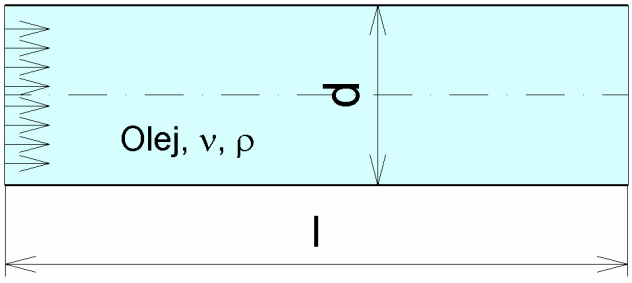
Úkol k řešení

Příklad 5.1

Kruhovým potrubím o průměru d proudí olej, jehož viskozita ν v závislosti na teplotě t je dána tabulkou. Sestrojte graf této závislosti. Pro zadaný průtok Q_v určete režim proudění oleje při teplotách t_1 a t_2. Při jaké teplotě se změní laminární proudění na turbulentní?

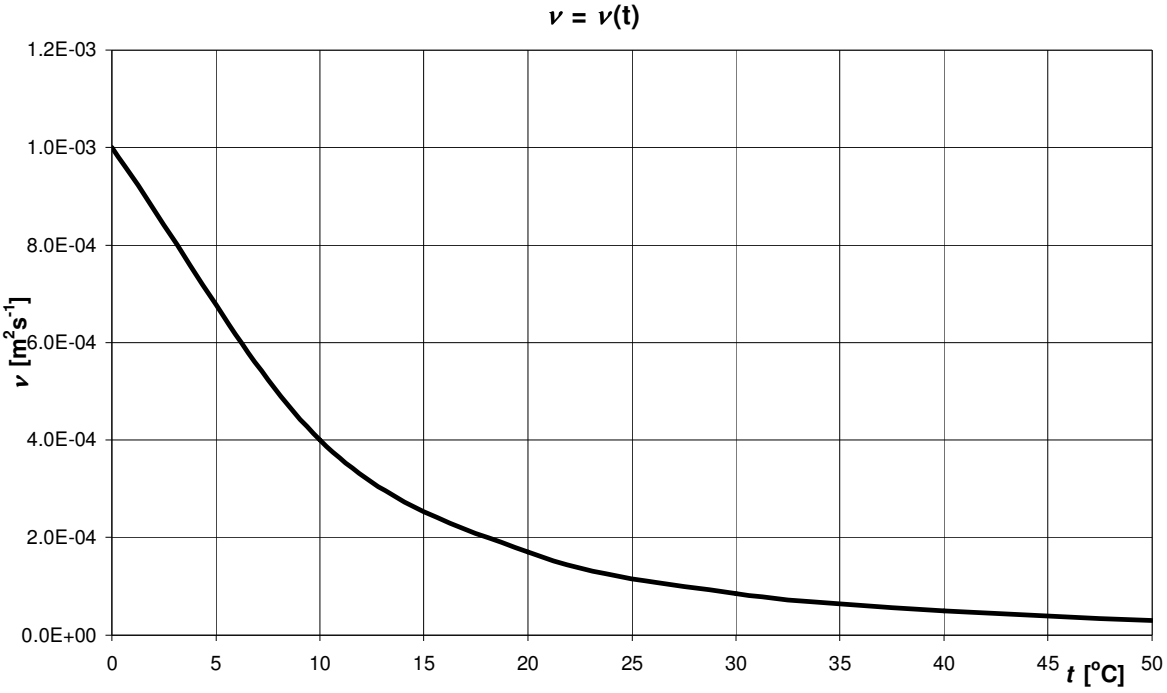
Zadáno:		
d =	0.02	m
Q_V =	0.003	m^3s^{-1}
t_1 =	10	°C
t_2 =	50	°C
$\nu = \nu(t)$		

Vypočtěte:			Výsledky:
Re_1 =	?		477.46
Re_2 =	?		6 366.18
t =	?	°C	31



Závislost kinematické viskozity na teplotě

t [°C]	0	10	20	30	40	50
ν [m^2s^{-1}]	$1*10^{-3}$	$4*10^{-4}$	$1.7*10^{-4}$	$8.5*10^{-5}$	$5*10^{-5}$	$3*10^{-4}$


ν = ν(t)
1.2E-03
1.0E-03
8.0E-04
6.0E-04
4.0E-04
2.0E-04
0.0E+00
ν [m²s⁻¹]
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
t [°C]

6. Základní rovnice pro proudění ideální tekutiny

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat a odvodit rovnici kontinuity a Eulerovu rovnici pro ideální tekutinu • odvodit Bernoulliho rovnici pro ideální tekutinu • aplikovat rovnici kontinuity a Bernoulliho rovnici v úlohách týkajících se měření rychlostí a průtoků	

6.1. Rovnice kontinuity

Čas ke studiu: **3/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat zákon zachování hmotnosti
popsat princip odvození rovnice kontinuity
vyřešit příklady s aplikací rovnice kontinuity

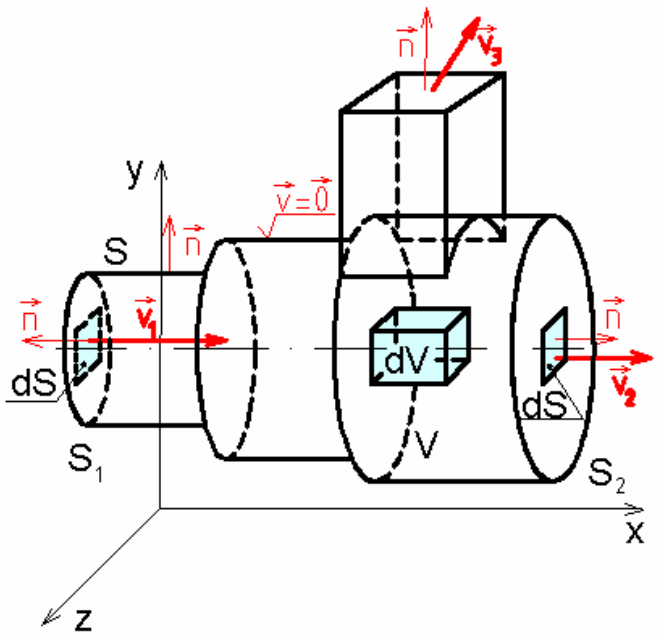
Výklad

Rovnice kontinuity, často nazývaná také rovnice spojitosti, vyjadřuje obecný fyzikální **zákon o zachování hmotnosti**. Pro elementární objem, kterým proudí tekutina, musí být hmotnost tekutiny konstantní $m = konst$, a tedy celková změna hmotnosti nulová $dm = 0$. Celkovou změnu hmotnosti lze dělit na lokální a konvektivní, kde **lokální (časová) změna** probíhá v elementárním objemu samém (tekutina se stlačuje nebo rozpíná) a **konvektivní změna** je způsobena rozdílem hmotnosti přitékající a vytékající tekutiny z elementárního objemu. Součet konvektivní a časové změny průtoku je roven nule.

Rovnici kontinuity je možné definovat také tak, že rozdíl vstupující hmotnosti do kontrolního objemu a vystupující hmotnosti z kontrolního objemu je roven hmotnosti, která se v tomto kontrolním objemu akumuluje.

6.1.1. Rovnice kontinuity pro prostorové proudění

Při odvození rovnice kontinuity pro prostorové proudění se vytkne v proudovém poli tekutiny elementární objem $dV = dx.dy.dz$, viz obr. 6.1. Tímto hranolem protéká tekutina rychlostí, která je určena vektorem o souřadnicích $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.



obr. 6.1 Elementární objem dV

Změny způsobené konvekcí

Hmotnostní průtok elementem plochy označené $\mathrm{d}S$ je dán vztahem:

$$dQ_m = \rho \vec{v}.\vec{n}dS, \tag{6.1.1}$$

kde vektor rychlosti se násobí skalárně vnějším normálovým vektorem vzhledem k ploše $\mathrm{d}S$, neboť průtok je definován ve směru kolmém k průtočné ploše $\mathrm{d}S$. Celkový průtok plochou S ohraničující objem V je určen plošným integrálem:

$$Q_m = \iint_S \rho \vec{v}.\vec{n}\,dS \tag{6.1.2}$$

Plošný integrál v předchozí rovnici se převede na objemový užitím Gaussovy Ostrogradského věty o divergenci vektoru:

$$Q_m = \iint_S \rho \vec{v}.\vec{n}\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dxdydz\,. \tag{6.1.3}$$

Časová změna

Hmotnost je také definována vztahem $m = \rho V$. Protože hustota nemusí být v celém objemu konstantní, definuje se hmotnost v elementárním objemu:

$$dm = \rho \, dV . \tag{6.1.4}$$

Potom celková hmotnost objemu je rovna

$$m = \iiint_V \rho \, dV . \tag{6.1.5}$$

Za krátký časový okamžik se tato hmotnost změní a tato změna je dána parciální derivací podle času, což reprezentuje průtok:

$$Q_m = \iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV = \iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dxdydz \tag{6.1.6}$$

Podle zákona zachování hmotnosti (resp. hmotnostního průtoku) platí, že **součet konvektivní a časové změny průtoku je roven nule**:

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} . \vec{n} \, dS = 0 \tag{6.1.7}$$

, resp.

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dxdydz + \iiint_V \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dxdydz = 0 . \tag{6.1.8}$$

Protože předchozí vztah platí pro libovolný objem V, lze zapsat rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{6.1.9}$$

Tato rovnice je **obecná rovnice kontinuity pro neustálené prostorové proudění stlačitelné tekutiny**.

Při **ustáleném proudění** se nemění veličiny v čase, a proto musí být $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ a rovnice kontinuity má diferenciální tvar:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 . \tag{6.1.10}$$

Další zjednodušení se dostane u **nestlačitelných tekutin** (ρ = konst). Rovnice kontinuity je pak vyjádřena vztahem v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{6.1.11}$$

Zavede se pojem **divergence vektoru** pro zkrácený zápis rovnice kontinuity, kdy

$$div(\rho \vec{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}, \tag{6.1.12}$$

Pak rovnici (6.1.9) lze zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0\,. \tag{6.1.13}$$

Pro ustálené proudění je zápis jednodušší:

$$div(\rho \vec{v}) = 0. \tag{6.1.14}$$

Pro nestlačitelné proudění je:

$$div\left(\vec{v}\right) = 0 \tag{6.1.15}$$

Substanciální derivace

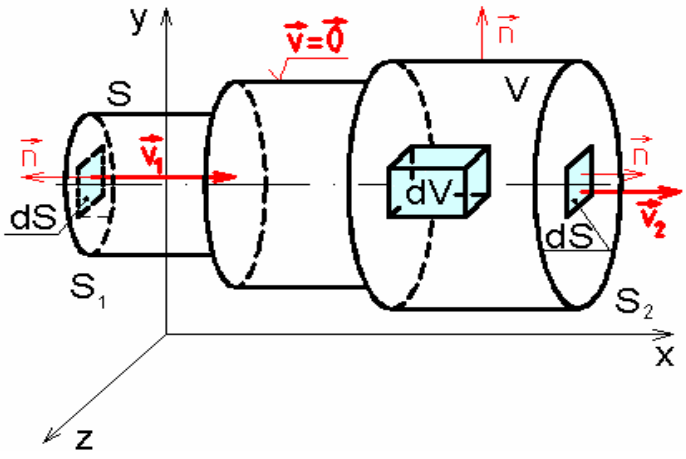
Substanciální derivace souvisí s nepohyblivým souřadným systémem a je dána pro hustotu totálním diferenciálem podle času, pokud hustota je funkcí souřadnic a času $\rho = \rho(t, x, y, z)$, jako

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0\,. \tag{6.1.16}$$

Takto vyjádřená rovnice kontinuity platí v pevném kontrolním objemu, který se vzhledem ke zvolenému pravoúhlému souřadnému systému *x, y, z* nepohybuje.

6.1.2. Rovnice kontinuity pro proudovou trubici

Uvažuje se jednorozměrné neustálené proudění stlačitelné tekutiny proudovou trubicí, jejíž průřez se mění po délce, což je běžný systém řešení potrubí v praxi (viz obr. 6.2).



obr. 6.2 Proudová trubice nekonstantního průřezu

Z definice proudové trubice vyplývá, že veškerá tekutina proudí uvnitř proudové trubice a neprotéká přes její plášť. Normálová rychlost pláštěm proudové trubice je tedy nulová ($v_n = 0$). Rozložení rychlosti po průřezu proudové trubice se uvažuje rovnoměrné. Při nerovnoměrném rozložení rychlosti po průřezu se uvažuje její střední rychlost.

Jak už bylo řečeno, ze zákona zachování hmotnosti platí vztah:

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} . \vec{n}\, dS = 0 , \tag{6.1.17}$$

který má pro ustálené proudění tvar:

$$\iint_S \rho \vec{v} . \vec{n}\, dS = 0 . \tag{6.1.18}$$

Protože rychlost na stěně proudové trubice je rovna nule, je možno uvažovat průtoky pouze přes průtočné plochy ve směru proudění l. Plošný integrál je pak možno vyčíslit jako součet průtoků jednotlivými plochami:

$$\iint_S \rho \vec{v} . \vec{n}\, dS = \rho_2 v_2 S_2 - \rho_1 v_1 S_1 = 0 , \tag{6.1.19}$$

což znamená, že **hmotnostní průtok trubicí** $Q_m = \rho v S$ **je konstantní**. Druhý výraz má znaménko minus z důvodu opačné orientace rychlosti na vstupu do proudové trubice proti normálovému vektoru vně plochy.

Pro nestlačitelné proudění je:

$$v_2 S_2 - v_1 S_1 = 0 , \tag{6.1.20}$$

tedy **objemový průtok** $Q_V = vS$ **je konstantní**.

Řešený příklad

Dvě potrubí o průřezech S_1 a S_2, kterými protéká objemový průtok Q_{v1} a Q_{v2}, se spojují v jedno potrubí o průřezu S_0. Určete průřezy S_0 a S_2, je-li zadáno S_1 a střední rychlost ve všech úsecích je stejná. Vypočítejte celkový hmotnostní průtok Q_m.

Zadáno:

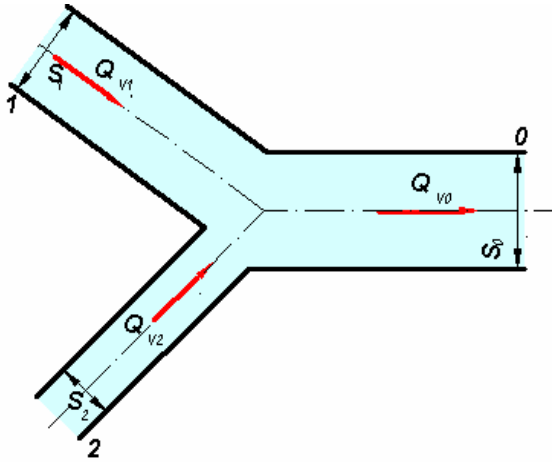
$Q_{v1} =$ 5 $m^3\ min^{-1}$

$Q_{v2} =$ 3 $m^3\ min^{-1}$

$S_1 =$ 0.04 m^2

$\rho =$ 890 $kg.m^{-3}$

Vypočtěte:		Výsledky:
$v = ?$	$m.s^{-1}$	2.083
$S_0 = ?$	m^2	0.064
$S_2 = ?$	m^2	0.024
$Q_m = ?$	$kg.s^{-1}$	118.667



Řešení:

$$Q_{v0} = Q_{v1} + Q_{v2}, \quad v_1 = \frac{Q_{v1}}{S_1}, \quad v_1 = v_2 = v_0$$

$$S_2 = \frac{Q_{v2}}{v_2}, \quad S_0 = \frac{Q_{v0}}{v_0},$$

$$Q_m = \rho S_0 v_0 = \rho(Q_{v1} + Q_{v2})v_0$$

6.2. Eulerova rovnice pro proudění ideální tekutiny

Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat Eulerovu rovnici jako rovnováhu sil, tj. zákon zachování hybnosti
popsat princip odvození Eulerovy rovnice
odvodit Eulerovu rovnici pro proudovou trubici

Výklad

6.2.1. Eulerova rovnice pro proudění ideální tekutiny v prostoru

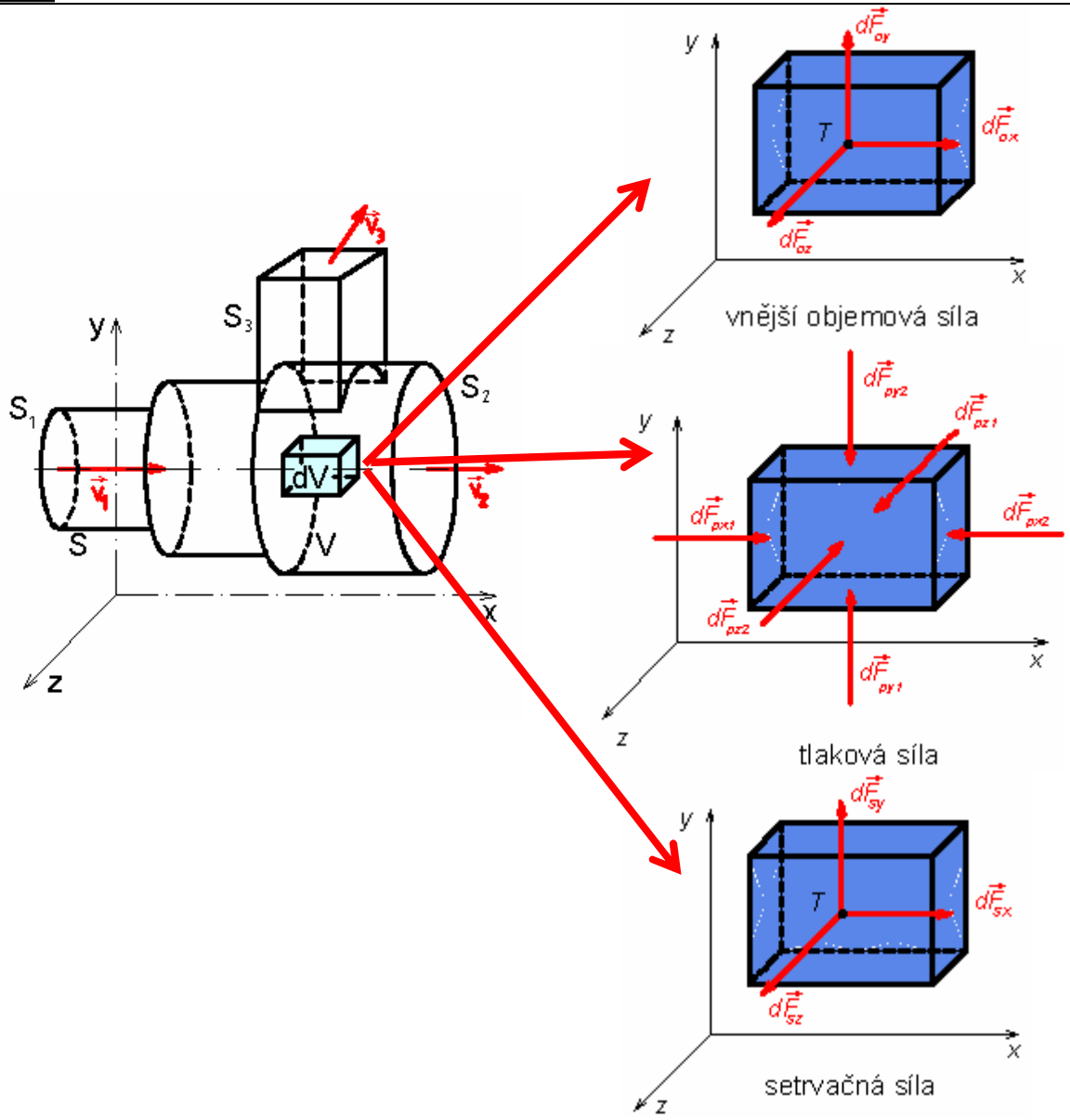
Eulerova rovnice pro proudění ideální tekutiny vyjadřuje rovnováhu sil hmotnostních (objemových), které působí na tekutinu z vnějšku, tlakových (působících v tekutině) a setrvačných od vlastního pohybu částic dokonalé tekutiny.

Pozn.: Ve skutečné (vazké) tekutině vznikají při proudění vedle normálových napětí, tj. tlaků, i tečná napětí, jejichž důsledkem jsou síly třecí, které je nutno do podmínky rovnováhy sil rovněž zahrnout.

V proudu dokonalé tekutiny zvolíme elementární objem dV jako v předešlém odvození. Na tento objem tekutiny působí vnější objemová síla $\vec{F}_o = \left(F_{ox}, F_{oy}, F_{oz}\right)$ (např. gravitační nebo odstředivá síla) a tlaková síla $\vec{F}_p = \left(F_{px}, F_{py}, F_{pz}\right)$. Výslednice těchto sil se rovná setrvačné síle $\vec{F}_s = \left(F_{sx}, F_{sy}, F_{sz}\right)$, viz obr. 6.3.

Výchozí podmínka rovnováhy sil je tedy vyjádřena vztahem

$$\vec{F}_o + \vec{F}_p = \vec{F}_s \qquad (6.2.1)$$



obr. 6.3 Působení vnějších objemových sil, setrvačných sil a plošných tlakových sil na element objemu dV

V kapitole 2 byl odvozen pro síly hmotnostní a tlakové diferenciál těchto sil:

$$d\vec{F}_o = \vec{a}\,dm = \rho\,\vec{a}\,dV \text{ a } d\vec{F}_p = p\,\vec{n}\,dS \tag{6.2.2}$$

kde zrychlení hmotnostní síly je vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Celková síla je pak dána trojným integrálem pro hmotnostní sílu $\vec{F}_o = \iiint_V \vec{a}\,\rho\,dV$ a plošným integrálem pro tlakovou sílu $\vec{F}_p = \iint_S -p\,\vec{n}\,dS$.

Diferenciál setrvačné síly pohybující se částice tekutiny je dán zrychlením $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ a platí

$$d\vec{F}_s = \frac{D\vec{v}}{Dt}dm = \frac{D\vec{v}}{Dt}\rho\,dV \tag{6.2.3}$$

Celková setrvačná síla je opět definována objemovým integrálem $\vec{F}_s = \iiint_V \frac{D\vec{v}}{Dt}\rho\,dV$.

Eulerova rovnice pro proudění ideální tekutiny v integrálním tvaru je definována součtem hmotnostních, tlakových a setrvačných sil:

$$\iiint_V \frac{D\vec{v}}{Dt}\rho\,dV = \iiint_V \vec{a}\,\rho\,dV - \iint_S p\,\vec{n}\,dS \tag{6.2.4}$$

Plošný integrál je možno dle Gaussovy Ostrogradského věty nahradit objemovým integrálem:

$$\iiint_V \frac{D\vec{v}}{Dt}\rho\,dV = \iiint_V \vec{a}\,\rho\,dV - \iiint_V \mathrm{grad}p\,dV, \tag{6.2.5}$$

kde **gradient** je vektor derivací tlaku podle x, y, z $\mathrm{grad}p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$. Vztah platí pro libovolný objem tekutiny, bude tedy platit i pro výraz pod integrálem:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{a} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \tag{6.2.6}$$

což je **rovnováha sil hmotnostních, setrvačných a tlakových definovaná pro jednotku hmotnosti,** tj. pro 1 kg.

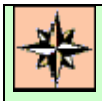
Další úpravou levé strany této rovnice (viz Doplňující text) dostaneme rovnici ve tvaru:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.grad\right)\vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{\rho}grad\,p \tag{6.2.7}$$

Tuto pohybovou rovnici dokonalých tekutin odvodil poprvé Leonard Euler v r. 1755.

V Eulerových rovnicích rozepsaných do směru os x, y, z je celkem pět neznámých veličin, a to souřadnice rychlosti v_x, v_y, v_z, hustota ρ a tlak p. K určení pěti neznámých je třeba pěti rovnic, z nichž tři jsou Eulerovy rovnice a dalšími jsou rovnice kontinuity a stavová rovnice $\rho = \rho(p)$, popřípadě u nestlačitelné tekutiny je $\rho = konst$. Všech pět uvedených veličin závisí na poloze proudící částečky tekutiny a na čase. Pro řešení soustavy rovnic je třeba zadat okrajové a počáteční podmínky.

Eulerova rovnice pro proudění ideální tekutiny je nelineární parciální diferenciální rovnice, její integrace je obtížná, v současné době se řeší numericky. Aplikací této rovnice je obtékání leteckých profilů, kdy se předpokládá neviskózní proudění.
Eulerova rovnice je východiskem k odvození Bernoulliho rovnice, jejíž význam v mechanice tekutin je základní.



Doplňující (nepovinný) text

Substanciální derivaci $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ je možné rozepsat pro souřadnice vektoru $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Tedy pro x-vou souřadnici je zrychlení částice tekutiny $\frac{Dv_x}{Dt}$ za předpokladu, že rychlost v_x je obecně funkcí polohy částice a času, tedy $v_x = v_x(t, x, y, z)$ upraveno takto:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z$$

Podobně pro další dvě souřadnice rychlosti. Členy $\frac{\partial v_x}{\partial t}$, $\frac{\partial v_y}{\partial t}$ a $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ představují lokální (místní) zrychlení. Celkově je možno zapsat Eulerovu rovnici pro proudění ideální tekutiny ve tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \qquad (6.2.8)$$

Poslední tři členy na levé straně představují **konvektivní zrychlení**, které lze vyjádřit vektorově pomocí gradientu jako skalární součin rychlosti $\vec{v}$ a jejího gradientu (gradient je obecně definován jako derivace skalární funkce, tedy vektor)

$$\vec{v}.grad = (v_x, v_y, v_z).\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Tento vztah aplikovaný na skalár (např. souřadnici rychlosti nebo tlak) je

$$\vec{v}.gradv_x = (v_x, v_y, v_z).\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Tentýž vztah aplikovaný na vektor je

$$\left(\vec{v}.grad\right)\vec{v} = \left(\vec{v}.grad\right)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

6.2.2. Eulerova rovnice pro proudovou trubici

Eulerovu rovnici lze zjednodušit tak, že se předpokládá jednorozměrné proudění, tj. rychlost a tlak se mění v závislosti na čase a dráze:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, l) \quad p = p(t, l) \tag{6.2.9}$$

Pak se soustava Eulerových rovnic zjednoduší na jednu rovnici následovně (přitom není nutné psát index x a tuto souřadnici lze nahradit délkou potrubí l):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial l} = a - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} \tag{6.2.10}$$

6.3. Bernoulliho rovnice pro ideální tekutinu

Čas ke studiu: **1 hodina**

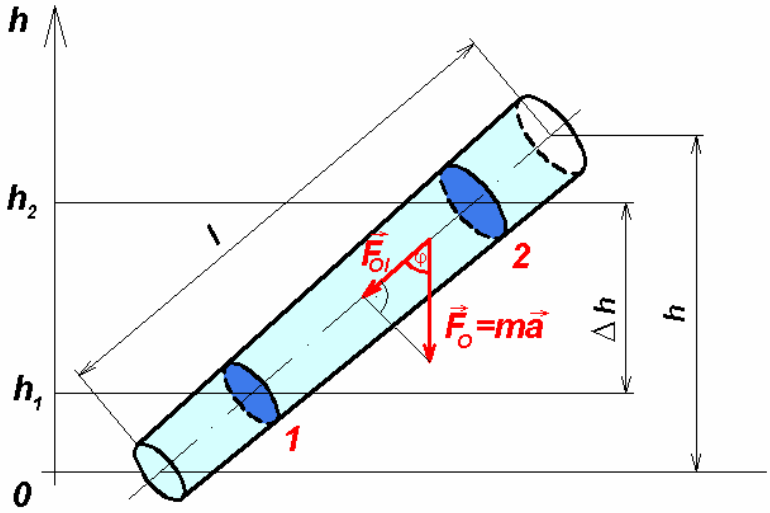
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

popsat princip odvození Bernoulliho rovnici a fyzikálně vysvětlit její členy
popsat pravidla pro použití Bernoulliho rovnice
řešit příklady proudění v potrubí

Výklad

Bernoulliho rovnice pro ideální tekutinu se odvozuje z Eulerovy rovnice (podmínky rovnováhy sil při proudění ideální tekutiny), přitom se využije zjednodušení na

jednorozměrné proudění, což představuje proudění potrubím. Jednorozměrné proudění nemusí být nutně rovnoběžné s jednou z os souřadného systému, ale je obecně odkloněno od osy x o úhel φ. Zrychlení vnější objemové síly se transformuje do směru rovnoběžného s osou potrubí l, tedy $a\cos\varphi$.



obr. 6.4 Elementární práce při proudění dokonalé tekutiny

Eulerova rovnice pro proudovou trubici má tvar:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial l}=a\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} \qquad (6.3.1)$$

resp.

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}=a\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} \qquad (6.3.2)$$

Každý člen rovnice má rozměr [ms^{-2}], tedy rozměr zrychlení, tj. vyjadřuje sílu, působící na 1 kg hmotnosti. Při proudění ideální tekutiny působí na její částečky síly, které při posunutí po elementární dráze dl konají elementární práci. Pokud se rovnice (6.3.2) vynásobí dráhou dl, obdrží se součin „zrychlení x dráha“, což vyjadřuje elementární práci, resp. měrnou energii označenou Y [Jkg^{-1}=m^{2}s^{-2}]. Rovnice bude mít tvar:

$$\frac{\partial v}{\partial t}dl+\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}dl=a\cos\varphi dl-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl \qquad (6.3.3)$$

Jednotlivé členy výše uvedené rovnice lze popsat fyzikálně takto:

- $\frac{\partial v}{\partial t}dl$ - zrychlující měrná energie v případě neustáleného proudění
- $\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}dl$ - kinetická měrná energie

- $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl$ - tlaková měrná energie
- $a\cos\varphi dl = dUdl$ - potenciální měrná energie

Tedy rovnice má tvar:

$$\frac{\partial v}{\partial t}dl + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}dl = dUdl - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl \qquad (6.3.4)$$

Působí-li na tekutinu jen tíhové zrychlení, je vnější zrychlení $a = -g$. Znaménko záporné je uvedeno proto, že kladný smysl zvolené osy je opačný než smysl působení tíhového zrychlení. Příslušný potenciál silového pole (pro tíhové zrychlení) $dU = -g\cos\varphi dl$. Navíc platí $dh = \cos\varphi dl$, tedy $dU = -gdh$

$$\frac{\partial v}{\partial t}dl + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}dl = -gdh - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl$$

Součtem (integrací) všech prací po dráze *l* dostaneme vztah pro celkovou mechanickou energii tekutiny :

$$\int\frac{\partial v}{\partial t}dl + \int\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}dl + \int\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl + \int gdh = 0 \qquad (6.3.5)$$

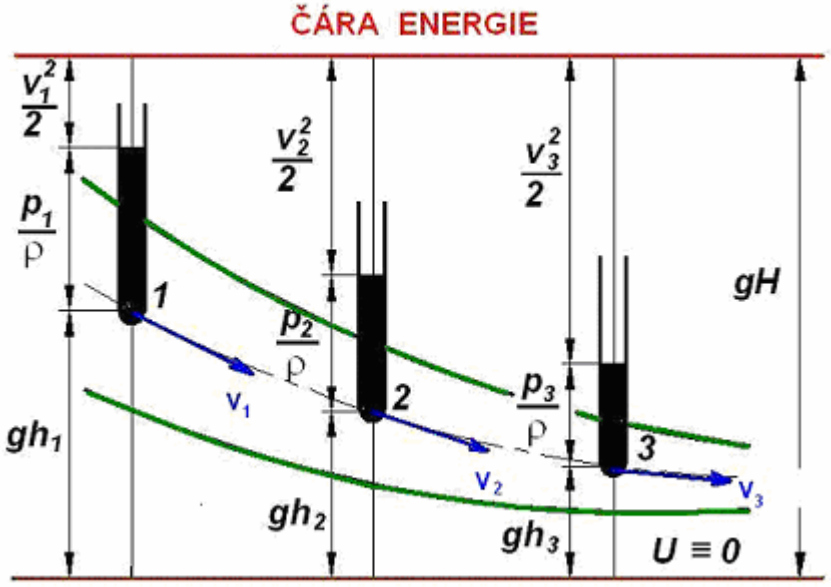
Pro nestlačitelnou tekutinu za působení tíhového zrychlení a pro ustálené proudění se předchozí rovnice zjednoduší

$$\frac{1}{2}\int\frac{\partial v^2}{\partial l}dl + \frac{1}{\rho}\int\frac{\partial p}{\partial l}dl + g\int dh = 0 \qquad (6.3.6)$$

Bernoulliho rovnice je pak vyjádřena vztahem

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = konst \qquad (6.3.7)$$

Tato rovnice představuje zákon zachování energie hmotnostní jednotky, přitom $\frac{v^2}{2}$ je kinetická energie, $\frac{p}{\rho}$ odpovídá tlakové energii, gh je polohová energie. Součet kinetické, tlakové, a polohové energie přestavuje celkovou mechanickou energii hmotnostní jednotky, nazývanou měrná energie $e = \frac{E}{m}$ [J.kg^{-1}]. V každém průřezu téže proudové trubice je součet kinetické, tlakové a potenciální energie konstantní, jak je znázorněno na obrázku 6.5.



obr. 6.5 Měrná energie při proudění proudovou trubicí

Jestliže se rovnice dělí tíhovým zrychlením g, dostane se

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = konst \text{ [m].} \tag{6.3.8}$$

Tuto rovnici uvedl poprvé v roce 1738 Daniel Bernoulli. Každý člen rovnice představuje energii vztaženou na tíhovou jednotku tekutiny a formálně má rozměr výšky. První člen je znám jako rychlostní výška, druhý člen je tlaková výška a třetí určuje polohovou (potenciální) výšku.

Vynásobí-li se rovnice součinem ρg, dostane se

$$\rho\frac{v^2}{2} + p + \rho gh = konst \quad \text{[Pa]} \tag{6.3.9}$$

Každý člen rovnice přestavuje tlak (kinetický, statický, polohový).

Součet všech energií, tj. kinetické, tlakové a polohové je celková mechanická energie tekutiny, která podle Bernoulliho rovnice je v každém průřezu jedné a téže trubice konstantní.

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2 = \ldots = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = gH = Y = konst \tag{6.3.10}$$

Bernoulliho rovnice platí pro proudovou trubici, v jejíchž průřezech je rychlost rovnoměrně rozložena. Při nerovnoměrném rozložení rychlosti je nutno volit proudovou trubici velmi malých průřezů, aby rozdíl rychlostí po průřezu proudové trubice byl zanedbatelný. Jinak je nutno přihlížet k nerovnoměrnému průběhu rychlosti, což vyjadřuje **střední rychlost** podle kinetické energie.

Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu psaná pro dva průřezy jedné a téže proudové trubice obsahuje šest veličin: p_1, v_1, h_1, p_2, v_2, h_2. Hustota tekutiny ρ se považuje za známou. Aby se pomocí Bernoulliho rovnice určily parametry proudění, musí být počet neznámých a počet rovnic stejný. Při řešení nejjednoduššího případu lze tedy z Bernoulliho rovnice vypočíst jednu neznámou. Ostatní veličiny musí být známé.

6.3.1. Zásady pro praktické použití Bernoulliho rovnice pro dokonalou tekutinu

- V proudové trubici se zvolí dva průřezy. V jednom průřezu je nutno znát všechny veličiny (p_1, v_1, h_1). Druhý průřez se volí v proudové trubici v místě, kde je hledaná veličina, přičemž ostatní dvě veličiny jsou známé.
- Rozhodne se o způsobu dosazování tlaků, a to jejich absolutní nebo relativní hodnoty, avšak do jedné a téže rovnice se dosazují oba tlaky shodně.
- Zvolí se libovolná vodorovná rovina, která se považuje za ekvipotenciální plochu nulového potenciálu. Zpravidla se volí tak, aby procházela jedním z vybraných průřezů, a to nejčastěji níže položeným. Polohové výšky se určí ke zvolené vodorovné rovině.

Nyní se napíše Bernoulliho rovnice a vypočte neznámá veličina.

6.3.2. Bernoulliho rovnice pro plyny

Vychází se z rovnice (6.3.4)

$$\frac{\partial v}{\partial t}dl + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}dl = dUdl - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl$$

Integrál po dráze od průřezu 1 k průřezu 2 výše uvedené rovnice je práce nebo měrná energie:

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}dl + \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial l}dl + \int_1^2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}dl - \int_1^2 dUdl = 0 \qquad (6.3.11)$$

Vyčíslí se určité integrály pro průřez 1-2 proudové trubice je

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}dl + \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) + (P_2 - P_1) - (U_2 - U_1) = 0 \qquad (6.3.12)$$

Rovnice se opět zjednoduší pro stálené proudění, protože $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$. Integrál Eulerovy rovnice pro proudění ideální tekutiny po dráze má v tomto případě tvar

$$\frac{v^2}{2} + P - U = konst \tag{6.3.13}$$

což je základní **Bernoulliho rovnice** pro dokonalou tekutinu. Veličina P je tlaková funkce, jež se určí integrací výrazu $\int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} dl$, když je známa stavová změna hustoty $\rho = \rho(p)$.

Pro plyny, které mají v porovnání s kapalinami malou hustotu, převládá tlaková a kinetická energie, polohová energie se dá vůči nim zanedbat. U plynů je nutno určit tlakovou energii s přihlédnutím ke **stlačitelnosti** tekutiny. Pro rychlé děje je nejbližší adiabatická změna, při níž nedochází k výměně tepla tekutiny s okolím. Stavová rovnice adiabatické změny

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \text{konst} = C; \quad p = C\rho^{\kappa} \tag{6.3.14}$$

se diferencuje

$$dp = \kappa . C\rho^{\kappa-1} d\rho$$

a dosadí do tlakové funkce

$$P = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \kappa C \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{\kappa-2} d\rho = \frac{\kappa}{\kappa - 1} C\rho^{\kappa-1}\Big|_1^2 = \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p}{\rho}\Big|_1^2$$

Bernoulliho rovnice pro adiabatické proudění dokonalého plynu pak je

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2} = konst. \tag{6.3.15}$$

Pomocí stavové rovnice $\frac{p}{\rho} = rT$ se Bernoulliho rovnice na tvar

— + —— = — + —— = . (6.3.16)

Zavede-li se dále rychlost zvuku

$$a^2 = \kappa r T$$

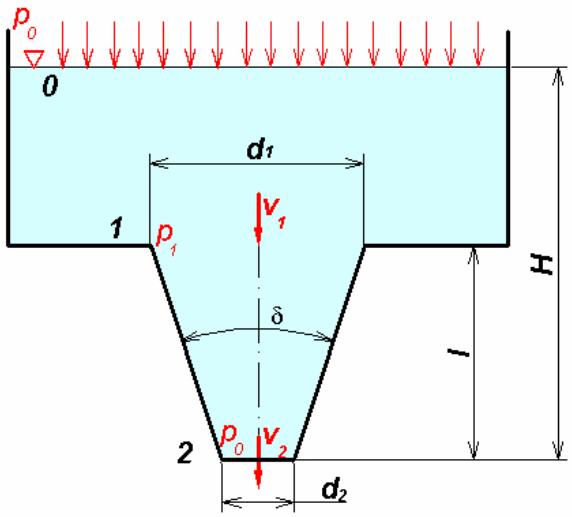
potom Bernoulliho rovnice nabývá další tvar

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\kappa - 1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{a_2^2}{\kappa - 1} = konst. \tag{6.3.17}$$

Řešený příklad

Z nádoby vytéká voda průtokem Q_v svislým kuželovým potrubím o délce l, které se k výstupnímu průměru d_2 zužuje pod úhlem δ. Vypočtěte odpovídající výšku hladiny H a tlak p_1 v místě 1. Atmosférický tlak p_0 je 101325 Pa.

Zadáno:		
Q_v = 200	$m^3.h^{-1}$	
l = 1	m	
d_2 = 75	mm	
δ = 10	°	
ρ = 1000	$kg.m^{-3}$	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v_2 = ?	$m.s^{-1}$	12.575
H = ?	m	8.060
d_2 = ?	m	0.250
p_1 = ?	Pa (abs.tl.)	169 943.16



Řešení: Ze zadané hodnoty objemového průtoku se pomocí rovnice kontinuity vypočítá rychlost ve výstupním průřezu potrubí 2:

$$v_2 = \frac{4Q_v}{\pi . d_2^2}$$

Hladina v nádrži představuje průřez, ve kterém jsou známy hodnoty hydrodynamických veličin p, v, přitom rychlost na hladině se pokládá za rovnu nule.

Z Bernoulliho rovnice definované pro hladinu 0 a výtokový průřez 1 se vypočítá spád H:

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + 0 \Rightarrow H = \frac{v_2^2}{2g}$$

K výpočtu tlaku p_1 v místě připojení potrubí k nádrži se použije Bernoulliho rovnice definovaná pro hladinu 0 a průřez 1,

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 + gH = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gl,$$

kde rychlost $v_1 = \frac{v_2 S_2}{S_1} = \frac{v_2 d_2^2}{d_1^2} = \frac{v_2 d_2^2}{(d_2 + 2l\,\mathrm{tg}(\delta/2))^2}$. Tlak $p_1 = \rho\left[\frac{p_0}{\rho} + g(H-l) - \frac{v_1^2}{2}\right]$.

Shrnutí kapitoly

Rovnice kontinuity, hmotnostní průtok, objemový průtok, Eulerova rovnice pro proudění ideální tekutiny v trojrozměrném a jednorozměrném tvaru, Bernoulliho rovnice pro ideální tekutinu, zásady pro použití Bernoulliho rovnice.

Kontrolní otázka

Z jakého principu vychází odvození rovnice kontinuity?

Co vyjadřuje rovnice kontinuity?

Co je divergence vektoru?

Jaký je rozdíl mezi rovnicí kontinuity pro stlačitelnou a nestlačitelnou tekutinu?

Jaký je rozdíl mezi rovnicí kontinuity pro ustálené a neustálené proudění?

Jaká je výchozí podmínka rovnováhy sil při odvození Eulerovy rovnice pro proudění ideální tekutiny?

Jaký je vektorový zápis Eulerovy rovnice?

Definujte Eulerovu rovnici pro proudovou trubici.

Jaký zákon zachování vyjadřuje Bernoulliho rovnice?

Definujte Bernoulliho rovnici pro 2 průřezy téže proudové trubice.

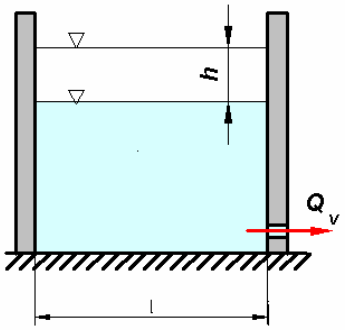
Jaká pravidla platí pro použití Bernoulliho rovnice?

Úkol k řešení

Příklad 6.1

Ve zdymadlové komoře o šířce b a délce l se sníží hladina vody o výšku h za čas t. Určete střední objemový průtok vody Q_v ve výpustném zařízení.

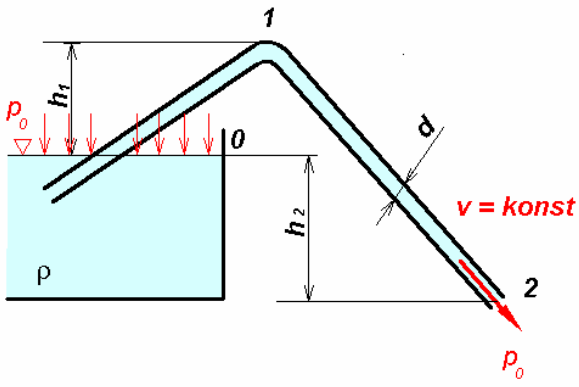
Zadáno:		
$b = 40$	m	
$l = 300$	m	
$h = 8$	m	
$t = 30$	min	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$Q_v = ?$	m^3s^{-1}	53.33



Příklad 6.2

Z nádoby vytéká násoskovým potrubím o průměru d dokonalá kapalina o hustotě ρ do tlaku ovzduší p_0. Nádoba je otevřená a na hladině je rovněž atmosférický tlak. Jsou dány výšky h_1 a h_1, viz schéma. Vypočítejte objemový průtok Q_v a tlak p_1 v nejvyšším průřezu násosky.

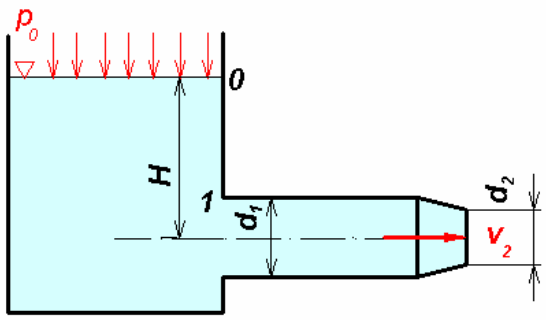
Zadáno:		
d = 12	cm	
ρ = 1000	kgm^{-3}	
h_1 = 1	m	
h_2 = 1	m	
p_0 = 100000	Pa	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.05010
p_1 = ?	Pa (abs. tl.)	80 380.00



Příklad 6.3

Jak velký musí být spád H, aby voda vytékala vodorovným potrubím, jehož konec je opatřen konfuzorem, do ovzduší výtokovou rychlostí v_2. Průměr potrubí je d_1, výstupní průměr je d_2. Kapalinu považujte za dokonalou.

Zadáno:		
d_1 = 0.1	m	
d_2 = 0.08	m	
ρ = 1000	kg.m^{-3}	
v_2 = 6	m.s^{-1}	
p_0 = 100000	Pa	
Vypočtěte:		Výsledky:
H = ?	m	1.83
p_1 = ?	Pa(abs.tl.)	110 627.2



7. Základní rovnice proudění skutečné tekutiny

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat podmínku rovnováhy sil při proudění skutečné tekutiny • odvodit Bernoulliho rovnici pro skutečnou tekutinu • aplikovat rovnici kontinuity a Bernoulliho rovnici v praktických úlohách týkajících se proudění v potrubních systémech	

7.1. Rovnice kontinuity

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat zákon zachování hmotnosti pro skutečnou tekutinu stejným způsobem jako pro tekutinu ideální

Výklad

Rovnice kontinuity je shodná pro ideální i skutečnou tekutinu, tedy podle zákona zachování hmotnosti (resp. hmotnostního průtoku) platí, že součet konvektivní a časové změny průtoku je roven nule:

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho)}{\partial t} dV + \iint_S \rho \vec{v} . \vec{n}\, dS = 0 \qquad (7.1.1)$$

Také lze zapsat rovnici kontinuity v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 . \qquad (7.1.2)$$

Tato rovnice je **obecná rovnice kontinuity pro neustálené prostorové proudění stlačitelné tekutiny**.

Při **ustáleném proudění nestlačitelné tekutiny** (ρ = konst) je rovnice kontinuity pak vyjádřena vztahem v diferenciálním tvaru:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 , \text{ resp. } div\left(\vec{v}\right) = 0 \qquad (7.1.3)$$

Pro proudovou trubici a proudění nestlačitelné tekutiny platí známý zjednodušený vztah, kdy **objemový průtok Q_V je konstantní**

$$Q_V = vS = konst. \tag{7.1.4}$$

7.2. Navierova-Stokesova rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

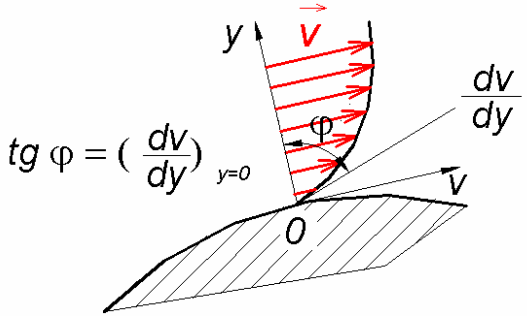
definovat zákonitosti proudění skutečné tekutiny v prostoru
definovat Navierovu – Stokesovu rovnici ve vektorovém a souřadnicovém tvaru

Výklad

Rovnováha sil při proudění skutečné tekutiny je vyjádřena Navierovými-Stokesovými rovnicemi, vyjadřujícími vztah, kdy **setrvačná síla je rovna součtu hmotnostní, tlakové a třecí síly**:

$$\vec{F}_s = \vec{F}_0 + \vec{F}_p + \vec{F}_t \tag{7.2.1}$$

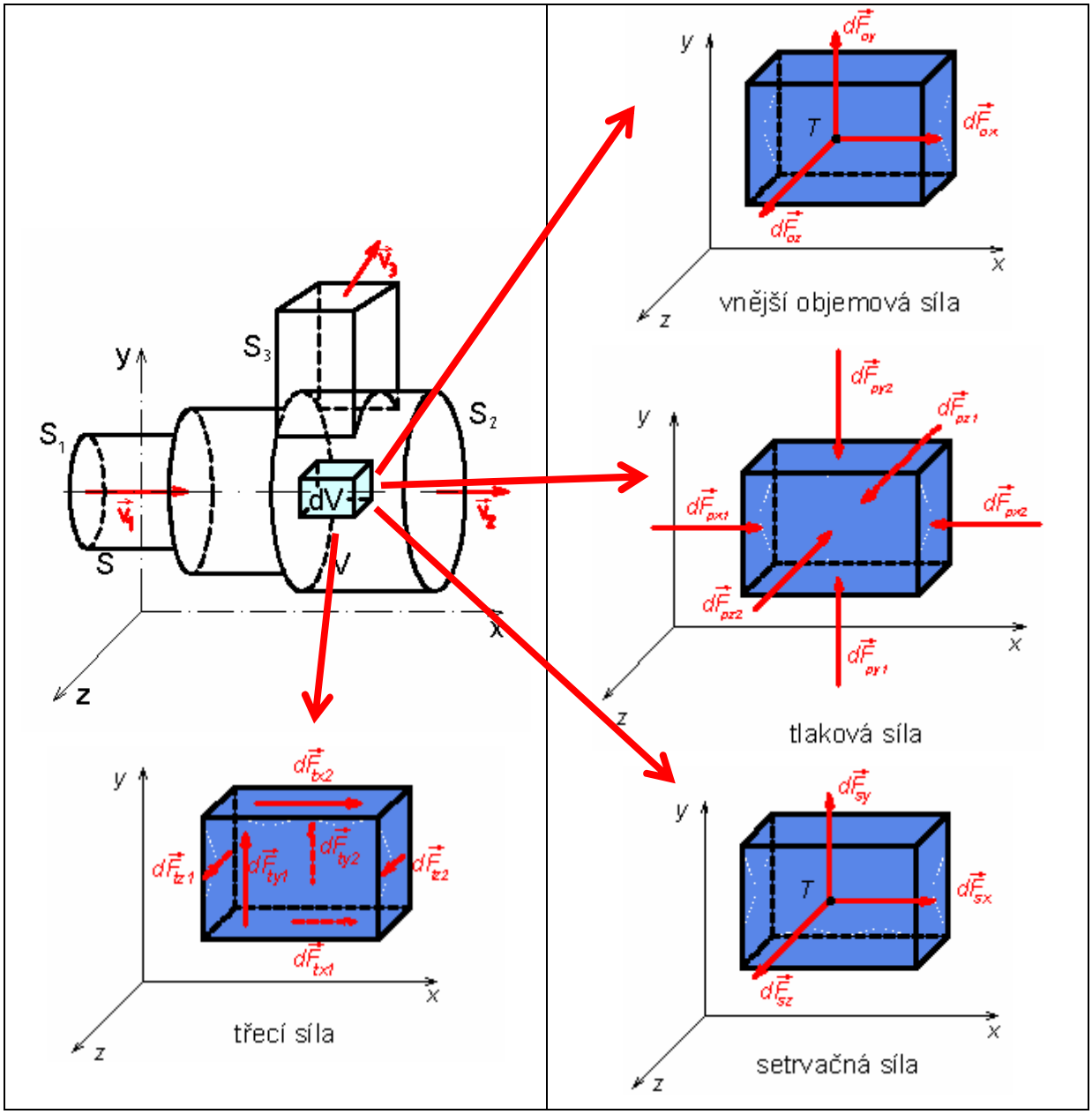
Tedy proti Eulerově rovnici pro proudění ideální tekutiny přistupují u skutečné tekutiny třecí síly, které jsou způsobeny viskozitou tekutiny. Pro matematické vyjádření třecích sil se použije **Newtonův vztah** aplikovaný v souřadnicovém systému dle obr. 7.1.



obr. 7.1 Profil rychlosti v závislosti souřadnici *y*

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \tag{7.2.2}$$

Tento nám již známý výraz vyjadřuje vztah mezi tečným napětím a derivací rychlosti podle souřadnice kolmé na směr pohybu. Třecí sílu lze vyjádřit obdobně jako sílu tlakovou $F_t = \tau S = \eta \frac{dv}{dy} S = \nu \rho \frac{dv}{dy} S$, kde ν je kinematická viskozita.



obr. 7.2 Působení vnějších objemových sil, setrvačných sil a plošných, tj. tlakových a viskózních sil na element objemu dV

Stanoví-li se rovnováha všech sil působících na elementární objem tím, že se dříve odvozená Eulerova rovnice rozšíří o změny normálových a tečných napětí, přesněji řečeno o jejich derivace podle souřadnic, dostane se **Navierova - Stokesova rovnice**, která ve vektorovém zápise pro nestlačitelnou tekutinu v pravoúhlém souřadném systému má tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.grad\right)\vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}p + \nu\Delta\vec{v} \qquad (7.2.3)$$

kde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ je tzv. **Laplaceův operátor** aplikovaný na tři souřadnice rychlosti. Tato rovnice se od Eulerovy rovnice pro ideální tekutinu liší posledním členem na pravé straně. Tento člen představuje sílu potřebnou k překonání viskózního tření tekutiny. Navierovu – Skokesovu rovnici lze rozepsat do tří směrů souřadnic x, y, z:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= a_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \\
\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= a_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= a_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned} \qquad (7.2.4)$$

Při řešení proudového pole se zpravidla určuje rozložení rychlostí a tlaků. Vedle pohybové rovnice se uplatní i rovnice spojitosti. V systému diferenciálních Navierových - Stokesových rovnic a rovnice spojitosti jsou čtyři neznámé veličiny, tj. složky rychlosti v_x, v_y, v_z a tlak p. Pro řešení těchto rovnic musí být známé vnější zrychlení $\vec{a}$, hustota tekutiny ρ a okrajové podmínky. Navierovy-Stokesovy rovnice patří mezi nelineární parciální diferenciální rovnice, které nejsou obecně řešitelné. Analytické řešení je dostupné pro jednodušší případy laminárního proudění. V současné době i složité případy laminárního proudění jsou řešitelné numerickými metodami, např. metodou konečných objemů a metodou konečných prvků.

Doplňující (nepovinný) text

Při vzájemném pohybu částic vznikají ve skutečné tekutině tečná napětí, která způsobují úhlovou deformaci částic. Na elementární objem skutečné tekutiny v podobně hranolku o stranách *dx, dy, dz* působí na jeho plochách smyková i normálová napětí, viz obr. 7.3. Tečná (smyková) napětí se vyjádří takto:

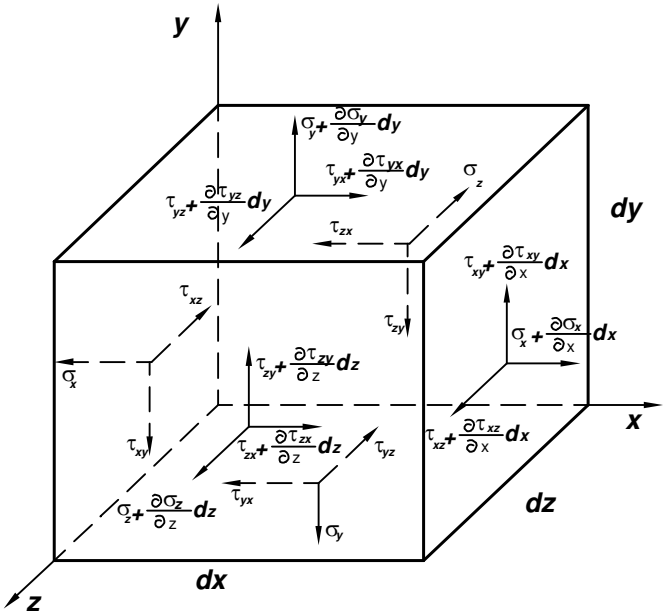
$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)
\end{aligned} \qquad (7.2.5)$$

Normálová napětí jsou dána tlakem a lineární deformací elementární částice (zjednodušeně pro nestlačitelné médium)

$$\sigma_x = -p + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$\sigma_y = -p + 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \qquad (7.2.6)$$

$$\sigma_z = -p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}$$



obr. 7.3 Napětí na elementárním objemu tekutiny

7.3. Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

popsat princip odvození Bernoulliho rovnice
vyřešit příklady s aplikací Bernoulliho rovnice

Výklad

Rovnováha sil při proudění skutečných tekutin je vyjádřena Navierovou-Stokesovou rovnicí ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.grad \right) \vec{v} = \vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \qquad (7.3.1)$$

Dále se předpokládá proudění jednorozměrné v trubici, tedy předchozí rovnice se zjednoduší tak, že se uvažuje pouze jeden souřadný směr, vektor rychlosti má jen jednu souřadnici a tudíž se píše bez indexu a rozměr je označen l :

$$\frac{\partial v}{\partial t} dl + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl = a \cos \varphi dl - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} \qquad (7.3.2)$$

Jednotlivé členy výše uvedené rovnice lze popsat fyzikálně takto:

- $\frac{\partial v}{\partial t} dl$ - zrychlující měrná energie v případě neustáleného proudění
- $\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl$ - kinetická měrná energie
- $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl$ - tlaková měrná energie
- $\nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} dl$ - ztrátová měrná energie (v důsledku třecích sil)
- $a \cos \varphi dl = dUdl$ - potenciální měrná energie, u které se zavádí tzv. potenciál, definovaný dříve

Integrací výše uvedené upravené rovnice je

$$\int \frac{\partial v}{\partial t} dl + \int \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} dl + \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} dl - \int \nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} dl - \int dUdl = 0 \qquad (7.3.3)$$

Pro nestlačitelné proudění se vyčíslí se integrály pro průřez 1-2 proudové trubice

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} dl + \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \left(p_2 - p_1 \right) - \int_1^2 \nu \frac{\partial^2 v}{\partial l^2} dl - \left(U_2 - U_1 \right) = 0 \qquad (7.3.4)$$

Vyčíslení integrálu vyjadřujícího třecí síly je obtížné, proto se prakticky určuje poloempirickými vztahy a označuje se e_z. Představuje práci třecích sil na jednotku hmotnosti proudící tekutiny, což je rozptýlená (disipovaná) měrná energie, nebo též měrná ztrátová energie spotřebovaná na překonání hydraulických odporů na úseku 1 – 2 proudové trubice. Tato měrná ztrátová energie zmenšuje mechanickou energii (tlakovou + kinetickou + polohovou) tekutiny a mění se v teplo. Bernoulliho rovnice pro proudění skutečné tekutiny, na kterou působí pouze tíhové zrychlení $a = -g$ a tedy $U = -gh$ má tvar

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2 + e_z \qquad (7.3.5)$$

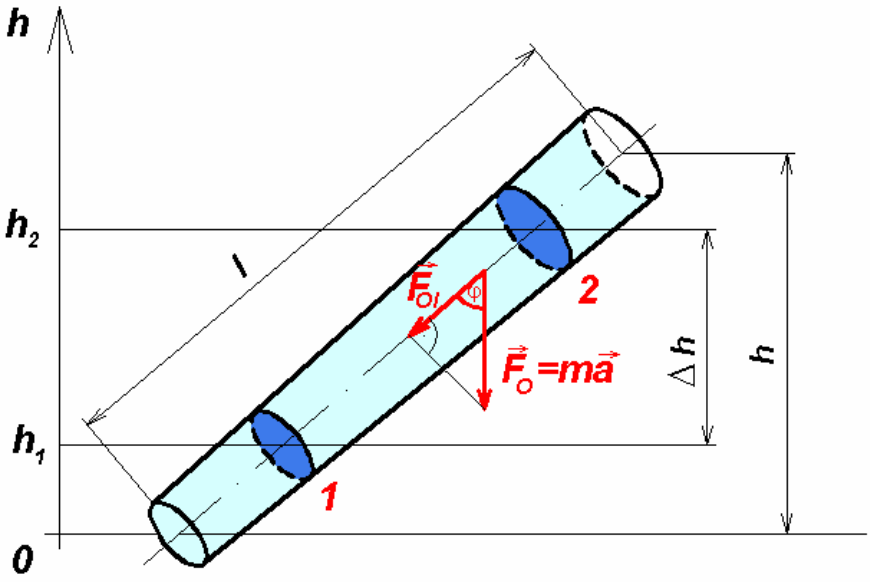
Měrná ztrátová energie e_z se může vyjádřit jako násobek kinetické energie $e_z = \zeta \frac{v^2}{2}$ nebo tlaková ztrátová energie $e_z = \frac{p_z}{\rho}$, popřípadě ztrátová výška $e_z = gh_z$. Srovnáním uvedených vztahů se dostane

$$e_z = \frac{p_z}{\rho} = gh_z \Rightarrow p_z = \rho g h_z = \zeta \frac{v^2}{2} \rho \qquad (7.3.6)$$

Poslední rovnice vyjadřuje hydraulický odpor tlakovým rozdílem p_z, kterému se tradičně říká tlaková ztráta. Podobně veličina h_z, je označena jako ztrátová výška i když nejde o ztrátu, ale nežádanou přeměnu mechanické energie v tepelnou. Obě veličiny h_z a p_z jsou mírou rozptýlené (ztrátové) energie. Součinitel ζ je ztrátový součinitel a závisí na druhu hydraulického odporu či ztráty.

Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu psaná pro průřezy 1,2 proudové trubice (7.3.5) pomocí měrné ztrátové energie $e_z = gh_z$ je

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + gh_z \qquad (7.3.7)$$

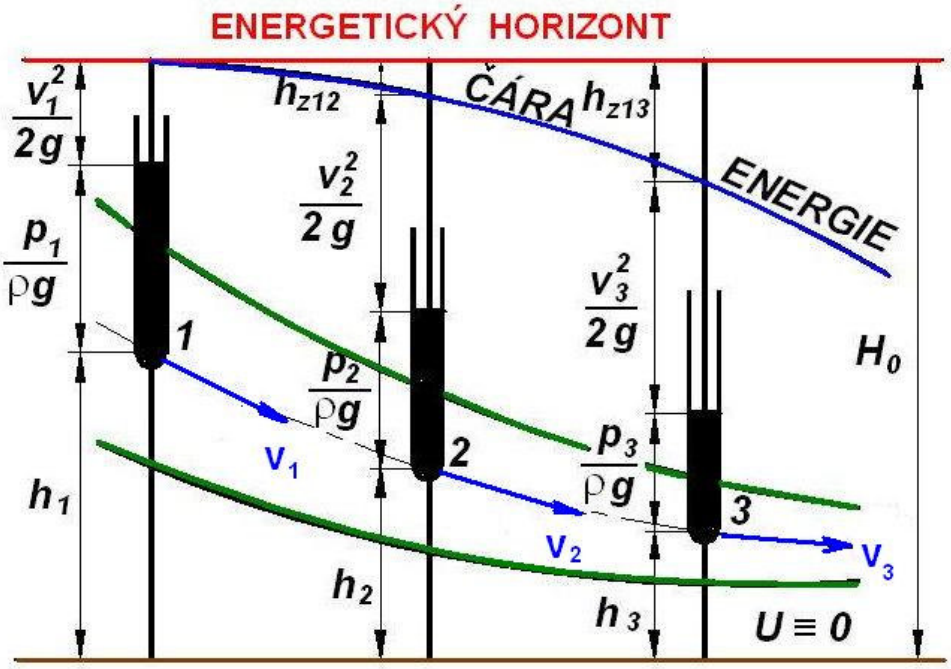


obr. 7.4 Proudová trubice s průřezy 1, 2

Kapalina proudí od průřezu 1 k průřezu 2. Ztrátová výška h_z zahrnuje všechny hydraulické ztráty na úseku mezi průřezy 1-2.

Podobně jako při proudění dokonalé tekutiny je možné znázornit graficky také Bernoulliho rovnici pro skutečnou tekutinu. Odečtením ztrátové energie pro jednotlivé

průřezy od konstanty Bernoulliho rovnice $Y_0 (= gH_0)$ se určí mechanická energie tekutiny, tj. součet tlakové, kinetické a polohové energie v uvažovaných průřezech, která je znázorněna v diagramu příslušnou čarou. Rozdíl mezi čarou celkové energie a čarou mechanické energie představuje rozptýlenou (ztrátovou) energii. V tepelně izolované proudové trubici se veškerá rozptýlená energie jako tepelná předává tekutině, čímž vzrůstá její vnitřní energie a stoupá teplota tekutiny. Člen se ztrátovou výškou v rovnici (7.3.7) narušuje symetrii rovnice. Pro lepší názornost je Bernoulliho rovnice vyjádřena ve výškách, tj. polohové, tlakové, kinetické a ztrátové výšce, viz. obr. 7.5.



obr. 7.5 Měrná energie vyjádřená ve formě výšek pro skutečnou tekutinu

Pro správné napsání Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu je třeba se řídit rovněž třemi pravidly (odst. 6.3), k nimž přibývá další:

- měrná ztrátová energie $e_z = gh_z$ zahrnuje součet všech hydraulických ztrát na úseku mezi průřezy 1-2, pro něž se píše Bernoulliho rovnice, a přičte se na té straně rovnice, která platí pro průřez proudové trubice ve směru proudění vzdálenější.

Shrnutí kapitoly

Rovnice kontinuity pro skutečnou kapalinu, Navierova – Stokesova rovnice, viskózní síly, Bernoulliho rovnice pro skutečnou tekutinu, zásady pro použití Bernoulliho rovnice.

Kontrolní otázka

Jaký zákon vyjadřuje Navierova – Stokesova rovnice?

Jaký zákon zachování vyjadřuje Bernoulliho rovnice?

Jaký fyzikální význam mají jednotlivé členy v Bernoulliho rovnici a jaký mají rozměr?

Definujte Bernoulliho rovnici.

Úkol k řešení

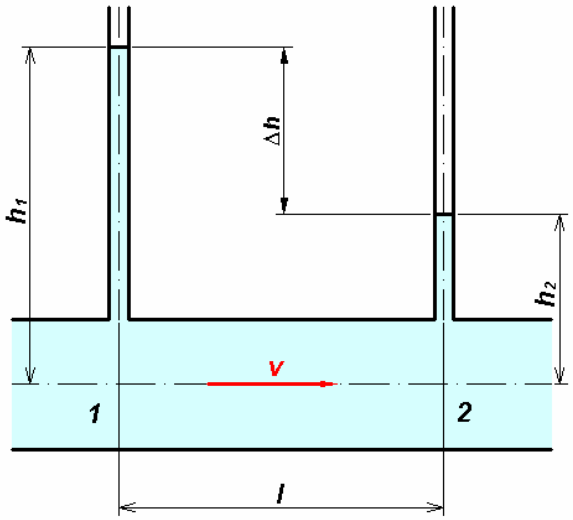
Příklad 7.1

Ve vodorovném potrubí stálého průřezu o průměru d byla ve dvou průřezech vzdálených o délku l změřena pomocí piezometrických trubic diference tlakové energie, tj. výšky h_1, h_2, a dále byla změřena rychlost v proudícího oleje o kinematické viskozitě ν a hustotě ρ.

Určete měrnou ztrátovou energii e_z, tlakovou ztrátu p_z a Reynoldsovo číslo Re.

Zadáno:		
l =	5	m
d =	0.1	m
v =	2	$m.s^{-1}$
h_1 =	0.45	m
h_2 =	0.2	m
ν =	0.00017	m^2s^{-1}
ρ =	890	$kg.m^{-3}$

Vypočtěte:		Výsledky:
e_z = ?	$J.kg^{-1}$	2.4525
p_z = ?	Pa	2 182.73
Re = ?		1 176.471



8. Měření tlaku a průtoku v potrubí

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• provést teoretickou přípravu k měření tlaku, rychlosti a průtoku • definovat a vybrat vhodné přístroje k měření tlaku, rychlosti a průtoku • použít základní vztahy z hydrostatiky a hydrodynamiky k definování výpočtu veličin tlaku, rychlosti a průtoku • provést laboratorní měření tlaku, místní rychlosti a průtoku vhodnými přístroji	

8.1. Měření tlaku

Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

definovat přístroje k měření tlaku
popsat jednotlivá měřidla a postup měření
vyřešit použití konkrétního měřidla na libovolnou aplikaci

Výklad

Přístrojů pro měření tlaku v laboratorních podmínkách i provozech je velké množství. Rozdělení měřidel tlaku můžeme provést podle několika hledisek. Podle druhu měřeného tlaku můžeme provést následující dělení :

- tlakoměry absolutního tlaku
- vakuometry (měřidlo absolutního tlaku menšího než atmosférický tlak)
- barometry (měřidlo atmosférického tlaku)
- manometry (tlakoměry pro měření přetlaku, tedy relativního tlaku vzhledem ke tlaku atmosférickému)
- diferenční tlakoměry (pro měření diferenčního tlaku, rozdíl dvou současně působících tlaků).

Podle výstupního signálu můžeme měřidla rozdělit do tří kategorií a to na :

- mechanické

- hydrostatické
- elektrické

Nejčastěji měřidla tlaku dělíme podle jejich funkčního principu do následujících kategorií :

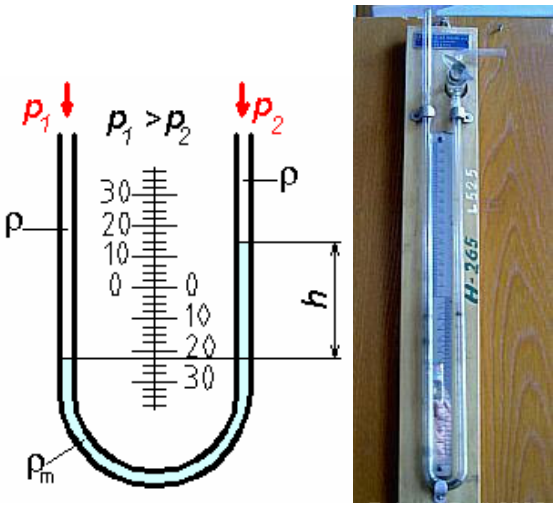
- **kapalinové tlakoměry** jsou založeny na účinku hydrostatického tlaku, měření tlaku se převádí na měření výšky (délky) sloupce kapaliny, tento údaj závisí na hustotě manometrické (měřicí) kapaliny. Jsou velmi přesné.
- **pístové tlakoměry** se silovým účinkem - měření tlaku se převádí na měření síly, jejíž účinky jsou vyvažovány např. závažím či pružinou.
- **deformační tlakoměry** - měřený tlak způsobuje pružnou deformaci tlakoměrného členu. Velikost deformace je úměrná hodnotě měřeného tlaku. Jsou to nejčastěji používané tlakoměry v průmyslu.
- **elektrické tlakoměry** - využívají principu tlakové závislosti některých elektrických veličin. Jedná se o moderní a perspektivní snímače doplněné vesměs moderními elektronickými vyhodnocovacími obvody.

8.1.1. Kapalinové tlakoměry

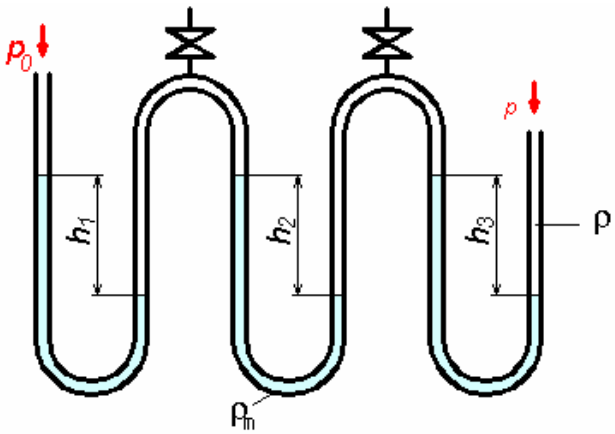
Jsou to nejjednodušší tlakoměry, které se používají především jako laboratorní pro velmi přesná měření malých a středních tlaků. Velikost tlaku je dána výškou sloupce kapaliny. Jako tlakoměrná kapalina se nejčastěji používá voda, rtuť nebo líh (ethylalkohol, etanol). Kapalinové tlakoměry lze dělit podle různých hledisek. Podle počtu kapalin na **jednokapalinové** nebo **dvoukapalinové**. U dvokapalinových tlakoměrů se používají tlakové kapaliny, které se vzájemně nemísí a mají různou hustotu.

Dále rozeznáváme uspořádání podle trubic a to svislé nebo šikmé. Měřidlo může mít dvě trubice nebo jen jednu a druhá je nahrazena nádobkou. Pak se jedná o **U – trubicový tlakoměr** nebo **nádobkový tlakoměr**. Pokud má dvoutrubicový tlakoměr možnost připojení dvou přívodů, může sloužit k měření přetlaků, podtlaků a tlakových diferencí. Další modifikaci je provedení **nádobkového tlakoměru se sklopným ramenem**. Vedle trubicových a nádobkových tlakoměru je řada kapalinových tlakoměrů zvláštního provedení, z nichž nejběžnější jsou **tlakoměry zvonové a prstencové**.

U-trubicové tlakoměry



obr. 8.1 Schéma U - trubicového tlakoměru



obr. 8.2 Kapalinový tlakoměr tvořeny několika za sebou řazenými U - trubicovými tlakoměry

Jsou to skleněné trubice tvaru *U* se dvěma svislými větvemi, které jsou naplněné tlakoměrnou kapalinou. Na obr. 8.1 je uvedeno schéma U-trubicového tlakoměru.

Jsou-li p_1 a p_2 dva současně působící rozdílné tlaky $(p_1 \rangle p_2)$, pak rozdíl tlaků

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h(\rho_m - \rho)g\,, \qquad (8.1.1)$$

kde

h	je výška kapalinového sloupce	m
ρ	hustota měřené tekutiny	$kg.m^{-3}$
ρ_m	hustota měrné kapaliny	$kg.m^{-3}$
g	tíhové zrychlení	$m.s^{-2}$

Je-li p_1 měřený tlak a p_2 tlak okolní atmosféry, měříme přetlaky (případně i podtlak) :

$$p = h(\rho_m - \rho)g \qquad (8.1.2)$$

U-trubicové tlakoměry se vyrábějí obvykle s délkou stupnice 300 až 500 mm. V praxi se můžeme setkat s délkou až 1,5 m maximálně 2 m. Stupnice bývá zpravidla vynesena v jednotkách délky (většinou v mm), pak odpovídá sloupec 10 mm H_20 tlaku 100 Pa.

Měřící rozsah U-trubicových tlakoměrů je možné zvětšit jejich zapojením do série. Takový tlakoměr potom nazýváme násobný nebo vícetrubkový tlakoměr, viz. obr. 8.2. Výsledný tlak se vypočítá ze součtu všech výchylek jako :

$$p = (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)\rho g \qquad (8.1.3)$$

Výhody U-trubicových tlakoměrů

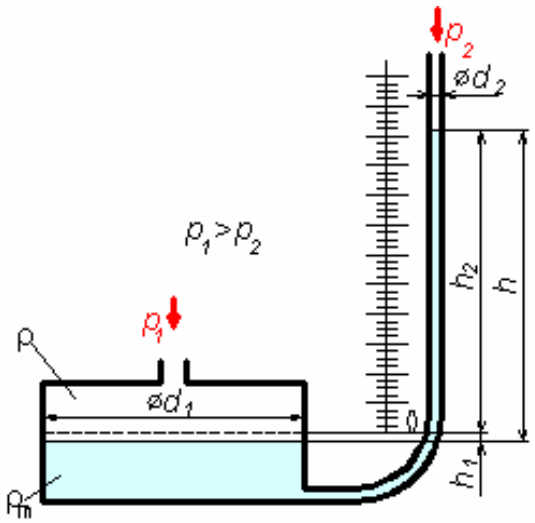
- přesný a spolehlivý tlakoměr
- jednoduchý a levný

Nevýhody U-trubicových tlakoměrů

- nutnost číst výchylek obou ramen, a tím pádem možnost chybného odečtu
- pro omezený rozsah velikosti tlaku

Nádobkové tlakoměry

Jsou odvozeny z U-trubicových tlakoměrů. Jedno rameno tvoří nádobka, jejíž průměr je mnohem větší než průměr trubice, takže v něm hladina kolísá zcela nepatrně. Tlak se odečítá pouze na jedné stupnici. Trubice, pomocí které měříme výšku tlakoměrné kapaliny musí mít stálý průřez (musí být kalibrována). Pokles hladiny kapaliny v nádobce tlakoměru musí být zahrnout do stupnice tlakoměru. Schéma tlakoměru je na obr. 8.3 a obr. 8.4.



obr. 8.3 Schéma nádobkového tlakoměru

obr. 8.4 Provedení nádobkového tlakoměru

Měřený tlakový rozdíl je možno vyjádřit za pomoci rovnosti objemů

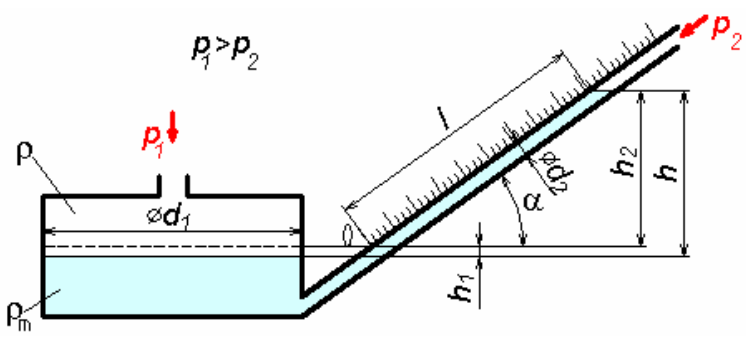
$$S_1 h_1 = S_2 h_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \frac{S_2}{S_1} \text{ takto:}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = (\rho_m - \rho) g (h_1 + h_2) = (\rho_m - \rho) g h_2 \left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) \qquad (8.1.4)$$

kde	h_2	je výška tlakoměrné kapaliny v trubici	m
	ρ	hustota měřené tekutiny	kg.m^{-3}
	ρ_m	hustota tlakové kapaliny	kg.m^{-3}
	g	tíhové zrychlení	m.s^{-2}
	S_1	plocha (průřez) nádobky	m^2
	S_2	plocha (průřez) trubice	m^2

Kapalinové tlakoměry se šikmou trubicí

Je to v podstatě nádobkový tlakoměr jehož trubice je skloněna pod určitým úhlem. Používají se pro měření velmi malých přetlaků nebo malé tlakové diference. Někdy se také nazývají tlakoměry se sklopným ramenem nebo mikromanometry. Sklon trubice může být pevný nebo nastavitelný. Pevný sklon se dělá zpravidla $1:5$. Zešikmením trubice se prodlouží sloupec kapaliny v poměru sklonu a tím se dosáhne přesnějšího odečítání. Tyto tlakoměry jsou opatřeny vodováhou neboť přesnost měření závisí na sklonu trubice vzhledem k vodorovné rovině. Náplní je výhradně líh (ethylalkohol). Schéma tlakoměru na šikmou trubicí je na obr. 8.5 a obr. 8.6.



obr. 8.5 Kapalinový tlakoměr se šikmou trubicí

obr. 8.6 Provedení tlakoměr se šikmou trubicí

Měřený tlakový rozdíl je dán vztahem

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) g \left(\frac{S_2}{S_1} + \sin\alpha \right) l \qquad (8.1.5)$$

kde α je úhel sklonu

l délka sloupce kapaliny v skloněném rameni

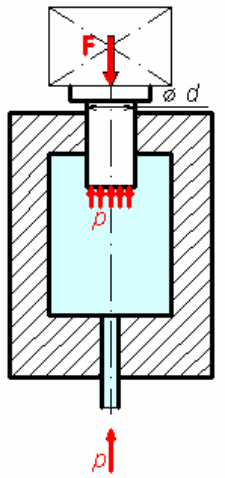
Měřící rozsah je dán délkou trubice. Běžně se tyto mikromanometry vyrábějí s trubicemi délky $200 \div 600$ mm.

Doplňující (nepovinný) text

8.1.2. Pístový tlakoměr

Měřený tlak působí na píst vyvážený závažím nebo pružinou. Z velikosti vyvážení a z rozměrů pístu lze určit měřený tlak. Do této skupiny tlakoměrů patří tlakoměr pístový a zvonový. Jedná se o etalonový tlakoměr. U pístového tlakoměru je podstatnou součástí píst

přesného průřezu, umístěný ve válci (obr. 8.7). Tlak na píst opatřený talířem se přenáší obvykle olejem, kterým je celý systém tlakoměru vyplněn. Velikost síly vzniklé působením měřeného tlaku na píst je kompenzována tíhou pístu a závaží. Rovnováha mezi silou závaží a tlakem oleje na píst nastane při zastavení pohybu pístu ve směru jeho osy. U provozního pístového tlakoměru je kompenzační síla vyvozována pružinou. Výhodou tohoto přístroje je, že lze potlačit libovolnou část rozsahu použitím přídavného závaží. Pro převod na elektrický signál je možno použít libovolného snímače tlakové síly. Provedení pístového tlakoměru je na obr. 8.8



obr. 8.7 Princip pístového tlakoměru

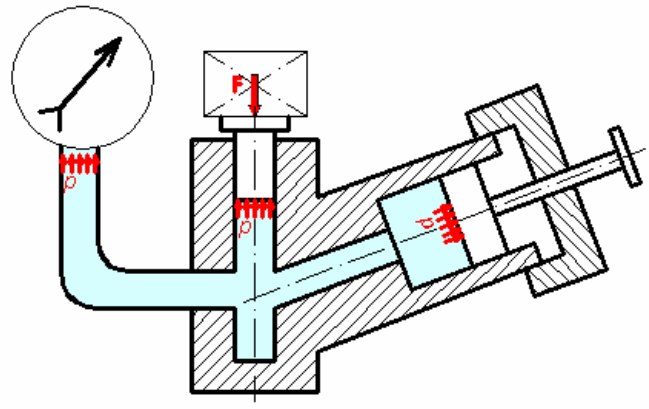
obr. 8.8 Provedení pístového tlakoměru

Velikost tlaku p působícího na píst je pak dána vztahem:

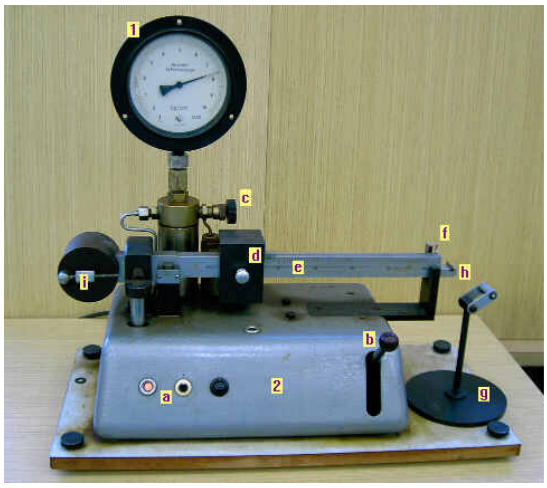
$$p = \frac{m_p + m_z}{\frac{\pi d^2}{4}} g \qquad (8.1.6)$$

kde	m_p, m_z	je hmotnost pístu a závaží	kg
	d	průměr pístu	m
	g	tíhové zrychlení	$m.s^{-2}$

Protože kompenzační sílu vyvozenou závažím lze určit s vysokou přesností, využívá se v laboratorních provozech pístových tlakoměrů pro ověřování a kalibraci tlakoměrů deformačních, a to v rozsahu od 50 kPa do 2 000 MPa i více. Ověřovací zařízení pak obsahuje kromě pístového tlakoměru ještě čerpadlo a zásobník oleje, příslušné ventily a připojovací šroubení pro ověřovaný manometr. Zjednodušené schéma je na obr. 8.9 a praktické provedení je na obr. 8.10



obr. 8.9 Zařízení pro kalibraci deformačních tlakoměrů



obr. 8.10 Provedení deformačního kalibračního tlakoměru

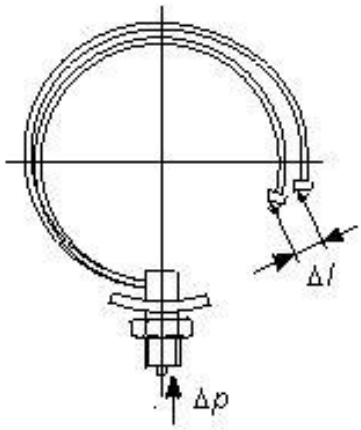
8.1.3. Deformační tlakoměry

Funkčním principem deformačních tlakoměrů je využití pružné deformace, a tím i změny geometrického tvaru vhodných tlakoměrných prvků (čidlo) při působení měřeného tlaku. Vzniklé deformace musí být hluboko pod mezí pružnosti, aby nenastala plastická deformace tlakoměrného prvku a tím i nevratné poškození měřidla.

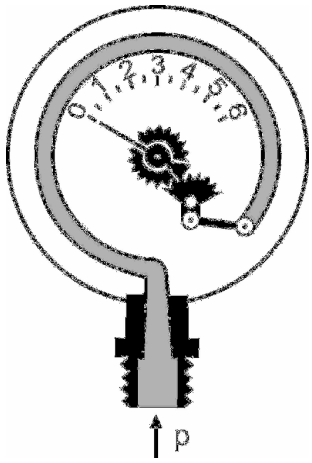
Významným jevem deformačních tlakoměrů je hystereze. Projevuje se při deformaci tlakoměrného prvku v povolených mezích. Hodnoty v určitých tlakových bodech při tlaku stoupajícím nejsou totožné s hodnotami při tlaku klesajícím. Je to způsobené tím, že po odlehčení tlakoměrného prvku na výchozí hodnotu neklesne mechanické napětí v materiálu ihned, ale až po určitém čase. Největší vliv na hysterezi má materiál tlakoměrného prvku, proto jeho volba má velký význam. Dalšími vlivy jsou teplota okolí i měřeného média, důsledky koroze aj.

Trubicové tlakoměry

Deformačním prvkem (čidlem) je tzv. Bourdonova trubice oválného, eliptického příp. jiného profilu, která je stočena do kruhového oblouku. Jeden konec trubice je uzavřen. Otevřený konec je upevněn a je do něj přiváděn měřený tlak. Vlivem působícího tlaku se trubice napřimuje a její uzavřený konec se vychýlí. Na obr. 8.11 je znázorněná deformace trubice vlivem působení tlaku.

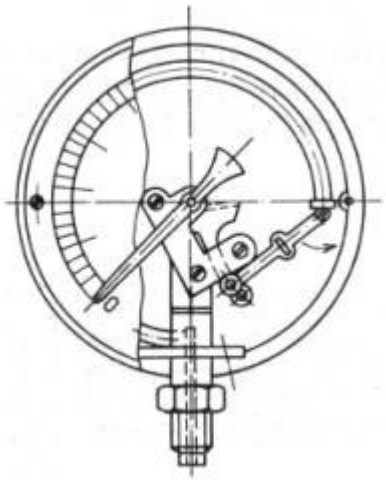


obr. 8.11 - deformace trubicového tlakoměru



obr. 8.12 - trubicový tlakoměr (vnitřní uspořádání přístroje)

Toto vychýlení je kromě tlaku také závislé na úhlu stočení trubice. Nejčastěji se používá úhel stočení 270^{o}, u kterého vzniká optimální výchylka. Výchylka se přenáší pomocí mechanického převodu na ukazatel, viz obr. 8.12. Jako mechanický převod se nejčastěji používají ozubené převody a páky.



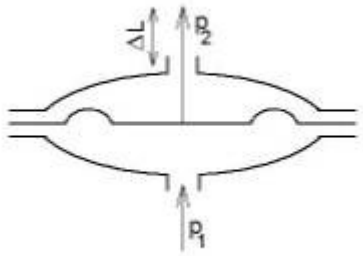
obr. 8.13 – deformační trubicový tlakoměr

obr. 8.14 - deformační trubicový tlakoměr

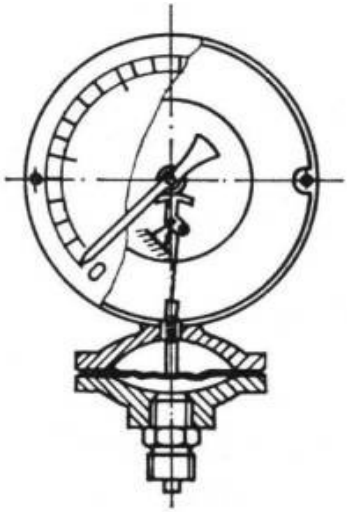
Pro nízké tlaky je trubice mosazná a má plošší profil, pro vysoké tlaky je ocelová a blíží se kruhovému profilu. Měřicí rozsahy trubicových tlakoměrů bývají od 0 do 0,5 MPa až 200 MPa (výjimečně 2 GPa). Těmito přístroji lze měřit i podtlaky. Vyrábějí se jako tlakoměry kontrolní ve třídách přesnosti 0,4 - 0,6 – 1,0 a jako provozní tlakoměry ve třídách přesnosti 1,6 - 2,5 - 4 – 6 –10 – atd. Příklad deformačního trubicového tlakoměru je na obr. 8.13 obr. 8.14.

Membránové tlakoměry

Membránové tlakoměry mají místo trubice membránu (obr. **8.15**) z pružného materiálu kruhového tvaru, která je uložena mezi příruby komory. Membrána je po obvodě sevřena mezi dvěma přírubami a z jedné strany je přiváděn měřený tlak. Ten vyvolá průhyb membrány, zvětšuje se mechanickým převodem a převádí se na úhlové natočení ručičky ukazatele (obr. 8.16). Deformace membrány je ještě menší než deformace trubice a proto použitý mechanický převod musí být větší než u trubicových tlakoměrů. Závislost zdvihu na tlaku je přibližně lineární. Membránové tlakoměry se vyrábějí pro tlaky do 4 MPa, příkladem je tlakoměr na obr. 8.17. Materiál membrány může být různý.



obr. 8.15 – schéma membrány



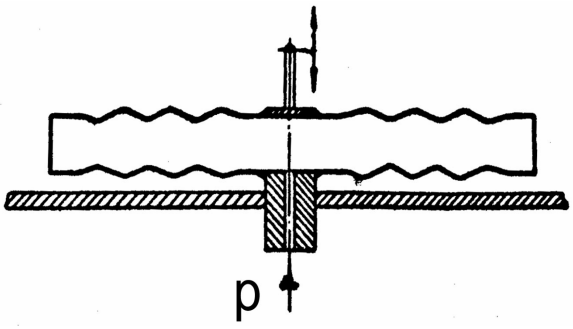
obr. 8.16 – princip membránového tlakoměru

obr. 8.17 – membránový tlakoměr

Výhodou membránových tlakoměrů jsou malé hmotnosti jejich částí, tím je malá setrvačná hmotnost membrány a proto je možno je použít v provozech s chvěním a otřesy. Takové snímače jsou vhodné pro měření velmi rychle pulsujících tlaků. Další výhodou je vyšší citlivost než u tlakoměrů trubicových.

Krabicové tlakoměry

Jsou to v podstatě membránové tlakoměry, u nichž se zvětšení síly a zdvihu dosahuje zvětšením plochy membrány, protože jediná membrána dává při měření tlaku poměrně malý zdvih. Tlakoměrným prvkem je plochá krabice tvořená dvěma zvlněnými membránami o průměru 50 až 100 mm (obr. 8.18).



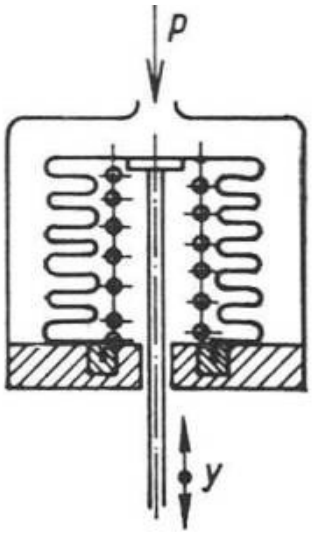
obr. 8.18 – Princip krabicového tlakoměru

obr. 8.19 – krabicový tlakoměr

Pro zvýšení citlivosti se spojuje několik krabic v jeden konstrukční celek.Deformace krabice se převádí na ukazatel mechanickým (pákovým) převodem. K převodu výchylky krabice na elektrický signál musí být použito snímače s minimálním silovým zatížením, protože přestavující síla je malá.

Vlnovcové tlakoměry

Deformačním členem vlnovkových tlakoměrů je vlnovec. Je to bezešvá tenkostěnná válcová nádoba s vyválcovanými vlnami na povrchu. Vlnovci se někdy také říká měch a vlnovkovým tlakoměrům „měchové tlakoměry“. Měřený přetlak působí vně vlnovce a při měření tlakového rozdílu (diference) působí vně vlnovce větší tlak. Pro menší tlaky se využívá pružná deformace samostatného vlnovce. Pro větší tlaky se vkládá do vlnovce pružina pro zvýšení tuhosti, viz. obr. 8.20. Vlnovcové tlakoměry jsou zvláště vhodné pro menší tlaky, asi do 500 kPa.



obr. 8.20 Schéma vlnovcového tlakoměru

8.1.4. Elektrické tlakoměry

Pro dynamické změny tlaku se využívají tlakoměry elektrické - využívají principu tlakové závislosti některých elektrických veličin. Jedná se o moderní a perspektivní snímače doplněné vesměs moderními elektronickými vyhodnocovacími obvody. Umožňují měření absolutního a diferenčního tlaku. Tlak média působící na membránu snímače je převeden pomocí piezoelektrických, magnetických nebo indukčních senzorů na elektrický impuls, který odpovídá naměřené hodnotě tlaku. Lze sem zařadit snímače tlaku s **odporovými tenzometry**, **kapacitní snímače tlaku** a **piezoelektrické snímače tlaku**.

Odporové tenzometry

Odporový tenzometr je měřič deformace, která vyvolá změnu elektrického odporu. Nejčastěji se tenzometry lepí na deformační člen, což je zpravidla membrána. Tenzometry se vyrábějí kovové nebo polovodičové.

Novou vývojovou etapu tvoří tenzometry integrované. Jako deformační člen se používá také membrána z polovodiče (obvykle křemík) a v ní jsou tvořeny v difúzních vrstvách polovodičové tenzometry. Mezi základní výhody křemíku při použití jako deformačního členu patří minimální hystereze, odolnost vůči vysokým teplotám a chemická rezistence. Většinou se vyrábí kruhové membrány, na nichž jsou vytvořeny dva nebo více tenzometrů jednoduchých tvarů, které jsou spojeny přímo na membráně plošným spojem. Tlak na obou oddělovacích membránách 3 je přenášen na měřicí prvek 1 s křemíkovou membránou 2 pomocí silikonového nebo inertního oleje. Podle diferenčního tlaku vychyluje křemíkovou membránu s tenzometry 2 a tím způsobuje změnu odporu. Tato změna je pak zpracován na unifikovaný signál 4-20mA. Oblast měření odporových tenzometrů je 10 KPa až 50 MPa.

Kapacitní tenzometry

Princip činnosti těchto převodníků je založen na kapacitním snímači. Deformační člen, který může být kovový, polovodičový nebo keramický, vytváří alespoň jednu elektrodu kapacitního snímače. U kapacitních převodníků tlaku se používá zejména princip změny vzdálenosti elektrod. Nejčastěji používaným deformačním členem je membrána. Pro malé tlaky se používá tenká membrána nebo vlnovec. Tlak působící na oddělovací membrány se prostřednictvím kapalné náplně (nejčastěji silikonový olej) přenáší na měřicí membránu – elektrodu kondenzátoru. Pevné elektrody jsou vytvořeny na izolantu (sklo) a jsou řešeny tak, aby změna kapacity byla co největší. Změna kapacity mezi měřicí membránou a pevnými elektrodami kondenzátoru je elektronicky převedena na proudový nebo napěťový unifikovaný signál. Parazitní vliv kapacity přívodů je řešen pomocí hybridní nebo integrované elektroniky vestavěné ve snímači. Měřicí rozsah kapacitních převodníků je 100 Pa až 40 MPa.

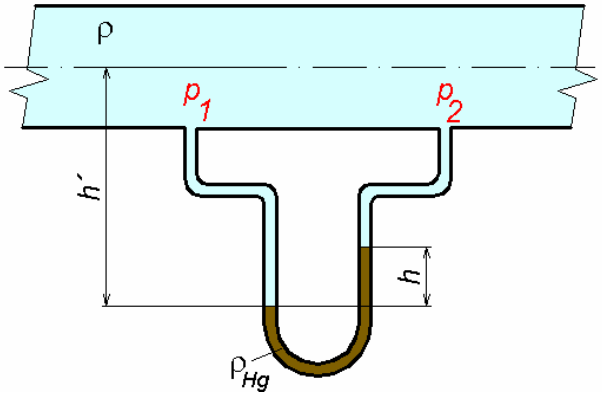
Piezoelektrické tenzometry

Piezoelektrický snímač je založen na využití piezoelektrického jevu. Piezoelektrický jev spočívá v tom, že uvnitř některých dielektrik vzniká vlivem mechanické deformace polarizace, která vede ke vzniku el. náboje. Piezoelektrické snímače tlaku se vyznačují malými rozměry a mohou pracovat při vysokých teplotách. Umožňují měření tlaku až do 100 MPa.

Řešený příklad

Jaký je rozdíl tlaků Δp ve vodorovném potrubí (ve kterém proudí voda), který je měřen U-trubicí naplněnou rtutí. Rozdíl výšek hladin je Δh.

Zadáno:			
Δh =	0.35	m	
ρ_v =	1000	kg.m^{-3}	
ρ_{Hg} =	13600	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:			Výsledek:
Δp =		Pa	43262.10



$$p_L = p_P \Rightarrow p_1 + \rho g h' = p_2 \rho g (h' - \Delta h) + \rho_{Hg} g \Delta h$$
$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_{Hg} - \rho) g \Delta h$$
$$\Delta p = p_1 - p_2$$

8.2. Měření rychlostí

Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

měřit místní rychlost a střední rychlost pomocí dostupných měřidel
definovat výpočet střední rychlosti pomocí rychlostního profilu
popsat jednotlivá měřidla
použít vhodné měřidlo k měření místní rychlosti a střední rychlosti

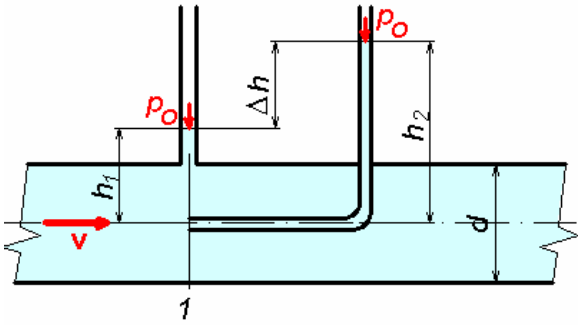
Výklad

Měření rychlosti patří mezi základní úlohy hydromechaniky společně s měřením tlaku a průtoku. Metody k měření jsou přímé a nepřímé.

8.2.1. Měření místní rychlosti

Pitotova trubice

V mnoha případech potřebujeme určit rychlost v určitém místě proudu, tzv. místní rychlost.



obr. 8.21 Princip měření místní rychlosti Pitotovou trubici

Uvažujme proudění kapaliny ve vodorovném potrubí podle obr. 8.21. Je-li v potrubí v průřezu 1 statický tlak p_s, pak kapalina vystoupí v piezometrické trubici připojené k otvoru navrtanému kolmo ke stěně a bez otřepů, do výšky $h_1 = \frac{p_s}{\rho g}$. Hladina v **Pitotově trubici** (trubice zahnutá proti směru proudění potrubí) bude výše a její poloha bude závislá jak na tlaku v potrubí p_s, tak i na rychlosti proudící kapaliny v.

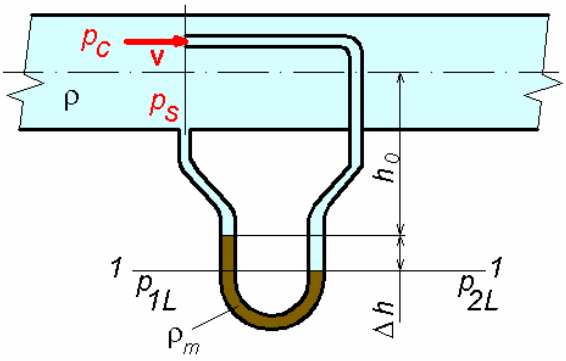
Pro vodorovné potrubí konstantního průřezu můžeme napsat Bernoulliho rovnici pro ideální tekutinu ve tvaru:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = konst \Rightarrow p + \frac{1}{2}\rho v^2 = konst = p_c, \text{ nebo také } p_s + p_d = p_c \qquad (8.2.1)$$

kde p_s je nám už známý statický tlak, $p_d = \frac{1}{2}\rho v^2$ je tlak dynamický a p_c je celkový tlak, měřený Pitotovou trubicí. Z rozdílu tlaků $p_c - p_s = \frac{1}{2}\rho v^2$ lze pro rychlost kapaliny v potrubí odvodit rovnici

$$v = \sqrt{2\frac{p_c - p_s}{\rho}} = \sqrt{2\frac{p_d}{\rho}} = \sqrt{2g\Delta h}, \text{ kde } \Delta h = h_1 - h_2 \qquad (8.2.2)$$

Rozdíl celkového a statického tlaku se může určit z rozdílu výšek hladin v připojených tlakoměrných trubicích, viz obr.8.21, tj. $p_d = \rho g(h_2 - h_1) = \rho g \Delta h$.



obr. 8.22 Měření tlakové diference

V případě vyšších tlaků je vhodnější použít diferenční tlakoměr, např. U-trubici, která je naplněna měřicí kapalinou o hustotě $\rho_m \rangle \rho$. Dynamický tlak $p_d = p_c - p_s = \frac{1}{2}\rho v^2$ určíme z podmínky rovnováhy tlaků v levém a pravém rameni U - trubice (obr. 8.22).

V rovině 1-1 jsou tlaky stejné, takže platí

$$p_{1L} = p_{1P}$$

$p_s + \rho g h_o + \rho_m g \Delta h = p_c + \rho g (h_o + \Delta h)$, odtud pro rozdíl tlaků platí

$$p_c - p_s = p_d = g \Delta h (\rho_m - \rho)$$

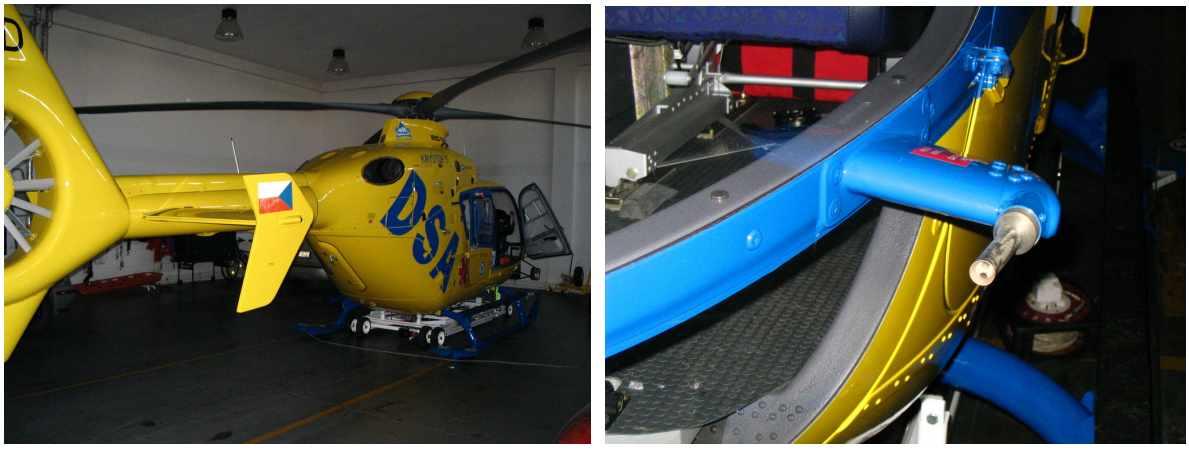
Rychlost proudící tekutiny je pak určena vztahem

$$v = \sqrt{2 \frac{p_c - p_s}{\rho}} = \sqrt{2 g \Delta h \frac{\rho_m - \rho}{\rho}}, \qquad (8.2.3)$$

Jestliže $\frac{\rho_m}{\rho} \rangle\rangle 1$, (např. při proudění plynů) pak se rychlost tekutiny vypočte ze zjednodušeného vztahu

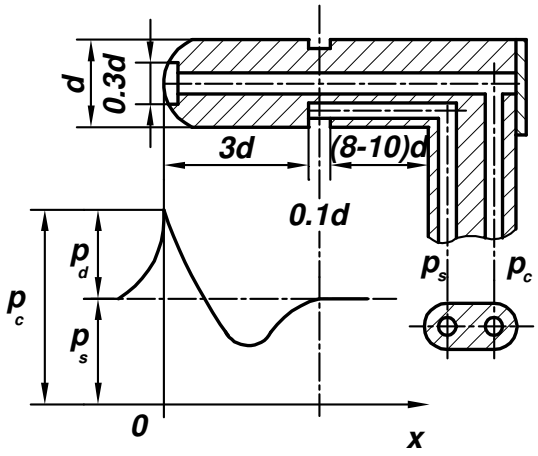
$$v = \sqrt{2 g \Delta h \frac{\rho_m}{\rho}} \qquad (8.2.4)$$

Pitotova trubice se používá v různých aplikacích, jednou z nich je měření rychlosti u vrtulníku, viz obr. 8.23.



obr. 8.23 Vrtulník a detail vrtulníku s Pitotovou trubicí

Prandtlova trubice



obr. 8.24 Prandtlova trubice

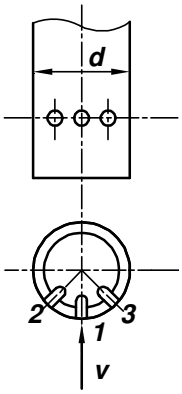
obr. 8.25 Rychlostní sonda

Prandtl navrhl trubici, u níž je odběr celkového i statického tlaku soustředěn v jednom měřidle (obr.8.24). **Prandtlova trubice** je tvořena válcovým tělesem s parabolickým nebo půlkulovým ukončením. V ose trubice je otvor pro odběr celkového tlaku p_c, který je vyveden vnitřní trubicí. Statický tlak p_s se snímá v drážce nebo otvoru na plášti vnější trubice a je vyveden druhou trubicí. Aby tlak p_s byl roven tlaku nerozrušeného proudu, je odběr statického tlaku umístěn ve vzdálenosti rovnající se minimálně třem průměrům trubice od jejího ústí. Pro Prandtlovu trubici pro rychlost platí stejná rovnice jako pro Pitotovu trubici, Odklon Pitotovy trubice od směru proudění do $\pm$ 6° nemá na výsledek měření v podstatě vliv. Prandtlova trubice umožňuje odklon od směru proudění do $\pm$ 15°. Při správném natočení osy trubice do směru vektoru měřené rychlosti je z rovnice vypočtená rychlost s přesností větší než 1%.

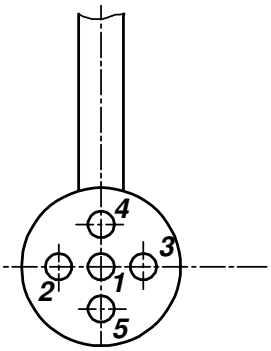
Při měření rychlosti u dvourozměrného proudění se používá **válcová sonda**, viz obr. 8.26, která má tři otvory umístěné symetricky v jedné rovině. Rovina otvorů musí být totožná s rovinou proudění. Otáčením sondy se nalezne poloha, při níž je v otvorech 2 a 3 stejný tlak $(p_2 = p_3)$. Na stupnici úhlů se odečte otočení sondy z výchozí polohy a určí směr rychlosti vzhledem ke zvolené souřadné soustavě. Z tlaku p_1, který je roven celkovému tlaku p_c, se určí rychlost tekutiny. Sonda musí být cejchována, neboť otvory 2 a 3 neměří přesně statický tlak. Jsou zpravidla odkloněny o 45° od osy hlavního otvoru 1.

Kulová sonda, viz obr. 8.27**,** slouží k měření rychlosti proudu. Má pět otvorů symetricky umístěných v kulovitém tělese. Vždy dva páry otvorů jsou umístěny souměrně vzhledem ke střednímu otvoru, a to ve dvou kolmých rovinách. Natáčením sondy kolem její osy (1-4-5) se nalezne poloha, při níž je ve dvou symetricky umístěných otvorech 2 a 3 stejný tlak. Z hodnoty tlaku ve středním otvoru a rozdílu tlaků v otvorech 4 a 5 se z cejchovní

křivky odečte velikost rychlosti a její úhel s rovinou 2-1-3. Pro měření místní rychlosti slouží řada dalších sond.



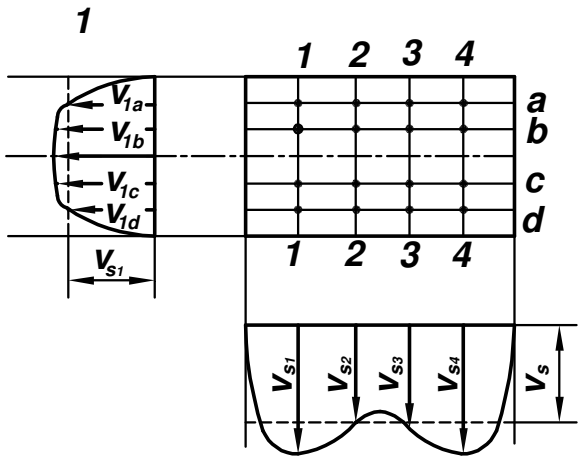
obr. 8.26 Schéma válcové sondy



obr. 8.27 Schéma kulové sondy

Vyšetření rychlostního profilu

Při jednorozměrném proudění, např. v uzavřených kanálech nebo potrubích, při obtékání těles skutečná tekutina na stěně lpí a následkem viskozity je rychlost na stěně nulová. V ostatním průřezu je rychlost nerovnoměrně rozložena po průtočném průřezu. Pitotovou, popř. Prandtlovou trubicí se určuje rychlost v místě, v němž je čelo trubice. Posouváním trubice se změří rychlosti, které jsou závislé na souřadnici. Grafické znázornění průběhu rychlostí po průtočném průřezu se nazývá rychlostní profil.



obr. 8.28 Určení střední rychlosti z rychlostního profilu

Má-li se z naměřeného rychlostního profilu vypočítat střední rychlost, zvolí se v průtočném průřezu vhodný počet bodů – obr. 8.28, ve kterých se změří rychlost. Střední rychlost se pak stanoví integrací přes celý průtočný průřez $v_s = \frac{1}{S}\int_S v\,ds$. Volba počtu bodů nebo rovin je závislá na konkrétních podmínkách. Je-li rychlostní profil nesymetrický, případně vzniká-li zpětné proudění, volí se počet bodů obvykle větší.

8.2.2. Měření střední rychlosti (průřezová měřidla)

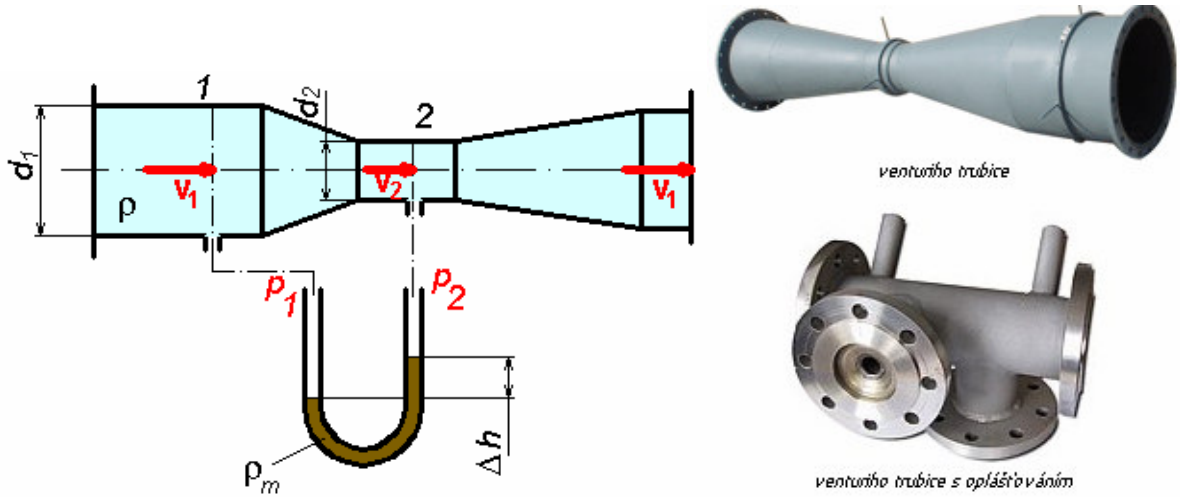
Střední rychlost lze stanovit z tlakového rozdílu mezi dvěma průřezy, z nichž jeden je zúžen, jak je tomu u Venturiho trubice, clony nebo dýzy. Oba měřené tlaky jsou statické. Zúžení průřezu způsobí zvýšení rychlosti a tím pokles statického tlaku. Ten je úměrný

průtokové rychlosti. Při řešení je aplikována Bernoulliho rovnice pro dokonalou kapalinu a rovnice kontinuity.

Měřicí zařízení s průřezovým měřidlem tvoří škrticí orgán (clona, dýza, Venturiho trubice) a diferenční tlakoměr (U-trubice). Největší tlakovou ztrátu vykazuje clona, nejmenší Venturiho trubice.

Venturiho trubice

Venturiho trubice je klasickým představitelem průřezových měřidel - obr. 8.29. Skládá se ze vstupního konfuzoru, krátké válcové části se zúženým průřezem a z delšího difuzoru. Zúžení průtočného průřezu způsobuje nárůst rychlosti (viz rovnice kontinuity), roste dynamický tlak a naopak dochází k poklesu statického tlaku. Tlakový rozdíl je závislý na průtokové rychlosti (nebo průtoku) a dá se jednoduše měřit.



obr. 8.29 Princip Venturiho trubice a průmyslově vyráběné trubice

http://www.mattech.cz/cz/vent_trubice.htm

Napišme Bernoulliho rovnici mezi průřezy 1 a 2 Venturiho trubice s vodorovnou osou při průtoku dokonalé kapaliny.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}\Rightarrow\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2}$$

Dále se využije rovnice spojitosti

$$v_1S_1=v_2S_2;\quad v_1d_1^2=v_2d_2^2\Rightarrow v_2=v_1\frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Pro diferenciální manometr platí, že rozdíl je určen vztahem

$$\Delta p=p_1-p_2=g\Delta h\left(\rho_m-\rho\right)$$

Dosazením vztahu pro tlakovou diferenci a rychlost v_2 do Bernoulliho rovnice dostaneme výraz pro střední rychlost v_1

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{v_1^2}{2}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - \frac{v_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]}\frac{\rho_m - \rho}{\rho}} = K_v\sqrt{\Delta h} \tag{8.2.5}$$

Pro **průtok** platí rovnice

$$Q = v_1 S_1 = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right]}\frac{\rho_m - \rho}{\rho}} = K_Q\sqrt{\Delta h} \tag{8.2.6}$$

Při průtoku skutečné tekutiny bude následkem hydraulických odporů skutečná rychlost menší. Tento vliv se zahrne v součinitelích K_v, K_Q. Praktické provedení Venturiho trubice se provádí podle ČSN ISO 5167-1, kde jsou uvedeny hodnoty součinitelů K_v, K_Q v závislosti na zúžení $m = S_1 / S_2$ a velikosti Reynoldsova čísla Re.

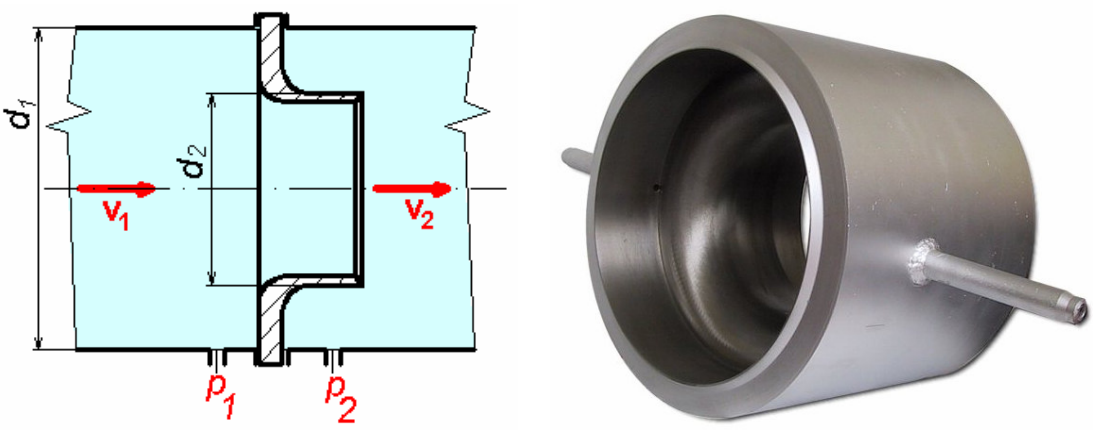
Clona a dýza

Vedle Venturiho trubice se častěji pro měření střední rychlosti nebo průtoku používá **clona** nebo **dýza**, jejichž podrobný výpočet uvádí ČSN ISO 5167-1.

obr. 8.30 Schéma clony a průmyslově vyráběná clona centrická a excentrická

http://www.mattech.cz/cz/vent_trubice.htm

Clona (obr. 8.30) je deska, jejíž otvor má menší průměr než je světlost potrubí. Tím se průtokový průřez zúží v poměru $m = \frac{S_c}{S_p} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$. Podobně je tomu u dýzy, viz schéma na obr. 8.1.



obr. 8.31 Schéma dýzy a průmyslově vyráběná dýza

http://www.mattech.cz/cz/vent_trubice.htm

Střední rychlost v otvoru clony nebo dýzy je dána obdobnou rovnicí jako u Venturiho trubice

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(\alpha\varphi m)^2}}\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}} \tag{8.2.7}$$

Pak průtok je definován jako

$$Q = \alpha\varphi S_c v_2 = \mu S_c\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}} \tag{8.2.8}$$

kde výtokový součinitel je $\mu = \frac{1}{\sqrt{1-(\alpha\varphi m)^2}}$, α je součinitel kontrakce, φ je rychlostní součinitel (zahrnuje třecí odpor skutečných tekutin). Závislost $\mu = f(m,\mathrm{Re})$ se ověřuje experimentálně a znázorňuje se pomocí diagramu v normách.

K odstranění rušivého vlivu zakřivených částí potrubí, armatur apod. na přesnost měření výše uvedenými průřezovými měřidly jsou předepsány minimální délky přímých částí potrubí před měřicím místem $l_1 = (5 \div 30)d$ a za měřicím místem $l_2 = 5d$.

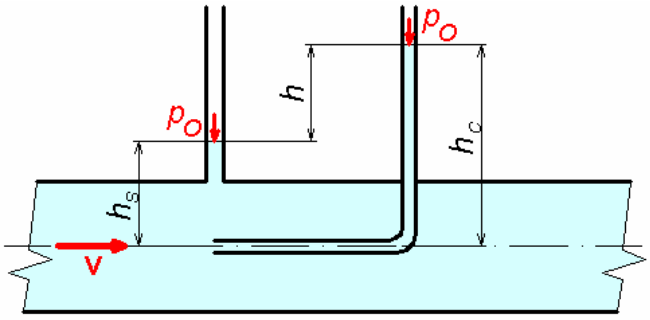
Přesné metody měření rychlosti

Pro měření okamžitých hodnot rychlostí je třeba použít metod s malou setrvačností, nejrozšířenější je **metoda žhaveného drátku**, nebo optický anemometr, také nazývaný **Laser Doplerovský anemometr** (LDA).

Řešený příklad

Vypočítejte rychlost vody, která se měří Pitotovou trubici v ose potrubí. Určete dynamický tlak p_d.

Zadáno:		
$h_s = 0.3$	m	
$h_c = 0.4$	m	
$\rho = 1000$	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$v = ?$	m.s^{-1}	1.40
$p_d = ?$	Pa	981.00



$$p_d = \rho g h_c - \rho g h_s = \rho g (h_c - h_s) = \rho g h$$

$$p_d = \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2p_d}{\rho}}$$

8.3. Měření průtoků

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

vyjmenovat nejčastější typy průtokoměrů
seznámíte se s popisem jednotlivých měřidel a oblastí jejich použití

Výklad

Pro měření průtoku plynů a kapalin existuje řada rozličných přístrojů, které využívají různých fyzikálních principů. To je podmíněno tím, že existují velké rozdíly v chemických i fyzikálních vlastnostech průmyslových tekutin a rovněž se značně odlišují podmínky i účel měření.

- **Objemová měřidla** slouží k odměřování objemu plynu nebo kapaliny v odměrných nádobách (prostorách), jsou založeny na cyklickém plnění a vyprazdňování odměrných prostor a měřítkem proteklého množství je počet měřicích cyklů. Do této skupiny patří:
  - – pístový průtokoměr
  - – membránový plynoměr
  - – bubnový plynoměr
- **Průtokoměry s měřením tlakové diference** jsou založeny na jednoduchém principu, kdy v potrubí dochází ke zúžení průtočného průřezu a snímá se rozdíl statických tlaků

diferenčním tlakoměrem před a za zúžením, který je závislý na velikosti průtoku. Typy těchto průtokoměrů jsou následující:

– rychlostní sondy

– průřezová měřidla (clona, dýza, Venturiho trubice)

– kapilární průtokoměr

Z dalších typů pracujících na základě jiných principů měření lze uvést:

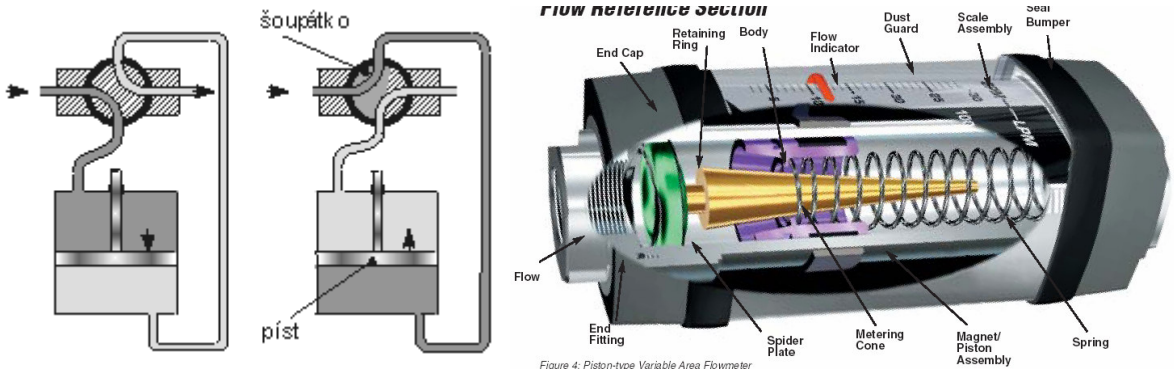
- Rotametry
- Průtokoměry turbinkové a lopatkové
- Ultrazvukové průtokoměry
- Průtokoměry vírové
- Průtokoměry hmotnostní
- Corriolisův průtokoměr
- Tepelné průtokoměry

Doplňující (nepovinný) text

8.3.1. Pístový průtokoměr

Pístová měřidla patří mezi nejpřesnější přístroje pro měření proteklého množství kapalin. Měřenou kapalinou se střídavě naplňují a vyprazdňují odměrné prostory vymezené pístem a tělesem měřidla. Vlivem tlakového spádu na měřidle dochází k pohybu pístu, který je spojen s počítadlem.

Běžně se užívá dvou i více odměrných prostorů, jejichž funkce je svázána tak, aby byl zajištěn plynulý chod měřidla i nepřerušovaný průtok média. Některé konstrukce užívají dvojčinného válce s pístem, který vykonává přímočarý vratný pohyb. Pístní tyč pak ovládá šoupátkový rozvod a počítadlo. Dále se užívá pístů vykonávajících točivý nebo krouživý pohyb. Pístová měřidla jsou vhodná pro měření i velmi viskózních kapalin.



obr. 8.32 Schéma pístového průtokoměru a průmyslově vyráběný pístový průtokoměr

http://www.mattech.cz/cz/vent_trubice.htm

8.3.2. Plovákový průtokoměr

Základem plováčkového průtokoměru je svislá kónická měřicí trubice, která se rozšiřuje směrem nahoru. V ní se volně pohybuje plováček z materiálu s hustotou větší než je hustota měřené tekutiny. Pokud tekutina neproudí, je plováček v trubici dole. Jakmile začne tekutina proudit, začne se plováček zvedat. Při určitém průtoku zaujme plováček rovnovážnou polohu s takovou plochou mezikruží, při níž je síla nadnášející plováček právě rovna gravitační síle, kterou na něj působí zemská přitažlivost. Zdvih plováčku je úměrný rychlosti proudění. Tvary plováčků se řídí účelem použití. Poloha plováčku se zjišťuje buď přímo na stupnici na stěně skleněné trubice průtokoměru, nebo se snímá elektricky.

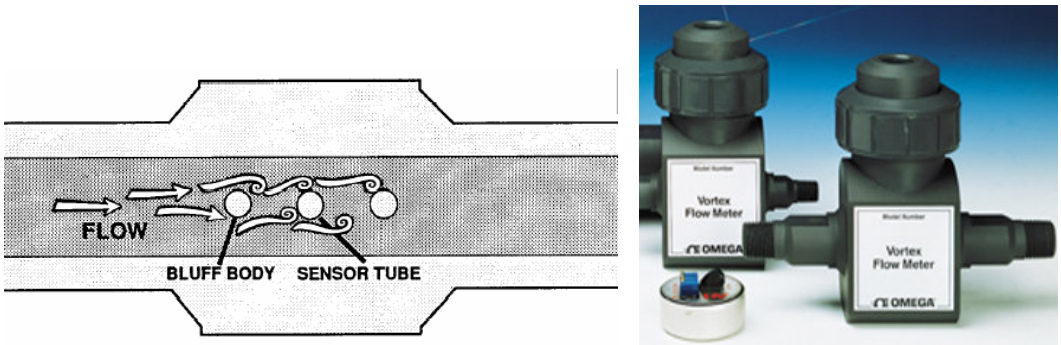
K nejvýznamnějším výhodám těchto průtokoměrů patří jejich měřicí rozsah (10:1), malá tlaková ztráta, snadná instalace, relativně nízká cena a schopnost měřit i malé průtoky.

obr. 8.33 Kovový plováčkový průtokoměr

obr. 8.34 Skleněné plováčkové průtokoměry

8.3.3. Vírový průtokoměr

Vírové průtokoměry využívají tzv. Kármánova efektu. Při něm tekutina obtéká vložené těleso za vzniku vírů. Pak frekvence vytvářených vírů je přímo úměrná rychlosti proudící tekutiny. Vznik vírů na přepážce je doprovázen změnou tlaku nebo rychlosti, což je snímáno vhodným senzorem a převedeno na elektrický signál. Známé typy vírových průtokoměrů se liší hlavně tvarem a velikostí vloženého tělesa, místem , kde je těleso v potrubí umístěno, a principem snímání. Výhodou vírových průtokoměrů je to, že jsou relativně necitlivé na změny teploty, tlaku nebo hustoty měřeného média, dále jejich tlaková ztráta je velmi malá a lze tyto průtokoměry použít v rozsahu 20:1.

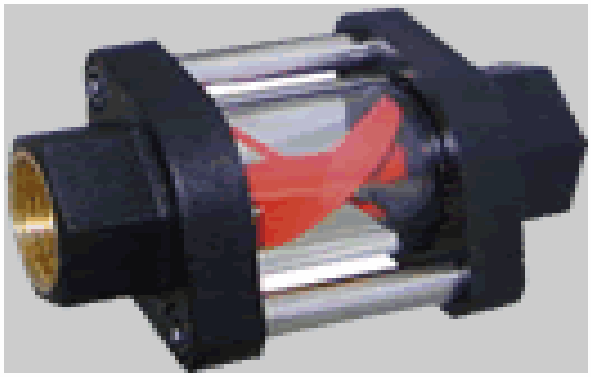


obr. 8.35 Schéma vírového průtokoměru a průmyslově vyráběný vírový průtokoměr

http://www.mattech.cz/cz/vent_trubice.htm

8.3.4. Turbínové průtokoměry

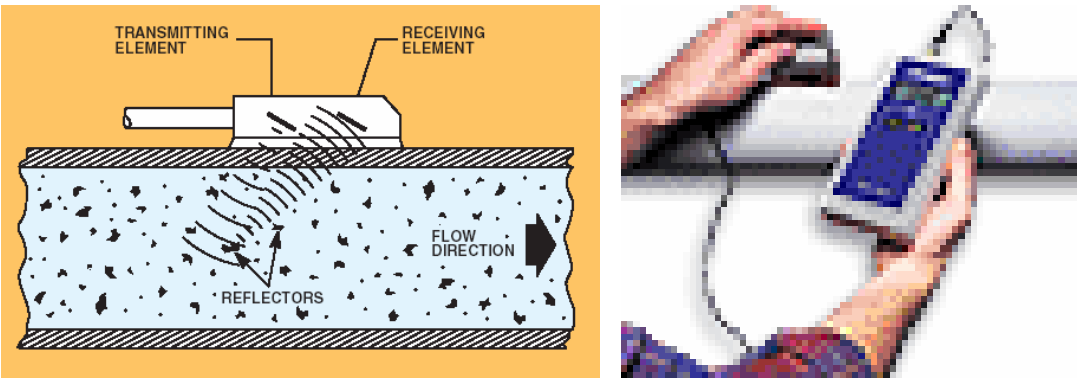
Turbínové průtokoměry obsahují měřicí turbínku, která se díky protékající tekutině otáčí s rychlostí závisející na průtoku. Její otáčky jsou bezdotykově snímány (např. indukčním principem), frekvence otáčení pak udává průtok a množství otáček protečený objem (hmotnost) tekutiny. Podobně pracují i lopatkové a šroubové průtokoměry.



Obr. 8.36 Turbínový průtokoměr

8.3.5. Ultrazvukový průtokoměr

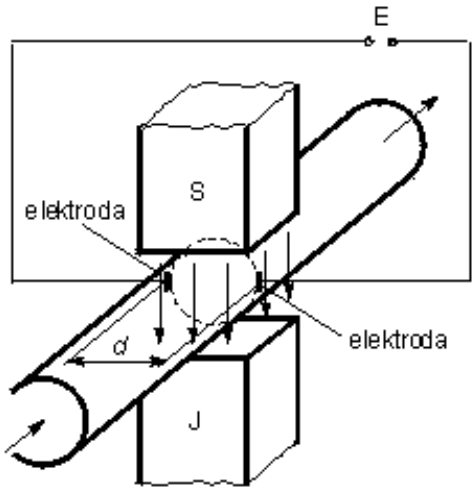
Ultrazvukové průtokoměry jsou přístroje měřící průtok bezkontaktně, bez použití mechanických částí. Ultrazvukové průtokoměry používají pro měření rychlosti proudění tekutiny v potrubí ultrazvukového vlnění. Přístroje, které využívají Dopplerova principu, vysílají do tekutiny ultrazvukové vlny s konstantní frekvencí a přijímají vlnění odražené od pevných částic nebo od bublin rozptýlených v tekutině. Vzhledem k pohybu částic nebo bublin s tekutinou, je frekvence přijatého ultrazvukového vlnění odlišná od frekvence vyslané vlny. Rozdíl frekvencí je pak úměrný rychlosti proudění tekutiny.

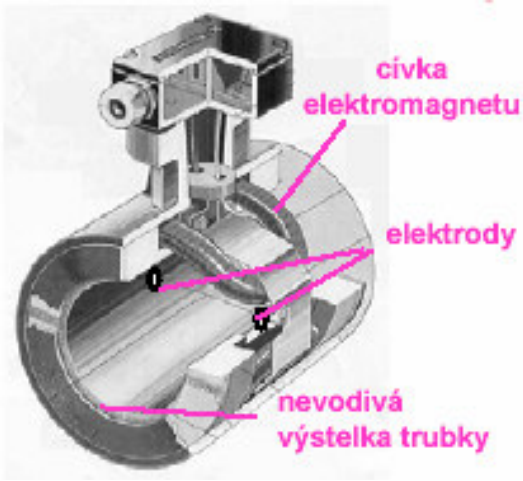


obr. 8.37 Schéma ultrazvukového průtokoměru a průmyslově vyráběný ultrazvukový průtokoměr (http://www.mattech.cz/cz/vent_trubice.htm)

8.3.6. Indukční průtokoměr

Tyto průtokoměry využívají principu Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Pohybem vodiče (u měření průtoku pohybem tekutiny) v homogenním magnetickém poli se indukuje elektrické napětí. Magneticko-indukční průtokoměry je možno použít ve všech průmyslových odvětvích pro měření elektricky vodivých kapalin (čistých nebo s obsahem pevných částic), kalů a kaší. Podmínkou pro správné měření průtoku je, že potrubí musí být zcela zaplněno tekutinou. Protože se tyto průtokoměry nevkládají do potrubí (jsou bezdotykové), nezpůsobují žádnou trvalou tlakovou ztrátu. Navíc nemají žádné pohyblivé části, které by podléhaly opotřebování.





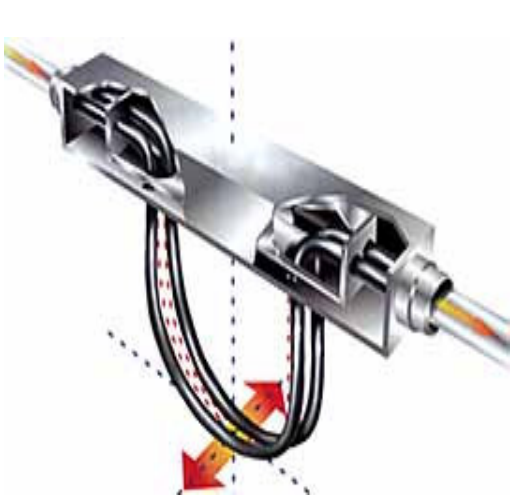
obr. 8.38 Schéma indukčního průtokoměru a průmyslově vyráběný indukční průtokoměr
http://www.mattech.cz/cz/vent_trubice.htm

Vedle nepřímého zjištění hmotnostního průtoku přepočtem z objemového průtoku existuje relativně málo přímých metod měření hmotnostního průtoku. Dvěmi základními metodami jsou:

- Corriolisův průtokoměr
- Tepelný hmotnostní průtokoměr

8.3.7. Corriolisův průtokoměr

Tento průtokoměr využívá tzv. Corriolisovy síly, která vzniká ve vibrujících měřicích trubicích při průtoku hmotného média. Fázový posuv v rezonančním kmitání trubic, který vzniká jako důsledek působení Corriolisovy síly, je úměrný hmotnostnímu průtoku tekutiny trubicí a frekvence vlastních kmitů odpovídá hustotě tekutiny. Corriolisovy průtokoměry měří hmotnostní průtok velice přesně a jejich údaj je v podstatě nezávislý na teplotě, tlaku, viskozitě, obsahu pevných částic v tekutině, atd.



Obr. 8.39 Coriolisův průtokoměr

8.3.8. Tepelný hmotnostní průtokoměr

Tepelný hmotnostní průtokoměr vychází ze závislosti výměny tepla mezi zdrojem a okolím, které tvoří proudící tekutina na hmotnostním průtoku. Existují dva typy:

- termoanemometr
- kalorimetrické průtokoměry

Termoanemometr je elektricky vyhřívaná sonda, která je vložena do potrubí, ve kterém proudí tekutina. Množství tepla odebíraného na sondě tekutinou je závislé na rychlosti proudění, hustotě, tepelné vodivosti a na teplotě proudícího média, kterou je potřeba měřit. Čidlem termoanemometrů bývá platinový drátek o průměru 0,01 až 0,1 mm, který je žhavený na teplotu 200 až 500 °C. Můžeme použít termoanemometr, který má sondu vyhřívanou konstantním elektrickým proudem, kdy se změnou průtoku se mění teplota sondy a tuto změnu teploty měříme. Druhým typem je sonda s konstantní teplotou. V tomto případě zjišťujeme velikost elektrického proudu, která musí být taková, aby sonda i při změně rychlosti proudění měla stále stejnou hodnotu. Pak velikost elektrického proudu je úměrná hmotnostnímu průtoku.

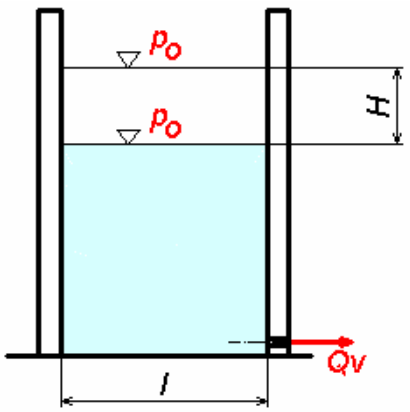
Obr. 8.40 Příklady některých provedení termoanemometrů [16]

Kalorimetrické průtokoměry mají zdroj tepla umístěn do středu proudového profilu a teplota se snímá před a za tímto zdrojem tepla. Průtok se pak určujeme z rozdílu teplot.

Řešený příklad

Ve zdymadlové komoře o šířce b a délce l se sníží hladina vody o výšku h za čas t. Určete střední objemový průtok vody Q_v ve výpustném zařízení.

Zadáno:			
b =	40	m	
l =	300	m	
h =	8	m	
t =	30	min	
Vypočtěte:			Výsledky:
Q_v = ?		m^3s^{-1}	53.33



Řešení:

$$Q_v = \frac{V}{t} = \frac{blh}{t}$$

Shrnutí kapitoly

Kapalinové tlakoměry, pístové tlakoměry, deformační tlakoměry, elektrické tlakoměry, princip měření tlaku pomocí různých tlakoměrů, princip kalibrace tlakoměru, pitotova trubice, prandtlova trubice, kulová sonda – měření místní rychlosti, definice dynamického tlaku, vyjádření rychlosti, měření střední rychlosti, clona, dýza, venturiho trubice, bernouliho rovnice v aplikaci na průřezová měřidla, měření objemového průtoku a hmotnostního průtoku, pístový, plovákový, vírový, turbínový průtokoměr, ultrazvukový, indukční, coriolisův a tepelný průtokoměr, princip měření průtoku, popis měřidel průtoku.

Kontrolní otázky

Jaké jsou typy tlakoměrů podle druhu měřeného tlaku?

Jaké jsou typy kapalinových tlakoměrů?

K čemu se používá pitotova trubice?

Jaké jsou rychlostní profily u laminárního a turbulentního proudění v trubici?

Která průřezová měřidla se používají k měření střední rychlosti a průtoku?

Na jakém principu měříme průtok pomocí indukčního průtokoměru?

Jaké typy průřezových měřidel průtoku se používají?

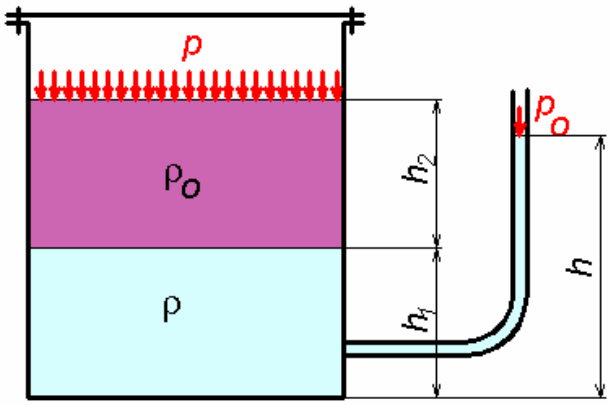
Jaké dvě metody se používají k měření hmotnostního průtoku?

Úkoly k řešení

Příklad 8.1

Otevřená svislá válcová nádrž je naplněna vodou o výšce h_1 a olejem o výšce h_2. Tlak vody u dna nádrže je změřen piezometrickou trubicí s výškou hladiny h. Jaká je hustota oleje ρ_o? Jaká bude výška hladiny v piezometrické trubici (h'), když se nádrž uzavře a tlak v nádrži stoupne o Δp?

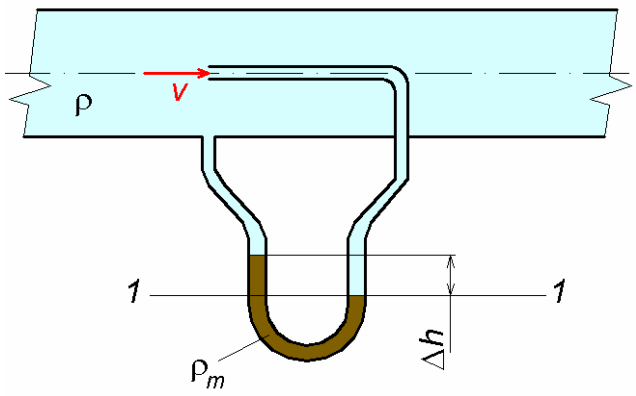
Zadáno:		
h_1 = 0.2	m	
h_2 = 1.2	m	
h = 1.2	m	
p_0 = 0.10132	MPa	
ρ = 1000	kg.m^{-3}	
Δp = = 0.01	MPa	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
ρ_o = ?	kg.m^{-3}	833.33
h' = ?	m	2.21936



Příklad 8.2

Vypočítejte rychlost vody v, která se měří Pitotovou trubicí v ose potrubí. Rozdíl celkového a statického tlaku je měřen pomocí U-trubice naplněné rtutí o hustotě ρ_m.

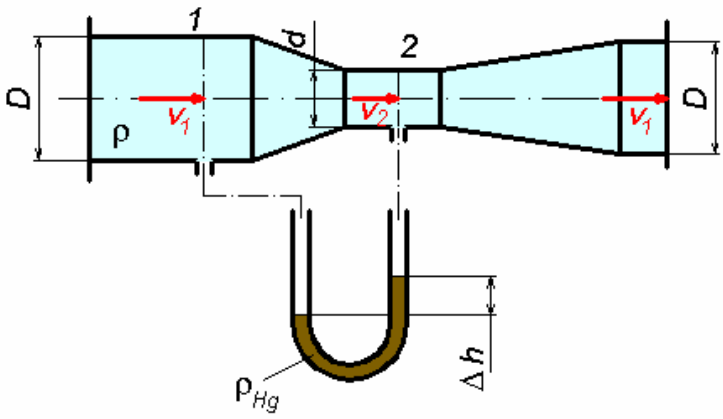
Zadáno:		
Δh = 0.017	m	
ρ_m = 13600	kg.m^{-3}	
ρ = 1000	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v = ?	m.s^{-1}	2.05
p_d = ?	Pa	2 101.30



Příklad 8.3

Průtok vody v potrubí se měří Venturiho trubicí spojenou s diferenciálním U - manometrem se rtuťovou náplní. Jsou dány průměry D, d a změřen rozdíl tlaků Δh. Vypočtěte objemový průtok Q_v za předpokladu, že se voda chová jako dokonalá kapalina. Určete Re číslo.

Zadáno:			
D =	0.25	m	
d =	0.075	m	
Δh =	0.55	m	
ρ_{Hg} =	13600	kg.m^{-3}	
ρ =	1000	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:			**Výsledky:**
v_1 =	?	m.s^{-1}	1.054
Q_v =	?	m^3.s^{-1}	0.05174
Re =	?		263 500



9. Ustálené proudění v potrubí

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• rozlišit laminární a turbulentní proudění • určit jejich rychlostní profily v potrubí • definovat odpory třením a místní • vyhodnotit charakteristiku potrubí • řešit hydraulické parametry v potrubí	

Laminární proudění je podstatně jednodušší než turbulentní, v technické praxi se vyskytuje tam, kde jsou malé průtočné kanály, větší viskozita kapaliny a menší průtokové rychlosti. Jednoduché případy laminárního proudění lze řešit analyticky integrací Navierových - Stokesových rovnic, složitější případy proudění se řeší numerickými metodami. Při řešení laminárního proudění se uplatňuje Newtonův vztah pro smykové (vazké) napětí $\tau = \eta \frac{dv}{dy}$, který odpovídá skutečnosti, a proto se dosahuje dobrá shoda s experimentálními výsledky. U turbulentního proudění je podstata smykového napětí složitější.

9.1. Laminární proudění v úzké štěrbině

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

odvodit laminární proudění úzkou štěrbinou

určit rychlostní profil a průtok

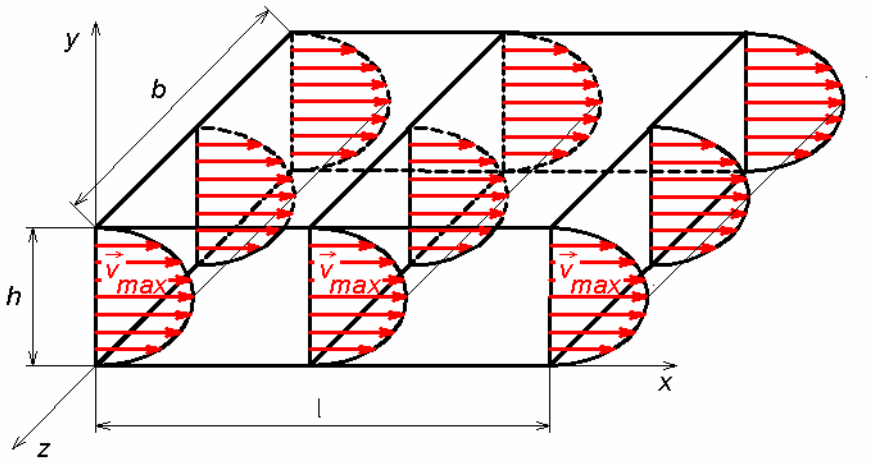
určit střední rychlost proudění analyticky

Výklad

Proudění v dlouhé úzké mezeře mezi rovnoběžnými stěnami, které se mohou také pohybovat, viz obr. 9.1, je popsáno obecně rovnicí kontinuity $div\,\vec{v} = 0$ a Navierovou –

Stokesovou rovnicí, vyjadřující rovnováhu sil hmotnostních, tlakových, třecích a setrvačných

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{a} - \frac{1}{\rho}\text{grad}p + \nu\Delta\vec{v}.$$



obr. 9.1 Proudění mezi rovnoběžnými stěnami

Předpokládá se vodorovná štěrbina, tudíž hmotnostní (tíhové) síly jsou rovny nule ($\vec{a}=0$). Proudění je ustálené, rychlost se v čase nemění a tedy i setrvačné síly jsou rovny nule ($\frac{D\vec{v}}{Dt}=0$). Rychlostní profil je vyvinutý a po délce štěrbiny se nemění. Uvažujeme jednorozměrné proudění, tedy v_y a v_z a všechny jejich změny (derivace) jsou nulové. Fyzikální vlastnosti jako hustota a viskozita jsou konstantní.

Rychlostní profil (viz obr. 9.1) je dán pouze změnou v_x po výšce štěrbiny y. Za těchto předpokladů se Navier - Stokesova rovnice zjednoduší na tvar:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \qquad (9.1.1)$$

Tato rovnice vyjadřuje rovnováhu sil tlakových a třecích. Předpokládáme-li, že na délce l dojde ke tlakové ztrátě Δp, pak na základě daného tlakového spádu $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{l}$ a okrajových podmínek rychlosti na stěnách můžeme odvodit rychlostní profil v úzké mezeře. Užitím postupné dvojí integrace dostaneme:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{x}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l} \Rightarrow \qquad (9.1.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l}y + konst1 \Rightarrow$$

$$v_x = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l}\frac{y^2}{2} + konst1.y + konst2$$

Pro určení integrační konstanty 1 a 2 je nutné využít okrajové podmínky na stěnách, kde je nulová rychlost, tj. pro $y = 0$ je $v_x(0) = 0$, pak po dosazení je $konst2 = 0$ a pro $y = \mathrm{h}$ je $v_x(h) = 0$ a $konst1 = \frac{1}{2\eta}\frac{\Delta p}{l}h$. Výsledkem je **parabolická závislost rychlosti** v_x na y.

$$v_x = \frac{1}{2\eta}\frac{\Delta p}{l}(h-y)y \qquad (9.1.3)$$

Rychlostní profil je kvadratická parabola. Maximální rychlost se určí z podmínky pro maximum, tj. $\frac{dv}{dy} = 0$. Maximální rychlost je uprostřed vzdálenosti desek h, čili $y = \frac{h}{2}$

$$v_{\max} = \frac{h^2}{8\eta}\frac{\Delta p}{l} \qquad (9.1.4)$$

Průtok se určí integrací elementárního průtoku $dQ = bv_x dy$, který protéká elementární ploškou *b.dy*

$$Q = b\int_0^h v_x dy = \frac{b}{2\eta}\frac{\Delta p}{l}\int_0^h \left(hy - y^2\right)dy = \frac{b}{12\eta}\frac{\Delta p}{l}h^3 \qquad (9.1.5)$$

Střední rychlost podle průtoku je

$$v_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{bh} = \frac{h^2}{12\eta}\frac{\Delta p}{l} \qquad (9.1.6)$$

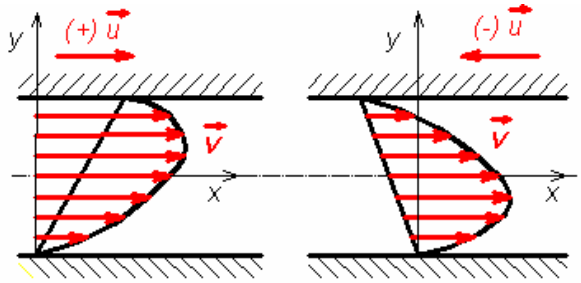
Poměr střední a maximální rychlostí je

$$\frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{3} \qquad (9.1.7)$$

Proudění v mezeře může být ovlivněno kromě tlakového spádu též pohybem horní stěny rychlostí $\pm u$. Pro tento případ se odvodí rychlostní profil pro okrajové podmínky $v_x(0) = 0, v_x(h) = \pm u$. Pak se změní integrační konstanty a po dosazení do rovnice (9.1.2) je rychlostní profil určen vztahem

$$v_x = \frac{\Delta p}{2\eta l} h^2 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \pm u \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right) \qquad (9.1.8)$$

Rychlostní profily jsou znázorněny pro oba smysly unášivé rychlosti u na obr. 9.2.



obr. 9.2 Rychlostní profily složeného proudění

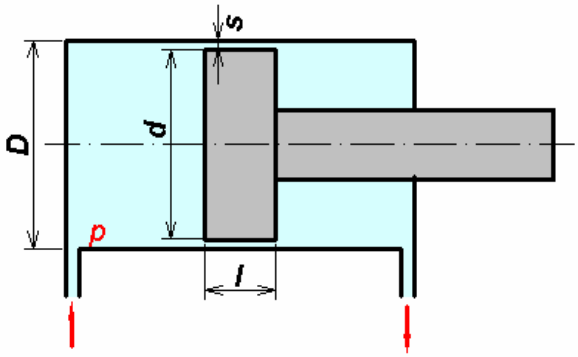
Jestliže je proudění vyvoláno jen unášením, pak $\frac{\Delta p}{l} = 0$ a rychlostní profil je lineární

$$v_x = \pm u \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right) \qquad (9.1.9)$$

Řešený příklad

V hydraulickém válci o průměru d a délce l se udržuje stálý tlak p. Určete největší přípustnou radiální mezeru s mezi pístem a válcem, přičemž při maximální možné výstřednosti pístu nesmí být objemové ztráty oleje o viskozitě η při teplotě 100°C větší než zadané Q. Pro jednoduchost předpokládejte, že válcová mezera je velmi úzká a tudíž je rozvinuta na mezeru obdélníkovou o šířce $b = \pi d$.

Zadáno:		
$d = 40$	mm	
$l = 80$	mm	
$Q = 0.005$	$dm^3.s^{-1}$	
$p = 2$	MPa	
$\eta = 0.0051$	Pa.s	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$b = ?$	m	0.12566
$s = ?$	m	0.00005



Řešení:

$$s = \sqrt[3]{\frac{12 Q_V l \eta}{p b}}$$

9.2. Laminární proudění v potrubí kruhového průřezu

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

odvodit rovnici laminárního proudění potrubím kruhového průřezu

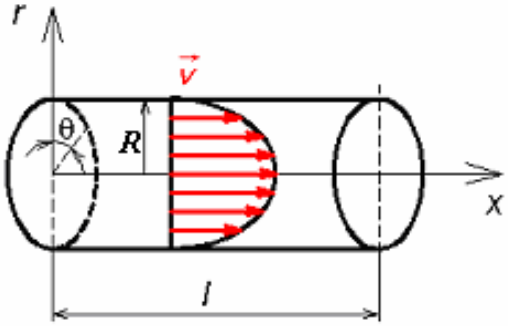
určit rychlostní profil a průtok

určit střední rychlost proudění analyticky

Výklad

Laminární proudění v trubici kruhového průřezu nastane při $\mathrm{Re} \leq \mathrm{Re}_{krit} = 2320$. Učiníme stejné předpoklady jako v předešlém případě, tj. potrubí je vodorovné, proudění je ustálené, rychlostní profil je vyvinutý. Na proudící tekutinu působí pouze síly tlakové a třecí. V důsledku viskozity dojde na délce potrubí l ke tlakové ztrátě Δp.

Při proudění ve vodorovném potrubí se přepokládá válcový souřadný systém, viz obr. 9.3.



obr. 9.3 Rychlostní profil v potrubí, válcový souřadný systém

Při axiálním proudění nestlačitelné tekutiny v dlouhé trubce s kruhovým průřezem lze předpokládat zjednodušení pro rychlosti úhlové $v_\theta = 0$ a radiální $v_r = 0$ a derivace všech proměnných podle úhlu θ vzhledem k válcové symetrii. Pak analogicky předchozímu postupu avšak vzhledem k válcovému souřadnému systému se odvodí rovnice pro rychlostní profil ve tvaru :

$$v_x = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{l}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{1}{16\eta}\frac{\Delta p}{l}\left(D^2 - d^2\right) \qquad (9.2.1)$$

Grafické znázornění rovnice rychlostního profilu v rovině řezu procházejícího osou trubice je **kvadratická parabola**. V prostotu představuje rychlostní profil **rotační paraboloid**, viz **obr. 9.3**.

Na stěně pro $r = R$ bude rychlost $v_x = 0$, v ose potrubí pro $r = 0$ je rychlost maximální .

$$v_{x\max} = v(r)\big|_{r=0} = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{l}R^2 = \frac{1}{16\eta}\frac{\Delta p}{l}D^2.$$

Průtok trubicí se určí integrací elementárního průtoku kapaliny $dQ = 2\pi r v_x dr$, který protéká elementárním mezikružím na poloměru r o šířce dr tlakovým rozdílem Δp na délce trubice l

$$Q = \int_S v_x dS = \int_0^R 2\pi r.v_x dr = \frac{\pi}{8\eta}\frac{\Delta p}{l}\int_0^{\frac{D}{2}}\left[R^2 - r^2\right]r.dr = \frac{\pi D^4}{128\eta}\frac{\Delta p}{l} \qquad (9.2.2)$$

Tuto rovnici odvodil v roce 1840-1841 Poiseuille, francouzský lékař, který studoval proudění krve v žílách. Uvedený výraz platí přesně pro laminární proudění. Experimentálně ověřil tento zákon prouděním vody ve skleněných kapilárách. Nezávisle na něm odvodil uvedený výraz též Němec Hagen v roce 1839. Proto se označuje tato rovnice dosti často jako Hagen-Poiseuilleova.

Střední rychlost podle průtoku se vypočítá ze vztahu

$$Q = \pi.\frac{D^2}{4}.v_s = \frac{\pi D^4}{128\eta}\frac{\Delta p}{l}, \qquad (9.2.3)$$

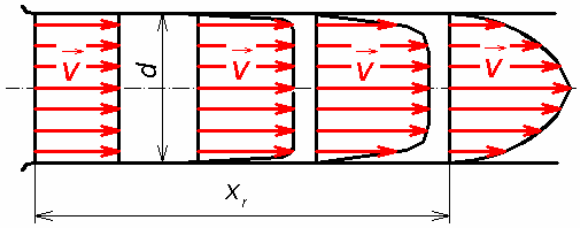
z čehož

$$v_s = \frac{D^2}{32\eta}\frac{\Delta p}{l} \qquad (9.2.4)$$

Porovnáním střední rychlosti a maximální vyplývá vztah

$$\frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{1}{2} \qquad (9.2.5)$$

Je třeba připomenout, že laminární proudění v potrubí nastane při $\mathrm{Re} \le 2320$, což je současně podmínkou platnosti Hagen-Poiseuillova zákona. Zákon Poiseuilleův platí jen pro ustálené laminární proudění, kdy rychlostní profil v jednotlivých průřezech je stejný, což nastává po určité dráze od počátku trubice - obr.9.4.



obr. 9.4 Rozběhová dráha laminárního profilu

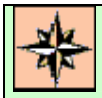
Tekutina po vstupu do trubice má rychlostní profil odpovídající dokonalé tekutině. V prvém okamžiku mají částečky kapaliny u stěny rychlost stejnou jako v ostatním proudu kapaliny.

Teprve stykem kapaliny se stěnou jsou částečky zbrzděny, čímž vznikají tečná napětí od vazkosti mezi jednotlivými vrstvami proudu a objevují se rozdíly v rychlostech částic. Tak jsou postupně zbrzďovány další částice a v jádru proudu jsou částice naopak urychlovány. Dráha na níž se vyvíjí rychlostní profil, se nazývá **rozběhovou drahou** laminárního proudu.

Pro rozběhovou dráhu uvádí Boussinesq výraz $\frac{x_r}{d} \geq 0{,}065\,\mathrm{Re}$, Schiller $\frac{x_r}{d} \geq 0{,}025.\mathrm{Re}$.

Je zřejmé, že k ustálení rychlostního profilu dojde dosti daleko od vstupního průřezu, takže v krátkých trubkách se laminární rychlostní profil nevyvine, a proto u nich zákon Hagen-Poiseuilleův neplatí.

S postupem při odvození rychlostního profilu v potrubí kruhového průřezu za předpokladu laminárního potrubí se můžete seznámit v následujícím doplňujícím textu.



Doplňující (nepovinný) text

Výchozí Navierova-Stokesova rovnice ve válcovém souřadném systému je ve tvaru:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right]$$

Profil rychlosti se získá integrací pohybové rovnice při zadaném tlakovém spádu: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{l}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l}r \Rightarrow$$

$$r\,\frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l}\frac{r^2}{2} + konst1 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l}\frac{1}{2}r + \frac{konst1}{r} \Rightarrow$$

$$v_x = -\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l}\frac{r^2}{4} + konst1\ln(r) + konst2$$

Integrační konstanty 1 a 2 se definují z okrajových podmínek. V ose $r = 0$ je rychlost v_x konečná, přitom $\ln(0) = -\infty$, proto musí být $konst1 = 0$. Pro $r = R$ je rychlost nulová $v_x(R) = 0$ a po dosazení je $konst2 = \frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{l}\frac{R^2}{4}$. **Rychlostní profil je parabolický** ve tvaru

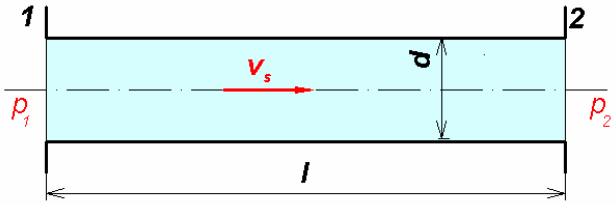
$$v_x = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{l}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{1}{16\eta}\frac{\Delta p}{l}\left(D^2 - d^2\right).$$

Řešený příklad

Příklad 9.1

Určete tlakovou ztrátu p_z ve vodorovném potrubí o průměru d a délce l, ve kterém proudí olej rychlostí v_s. Hustota oleje je ρ a kinematická viskozita ν.

Zadáno:		
d =	10 mm	
l =	15 m	
v_s =	2.5 m.s^{-1}	
ρ =	900 kg.m^{-3}	
ν =	0.00016 m^2.s^{-1}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Re = ?		156.25
p_z = ?	Pa	1 728 000



Řešení:

$$\mathrm{Re} = \frac{d\,v_s}{\nu}, \quad v_s = \frac{d^2}{32\eta}\frac{p_z}{l} \Rightarrow p_z = \frac{32\eta l}{d^2}$$

9.3. Turbulentní proudění v trubici kruhového průřezu

Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

odlišit turbulentní proudění od laminárního

popsat princip časového středování u turbulence

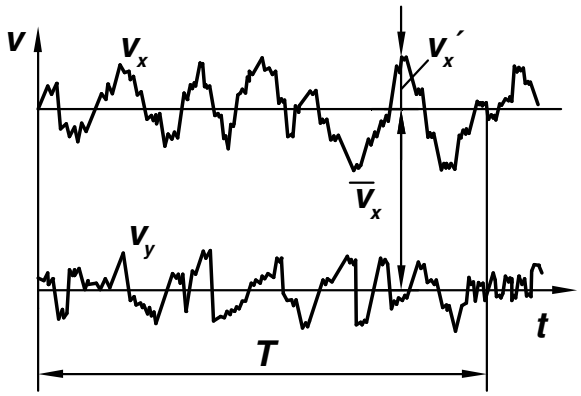
definovat logaritmický a mocninný rychlostní profil v potrubí

Výklad

Již v polovině minulého století Reynolds zjistil a formuloval, že se skutečná tekutina může pohybovat dvěma kvalitativně zcela odlišnými typy proudění, které pak byly nazvány laminární a turbulentní. Rozhraní mezi oběma druhy proudění udává Reynoldsovo kritické číslo. Jeho hodnota je závislá na řadě parametrů např. na geometrii proudu, tlakovém spádu, atd. Pro potrubí kruhového průřezu je spodní mez asi 2 300. Pro ustálené laminární proudění je charakteristické, že se částice tekutiny pohybují po paralelních drahách, jednotlivé vrstvy se navzájem nemísí (neuvažujeme molekulární difúzi). Laminární proud vytékající z vodovodu má hladký povrch jako skleněná tyč. Pro turbulentní proudění jsou typické pulsace všech veličin např. rychlostí. Trajektorie částic tekutiny jsou nepravidelné, dochází k intenzivnímu promíchávání celého objemu proudící tekutiny. Povrch turbulentního proudu

vody vytékajícího z vodovodu je proto nepravidelný, "drsný" a proud je neprůhledný. S laminárním a turbulentním prouděním se setkáme nejen při průtoku tekutin potrubím, tj. při vnitřních úlohách mechaniky tekutin, nýbrž i při obtékání těles, tj. při vnějších úlohách mechaniky tekutin.

Turbulentní proudění je trojrozměrný, časově proměnný pohyb tekutiny, při němž veličiny charakterizující proudění (rychlost, tlak, hustota, teplota) se mění nahodile v čase. Okamžité hodnoty veličin neustále kolísají kolem střední hodnoty, takže v každém okamžiku je například rychlost dána součtem střední rychlosti a fluktuační složky, viz obr. 9.5.



obr. 9.5 Časový průběh rychlosti

Pro složku **okamžité rychlosti** ve směru x tedy bude platit

$$\mathbf{v}_x = \overline{\mathbf{v}_x} + \mathbf{v}'_x \qquad (9.3.1)$$

kde $\overline{\mathbf{v}_x}$ je **střední hodnota rychlosti** v čase a $\mathbf{v}'_x$ je **fluktuační složka rychlosti** .

Střední hodnota $\overline{\mathbf{v}_x}$ (resp. $\overline{\mathbf{v}_y}, \overline{\mathbf{v}_z}$) za čas T se určí ze vztahu $\overline{\mathbf{v}}_x = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{v}_x dt$ (což lze při dostatečně jemném vzorkování nahradit **aritmetickým průměrem** $\overline{\mathbf{v}}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_{xi}$). Je-li časový interval dostatečně dlouhý, je střední hodnota fluktuační složky $\mathbf{v}'$ nulová $\overline{\mathbf{v}'_x} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{v}'_x dt = 0$.

Intenzita turbulence charakterizuje relativní velikost amplitud fluktuací rychlosti vzhledem ke střední hodnotě rychlosti, např. pro směr x je $I_x = \frac{\sqrt{\overline{v'^2_x}}}{\overline{v}_x}$. Intenzita turbulence při vyvinutém proudění v potrubí kruhového průřezu je závislá na směru - podélné fluktuace jsou větší než příčné, v ose mají minimum, maximum je v těsné blízkosti stěny a na stěně jsou rovny nule.

Pro technické výpočty v praxi jsou střední hodnoty rychlosti zjištěné za dostatečně dlouhý časový interval důležité pro popis rychlostního profilu, určení Re čísla, průtoku, ztrát v potrubí, apod. a stejně jako dříve ji budeme označovat prostým písmenem *v*.

Na rozdíl od laminárního proudění je odpor proti pohybu při turbulentním proudění mnohem větší. Boussinesq (1877) zavedl zdánlivou (vírovou, turbulentní) viskozitu μ_t, jež je analogií dynamické viskozity η z Newtonova vztahu pro smykové napětí při laminárním proudění. Na rozdíl od ní však vírová (turbulentní) viskozita není látkovou vlastností, nýbrž je funkcí souřadnic a je závislá na geometrii a dalších charakteristikách proudového pole. Pro rovinné turbulentní proudění lze pak turbulentní smykové napětí vyjádřit rovnicí $\tau_t = \mu_t \frac{d\overline{v}_x}{dy}$. V blízkosti stěny, kde dochází ke zbrždění proudící tekutiny, se projeví i smykové napětí podle Newtona a tedy výsledné tečné napětí v turbulentním proudu bude rovno součtu $\tau = (\eta + \mu_t)\frac{d\overline{v}_x}{dy}$.

Odvodit rovnici popisující rozložení rychlosti po průřezu není vzhledem ke složitosti definice vírové (turbulentní) viskozity možné. V inženýrské praxi lze rychlostní profil v potrubí popsat logaritmickou nebo mocninnou funkcí.

Logaritmický rychlostní profil, viz obr. 9.. lze definovat vztahem

$$\overline{v_x} = \frac{v_*}{\kappa}\ln y + K_1 \qquad (9.3.2)$$

kde v_* se nazývá **třecí rychlost** a může být definována vztahem $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, kde τ_0 je **tečné napětí** na stěně, *y* je odlehlost od stěny potrubí, κ je tzv. Kármánova konstanta, jejíž hodnota se pohybuje kolem 0,4 a K_1 je integrační konstanta. Tento tzv. logaritmický zákon neplatí v blízkosti stěny, neboť na stěně, pro *y = 0* dává nekonečně velikou rychlost. Ani integrační konstantu nemůžeme jako obvykle stanovit z podmínky, že na stěně tekutina lpí a rychlost je nulová. Prandtl a Kármán proto později rozdělili turbulentní proud v blízkosti stěny na tři oblasti (obr. 9.).

- **Vazká podvrstva** se vytvoří v těsné blízkosti hladké stěny, kde převažuje viskózní tečné napětí nad zdánlivým turbulentním napětím, neboť příčné složky fluktuačních rychlostí jsou stěnou tlumeny. Tato vrstva je velmi tenká, zlomky milimetru, ale má velký význam při přestupu tepla. Rychlostní profil je přímkový.
- **Přechodová vrstva,** což je ta část proudu, kde obě tečná napětí způsobená viskozitou nebo turbulentním směšovacím pohybem jsou řádově stejně veliká a rychlost plynule přechází z přímkového na logaritmický zákon.

- **Turbulentní jádro proudu** se nachází v určité vzdálenosti od stěny, kde už je tečné napětí od viskozity tekutiny zanedbatelné ve srovnání se zdánlivým turbulentním napětím. V této oblasti platí logaritmický zákon, v této formě zvaný zákon stěny.

Na základě experimentů provedených v hladkých trubicích byly stanoveny i neznámé konstanty v logaritmickém zákoně:

$$\frac{\bar{v}_x}{v_*} = 5{,}75 \log \frac{v_* y}{\nu} + 5{,}5 \ . \tag{9.3.3}$$

V literatuře zabývající se turbulencí se zavádí bezrozměrná rychlost

$$v^+ = \frac{\bar{v}_x}{v_*} \tag{9.3.4}$$

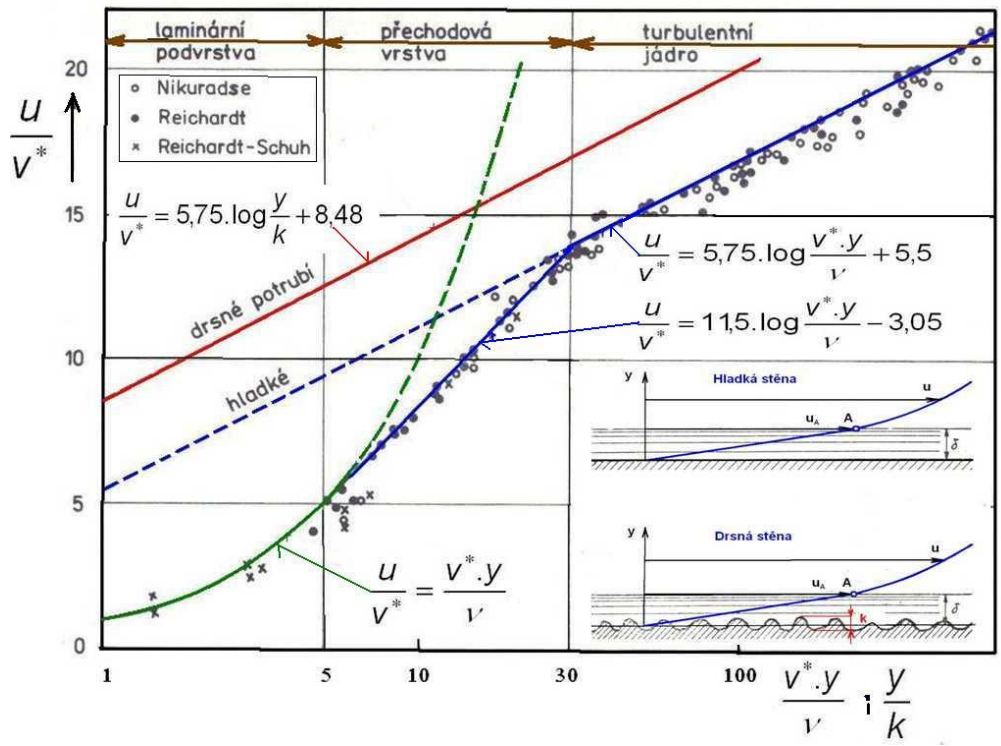
a bezrozměrná odlehlost od stěny

$$y^+ = \frac{v_* y}{\nu} \ . \tag{9.3.5}$$

Logaritmický zákon má pak tvar

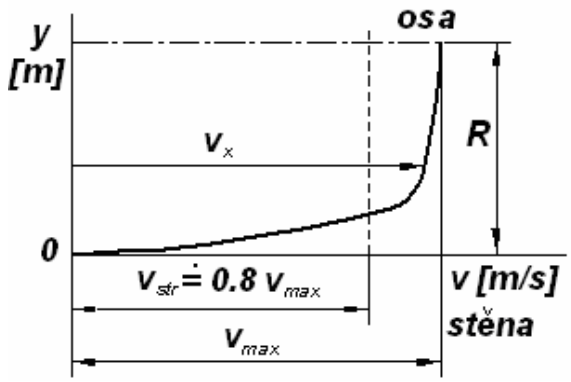
$$v^+ = 5{,}75 \log y^+ + 5{,}5$$

a je znázorněn v semilogaritmických souřadnicích, viz obr. 9.6.



obr. 9.6 Turbulentní rychlostní profil

Místo logaritmického zákona se v turbulentním proudění používá také staršího empirického **mocninného rychlostního profilu**, viz (9.3.6)



obr. 9.7 Mocninný rychlostní profil v potrubí

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} \tag{9.3.6}$$

kde $\bar{v}_{\max}$ je maximální rychlost tj. rychlost v ose potrubí, jehož poloměr je R. Exponent „*n*“ není konstanta, ale mění se s Reynoldsovým číslem od 7 do 10 a s drsností potrubí. Pro poměr střední a maximální rychlosti m v potrubí lze odvodit vztah (9.3.7)

$$m = \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \tag{9.3.7}$$

Exponent „*n*“ a poměr rychlostí „*m*“ můžeme určit z podmínky rovnováhy sil třecích a tlakových. Jejich hodnoty platí pro určitý rozsah *Re* čísla:

- pro hydraulicky hladké potrubí $2320 \le \mathrm{Re} \langle 10^5 \Rightarrow n = 1/7 = 0.143,\ m = 0.817$
- pro $8 \cdot 10^4 \langle \mathrm{Re} \langle 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 1/8 = 0.125,\ m = 0.837$
- pro větší rychlost v rozsahu $\mathrm{Re} \rangle 5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 1/10 = 0.1,\ m = 0.866$

Rychlostní profil v potrubí můžeme měřit (například Pitotovou trubicí) a tedy mocnitel „*n*“ určit experimentálně. V literatuře lze nalézt empirické vztahy podle různých autorů, například podle Troskolanského

$$\frac{1}{n} = 1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6 \Rightarrow n = \frac{1}{1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6}$$

Mocninný zákon vyhovuje dobře pro jádro proudu, ovšem pro oblast blízko stěny (vazká a přechodová vrstva) není tato funkce platná.

Mocninný rychlostní profil lze též vyjádřit vztahem

$$\frac{\bar{v}_x}{\bar{v}_{\max}} = \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)^{n_0} \tag{9.3.8}$$

kde y je vzdálenost od osy potrubí, R poloměr potrubí. Exponent n_0 v mocninném rychlostním profilu je funkcí Re čísla a z experimentálních výsledků byl pro něj určen vztah $\frac{1}{n_0} = 1 + \sqrt[6]{\frac{\mathrm{Re}}{50}}$. Poměr střední a maximální rychlosti m $m = \frac{v_s}{v_{\max}} = \frac{1}{(n_0 + 1)}$.

Výše uvedené přístupy k popisu rozložení rychlosti po průřezu potrubí mohou poskytnout pouze střední hodnoty složek rychlostí, případně součinitel turbulentních třecích ztrát. Nedokáží však stanovit další důležité veličiny, jež charakterizují turbulenci, jako jsou např. Reynoldsova napětí, kinetická energie turbulentních fluktuací $k = \frac{\overline{v_x'^2} + \overline{v_y'^2} + \overline{v_z'^2}}{2}$, atd. Tyto veličiny však spíše spadají do problematiky statistických modelů turbulence.

Řešený příklad

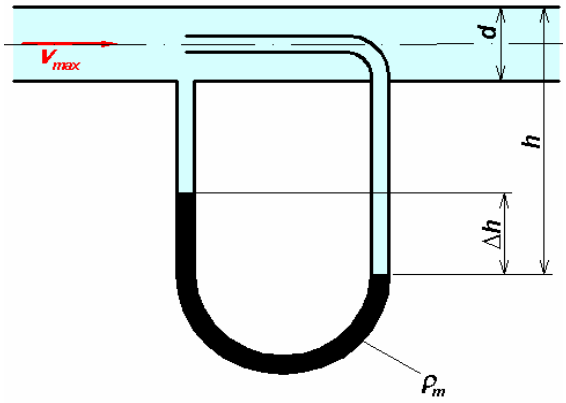
Vypočítejte maximální rychlost vzduchu $v_{\max}$ v ose potrubí, která se měří Pitotovou trubicí připojenou na diferenciální U-manometr. Náplní v U - trubici je líh o hustotě ρ_m. Stanovte střední rychlost v_s z maximální rychlosti $v_{\max}$. Předpokládejte rychlostní profil vyjádřený vztahem:

a) $v = v_{\max}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)^{n_0}$, kde y je vzdálenost od osy potrubí, R poloměr potrubí a předpokládá se $n_0 = f(\mathrm{Re})$

b) $v = v_{\max}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/n}$, kde y je vzdálenost od stěny potrubí, $n = f(\mathrm{Re})$.

Zadáno:		
$d = 2R =$	0.200	m
$h =$	0.045	m
$\rho_m =$	980	kg.m^{-3}
$\rho =$	1.20	kg.m^{-3}
$\nu =$	1.75E-05	m^{2}s^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
p_d = ?	Pa	432.091
v_{max} = ?	m.s^{-1}	26.836
Re = ?		306 697
n_0 = ?		0.189
m = ?		0.841
v_s = ?	m.s^{-1}	22.569
n = ?		0.106
m = ?		0.858
v_s = ?	m.s^{-1}	23.04



Řešení:

Rozdíl celkového a statického je roven tlaku dynamickému. Určí se z rozdílu hladin Δh odečteném na diferenciálním tlakoměru (U-trubice) ze vztahu

$$p_d = g\Delta h(\rho_m - \rho), \text{ kde } \rho_m \rangle \rho$$

Rychlost v ose potrubí se vypočte z dynamického tlaku

$$p_d = \frac{1}{2}\rho \cdot v_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2g\Delta h(\rho_m - \rho)}{\rho}}$$

Pro exponent n_0 v mocninném rychlostním profilu ad a) byl na základě experimentálních výsledků určen vztah

$$\frac{1}{n_0} = 1 + \sqrt[6]{\mathrm{Re}/50} \Rightarrow n_0 = \frac{1}{1 + \sqrt[6]{\mathrm{Re}/50}}$$

Poměr střední a maximální rychlosti v potrubí

$$m = \frac{v_s}{v_{max}} = \frac{1}{1 + n_0} \text{ a } v_s = m \cdot v_{max}$$

Hodnotu exponentu n v mocninném rychlostním profilu ad b) lze určit ze vztahu, který definoval např. Troskolanski

$$\frac{1}{n} = 1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6 \Rightarrow n = \frac{1}{1.03 \ln \mathrm{Re} - 3.6}$$

Poměr střední a maximální rychlosti v potrubí

$$m = \frac{v_s}{v_{max}} = \frac{2}{(n+1)\cdot(n+2)} \text{ a } v_s = m \cdot v_{max}$$

Shrnutí kapitoly

Laminární proudění v úzké mezeře, laminární proudění v potrubí kruhového průřezu, turbulentní proudění v potrubí, turbulentní napětí, rychlostní profil, průtok, střední rychlost.

Kontrolní otázka

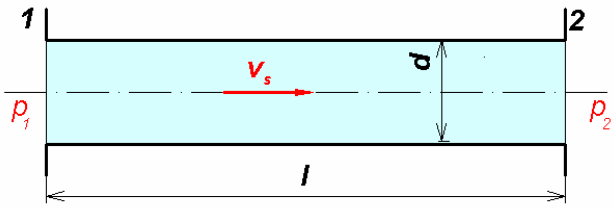
Jaký je rozdíl mezi laminárním a turbulentním prouděním?
Definujte rychlostní profil při laminárním proudění kapaliny úzkou štěrbinou.
Jaká je střední rychlost proudění vzhledem k maximální rychlosti v profilu?
Jak ovlivňuje profil rychlosti unášivá rychlost?
Jakou funkcí je definována rychlost při laminárním proudění v potrubí?
Jaký je vztah mezi střední a maximální rychlostí v potrubí?
Co je okamžitá, střední a fluktuační složka rychlosti při turbulentním proudění?
Jaký tvar má rychlostní profil u turbulentního proudění v potrubí?

Úkol k řešení

Příklad 9.1

Vodorovným přímým potrubím o délce l a průměru d protéká olej střední rychlostí v_s. Jaký je objemový průtok a tlaková ztráta?

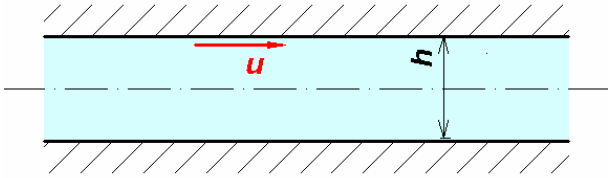
Zadáno:		
d =	8 mm	
l =	20 m	
v_s =	5 m.s^{-1}	
ρ =	900 kg.m^{-3}	
ν =	0.0004 m^2.s^{-1}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.00025
Δp = ?	Pa	18 000 000



Příklad 9.2

U obdélníkové mezery šířky b a výšky h se horní stěna pohybuje unášivou rychlostí u vzhledem k pevné dolní stěně. Jaký objemový průtok oleje protéká mezerou?

Zadáno:		
b =	200 mm	
h =	0.1 mm	
l =	15 m	
u =	0.75 m.s^{-1}	
Vypočtěte:		Výsledky:
Q_v = ?	m^{3}s^{-1}	0.00000750



10. Hydraulický výpočet potrubí

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat odpory třením a místní • určit charakteristiku potrubí • vypočítat hydraulické parametry při proudění v potrubí	

Hydraulický výpočet potrubí je založen na aplikaci rovnice kontinuity, Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu a na určení hydraulických odporů, neboli hydraulických ztrát. Při proudění skutečných tekutin vznikají následkem viskozity hydraulické odpory, tj. síly, které působí proti pohybu částic tekutiny. Mechanismus hydraulických odporů je složitý jev, který se dosud nepodařilo exaktně vyřešit až na jednodušší případy laminárního proudění. Proto se v hydraulických výpočtech uplatňuje řada poloempirických metod.

10.1. Hydraulické odpory v potrubí

Čas ke studiu: **1 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat hydraulické odpory v potrubí

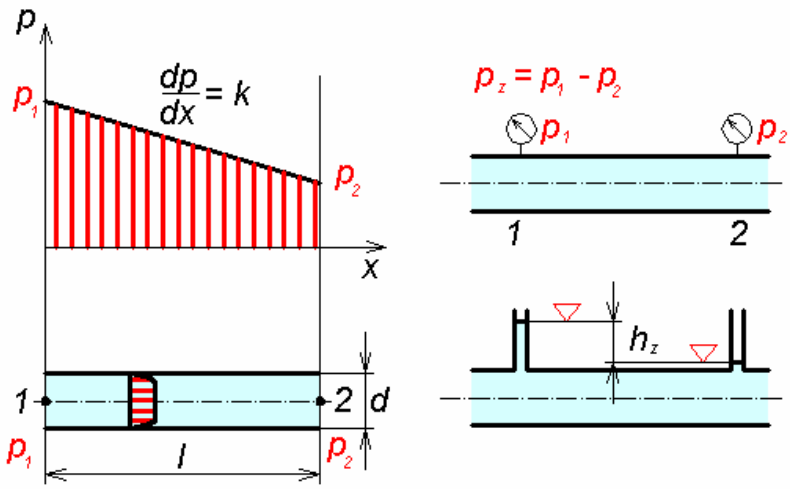
rozlišit místní a třecí ztráty

vyčíslit třecí součinitel pro laminární a turbulentní proudění

vypočítat ztráty v potrubí v důsledku třecích a místních ztrát

Výklad

Pod pojmem **hydraulické odpory (ztráty)** při proudění skutečné tekutiny jsou zahrnuty všechny účinky, které způsobují rozptyl energie. Rozptýlená (ztrátová) energie na hydraulických odporech se projeví buď jako tlakový úbytek $\Delta p = p_z$ (vynucené proudění v potrubí apod.), nebo úbytek kinetické energie $m\frac{v^2}{2}$ (např. výtok z nádob otvory), nebo snížení polohové energie mgh (proudění v korytech, gravitační potrubí, atd.) – obr. 10.1.



obr. 10.1 Tlakový spád v potrubí

Rozptýlenou (ztrátovou) energii vztahujeme obvykle na jednotku hmotnosti nebo tíhy a platí vztah

$$e_z = Y_z = \frac{p_z}{\rho} = \zeta \frac{v^2}{2} = g h_z \quad [\mathrm{Jkg^{-1}}]$$
$$\frac{e_z}{g} = \frac{Y_z}{g} = \frac{p_z}{\rho g} = \zeta \frac{v^2}{2g} = h_z \quad [\mathrm{m}] \qquad (10.1.1)$$

kde ζ je ztrátový součinitel.

Z hlediska fyzikální podstaty lze odpory (ztráty) v potrubí rozdělit na dva typy:

- **třecí odpory**, jejichž příčinou jsou třecí síly a které závisí na délce potrubí, kanálu, apod.
- **místní odpory,** které vznikají v místech, kde se mění velikost rychlosti (změna průtočného průřezu), směr rychlosti (zakřivené potrubí), popřípadě velikost i směr rychlosti (armatury) a dochází přitom k odtržení proudu a vzniku vířivé oblasti.

10.1.1. Třecí ztráty v potrubí

Třecí ztráty rostou s délkou potrubí a závisí na režimu proudění, tj. Re čísle. **Laminární proudění.** U laminárního proudění pro $\mathrm{Re} \langle 2320$ se velikost tlakové ztráty či ztrátové výšky dá odvodit analyticky. Při řešení vyjdeme z rovnice pro střední rychlost $v = v_s$ v potrubí a upravíme

$$v = \frac{p_z d^2}{32 \eta L} \Rightarrow$$
$$p_z = \frac{32 \eta L v}{d^2} = \frac{32 \eta L v}{d^2} \frac{v}{v} \frac{\rho}{\rho} \frac{2}{2} = \frac{64}{\frac{vd}{\nu}} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho = \frac{64}{\mathrm{Re}} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2} \rho \qquad (10.1.2)$$

kde **součinitel tření** $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$; $\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}$; $\eta = \rho\nu$.

Pro ztrátovou výšku lze odvodit vtah (tzv. Darcy-Weisbachovu rovnici)

$$h_z = \frac{p_z}{\rho g} = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \qquad (10.1.3)$$

kde $\zeta = \lambda \frac{L}{d}$ je **ztrátový součinitel.**

Turbulentní proudění. U turbulentního proudění je tečné napětí větší a proto jsou ztráty třením větší než u laminárního proudění. Součinitel tření λ je závislý na velikosti Reynoldsova čísla a **relativní (bezrozměrné) drsnosti** $\varepsilon = \frac{d}{k}$, případně $k_r = \frac{k}{d}$, kde k [mm] je absolutní drsnost stěny potrubí, definovaná jako střední hodnota nerovností na stěně. Rovnice pro výpočet součinitele tření jsou stanoveny na základě experimentálního měření. Pro hladké potrubí ($k = 0$) v roce 1913 odvodil **Blasius** empirický vztah

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} \qquad (\mathrm{Re}_k \le \mathrm{Re} \le 8.10^4) \qquad (10.1.4)$$

Nikuradse pro hladké potrubí udává podle výsledků pokusů vzorec

$$\lambda = \frac{1}{\left[2\log\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8\right]^2} \qquad \left(\mathrm{Re} \rangle 6.10^4\right) \qquad (10.1.5)$$

Součinitel tření v **Altšulově vzorci** při uvažování drsnosti potrubí je explicitně vyjádřený ve formě

$$\lambda = 0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}} + \frac{k}{d}\right)^{0.25} \qquad (10.1.6)$$

Platí pro oblast, v níž se uplatní jak vliv Re čísla, tak i drsnosti (oblast smíšeného tření). Pro tuto oblast bylo různými autory odvozeno několik desítek rovnic, nejčastěji se však používá vzorec, který odvodil **Colebrook - White**

$$\lambda = \frac{1}{\left[2\log\left(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) + 0{,}27\frac{k}{d}\right]^2} \qquad (10.1.7)$$

Tato rovnice je implicitní a λ se musí řešit iterací. Proto byly v posledních letech mnoha autory odvozeny pro λ explicitní vzorce. Jako příklad je uvedena rovnice odvozená **Churchillem**

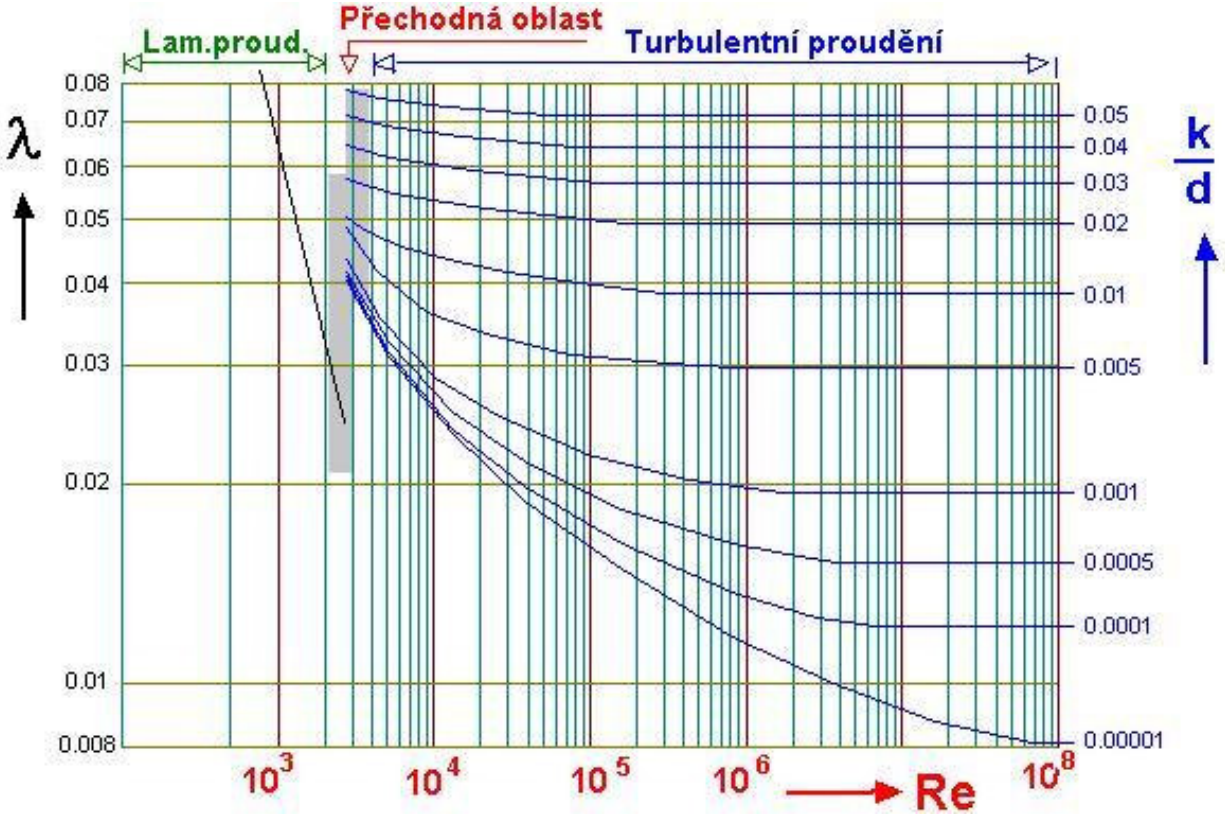
$$\lambda = 8\left[\left(\frac{8}{\mathrm{Re}}\right)^{12} + \frac{1}{(a+b)^{1,5}}\right]^{\frac{1}{12}}$$

$$a = \left[-2{,}457\ln\left(\left(\frac{7}{\mathrm{Re}}\right)^{0,9} + 0{,}27\varepsilon\right)\right]^{16} \qquad b = \left(\frac{37530}{\mathrm{Re}}\right)^{16} \tag{10.1.8}$$

Pro danou poměrnou drsnost má součinitel tření λ od určitého Reynoldsova čísla hodnotu stálou a nezáleží na Re. V této oblasti nazvané vyvinuté turbulentní proudění vyjádřil Nikuradse součinitel tření vztahem

$$\lambda = \frac{1}{\left(2\log\frac{d}{k} + 1{,}138\right)^2} \quad \text{platným pro} \quad \left(\frac{k}{d}\mathrm{Re}\sqrt{\lambda} \rangle 191{,}2\right) \tag{10.1.9}$$

Graficky zpracované závislosti součinitele tření na Reynoldsově čísle a případně drsnosti jako parametru byly vyhodnoceny v diagramu Nikuradseho $\lambda = f(\mathrm{Re}, k_r)$, viz obr. 10.2.



obr. 10.2 Nikuradseho diagram $\lambda = f(\mathrm{Re}, k_r)$ v interpretaci Moodyho

Vliv drsnosti potrubí vyšetřoval Nikuradse v letech 1930 až 1933. V experimentech použil bronzové potrubí kruhového průřezu o různých průměrech. Nejprve provedl měření v hladkém potrubí. Potom měnil drsnost potrubí nalepením tříděných pískových zrn. Křivky

pro různé poměrné drsnosti k_r se odpoutávají od přímky Blasiovy, která představuje průběh součinitele tření pro hladké potrubí. S rostoucím Reynoldsovým číslem přecházejí v soustavu čar rovnoběžných s vodorovnou osou. Z obr. 10.2 je patrné, že od určitého Reynoldsova čísla, které závisí na poměrné drsnosti, má součinitel tření hodnotu stálou a nezáleží na Re.

Absolutní drsnost potrubí k závisí na druhu materiálu, zpracování a provozních podmínkách (koroze, eroze). Podle zkušeností různých autorů jsou v tab. 10.1 uvedeny drsnosti vybraných materiálů.

tab. 10.1 Absolutní drsnost materiálů potrubí k

Materiál potrubí	**Původní stav (mm)**	**Korodovaný stav (mm)**
Tažené trubky mosazné, měděné, hliníkové	0,0015 až 0,003	0,003 až 0,1
Bezešvé trubky ocelové	0,04 až 0,1	0,1 až 0,9
Tažené trubky ocelové	0,03 až 0,12	0,12 až 0,9
Svařované trubky ocelové	0,05 až 0,1	0,1 až 0,9
Pozinkované trubky ocelové	0,15 až 0,5	0,5 až 3,5
Vodovodní potrubí po 20-ti a více letech v provozu		0,6 až 3,0
Skleněné trubky, trubky z plastů	0,001 5 až 0,01	
Pryžové hadice	0,01 až 0,03	
Betonové potrubí	0,3 až 6,0	

Ztráty třením v nekruhových průtočných průřezech.

Laminární proudění (vzhledem k platnosti Newtonova zákona pro tečné napětí od viskozity) v nekruhových potrubích se dá řešit matematicky. U laminárního proudění se třením o stěny potrubí zbrzdí částice v celém průtočném průřezu. „Mezní vrstva“ vyplňuje celý průtočný průřez a jeho tvar má vliv na rozložení rychlosti neboli rychlostní profil. Proto je nutno pro každý průřez odvodit vztah pro třecí ztráty a nelze je přepočítat z jednoho průřezu na druhý.

U turbulentního proudění v potrubí se vliv třecích sil na obtékaných stěnách omezí na podstatně menší vrstvu, která ve srovnání s charakteristickými rozměry průtočného průřezu je velmi malá. Tloušťka mezní vrstvy u turbulentního proudu závisí především na Re čísle. Jestliže tvar průtokového průřezu potrubí nemá v podstatě vliv na součinitel tření, jsou ztráty třením turbulentního proudění v potrubí nekruhového průřezu určeny stejnými vzorci jako pro kruhové potrubí. Místo průměru d kruhového potrubí je však třeba dosadit ekvivalent pro

nekruhové průřezy, pomocí něhož se vypočte Re-číslo, součinitel tření a ztrátová výška. Tento ekvivalent se nazývá hydraulický průměr – d_h a je určen vztahem

$$d_h = konst\frac{S}{o} \tag{10.1.10}$$

Konstantu úměrnosti je možno zvolit. Výhodně se stanoví z podmínky, aby hydraulický průměr kruhového potrubí d_h byl roven jeho průměru d čili $d_h = d$. Protože u kruhového potrubí je průtočný průřez $S = \frac{\pi}{4}d^2$ a omočený obvod $o = \pi d$, je

$$d_h = k\frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\pi d} = k\frac{d}{4} \Rightarrow k = 4$$

Je tedy hydraulický průměr definován vztahem

$$d_h = 4\frac{S}{o} \tag{10.1.11}$$

Hydraulický průměr d_h je tedy ekvivalent nekruhového průřezu a představuje kruhové potrubí o světlosti $d = d_h$, v němž jsou stejné hydraulické ztráty jako v nekruhovém průřezu. Hydraulický průměr se může dosadit do výrazu pro poměrnou drsnost, do Reynoldsova čísla a do výrazu pro ztrátovou výšku

$$h_z = \lambda\frac{1}{d_h}\frac{v^2}{2g};\ \lambda = f(\mathrm{Re},\varepsilon);\ \mathrm{Re} = \frac{vd_h}{v};\ \varepsilon = \frac{d_h}{k}$$

Z toho je patrné, že výpočet ztráty třením v nekruhovém potrubí (turbulentní proudění) je shodný s výpočtem téže ztráty v kruhovém potrubí.

10.1.2. Místní odpory (ztráty)

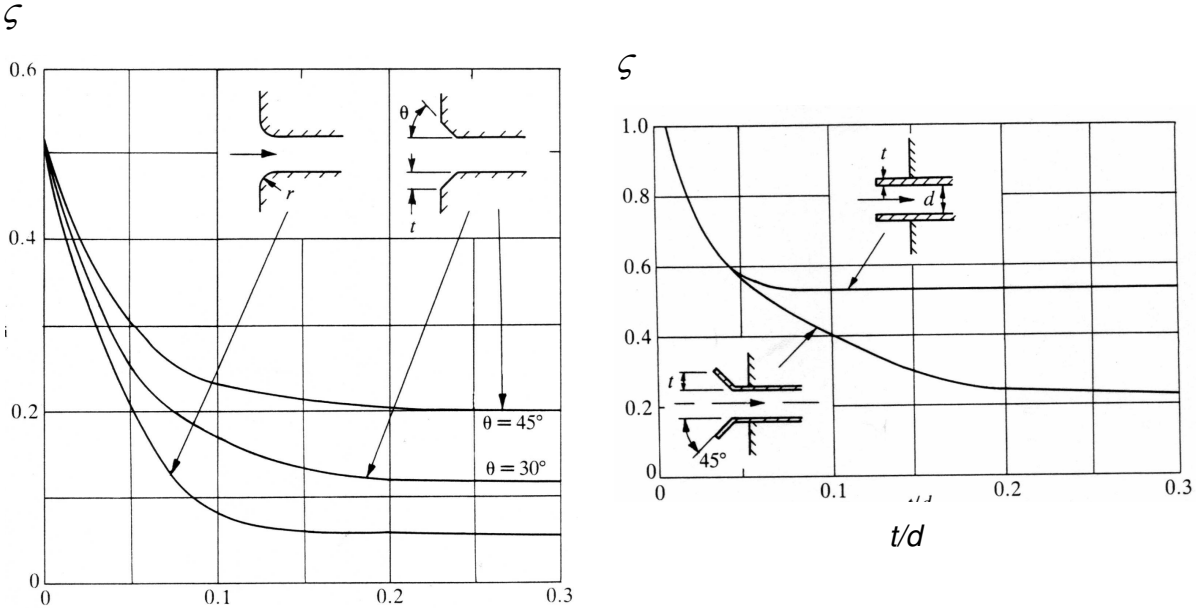
V každém potrubí bývají vedle rovných úseků i různá kolena, odbočky, armatury, měřící zařízení, čističe, chladiče apod., kromě toho se může měnit průřez potrubí. V těchto částech potrubí dochází ke změně velikosti i směru rychlosti proudění, což vyvolá víření, popřípadě odtržení proudu kapaliny spojené s rozptylem energie. Energie proudící kapaliny se rozptyluje v místě potrubí, kde dochází ke změně vektoru rychlosti, proto je rozptyl nazván místními ztrátami.

Velikost místních ztrát, tj. **ztrátová energie při místních ztrátách** se vyjadřuje obdobně jako ztráta třením rychlostní výškou a ztrátovým součinitelem

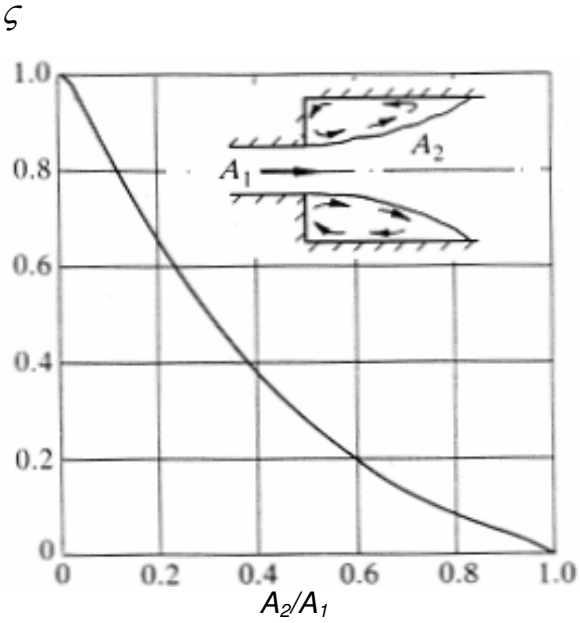
$$e_z = \frac{p_z}{\rho} = gh_z = \zeta_m\frac{v^2}{2} \tag{10.1.12}$$

Ztrátový součinitel ζ_m závisí na druhu místní ztráty, konstrukčních parametrech, drsnosti stěn, tvaru rychlostního profilu a na režimu proudění. Vliv Reynoldsova čísla se projevuje

obdobně jako u třecích odporů především při malých hodnotách tohoto čísla. **Určuje se především měřením**. Z rovnice (10.1.12) je patrné, že můžeme stanovit součinitel ζ z naměřené tlakové ztráty p_z na místním odporu. Pro hodnoty Reynoldsova čísla $\mathrm{Re} \geq 10^5$ jsou hodnoty ztrátového součinitele téměř konstantní. Pro ilustraci jsou pro některé typy odporů uvedeny v následujících grafech (pod grafem jsou uvedeny zjednodušené vztahy pro určení ztrátového součinitele, pokud jsou odvoditelné – čerpáno z anglické literatury).

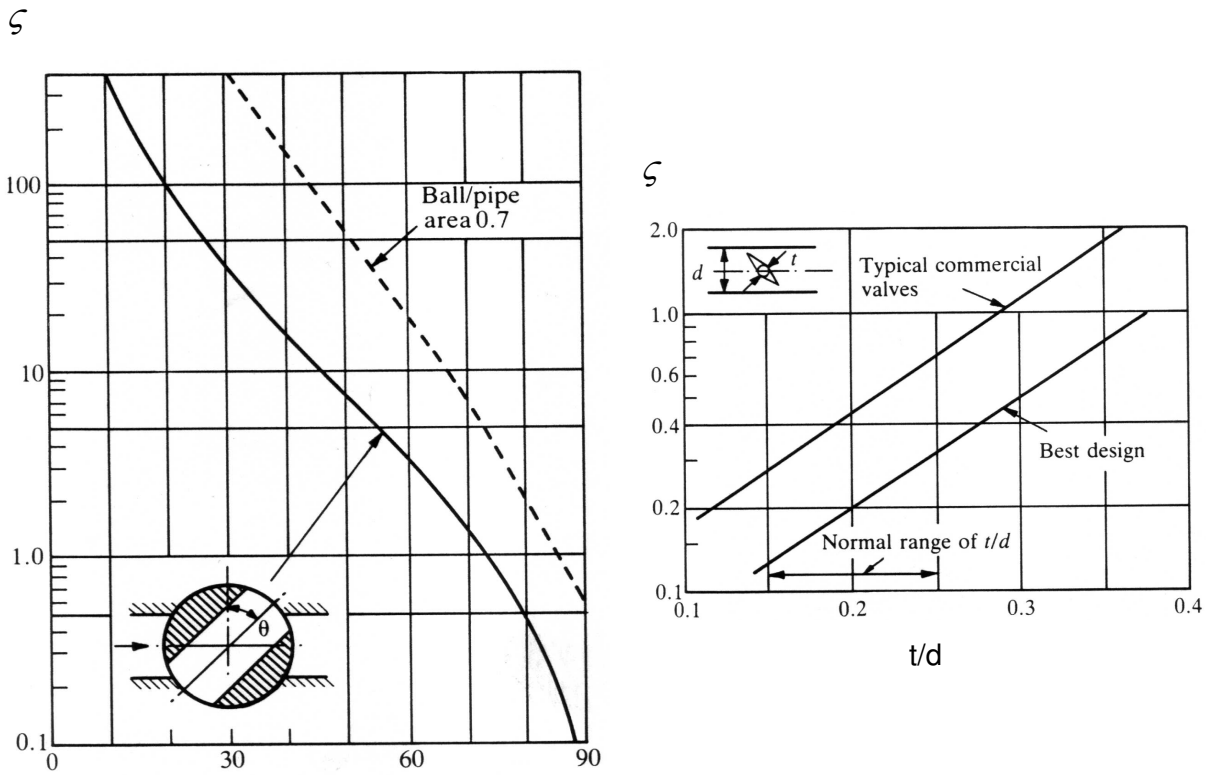


obr. 10.3 Ztrátový součinitel na vtoku do potrubí

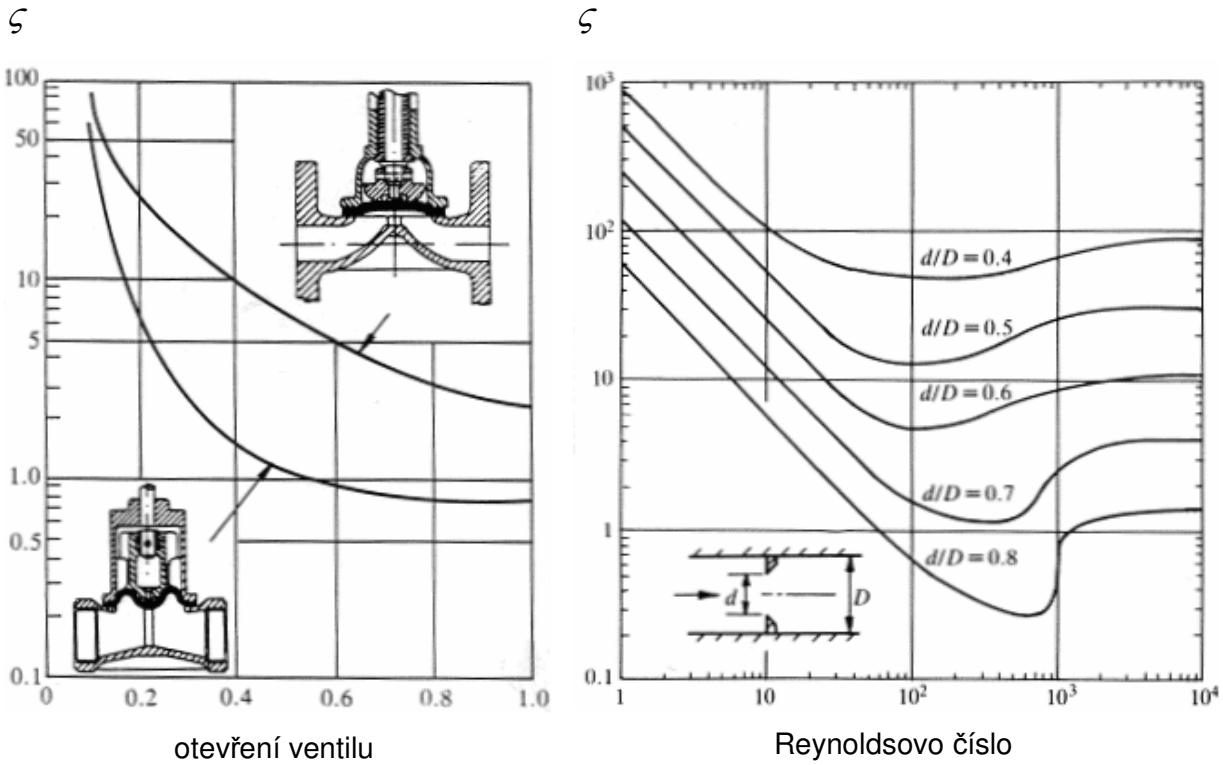


$$\zeta_1 \approx \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right) \frac{A_1}{A_2}$$

obr. 10.4 Ztrátový součinitel při zúžení nebo rozšíření průřezu



obr. 10.5 Ztrátový součinitel ventilů



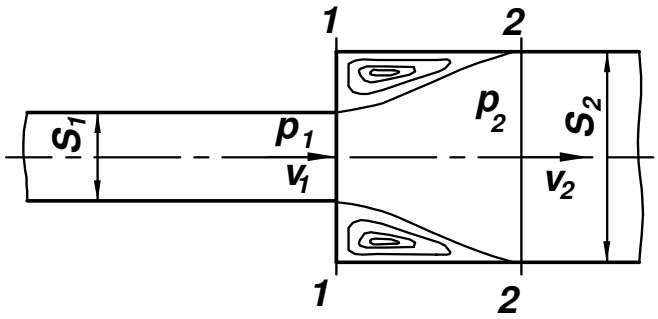
obr. 10.6 Ztrátový součinitel ventilu a clony

Místní odpory v potrubí se mohou vyjádřit ekvivalentní délkou l_e potrubí, v němž je ztráta třením stejně velká jako místní ztráta.

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_e}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow l_e = \frac{\zeta}{\lambda} d \qquad (10.1.13)$$

Za součinitel tření a průměr se dosadí hodnoty platné pro rovný úsek potrubí.

Při změnách průřezu se mění průtočná rychlost a místní ztráty se mohou vyjádřit v závislosti na přítokové v_1 nebo odtokové rychlosti v_2, viz obr. 10.7.



obr. 10.7 Náhlé rozšíření průřezu

$$h_z = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \qquad (10.1.14)$$

Z této rovnice vyplývá vztah pro přepočet ztrátových součinitelů

$$\zeta_1 = \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \zeta_2 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \qquad (10.1.15)$$

upravený pomocí rovnice kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Pro kruhové průřezy platí

$$\zeta_1 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \zeta_2; \quad \zeta_2 = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \zeta_1 \qquad (10.1.16)$$

Při náhlém rozšíření průřezu se odtrhne proud kapaliny od stěn a vytvoří se víry (obr. 9.15). Poté se proud kapaliny rozšíří po celém průřezu, při rozšíření průřezu klesá střední rychlost, a proto musí stoupnout statický tlak. Borda (1766) odvodil pro ztrátovou výšku při náhlém rozšíření průřezu vztah

$$h_z = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \qquad (10.1.17)$$

Matematicky lze odvodit také vztah pro ztrátovou výšku při náhlém zúžení průřezu, při proudění v kuželovém potrubí, apod.

10.2. Příklady hydraulického výpočtu potrubí

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

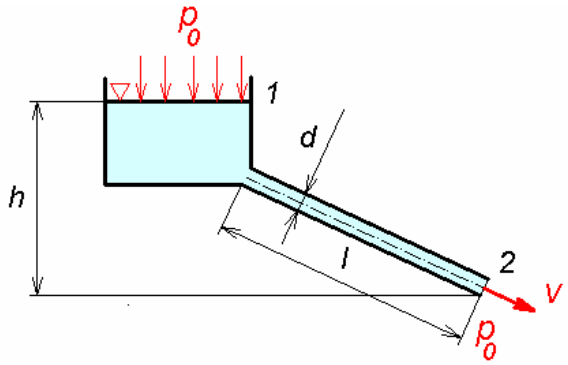
aplikovat získané poznatky na praktické úlohy hydraulického výpočtu potrubí

Výklad

10.2.1. Jednoduché potrubí s nádrží

Potrubí slouží k dopravě tekutin. Při jeho návrhu vycházíme z předpokladu jednorozměrného proudění. Využívá se známých rovnic - rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice pro skutečnou kapalinu - a empirických vztahů pro stanovení hydraulických odporů v potrubí.

Za **jednoduché potrubí** považujeme potrubí s konstantním průřezem. V případě dlouhých potrubí převažují ztráty třením, u kratších potrubí se mohou významně uplatnit ztráty místní.



obr. 10.8 Jednoduché potrubí

Jednoduché potrubí připojené k nádrži má délku l, průměr d, viz obr. 10.8. Předpokládá se, že nádrž je rozměrná a tudíž rychlost proudění na této hladině je téměř nulová. Pak pro průřez 1 (hladina v nádrži ve výšce h) a 2 (výstup z potrubí do ovzduší) platí **Bernoulliho rovnice**:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gh_2+e_z \qquad (10.2.1)$$

a po dosazení

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{0^2}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+g.0+\left(\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta\right)\frac{v^2}{2}$$

a po úpravě

$$gh=\frac{v^2}{2}\left(1+\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta\right)=\frac{v^2}{2}\left(1+\zeta_c\right)$$

Z této rovnice lze vyjádřit skutečnou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta\right)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\zeta_c)}}\sqrt{2gh} = \varphi v_t \qquad (10.2.2)$$

Je zřejmé, že rychlostní součinitel $\varphi = \frac{v}{v_t}$ je dán poměrem skutečné a teoretické rychlosti.

V rovnici jsou uvažovány ztráty třením i součet ztrát místních $\sum\zeta$. **Celkový ztrátový součinitel** $\zeta_c = \lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta = \lambda\frac{l+\sum l_e}{d}$ zahrnuje ztráty třením a všechny ztráty místní.

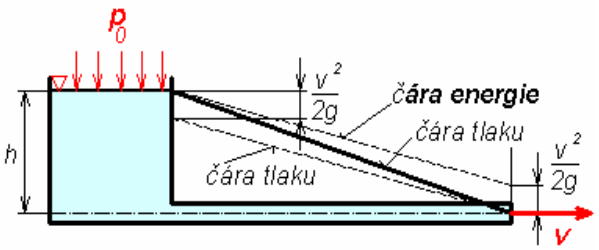
Jednoduché potrubí je určeno pro hydraulický výpočet čtyřmi veličinami: délkou potrubí l, průměrem potrubí d, spádem h a rychlostí v nebo průtokem Q. Současně jsou známé fyzikální vlastnosti tekutiny, absolutní drsnost stěny potrubí, třecí součinitel λ a ztrátový součinitel všech místních ztrát. Jedna ze čtyř veličin $l - d - h - v$ nebo Q může být určená řešením rovnice Bernoulliho rovnice, při čemž pro třecí součinitel je vhodné volit pro jednoduchost explicitní rovnici.

10.2.2. Tlaková čára

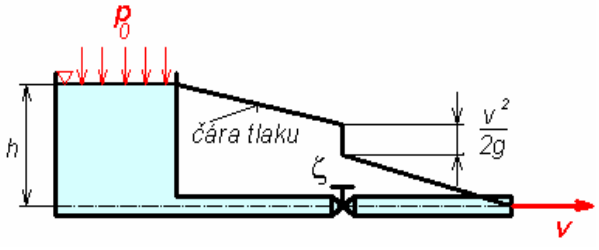
Při návrhu potrubí je nutné vzhledem ke spolehlivé činnosti potrubí dodržet důležitou podmínku a sice, že osa potrubí vždy leží pod čarou tlaku. Pro definování čáry tlaku se předpokládá vodorovné potrubí s nádrží, viz obr. 10.9. Odečte-li se od hladiny v nádrži rychlostní výška $\frac{v^2}{2g}$ a spojí-li se takto vzniklý bod s koncem potrubí, dostane se čára tlaku.

Protože u potrubí obvykle platí $\frac{v^2}{2g} \langle\langle h$, pak čáru tlaku lze zjednodušeně dostat jako spojnici hladiny v nádrži s koncem potrubí, viz obr. 10.9.

Na obr. 10.10 se uvádí čára tlaku u potrubí s místní ztrátou, např. armaturou situovanou v obecném místě potrubí.



obr. 10.9 Čára tlaku pro jednoduché potrubí

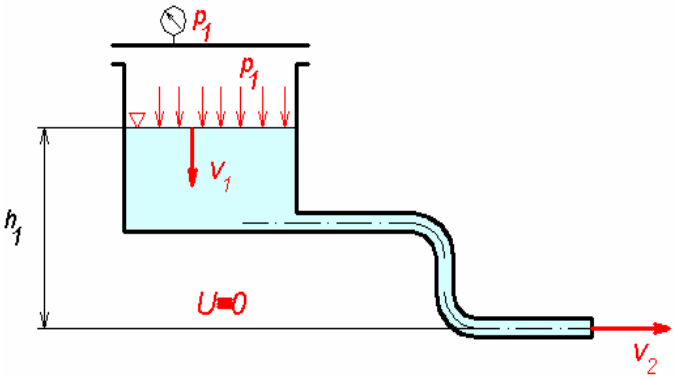


obr. 10.10 Čára tlaku potrubí s armaturou

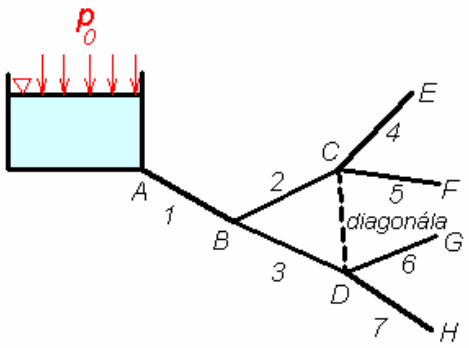
10.2.3. Potrubní systém

Potrubní systém je buď **jednoduchý**, tvořený jedním potrubím nebo **složený**, sestávající z většího počtu potrubí tvořících síť obsahující uzly a větve (viz teorie elektrických obvodů), případně zdroje kapaliny. Na obr. 10.11 je schéma případu jednoduchého potrubního systému.

Na obr. 10.12 je schématicky znázorněn **složený potrubní systém**, kde je možno identifikovat části rozvětveného a okružního systému v kombinaci. Okruh vznikne propojením dvou uzlů pomocí diagonály. Návrh větevné potrubní sítě spočívá v určení vhodných průměrů potrubí v jednotlivých větvích a výpočet tlaku, tzv. tlakové čáry v síti. Jsou-li průměry potrubí dány, omezí se výpočet na určení tlakové čáry s případným doporučením změny nevyhovujících průměrů potrubí. Je - li v síti uzavřená smyčka (okruh), je nutno použít některou z metod pro řešení okruhových sítí, které jsou aplikací Kirchhoffových zákonů (ale na rozdíl od elektrické sítě je nutno v potrubních sítích pro vodu uvažovat nelineární závislost mezi tlakovou ztrátou Δp a průtokem Q_v). Řešení takového systému je matematicky složitější, využívá se maticového přístupu k popisu systému a počítačů při numerickém zpracování.



obr. 10.11 Schéma jednoduchého potrubního systému

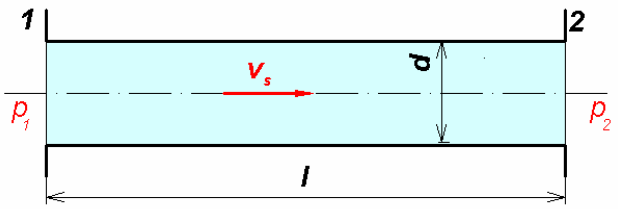


obr. 10.12 Schéma složeného potrubního systému

Řešený příklad

Stanovte tlakovou ztrátu p_z třením na délce l ve vodorovném potrubí o průměru d, jímž proudí minerální olej o hustotě ρ a viskozitě ν rychlostí v. Přepočtěte tlakovou ztrátu p_z na ztrátovou výšku h_z a měrnou ztrátovou energii e_z. Jaký je součinitel tření λ a Re-číslo? Určete průtok Q_v a hmotností průtok Q_m.

Zadáno :		
l = 5	m	
d = 20	mm	
v = 4	m.s^{-1}	
ρ = 880	kg.m^{-3}	
ν = 1.6E-04	m^2.s^{-1}	
Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		500.00
λ = ?		0.1280
h_z = ?	m	26.10
p_z = ?	Pa	225 316.08
e_z = ?	J.kg^{-1}	256.04
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.0012566
Q_m = ?	kg.s^{-1}	1.105808



Řešení:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}, \qquad \lambda = \begin{cases} \dfrac{0.3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} & \text{pro} \quad \mathrm{Re} \geq 2320 \\ \dfrac{64}{\mathrm{Re}} & \text{pro} \quad \mathrm{Re} < 2320 \end{cases}$$

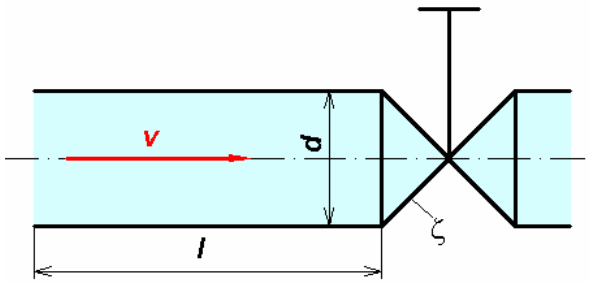
$$h_z = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \qquad p_z = \rho g h_z, \qquad e_z = g h_z$$

$$Q_v = \frac{v \pi d^2}{4}, \qquad Q_m = \rho Q_v$$

Řešený příklad

Stanovte ztrátovou výšku h_z při proudění vody o kinematické viskozitě ν v drsném potrubí o průměru d, délce l, drsnosti k a rychlosti v. Přepočtěte ji na tlakovou ztrátu p_z a měrnou ztrátovou energii e_z. Určete *Re*-číslo a součinitel tření λ. pro drsné potrubí. Určete ztrátový součinitel tření v potrubí ζ_t. Součinitel místní ztráty v armatuře je ζ .

Zadáno:		
v = 3	m.s^{-1}	
d= 250	mm	
l = 100	m	
k = 0.4	mm	
ζ = 6		
ρ = 1000	kg.m^{-3}	
ν = 1E-06	m^{2}s^{-1}	
Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		750 000
λ = ?		0.02040
h_z = ?	m	3.743
p_z = ?	Pa	36 718.830
e_z = ?	J.kg^{-1}	36.719
ζ_t = ?		8.160



Řešení:

$$\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu}, \qquad \lambda = 0.1\left(\frac{k}{d} + \frac{100}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25}, \qquad \zeta_t = \lambda \frac{l}{d}$$

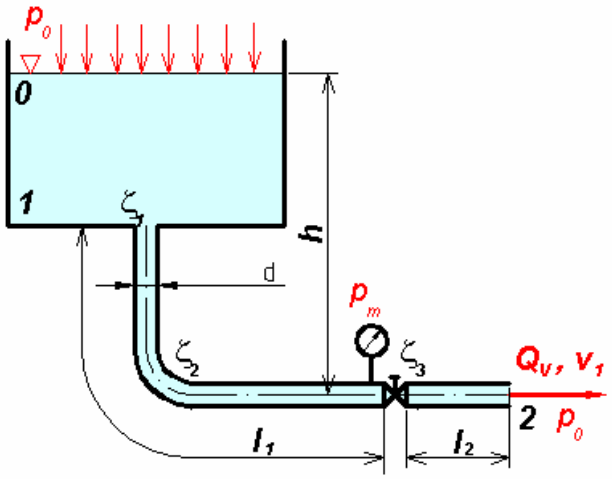
$$h_z = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \qquad p_z = \rho g h_z, \qquad e_z = \frac{p_z}{\rho}$$

Řešený příklad

Stanovte rychlost vody a průtok v potrubí o délkách l_1 a l_2 a průměru d. Výška hladiny vody v nádrži je h. Spočítejte relativní tlak p_m naměřený na manometru před ventilem. Určete rychlostní součinitel φ a teoretickou výtokovou rychlost v_t. Určete ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty. Ztrátové součinitele na vtoku jsou ζ_1, v koleni ζ_2 a ve ventilu ζ_3 a součinitel tření je λ.

Zadáno:

h = 2	m	
d = 0.05	m	
l_1 = 1.5	m	
l_2 = 0.3	m	
λ = 0.0203		
ζ_1 = 1		
ζ_2 = 3		
ζ_3 = 6		
ρ = 1000	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		Výsledky:
v = ?	m.s^{-1}	1.829
v_t = ?	m.s^{-1}	6.264
φ = ?		0.29199
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.00359
l_e = ?	m	24.631
p_m = ?	Pa	10 238.27



Řešení:

Uvažujeme ustálené proudění potrubím se zadanými parametry. Bernoulliho rovnice pro hladinu a výtokový průřez (0-2) má po dosazení za odpory třením a místní tvar:

$$\frac{p_0}{\rho}+0+gh=\frac{p_o}{\rho}+\frac{v^2}{2}+0+\left(\lambda.\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)\frac{v^2}{2}.$$ Z této rovnice lze vyjádřit skutečnou rychlost v:

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)}}=\sqrt{2gh}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1+\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)}}=v_t\varphi,$$

Je zřejmé, že rychlostní součinitel φ je dán poměrem skutečné a teoretické rychlosti

$$v_t=\sqrt{2gh},\qquad \varphi=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_1+\zeta_2+\zeta_v\right)}}=\frac{v}{v_t}$$

Dále vypočteme objemový průtok a ekvivalentní délku potrubí, na které dojde ke stejně velké ztrátě třením, jako jsou ztráty místní

$$Q_v = \frac{\pi d^2}{4} v, \quad l_e = (\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3)\frac{d}{\lambda}$$

Tlak p_m před ventilem určíme z Bernoulliho rovnice pro průřezy 0 a 1

$$p_m = \rho g h - \rho \frac{v^2}{2}\left(1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \lambda \frac{l_1}{d}\right)$$

10.3. Charakteristika potrubí

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

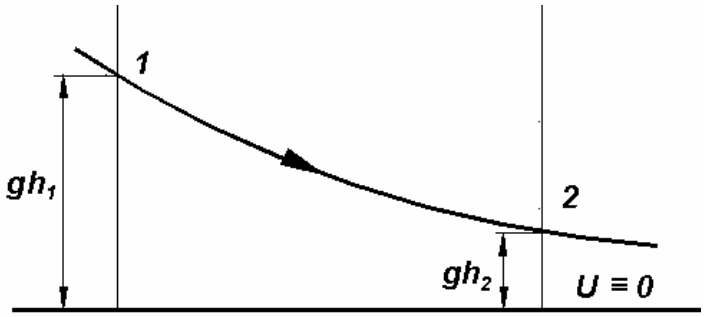
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat charakteristiku potrubí

vykreslit charakteristiku potrubí na základě výpočtu ztrát třecích a místních

Výklad

Pro jednoduché potrubí stálého průřezu, viz obr. 10.13, platí Bernoulliho rovnice, která porovnává energii kapaliny např. na počátku (1) a konci (2) potrubního úseku.



obr. 10.13 Schéma jednoho potrubního úseku

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + gh_z \qquad (10.3.1)$$

Pokud se předpokládá potrubí konstantního průřezu (jedná se o jedno potrubí), potom při platnosti rovnice spojitosti ($v_1 = v_2$) se Bernoulliho rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + gh_2 + gh_z$$

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = g(h_2 - h_1) + \zeta_c \frac{v^2}{2}$$

kde $\zeta_c = \lambda \frac{L}{d} + \sum \zeta$. Protože bývá zvykem vyjadřovat **charakteristiku potrubí** jako závislost tlakového spádu Δp na průtoku Q, pak

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) + \rho \frac{\zeta_c}{2}\left(\frac{4}{\pi d^2}\right)^2 Q^2 = \rho g h + k_Q Q^2 = \rho g h + k_Q Q|Q| \qquad (10.3.2)$$

Tlaková ztráta je úměrná druhé mocnině průtoku Q^2. Pokud by proudění měnilo směr, pak bude jednoduše tlaková ztráta úměrná výrazu $Q|Q|$. Je-li uvažována jen třecí ztráta v potrubí, je konstanta k_Q určena vztahem

$$k_Q = \rho \lambda \frac{8l}{d^5 \pi^2} \qquad (10.3.3)$$

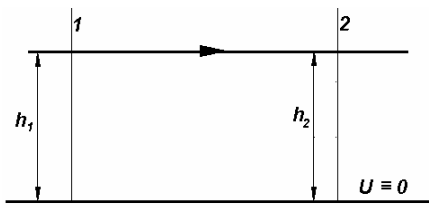
Přepočet mezi měrnou energií, tlakovou ztrátou a tlakovou výškou je následující

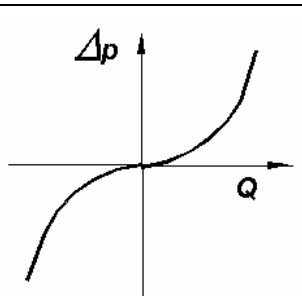
$$Y = \frac{\Delta p}{\rho} = gH \qquad (10.3.4)$$

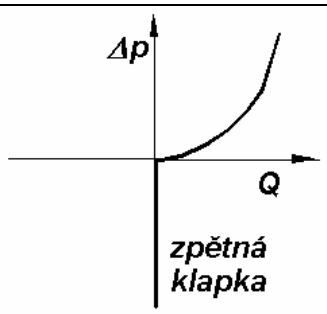
kde Y je měrná energie, $\Delta p = p_1 - p_2$ je tlakový spád a tlaková výška $H = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ udává rozdíl tlakových výšek na počátku a na konci potrubí, který je potřebný pro průtok Q.

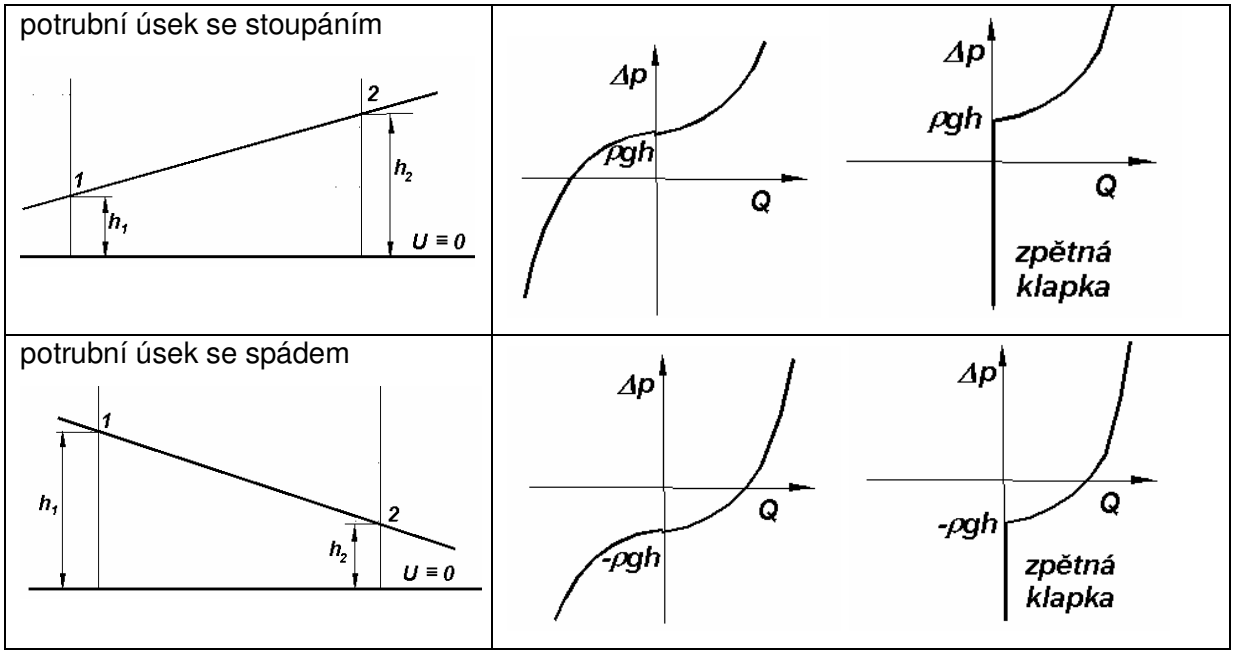
Je-li potrubí vodorovné, pak $h = 0$ a závislost $\Delta p = f(Q)$ je kvadratická parabola s vrcholem v počátku souřadnic $Q, \Delta p$. Je-li na začátku potrubí zpětná klapka, která brání průtoku v opačném smyslu, potom charakteristika potrubí ve třetím kvadrantu splyne se zápornou osou Δp, viz obr.10.14. Charakteristika potrubní větve se stoupáním je posunuta ve svislém směru a to o tlak $\Delta p = \rho g h$. Při tlakovém spádu záporném se nastaví průtok v opačném smyslu, pokud ve větvi není zpětná klapka.

potrubní úsek vodorovný









obr.10.14 Schéma potrubního úseku vodorovného, se stoupáním a spádem a charakteristiky

Řešený příklad

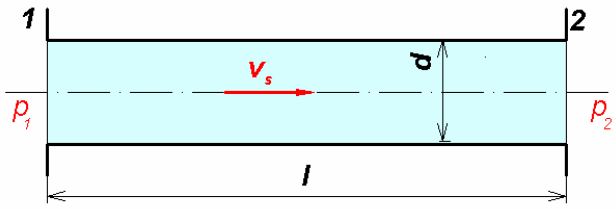
Určete charakteristiku potrubí o vnitřním průměru d a délce l, jestliže tímto potrubím protéká ropa o dané viskozitě ν. Maximální přípustná rychlost pro dopravu ropy je v_{max}. Vyšetřete režim proudění a vykreslete charakteristiku v celém rozsahu povolené rychlosti. Potrubí je vodorovné.

Zadáno:

$l = 860$	m
$d = 150$	mm
$v_{max} = 2$	$m.s^{-1}$
$\nu = 0.000085$	$m^2.s^{-1}$

Vypočtěte:

$Y_{sp} = f(Q_V)$



Řešení:

Nejprve se vyšetří režim proudění v potrubí výpočtem Reynoldsova čísla při maximální rychlosti. Reynoldsovo číslo pro maximální přípustnou rychlost

$$\mathrm{Re} = \frac{v_{max} \cdot d}{\nu} = \frac{2 \cdot 0{,}15}{8{,}5 \cdot 10^{-5}} = 3529{,}412$$

$\mathrm{Re} = 3529{,}412 \rangle 2320$ ….. turbulentní proudění

Přechod z laminárního do turbulentního proudění nastane při kritické rychlosti v_{krit}:

$$v_{krit} = \frac{Re \cdot \nu}{d} = \frac{2320 \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-5}}{0{,}15} = 1{,}315 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Oblast laminárního proudění je vymezena rozsahem rychlostí $0 < v \leq 1{,}315$ m.s^{-1}.

Odporovou křivku potrubí představuje funkční závislost měrné energie na objemovém průtoku $Y_{sp} = f(Q_v)$.

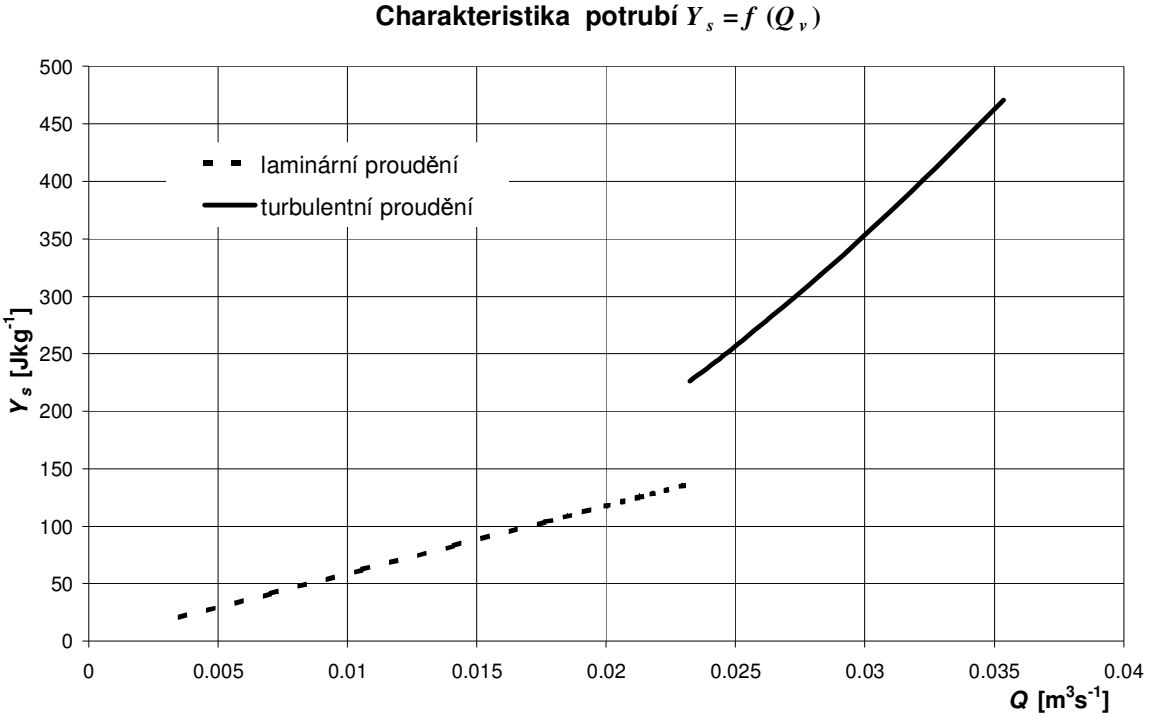
$$Y_{sp} = gh_z = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{16 Q_v^2}{2\pi^2 d^4} = \lambda \frac{8 l Q_v^2}{d^5 \pi^2}$$

Součinitel tření je definován pro laminární proudění vztahem $\lambda = \frac{64}{Re}$, v oblasti turbulentní (bez uvážení drsnosti potrubí) je třecí součinitel definován vztahem dle Blasia $\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}}$.

Výpočet se provede v EXCELu a zapíše přehledně v následující tabulce:

v [ms^{-1}]	Re [1]	λ_{lam} [1]	λ_{turb} [1]	Q_v [m^{3}s^{-1}]	Y_{Slam} [Jkg^{-1}]	Y_{Sturb} [Jkg^{-1}]
0	0	-	-	0	-	-
0.2	352.941	0.181	-	0.004	20.793	-
0.4	705.882	0.091	-	0.007	41.587	-
0.6	1058.824	0.060	-	0.011	62.380	-
0.8	1411.765	0.045	-	0.014	83.174	-
1	1764.706	0.036	-	0.018	103.967	-
1.2	2117.647	0.030	-	0.021	124.760	-
1.315	2320	0.028	0.046	0.023	136.751	225.997
1.4	2470.588	-	0.045	0.025	-	252.162
1.6	2823.529	-	0.043	0.028	-	318.541
1.8	3176.471	-	0.042	0.032	-	391.456
2	3529.412	-	0.041	0.035	-	470.715

Závislost $Y_{sp} = f(Q_v)$ je možno zobrazit graficky.



V místě přechodu z laminárního do turbulentního proudění je graf nespojitý, což vyplývá z následujícího odvození :

V oblasti laminárního proudění platí pro součinitel tření vztah $\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64\nu}{vd}$ a tedy

$$Y_{sp} = gh_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{64\nu}{vd}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{32\nu l}{d^2}v = \frac{128\nu l}{\pi d^4}Q_v = \frac{128 \cdot 8{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot 860}{\pi \cdot 0{,}15^4}Q_v = 5883{,}18Q_v$$

Závislost $Y_{sp} = f(Q_v)$ je pro laminární proudění lineární.

V oblasti turbulentního proudění je pro hydraulicky hladké potrubí třecí součinitel popsán vztahem dle Blasia $\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$ a tedy

$$Y_{sp} = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{0.3164 \cdot \nu^{0.25}}{(vd)^{0.25}}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2} = \frac{0{,}1582 \cdot \nu^{0.25} l}{d^{1.25}}v^{7/4} = 139{,}959v^{7/4}$$

Po dosazení za rychlost pomocí průtoku (rovnice kontinuity)

$$Y_{sp} = 139{,}959 \cdot v^{7/4} = 139{,}959 \cdot \left(\frac{4}{\pi \cdot d^2}\right)^{7/4} \cdot Q_v^{7/4} = 163408{,}307 \cdot Q_v^{7/4}$$

Měrná energie Y_{sp} v hydraulicky hladkém potrubí je úměrná $Q_v^{7/4}$. V případě turbulentního proudění při $\mathrm{Re} \rangle 80000$ je λ funkcí Re a poměrné drsnosti d/k a měrná energie $Y_{sp} \approx Q_v^{7/4} \div Q_v^2$.

V oblasti vyvinutého turbulentního proudění λ nezávisí na Re a $Y_{sp} = f\left(Q_v^2\right)$.

Shrnutí kapitoly

hydraulické odpory v potrubí, místní a třecí ztráty, vyčíslení třecího součinitel pro laminární a turbulentní proudění, výpočet ztráty v potrubí v důsledku třecích a místních ztrát, vykreslení charakteristiky potrubí

Kontrolní otázka

Co je příčinou ztrát při proudění? Definujte ztrátovou měrnou energii, tlakovou ztrátu, ztrátovou výšku.

Jak se určí ztrátový součinitel tření pro laminární proudění?

Jak se určí ztrátový součinitel tření pro turbulentní proudění?

Popište postup pří určení součinitele místních ztrát?

Co to znamená charakteristika potrubí?

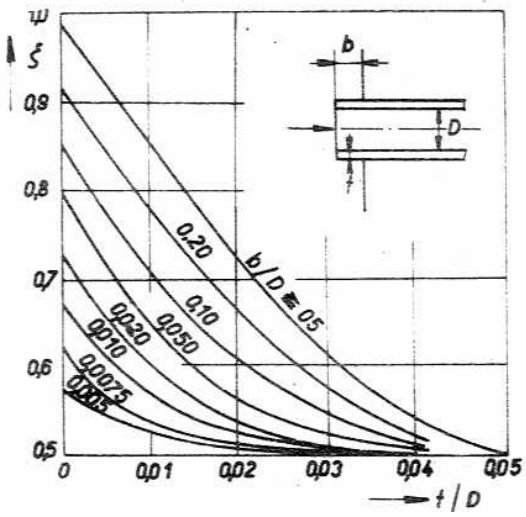
Jak se liší charakteristika pro potrubí vodorovné, se stoupáním a spádem.

Úkol k řešení

Příklad 10.1

Stanovte ztrátovou výšku pro vtok vody do potrubí průměru d, které je zasunuto do nádrže o délku b. Tloušťka stěny potrubí je t, rychlost v potrubí v.

Zadáno:		
$d =$	0.2 m	
$b =$	0.1 m	
$t =$	4 mm	
$v =$	3.16 m.s^{-1}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$\zeta =$?		0.73
$h_z =$?	m	0.372
$p_z =$?	Pa	3 649.320

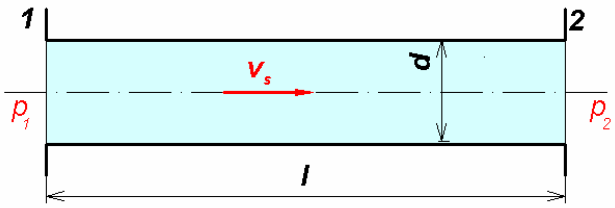


Příklad 10.2

Vypočítejte součinitel tření λ, tlakovou ztrátu p_z, ztrátovou výšku h_z a měrnou ztrátovou energii e_z při proudění oleje v potrubí. Olej má měrnou hmotnost ρ a kinematickou viskozitu ν. Určete průtok Q_v a druh proudění. Stanovte dynamickou viskozitu η. Průměr potrubí je d délka l. Rychlost proudění je v.

Zadáno :		
l =	1	m
d =	0.05	m
v =	3	$m.s^{-1}$
ρ =	890	$kg.m^{-3}$
ν =	4.0E-05	m^2s^{-1}

Vypočtěte:		Výsledky:
Re = ?		3 750.00
λ = ?		0.04038
h_z = ?	m	0.3705
p_z = ?	Pa	3 234.80
e_z = ?	$J.kg^{-1}$	3.6346
Q_v = ?	$m^3.s^{-1}$	0.005890
η = ?	Pa.s	0.0356

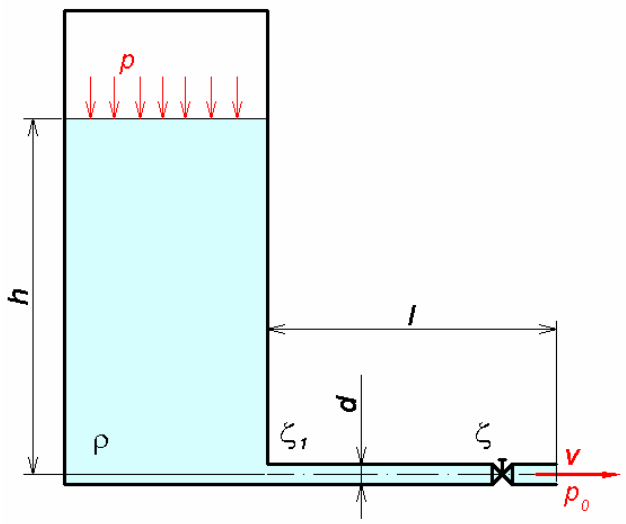


Příklad 10.3

K nádrži s hladinou ve výšce h a o tlaku p je připojeno potrubí o *délce* l *a* průměru d. Součinitel tření v potrubí je λ a ztrátový součinitel na vtoku do potrubí je ζ_1. Kapalina proudí rychlostí v. Určete velikost ztrátového součinitele ventilu $\zeta_.$ teoretickou výtokovou rychlost v_t, rychlostní součinitel φ, průtok Q_v.

Zadáno:		
l =	150	m
d =	0.25	m
v =	2	m.s^{-1}
h =	5.3	m
p =	300000	Pa
λ =	0.018	
ζ_1 =	0.8	
ρ =	1000	kg.m^{-3}

Vypočtěte:		Výsledky:
v_t = ?	m.s^{-1}	26.533
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.09817
φ = ?		0.07538
ζ = ?		163.390



Příklad 10.4

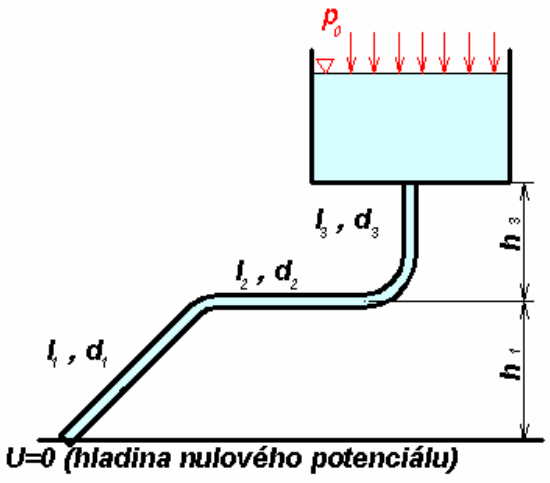
Určete tlakovou výšku H tak, aby potrubním systémem dle obrázku protékal objemový průtok Q_v. Potrubí tvoří tři úseky řazené sériově, předpokládá se turbulentní proudění. Geodetická výška je $h_g = h_1 + h_3$. Charakteristiky jednotlivých úseků jsou dány rovnicemi:

$$H_1 = h_1 + K_1 \cdot Q_v^2, \quad H_2 = h_2 + K_2 \cdot Q_v^2, \quad H_3 = h_3 + K_3 \cdot Q_v^2$$

Potrubí je nové, ocelové a charakteristiky jednotlivých úseků jsou známy. Určete výslednou charakteristiku potrubí $H = f(Q_v)$. Řešte početně i graficky.

Zadáno:		
Q_v =	100	m^3.hod^{-1}
h_1 =	20	m
h_2 =	0	m
h_3 =	30	m
K_1 =	10054	
K_2 =	27082	
K_3 =	85479	

Vypočtěte:		Výsledky:
$H = f(Q_V)$		
H = ?	m	144.61



Pozn.: Výslednou charakteristiku potrubí lze určit graficky, úseky jsou řazeny sériově, protéká jimi stejný objemový průtok Q_v, sčítají se tedy tlakové výšky pro zvolené hodnoty průtoků. Z výsledné charakteristiky se odečte spád H odpovídající zadané hodnotě průtoku.

11. Výtok kapaliny z nádob, přepady

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• použít Bernoulliho rovnici pro odvození výtoku kapaliny z nádoby • vyřešit jednoduché příklady výtoku kapaliny z nádoby malým, velkým a ponořeným otvorem • vyřešit jednoduché příklady výtoku kapaliny při současném přítoku • aplikovat získané teoretické vědomosti v praxi	

11.1. Výtok malým otvorem

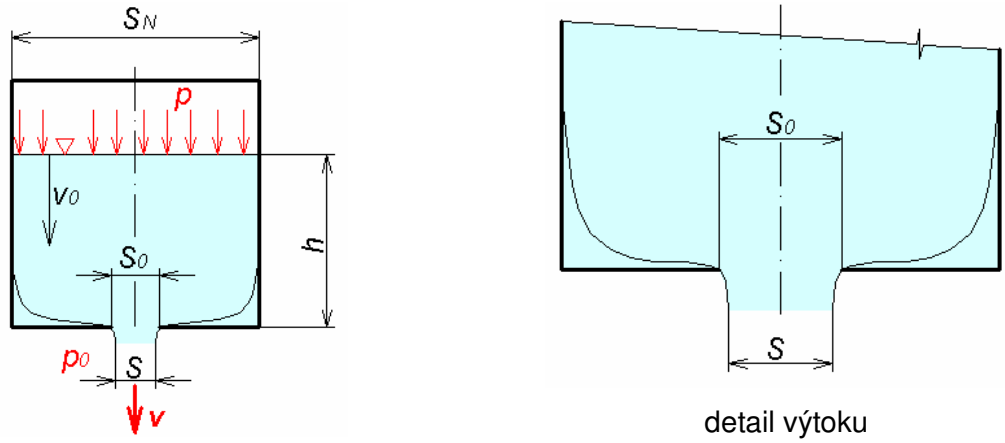
Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

vyřešit výtok malým ostrohranným otvorem
vysvětlit pojem výtokový součinitel

Výklad

Uvažujeme výtok kapaliny otvorem ve dně nádoby podle obr. 11.1. Nádoba má konstantní průřez S_n (válec, hranol) a je naplněna do výšky h. Ve dně je malý ostrohranný otvor o průřezu S_0, kterým kapalina vytéká do tlaku ovzduší p_0. V obecném případě se uvažuje v nádrži tlak p, který je od tlaku ovzduší p_0 odlišný.



detail výtoku

obr. 11.1 Výtok z nádoby otvorem ve dně

Protože polohová výška je pro celý otvor konstantní, je **rychlost** v otvoru **rovnoměrně rozložena**. Výtoková rychlost se v tomto případě vypočítá z Bernoulliho rovnice. Pro skutečnou kapalinu platí Bernoulliho rovnice psaná pro hladinu v nádrži a pro výtokový průřez ve tvaru:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v_0^2}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+0+gh_z \qquad (11.1.1)$$

Předpokládáme, že průřez výtokového otvoru S_0 je ve srovnání a průřezem nádrže S_n velmi malý, potom rychlost poklesu hladiny $v_o \to 0$. Pro ztrátovou výšku platí známá rovnice:

$$h_z=\zeta\frac{v^2}{2g}$$

Z rovnice (11.1.1) pro výtokovou rychlost odvodíme vztah:

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{2\left(gh+\frac{p-p_0}{\rho}\right)}=\varphi\sqrt{2\left(gh+\frac{p-p_0}{\rho}\right)} \qquad (11.1.2)$$

Pro teoretickou výtokovou rychlost $(\zeta=0)$ dostaneme:

$$v_t=\sqrt{2\left(gh+\frac{p-p_0}{\rho}\right)} \qquad (11.1.3)$$

Poměr skutečné a teoretické rychlosti je **rychlostní součinitel**:

$$\varphi=\frac{v}{v_t}=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}<1$$

Při stejném tlaku v nádrži a ve výtokovém otvoru $p=p_0$ je výtoková rychlost určena rovnicí:

$$v=\varphi\sqrt{2gh} \qquad (11.1.4)$$

Pro $\varphi=1$ je teoretická rychlost:

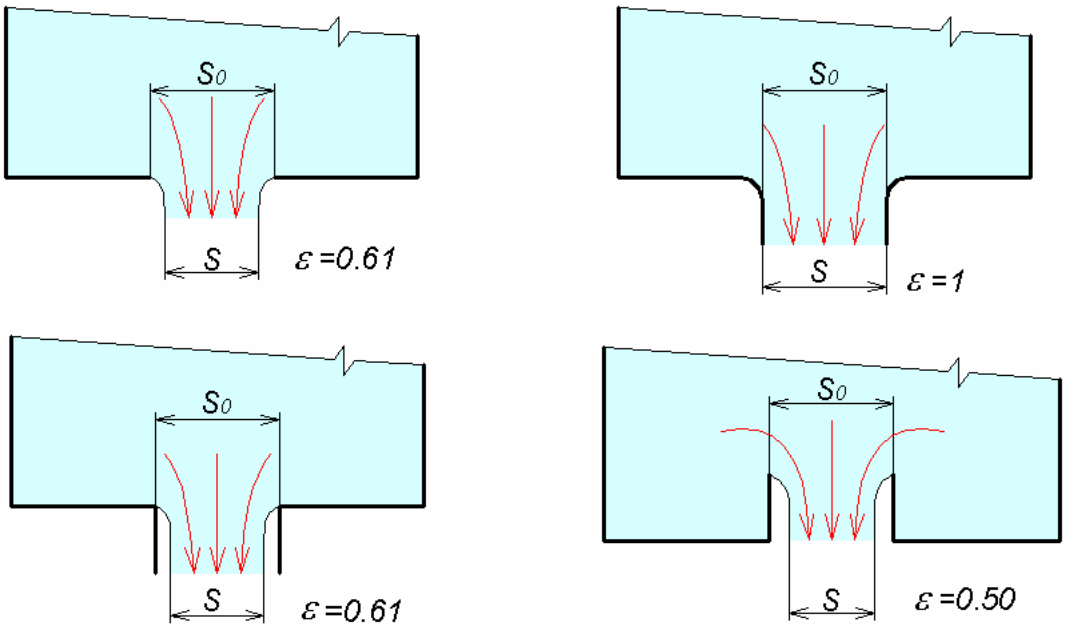
$$v_t=\sqrt{2gh} \qquad (11.1.5)$$

což je známý **Torricelliho výraz**.

Při výtoku z nádoby nevyplňuje proud kapaliny zpravidla celý výtokový otvor, neboť proudnice se nemohou náhle zakřivit podle hran otvorů obr. 11.1. Setrvačnosti částic kapaliny je způsobeno zúžení nebo kontrakce paprsku (obr. 11.2). Vyjadřuje se **součinitelem kontrakce**:

$$\varepsilon=\frac{S}{S_0}<1, \text{ odtud } S=\varepsilon S_0 \qquad (11.1.6)$$

Součinitel zúžení závisí obecně na tvaru výtokového otvoru, jeho umístění vůči bočním stěnám a na Re-čísle.



obr. 11.2 Závislost součinitele zúžení na tvaru výtokového otvoru

Skutečný výtok kapaliny otvorem po dosazení (11.1.4) a (11.1.6) do rovnice kontinuity je:

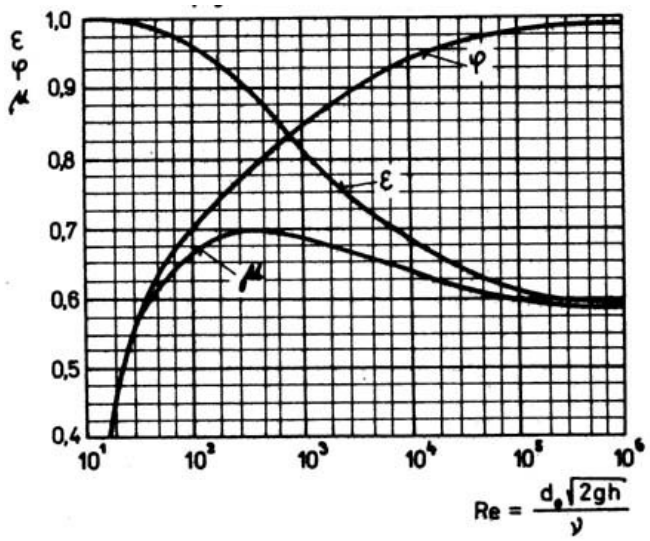
$$Q_v = vS = \varepsilon\varphi S_0\sqrt{2gh} = \mu S_o\sqrt{2gh} \qquad (11.1.7)$$

kde

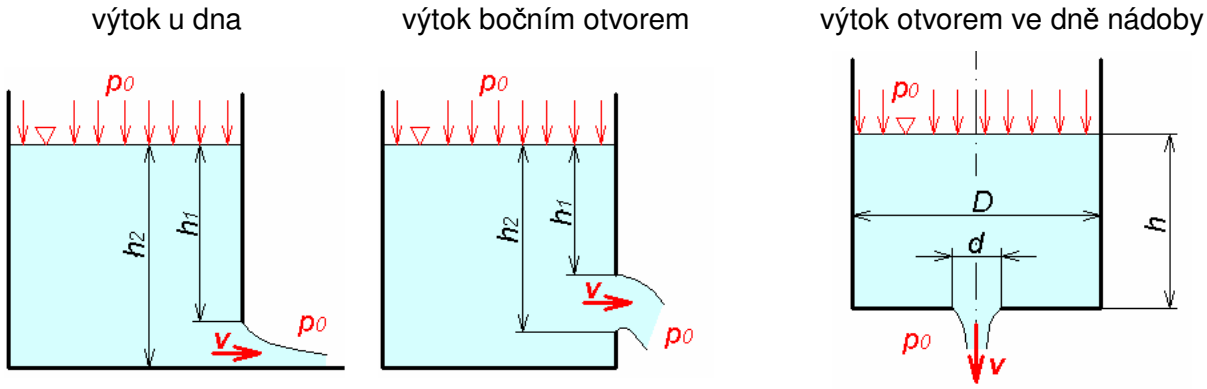
$$\mu = \frac{Q_v}{Q_{vt}} = \varepsilon \cdot \varphi \langle 1 \qquad (11.1.8)$$

je **výtokový součinitel**, který rovněž závisí na tvaru otvoru či nátrubku a Re-čísle.

Závislost $\varphi, \varepsilon, \mu = f(\mathrm{Re})$ pro ostrohranný otvor podle výsledků měření je uveden na obr. 11.3.



obr. 11.3 Rychlostní, kontrakční a výtokový součinitel malého otvoru



$\mu = 0{,}6 \div 0{,}62$ ostrohranný $\mu = 0{,}62 \div 0{,}64$ zaoblený $\mu = 0{,}7 \div 0{,}8$

d/D	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
μ	0,61	0,61	0,62	0,63	0,65	0,68

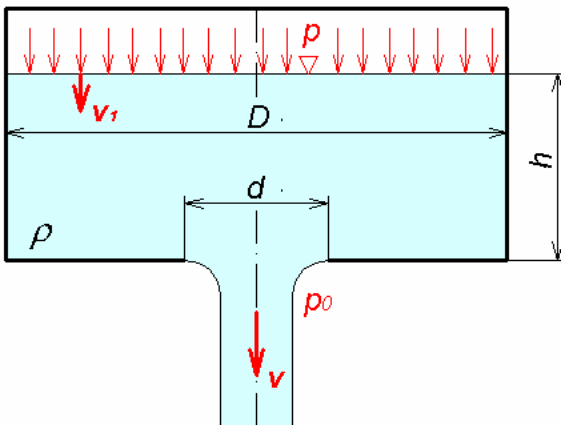
obr. 11.4 Závislost výtokového součinitele na poloze výtoku

Řešený příklad

Stanovte skutečnou výtokovou rychlost v a průtok vody Q_v vytékající ostrohranným otvorem ve dně nádoby o průměru d. Válcová nádoba má průměr D, je naplněna do výšky h a přetlak v nádobě je p. Dále je dán rychlostní součinitel φ a součinitel kontrakce ε.

Zadáno:		
d =	4	cm
D =	0.6	m
h =	2	m
p =	0.03	MPa rel.tl
ρ =	1000	kg.m^{-3}
φ =	0.97	
ε =	0.64	

Vypočtěte:			Výsledky:
v =	?	m.s^{-1}	9.66317
Q_v =	?	m^3.s^{-1}	0.00777



Řešení:

Bernoulliho rovnice pro hladinu a výtok: $\frac{p}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gh=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_t^2}{2}$; do rovnice dosadíme relativní hodnoty tlaku, tj. $p_0 = 0\,\text{Pa}$, $p = 0.03\ \text{MPa}$

Z rovnice spojitosti lze vyjádřit rychlost v_1: $v_1\frac{\pi D^2}{4}=v_t\frac{\pi d^2}{4}\Rightarrow v_1=v_t\frac{d^2}{D^2}$,

dosadíme do Bernoulliho rovnice: $\frac{p}{\rho}+gh=\frac{v_t^2}{2}-\frac{v_t^2}{2}\frac{d^2}{D^2}\Rightarrow v_t=\sqrt{\frac{2\left(\frac{p}{\rho}+gh\right)}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}}$.

Skutečná rychlost: $\varphi=\frac{v}{v_t}\Rightarrow v=\varphi v_t$; objemový průtok: $Q_v=\varepsilon\frac{\pi d^2}{4}v$

11.2. Výtok velkým otvorem v boční stěně

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

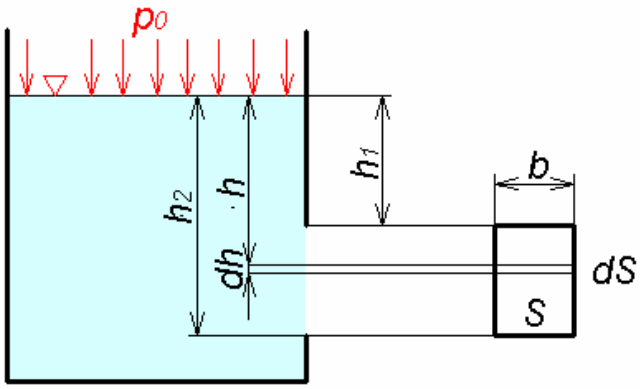
Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

vyřešit výtok velkým otvorem v boční stěně
vysvětlit rozdíl mezi výtokem velkým a malým otvorem

Výklad

Při relativně velkém otvoru ve svislé stěně je nutno respektovat závislost výtokové rychlosti kapaliny na hloubce uvažovaného místa pod hladinou tlaku ovzduší. Skutečná výtoková rychlost kapaliny je určena vztahem (11.1.2) nebo (11.1.4). Výtok kapaliny z nádoby se určí integrací. Elementem výtokového otvoru $dS=b\cdot dh$ (obr. 11.5) vytéká elementární **skutečný průtok** kapaliny:

$$dQ_v=\mu\cdot dS\cdot v=\mu b\sqrt{2gh}\cdot dh$$



obr. 11.5 Výtok velkým otvorem obecného tvaru

Výtok rozměrným otvorem je určen obecně integrálem:

$$Q_v=\int_S dQ=\mu\int_{h_1}^{h_2} b\sqrt{2gh}\cdot dh \qquad (11.2.1)$$

Má-li otvor obdélníkový průřez $b = konst.$, potom výtok určíme integrací rovnice (11.2.1):

$$Q_v = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2}\right) \qquad (11.2.2)$$

11.3. Výtok ponořeným otvorem

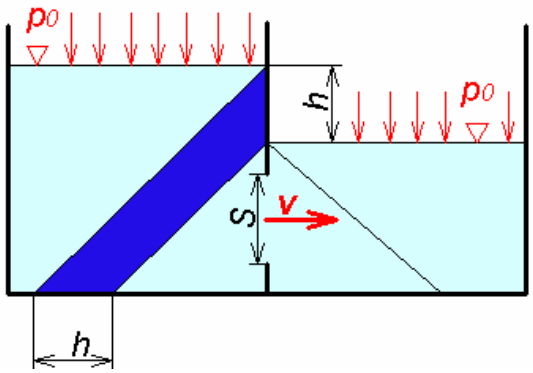
Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

vyřešit výtok ponořeným otvorem

Výklad

Kapalina vytéká otvorem do prostředí vyplněného rovněž kapalinou (obr. 11.6). Jde v podstatě o průtok otvorem mezi dvěma nádobami. **Otvor je pod oběma hladinami** v nádržích, proto je označován jako ponořený. Výtoková rychlost otvorem závisí na rozdílu hladin v nádobách.



obr. 11.6 Výtok ponořeným otvorem

K odvození vztahu pro výtokovou rychlost se pomyslně otvor zakryje deskou. Tlak kapaliny působící na desku z obou stran je přímo úměrný hloubce uvažovaného místa do hladiny tlaku ovzduší. Jejich průběh je vyznačen v obrázku přímkami (obr. 11.6). Tlaky působí proti sobě, proto výsledný **tlak** je dán jejich rozdílem, který je po celé stěně smočené z obou stran konstantní:

$$\Delta p = \rho g h \qquad (11.3.1)$$

Po odkrytí otvoru začne kapalina přetékat **teoretickou výtokovou rychlostí**:

$$v_t = \sqrt{2gh}$$

Tento výraz je formálně totožný s Torricelliho výrazem. Protože tlakový rozdíl je po celém průřezu ponořeného otvoru stejný, je výtoková rychlost ve všech místech stejná a nezávislá na tvaru otvoru S. Pro **objemový průtok** proto platí rovnice:

$$Q_v = \mu S\sqrt{2gh} \qquad (11.3.2)$$

11.4. Výtok při současném přítoku

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

vyřešit výtok při současném přítoku

Výklad

Z otevřené nádoby **vytéká** kapalina (Q_v) otvorem (S_0) (obr. 11.7) a současně **přitéká** Q_{vp}, přičemž $Q_{vp} \neq Q_v$. Výtok při libovolné výšce h hladiny je určen vztahem:

$$Q_V = \mu S_0\sqrt{2gh}$$

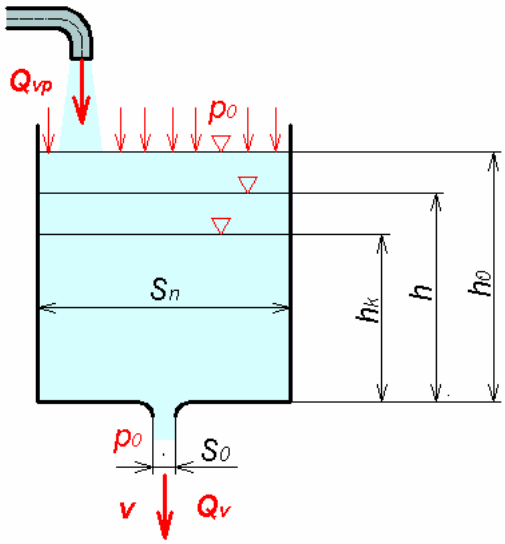
Jestli-že $Q_{vp} \neq Q_v$ poloha hladiny se v nádobě bude měnit. Pokud je $Q_{vp} \rangle Q_v$, hladina stoupá, v opačném případě $Q_{vp} \langle Q_v$ hladina klesá. Stoupání, popřípadě klesání hladiny trvá tak dlouho, až se dosáhne rovnováhy $Q_{vp} = Q_v$. Tomuto **ustálenému stavu odpovídá výška** h_k, pro níž platí:

$$Q_{VP} = Q_v = \mu S_0\sqrt{2gh_k}$$

Vyšetříme změnu polohy hladiny v závislosti na čase t. Předpokládá se, že v rovnovážném stavu v čase $t = 0$ je hladina ve výšce h_0. Skokem se změní přítok kapaliny na hodnotu $Q_{vp} = konst.$, např. se Q_{vp} zvětší. V libovolném časovém okamžiku t způsobí rozdíl přiteklé a vyteklé kapaliny za elementární čas dt zvýšení dh hladiny p_0 v nádobě o průřezu S_n:

$$dt = \frac{S_n \cdot dh}{Q_{vp} - Q_v} = \frac{S_n \cdot dh}{\mu S_0\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_k} - \sqrt{h}\right)} \qquad (11.4.1)$$

Integrací této rovnice se stanoví **čas**, za který hladina stoupne nebo klesne z původní hodnoty h_0 na hodnotu h.



obr. 11.7 Výtok při současném přítoku

V obecném případě je třeba také uvážit, že $S_n = f(h)$ a $Q_{vp} = f(t)$:

11.5. Vyprázdnění nádoby

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

vyřešit vyprazdňování nádob
určit dobu vyprazdňování

Výklad

Jestliže do nádoby nepřitéká kapalina a tedy $Q_{vp} = 0$, hladina klesá, až se nádoba vyprázdní $(h = 0)$. Čas potřebný k vyprázdnění nádoby se vypočte z diferenciální rovnice (11.4.1) do níž se dosadí $Q_{vp} = 0$ neboli $h_k = 0$. Pak platí:

$$dt = -\frac{S_n \cdot dh}{\mu S_o \sqrt{2gh}} \qquad (11.5.1)$$

Z otevřené nádoby s konstantním průřezem S_n se dostane integrací doba t potřebná ke snížení hladiny p_0 z výšky h_0 na h:

$$t = -\frac{S_n}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h_0}^{h} h^{-½} dh = \frac{2S_n}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h} \right) \qquad (11.5.2)$$

Při úplném vyprázdnění nádoby je konečná výška hladiny rovna $h = 0$ a potřebná doba vyprázdnění nádoby se vypočte ze vzorce:

$$t_v = \frac{2Sh_0}{\mu S_0 \sqrt{2gh_0}} = 2\frac{Sh_0}{Q_{vo}} = 2\frac{V_0}{Q_{vo}} \qquad (11.5.3)$$

kde V_0 objem nádrže

$Q_{v0} = \mu \cdot S_0 \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$ je výtok na začátku vyprazdňování.

Vypočítaná doba úplného vyprázdnění nádoby při menších výškách hladiny h_0 se může lišit od skutečné doby vyprázdnění. To je způsobeno kvalitativními změnami ve výtoku kapaliny otvorem, neboť při určité výšce hladiny nad otvorem vznikne nálevkovitý vír.

11.6. Přepady

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

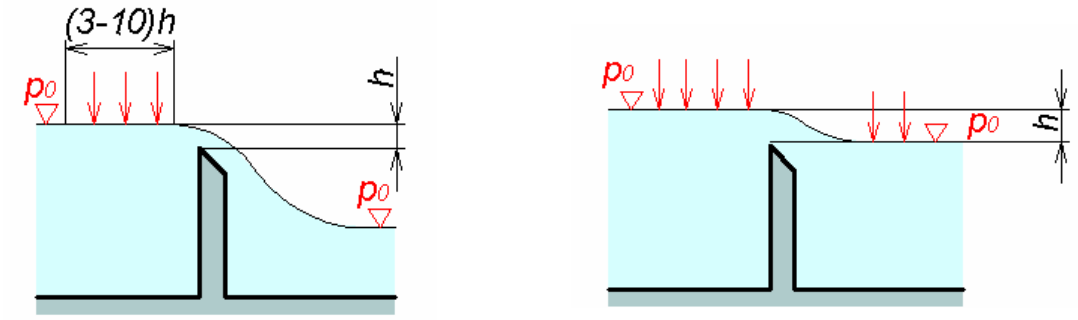
definovat dokonalý a nedokonalý přepad
popsat jejich řešení

Výklad

Přepad je výtok nezaplněným otvorem nebo otvorem s neuzavřeným obrysem. (obr. 11.8) Nejnižší místo výtokového otvoru je **korunou přepadu**. Výška horní hladiny (před přepadem) nad korunou přepadu je přepadová výška h.

S přepadem se setkáváme na přehradách, kde zajišťují propuštění při maximálních průtocích a udržení hladiny v nádrži pod maximální úrovní. Přepady mají význam rovněž pro měření velkých průtoků, např. v laboratořích.

Podle polohy spodní hladiny se rozlišují přepady dokonalé a nedokonalé. **Dokonalý přepad** je takový, při němž spodní hladina neovlivňuje průtok přepadem. U dokonalého přepadu je spodní hladina pod korunou přepadu (obr. 11.8). **Nedokonalý přepad** má ovlivněn průtok spodní hladinou, která je výše než koruna přepadu (obr. 11.8). Přepadová stěna může být poměrně tenká nebo tlustá, popřípadě se zaoblením.



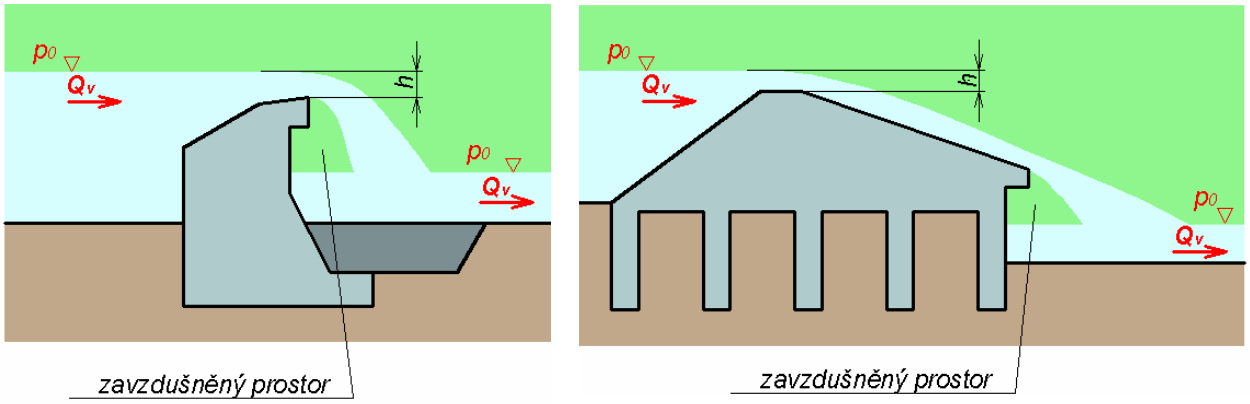
dokonalý přepad nedokonalý přepad

obr. 11.8 Dokonalý a nedokonalý přepad

Průtok dokonalým přepadem s volným proudem se stanoví jako **výtok velkým otvorem ve stěně nádoby** (11.2.1), popř.:

$$Q_v = \mu\sqrt{2g}\int_S b\sqrt{h}\cdot dh \qquad (11.6.1)$$

Tato rovnice je rovnice Dubuatova pro obecný tvar přepadu. Součinitel přepadu μ je obdobný **výtokovému součiniteli**. Je závislý na přepadové výšce h a vlastnostech přepadu, tzn. $\mu = \mu(\text{Re, geom. tvar})$.



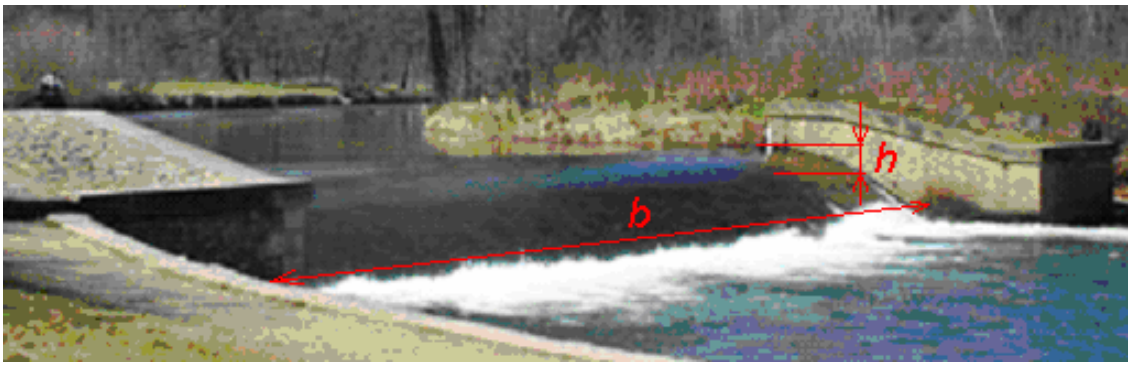
jez kolmý jez dřevěný

obr. 11.9 Příklady přepadu [http://mve.energetika.cz/vodnidilo/prepad.htm]

Pro obdélníkový přepad (obr. 11.8) se šířkou koruny přepadu b (obr.11.10), je průtok určen vzorcem pro **výtok velkým otvorem ve stěně nádoby** (11.2.2). Jestliže se dosadí $h_1 = 0$ a $h_2 = h$, pak

$$Q_v = \frac{2}{3}\mu\, bh\sqrt{2gh} \qquad (11.6.2)$$

Pro přepad s ostrou hranou a pro volný proud, který je dobře zavzdušněn (vzduch má přístup pod přepadající proud), je střední hodnota součinitele přepadu $\mu = 0{,}65$, pokud šířka přepadu b je rovna šířce celého kanálu b_0.



obr. 11.10 Měření průtoku na jezu

Pro přepady jiných průřezů vztahy pro průtok je možné najít v odborné literatuře. Pro měření průtoku se velmi často používá přepad trojúhelníkový.

Shrnutí kapitoly

Výtok malým otvorem, výtokový součinitel, součinitel kontrakce, rychlostí součinitel, výtok velkým otvorem v boční stěně nádoby, výrok ponořeným otvorem, výtok při současném přítoku, vyprazdňování nádob, dokonalý a nedokonalý přepad.

Kontrolní otázka

Co určuje Torricelliho výraz a za jakých předpokladů platí?

Co vyjadřuje rychlostní součinitel a součinitel kontrakce?

Jak souvisí rychlostní součinitel a ztrátový součinitel?

Proč je výtoková rychlost po průřezu ponořeného otvoru konstantní?

Jak určíme výtokový součinitel?

Čím se liší výtok kapaliny velkým otvorem v boční stěně od výtoku malým otvorem?

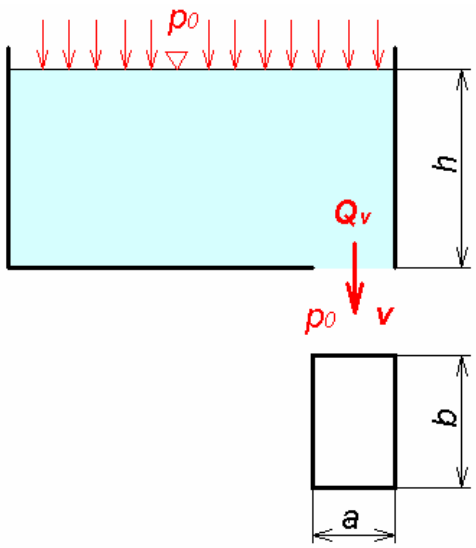
Co je to přepad dokonalý a nedokonalý?

Úkol k řešení

Příklad 11.1

Ve dně nádoby je malý ostrohranný obdélníkový otvor, jehož rozměry jsou a a b a který se hranou b dotýká boční stěny. Určete průtok otvorem Q_V, je-li otvor v hloubce h pod hladinou a je-li dán výtokový součinitel μ.

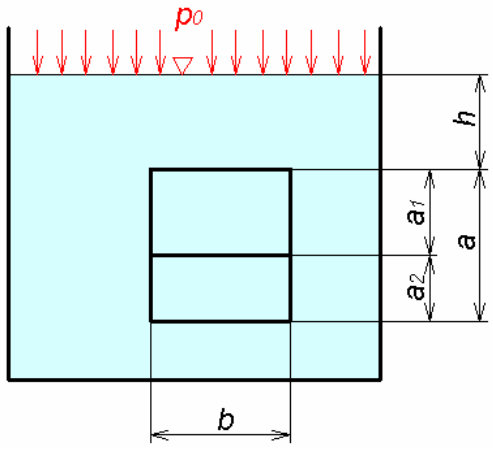
Zadáno:			
a =	30	mm	
b =	40	mm	
h =	3	m	
μ =	0.647		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
Q_v =	?	$m^3.s^{-1}$	0.00596



Příklad 11.2

Obdélníkový otvor v boční stěně je třeba rozdělit vodorovnou přepážkou tak, aby v obou částech otvoru byl stejný výtok Q_V kapaliny o hustotě ρ. Také se předpokládá stejný výtokový součinitel μ. Výška otvoru je a, šířka otvoru je b a hladina je ve výšce h nad horní hranou otvoru. Určete výšky otvorů a_1 a a_2 a jejich průtoky Q_V.

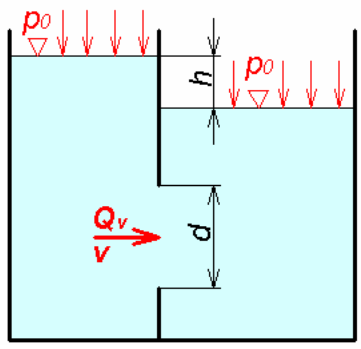
Zadáno:			
a =	0.4	m	
b =	0.8	m	
h =	0.4	m	
μ =	0.62		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
Q_V =	?	$m^3.s^{-1}$	0.33875
a_1 =	?	m	0.21667
a_2 =	?	m	0.18333



Příklad 11.3

Dvě vodní nádrže mají společnou stěnu, v níž je kruhový ostrohranný otvor o průměru d. Určete, jaké množství vody protéká otvorem, je-li rozdíl hladin mezi oběma nádržemi Δh a je-li dán výtokový součinitel μ experimentálně.

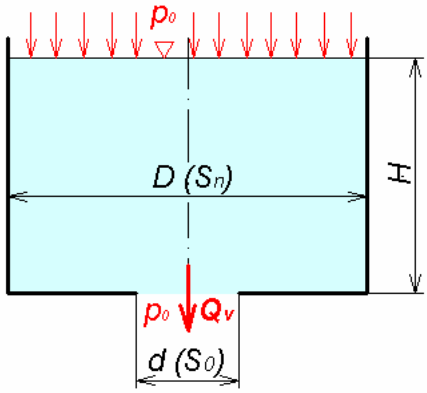
Zadáno:			
Δh =	0.5	m	
d =	0.1	m	
μ =	0.62		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
?		$m^3.s^{-1}$	0.01525



Příklad 11.4

Za jakou dobu t se vyprázdní válcová nádrž o průměru D, zaplněná vodou do výšky H, kruhovým ostrohranným otvorem o průměru d.

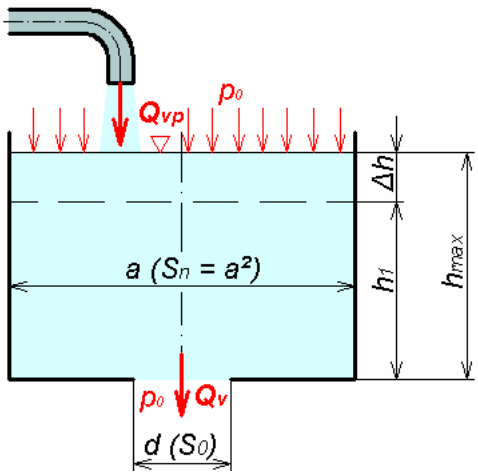
Zadáno:			
D =	1.2	m	
d =	0.1	m	
H =	0.8	m	
μ =	0.62		
Vypočtěte:			**Výsledky:**
t =	?	s	93.80



Příklad 11.5

Do prázdné nádrže tvaru hranolu se čtvercovým dnem o ploše S_n a hraně a přitéká voda průtokem Q_{vp}. Současně voda začne vytékat ze dna nádoby kruhovým otvorem o poloměru d o výtokovém součiniteli μ. Určete výšku hladiny h_{max} odpovídající ustálenému stavu. Za jakou dobu se dosáhne úrovně hladiny o Δh nižší než je h_{max}.

Zadáno:			
a =	0.8	m	
d =	30	mm	
Q_{vp} =	2	$dm^3.s^{-1}$	
μ =	0.62		
Δh =	0.1	m	
Vypočtěte:			**Výsledky:**
h_{max} =	?	m	1.06148
t =	?	s	1410.6



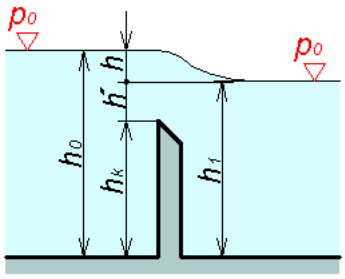
Příklad 11.6

Určete šířku obdélníkového přepadu b bez bočního zúžení při průtoku Q_v. Výška hladiny nad dnem před přepadem je h_0, za přepadem h_1, výška koruny přepadu je h_k. K výpočtu výtokového součinitele μ použijte vztah podle Spolku švýcarských inženýrů:

$$\mu = 0.615\left(1+\frac{1}{1000h+1.6}\right)\left[1+0.5\left(\frac{h+h'}{h_0}\right)^2\right],$$

kde $h+h'$ je výška hladiny nad korunou přepadu. Předpokládejte $\mu = \mu'$.

Zadáno:			
$Q_v =$	1.50	$m^3.s^{-1}$	
$h_0 =$	1.2	m	
$h_1 =$	0.9	m	
$h_k =$	0.7	m	
Vypočtěte:			**Výsledky:**
$h =$	?	m	0.300
$h' =$	?	m	0.200
$\mu =$	?		0.6717
$b =$	?	m	2.301



12. Neustálené proudění v potrubí

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• řešit neustálené proudění nestlačitelné tekutiny v potrubí • pochopit děj spojený s hydraulickým rázem • určit zvýšení tlaku a dobu běhu vlny při hydraulickém rázu	

Neustálené proudění je spojeno se změnou rychlosti a tlaku v čase. Tyto změny mohou nastat v souvislosti se změnou provozních podmínek a jsou spojeny zejména s řešením hydraulických systémů. Neustálený stav může být vyvolán v nejjednodušším případě tak, že se náhle uzavře ventil na konci potrubí, kterým vytéká kapalina z nádrže. Změna rychlosti vyvolá změnu tlaku. Při řešení tohoto případu záleží na tom, zda uvažujeme stlačitelnost kapaliny.

12.1. Neustálené proudění nestlačitelné kapaliny potrubím

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat Bernoulliho rovnici pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny v tuhém potrubí

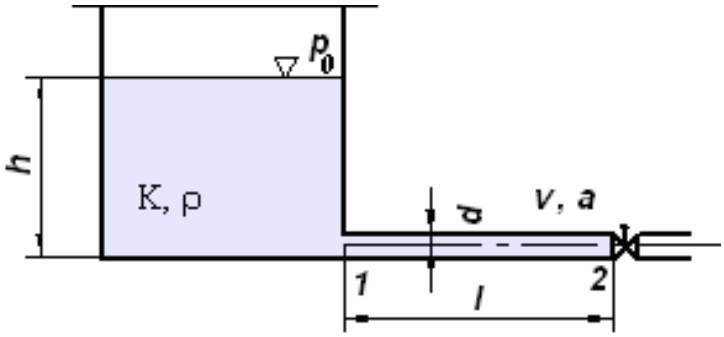
určit stoupnutí tlaku v potrubí

definovat druhou rovnici kontinuity

Výklad

V nejjednodušším případě neustáleného proudění, kdy se předpokládají malé změny rychlosti a tedy i tlaku, lze kapalinu považovat za nestlačitelnou ($\rho = konst$, $K \to \infty$) a potrubí za tuhé ($E \to \infty$). Pak rychlost proudění je jen funkcí času $v = v(t)$. K řešení neustáleného proudění pak slouží **rozšířená Bernoulliho rovnice,** která byla získána integrací Eulerovy rovnice pro proudění dokonalé tekutiny ve tvaru

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh + \int_l \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dl = konst, \text{ kde } \int_l \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dl = al \qquad (12.1.1)$$



obr. 12.1 Schéma nádrže s potrubím

Bernoulliho rovnice pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny v tuhém potrubí je tedy

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh+al=konst \qquad (12.1.2)$$

kde $a=\frac{dv}{dt}\cong\frac{\Delta v}{\Delta t}$ je zrychlení sloupce kapaliny o délce *l*.

Pro hladinu v nádrži a průřez 2 na konci potrubí, jímž protéká skutečná kapalina nestacionárně, platí Bernoulliho rovnice

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_0^2}{2}+gh=\frac{p_2}{\rho}+\frac{v^2}{2}+al+gh_z \qquad (12.1.3)$$

Pokud je potrubí vodorovné o konstantním průměru, můžeme napsat Bernoulliho rovnici pro průřezy 1 a 2, která se při zanedbání ztrát zjednoduší na tvar:

$$\frac{p_1}{\rho}=\frac{p_2}{\rho}+a.l \qquad (12.1.4)$$

Změna tlaku je dána vztahem:

$$\Delta p=p_2-p_1=-\rho a.l \qquad (12.1.5)$$

Při uzavírání armatury se sloupec zpožďuje, zrychlení je záporné ($a<0$) a tlak v potrubí vzrůstá. Naopak pokud se jedná o zrychlení sloupce kapaliny (při otevírání ventilu na konci potrubí), je zrychlení kladné a dojde ke snížení tlaku $\Delta p<0$.

Když se průřez potrubí mění, je v každém úseku potrubí jiná rychlost a zrychlení proudu kapaliny. Pro každý časový okamžik platí rovnice kontinuity pro libovolné průřezy $S_1\cdot dv_1=S_2\cdot dv_2=S\cdot dv=konst$, kde $dv_1=a_1dt, dv_2=a_2dt$. Po dosazení do rovnice kontinuity a úpravě se dostane

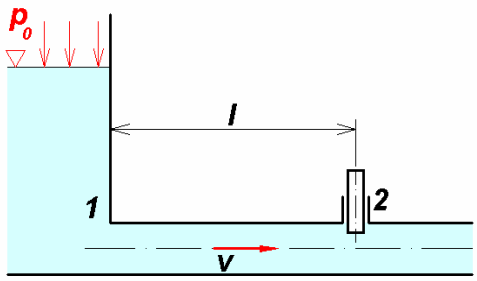
$$S_1a_1=S_2a_2=Sa=konst \qquad (12.1.6)$$

což je druhá rovnice kontinuity pro neustálené proudění nestlačitelné kapaliny v tuhém potrubí.

Řešený příklad

Určete zvýšení tlaku $\Delta p = p_2 - p_1$ při náhlém uzavření ventilu v potrubí o délce l. Uzavírání proběhne za čas t_u. Počáteční rychlost vody je v. Předpokládá se nestlačitelná kapalina a tuhé potrubí.

Zadáno:		
$l = 2000$	m	
$t_u = 1$	s	
$v = 1$	$m.s^{-1}$	
$\rho = 1000$	$kg.m^{-3}$	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$a = ?$	$m.s^{-2}$	- 1.00000
$\Delta p = ?$	Pa	2 000 000



$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho a.l$$

12.2. Neustálené proudění stlačitelné kapaliny – hydraulický ráz

Čas ke studiu: **1 hodina**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

popsat děj při hydraulickém rázu
odvodit rovnici pro stoupnutí tlaku při hydraulickém rázu

Výklad

Jestliže změny tlaku jsou větší, je třeba přihlížet ke stlačitelnosti kapaliny a neustálené proudění řešit jako hydraulický ráz. U hydraulického rázu jde o přeměnu kinetické energie kapaliny v deformační práci kapaliny. Hydraulický ráz se projeví periodickými změnami průtoků a tlaků (rázovými vlnami), které by se v případě nevazké kapaliny neustále opakovaly. Ve skutečných kapalinách se vnitřním třením rázové vlny utlumí až prakticky zaniknou.

Odvození se provede opět na nejjednodušším případě, kdy potrubí je napojeno na velkou nádrž, v níž je hladina kapaliny v konstantní výši a na konci potrubí je uzavírací či regulační armatura. Kapalina je stlačitelná, je znám její modul objemové pružnosti K. Pro potrubí je definován modul pružnosti v tahu E.

Při náhlém uzavření armatury na konci potrubí se okamžitě zastaví výtok kapaliny. Kinetická energie kapaliny, která narazí na uzávěr, se přemění na deformační práci, kapalina se stlačí. Tím se vytvoří prostor, do kterého vtéká další kapalina a rovněž dochází k jejímu stlačení. Stlačená kapalina má větší tlak o hodnotu Δp. Rozhraní mezi zastavenou (stlačenou) kapalinou a proudící se kapalinou se šíří od místa vzniku rázu (tj. armatury) rychlostí zvuku a (rychlost tlakového rozruchu) směrem k nádrži, kam doběhne v čase $t = \frac{l}{a}$. Sloupec kapaliny v potrubí je stlačen – má vyšší tlak o Δp.

Na vtoku potrubí je v tomto okamžiku rozhraní stlačené a nestlačené kapaliny, což je nerovnovážný stav. Proto stlačená kapalina začne expandovat do nádrže, deformační energie se přemění opět v kinetickou (kapalina „odpruží“) a rozběhne se v opačném smyslu (od uzávěru do nádrže). Uvolněním sloupce kapaliny se stoupnutí tlaku Δp ruší a rozhraní stlačené a nestlačené kapaliny se šíří rychlostí zvuku od nádrže ke konci potrubí. Při expanzi kapaliny na konci potrubí (u armatury) vznikne snížení tlaku o hodnotu Δp. Tato tlaková vlna představující snížení tlaku o Δp se opět šíří od uzávěru k nádrži, kde se odrazí. Přitom se snížení tlaku Δp zruší a kapalina se rozběhne od nádrže k uzávěru. Tlaková vlna $(-\Delta p)$ doběhne zpět k uzávěru v čase $T = 2t = \frac{l}{a}$, kapalina narazí na uzávěr, takže dojde opět k zastavení a zvýšení tlaku. Ale to se již celý proces šíření tlakové vlny opakuje.

Doba, ve které rázová vlna se vrátí do místa vzniku, tj. k uzávěru, se nazývá **doba běhu vlny *T*** a vypočítá se ze vztahu

$T = \frac{2l}{a}$, kde l je délka potrubí, a je rychlost zvuku. (12.2.1)

V kapalinách je **rychlost šíření tlakových vln** (zvuku) určena výrazem

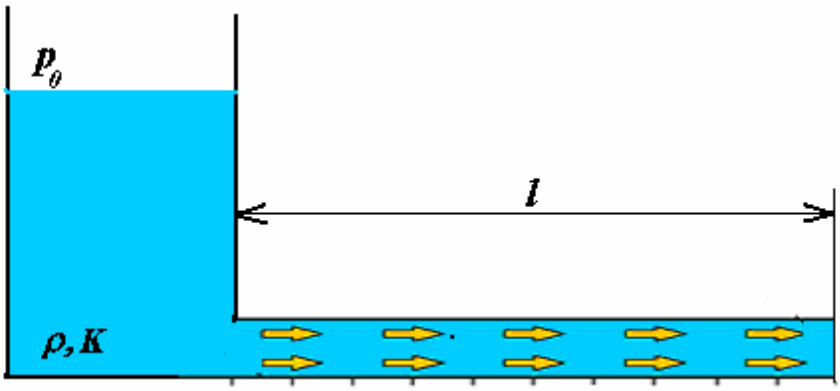
$$a = \kappa \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \kappa a_t \qquad (12.2.2)$$

kde součinitel $\kappa \langle 1$ zahrnuje **vliv pružnosti stěn potrubí**. Tento součinitel lze vypočítat v závislosti na tloušťce stěny potrubí s, modulu objemové pružnosti kapaliny K a modulu pružnosti v tahu E.

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Kd}{Es}}} \text{ (tenkostěnné)}, \qquad \kappa = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{K}{E}\frac{D^2 + d^2}{D^2 - d^2}}} \text{ (tlustostěnné)} \qquad (12.2.3)$$

Ve vztahu pro tlustostěnné potrubí je D vnější průměr a d vnitřní průměr trubky.

Grafické znázornění jednotlivých fází hydraulického rázu je na obr. 12.2.



$t = 0$		tlak ustáleného proudu
$0 < t < \frac{l}{a} = \frac{T}{2}$	a	zvýšený tlak
$t = \frac{l}{a} = \frac{T}{2}$		zvýšený tlak
$\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a} = T$	a	zvýšený tlak
$t = \frac{2l}{a} = T$		tlak ustáleného proudu
$\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a} = \frac{3}{2}T$	a	snížený tlak
$t = \frac{3l}{a} = \frac{3}{2}T$		snížený tlak
$\frac{3l}{a} < t < \frac{4l}{a} = 2T$	a	snížený tlak
$t = \frac{4l}{a} = 2T$		tlak ustáleného proudu
tlak ustáleného proudu	snížený tlak	zvýšený tlak

obr. 12.2 Schéma neustáleného proudění v potrubí bez tření – tlak

Stoupnutí tlaku při hydraulickém rázu se dostane z rovnosti kinetické energie a deformační práce při stlačení kapaliny v potrubí. Za určitý čas po uzavření armatury se dostane rázová vlna do vzdálenosti x od uzávěru. Sloupec kapaliny o délce x se zastaví a jeho kinetická energie se změní na deformační práci potřebnou ke stlačení sloupce x o Δx.

$$E_k = E_d$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} F \Delta x$$

$$\frac{1}{2} \rho V v^2 = \frac{1}{2} \Delta p \Delta V , \qquad (12.2.4)$$

$$\frac{V}{\Delta V} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad \text{kde ze vztahu} \quad K = \frac{V \Delta p}{\Delta V} \Rightarrow \frac{V}{\Delta V} = \frac{K}{\Delta p}$$

$$\frac{K}{\Delta p} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{K \rho v^2} = \rho v \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \rho v a_t$$

Tento výraz odvodil poprvé N. E. Žukovskij (1897 – 1898).

Skutečné zvýšení tlaku při hydraulickém rázu se vypočte se skutečnou rychlostí zvuku a, takže platí

$$\Delta p = \rho a v = \rho \kappa a_t v \qquad (12.2.5)$$

V tomto případě se veškerá kinetická energie přeměnila v deformační práci. Stoupnutí tlaku o Δp odpovídá **totálnímu hydraulickému rázu**, který nastane, když je doba uzavírání t_{uz} nebo otevírání ventilu (čas odpovídající změně rychlosti) je velmi krátká, tj.

$$t_{uz} \leq T = \frac{2l}{a} \qquad (12.2.6)$$

kde T je **doba běhu vlny** v potrubí o délce l od ventilu k nádrži a zpět.

Při delší době uzavírání armatury, tj. $t_{uz} \rangle T$, je zvýšení tlaku při hydraulickém rázu menší a označuje se jako částečný hydraulický ráz. Za předpokladu lineárního poklesu rychlosti kapaliny v čase, určí se částečný hydraulický ráz ze vzorce

$$\Delta p_č = \Delta p \frac{T}{t_{uz}} ; \left(t_{uz} \rangle T\right) \qquad (12.2.7)$$

Hydraulický ráz představuje značné zvýšení tlaku. Například při změně rychlosti vody v potrubí $\Delta v = 1$ ms^{-1} je při totálním hydraulické rázu zvýšení tlaku po dosazení do (12.2.5)

$$\Delta p = \rho a \Delta v = \sqrt{\rho K} \Delta v = \sqrt{10^3 \cdot 2 \cdot 10^9} \cdot 1 \doteq 1{,}4 \cdot 10^6 = 1{,}4 \text{MPa}$$

Pružností potrubí je hydraulický ráz snížen.

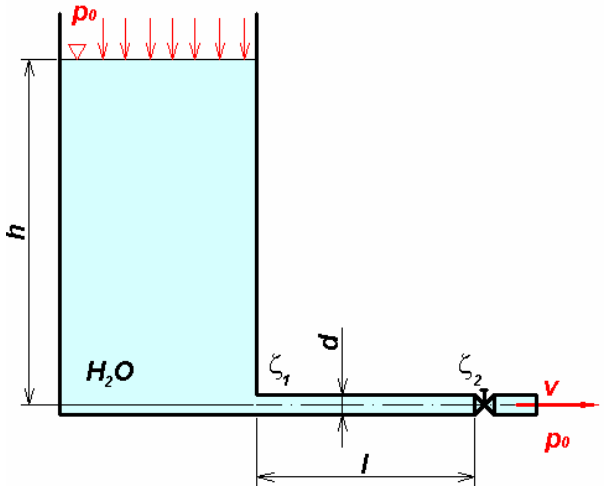
Obecný případ hydraulického rázu se spočívá v řešení parciální diferenciální rovnice druhého řádu, tzv. vlnové rovnice.

Řešený příklad

Vypočtěte průtok Q_v, celkový ztrátový součinitel ζ pro potrubí délky l a průměru d a rychlostní součinitel φ. Určete potřebný spád h. Stanovte zvýšení tlaku Δp před ventilem při jeho náhlém uzavření. Uvažujte pružné potrubí, součinitel pružnosti potrubí κ, součinitel tření λ, ztrátový součinitel na vtoku do potrubí ζ_1, ztrátový součinitel ventilu ζ_2 Vypočtěte dobu běhu tlakové vlny T. Stanovte maximální dobu uzavírání ventilu $t_{z\max}$ při které ještě dojde k totálnímu rázu. Uvažujte modul objemové pružnosti vody K. Voda proudí v potrubí rychlostí v.

Zadáno:		
$v = 4$	m.s^{-1}	
$l = 4000$	m	
$d = 300$	mm	
$\kappa = 0.9$		
$\lambda = 0.024$		
$\zeta_1 = 0.5$		
$\zeta_2 = 1.2$		
$K = 2E+09$	Pa	
$\rho = 1000$	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$Q_v = ?$	m^3.s^{-1}	0.28274
$\zeta = ?$		321.700
$h = ?$	m	263.160
$v_t = ?$	m.s^{-1}	71.855
$\varphi = ?$		0.056
$a = ?$	m.s^{-1}	1 414.214
$\Delta p = ?$	Pa	5 656 856.0
$T = ?$	s	6.285
$t_{z\max} = ?$	s	6.285

$$v_t = \sqrt{2.g.h}, \quad \varphi = \frac{v}{v_t}$$



Řešení:

V prvé části úlohy je řešen hydraulický výpočet potrubí:

$$Q_v = \frac{\pi.d^2}{4}.v,$$

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \lambda\frac{l}{d}, \quad h = \frac{v^2}{2g}(1+\zeta)$$

Stoupnutí tlaku při totálním hydraulickém rázu ($t_z \le T$) je určeno Žukovského výrazem $\Delta p = \rho a \Delta v$, kde a je skutečná rychlost šíření tlakové vlny v kapalině, definovaná vztahem $a = \kappa\sqrt{\frac{K}{\rho}}$. Součinitel κ zahrnuje vliv pružných deformací potrubí. Doba běhu vlny je $T = \frac{2l}{a}$.

Shrnutí kapitoly

Neustálené proudění nestlačitelné kapaliny, hydraulický ráz, rozšířená Bernoulliho rovnice, zvýšení tlaku při hydraulickém rázu, doba běhu vlny, rychlost zvuku, modul objemové pružnosti kapalin

Kontrolní otázka

Jaké přístupy lze použít pro řešení neustáleného proudění vody v potrubí?

Co znamená hydraulický ráz?

Za jakých podmínek nastane totální hydraulický ráz?

Jak je definováno zvýšení tlaku dle Žukovského?

Co je to doba běhu vlny?

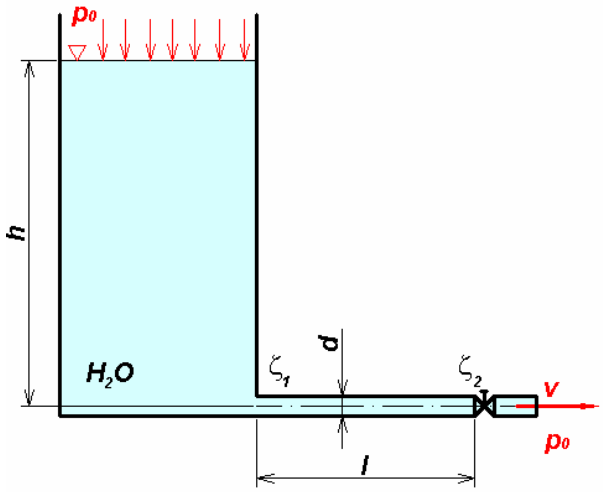
Jak lze vyjádřit rychlost zvuku v kapalině?

Úkol k řešení

Příklad 12.1

Vypočtěte teoretickou rychlost v_t a skutečnou výtokovou rychlost v. Určete průtok Q_v. Vypočítejte stoupnutí tlaku Δp při náhlém uzavření armatury na konci potrubí. Vypočtěte rychlostní součinitel φ. Výška hladiny v nádrži je h a připojené potrubí je délky l a průměru d. Dále jsou známy ztrátové součinitele vtoku ζ_1 a ventilu ζ_2, třecí součinitel λ. Skutečná rychlost zvuku je a.

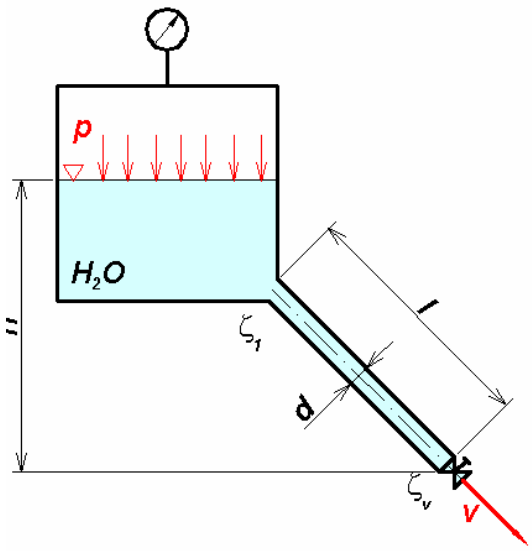
Zadáno:		
h = 20	m	
l = 400	m	
d = 0.1	m	
a = 1100	m.s^{-1}	
ζ_1 = 5		
ζ_2 = 5		
λ = 0.025		
ρ = 1000	kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v_t = ?	m.s^{-1}	19.809
v = ?	m.s-1	1.880
Q_v = ?	m^3.s^{-1}	0.01477
Δp = ?	Pa	2 068 000.0
φ = ?		0.09491
T = ?		0.72727



Příklad 12.2

K uzavřené nádrži je připojeno potrubí délky l a průměru d, ve kterém proudí voda rychlostí v. Stanovte tlak p na hladině ve výšce h, rychlostní součinitel φ a objemový průtok Q_v. Dále určete zvýšení tlaku Δp v důsledku hydraulického rázu při náhlém snížení průtokové rychlosti o Δv a vypočtěte dobu běhu vlny T.

Zadáno:		
v =	2	m.s^{-1}
l =	15	m
d =	0.4	m
h =	2	m
Δv =	1.5	m.s^{-1}
ζ_1 =	1	
ζ_v =	12.5	
λ =	0.022	
ρ =	1000	kg.m^{-3}
κ =	0.92	
K =	2.0E+09	Pa



Vypočtěte:			Výsledky:
p = ?		Pa	111 030.0
φ = ?			0.25545
Q_v = ?		m^3.s^{-1}	0.25133
a = ?		m.s^{-1}	1 301.076
Δp = ?		Pa	1 951 614.0
T = ?		s	0.02306

13. Čerpadlo v potrubním systému

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• sestavit Bernoulliho rovnici pro rotující kanál • popsat princip činnosti čerpadla a jeho funkci v čerpacím systému • určit skutečnou a teoretickou měrnou energii čerpadla • definovat kinematické poměry v oběžném kole čerpadla • definovat Eulerovou čerpadlovou rovnicí • stanovit základní parametry čerpadla (průtok, dopravní výšku a měrnou energii, výkon, příkon, kroutící moment, účinnost)	

13.1. Bernoulliho rovnice pro rotující kanál

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

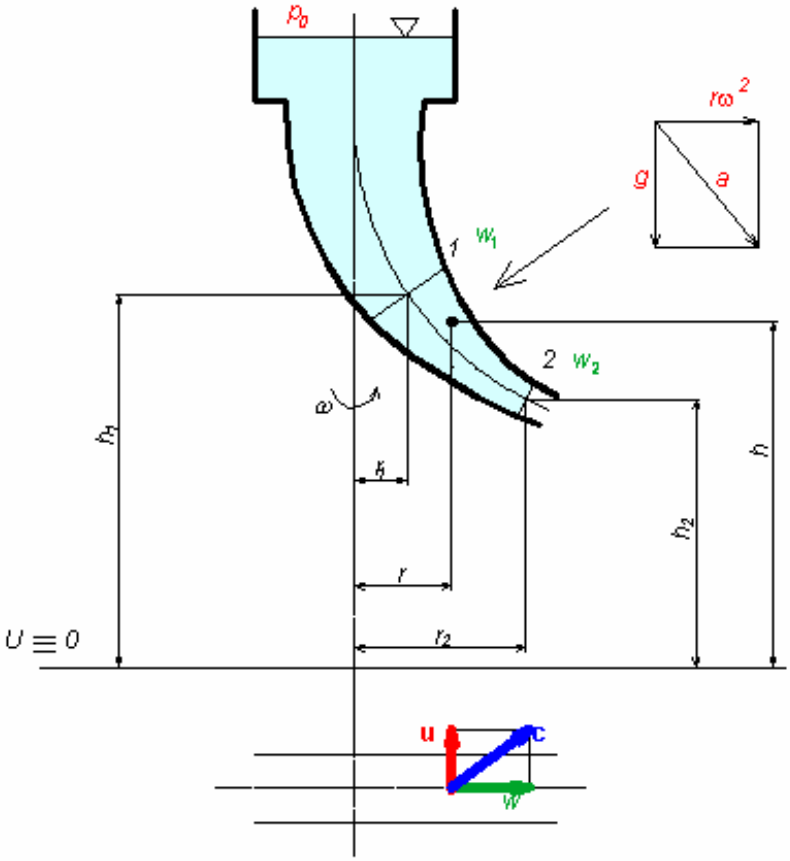
definovat Bernoulliho rovnici pro rotující kanál
aplikovat Bernoulliho rovnici pro dva průřezy rotujícího kanálu

Výklad

Při průtoku kapaliny kanálem, který se pohybuje, se změní energie kapaliny, neboť na ni působí síly od pohybu kanálu (obr. 13.1) Např. při rovnoměrné rotaci $(\omega = konst.)$ působí na kapalinu odstředivá síla. Práce, kterou tato síla vykoná při proudění kapaliny, má vliv na její energii. Bernoulliho rovnice jak byla dříve odvozena v obecném tvaru

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U = konst \qquad (13.1.1)$$

zahrnuje v potenciálu U práci všech objemových sil, které působí na proudící kapalinu, tedy i odstředivé síly při rotaci kanálu. Na částici kapaliny v rotující proudové trubici působí složky zrychlení $a_r = r\omega^2; a_y = -g; a_z = 0$.



obr. 13.1 Schéma rotujícího kanálu

Uvážíme-li, že platí dříve odvozená rovnice, lze zapsat

$$a_0 = gradU \Rightarrow a_x = \frac{\partial U}{\partial x}; a_y = \frac{\partial U}{\partial y}; a_z = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{13.1.2}$$

při čemž platí

$$dU = \left(a_x dx + a_y dy + a_z dy\right) \tag{13.1.3}$$

Potom pro svislou osu rotace s využitím výše uvedených rovnic se určí potenciál integrací

$$U = \int dU = \int \left(a_x dx + a_y dy\right) = -g\int dy + \omega^2 \int r dr = -gh + \frac{\omega^2 r^2}{2} + konst \tag{13.1.4}$$

Dosazením do obecné Bernoulliho rovnice dostane se pro rotující kanál tato rovnice

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + gh - \frac{u^2}{2} = konst \tag{13.1.5}$$

Rychlost $\vec{w}$ je relativní rychlost kapaliny, jíž proudí v rotujícím kanále, rychlost $\vec{u}$ je obvodová neboli unášivá rychlost v uvažovaném místě rotujícího kanálu. Ostatní veličiny jsou stejné jako v základní Bernoulliho rovnici.

Při odstředivém průtoku rotujícím kanálem se unášivá rychlost $\vec{u}$ zvětšuje a energie kapaliny se zvyšuje. Tak je tomu např. v odstředivých čerpadlech. Obdobně při dostředivém průtoku unášivá rychlost se zmenšuje a energie kapaliny se snižuje. To je případ vodních turbin (např. Francisových).

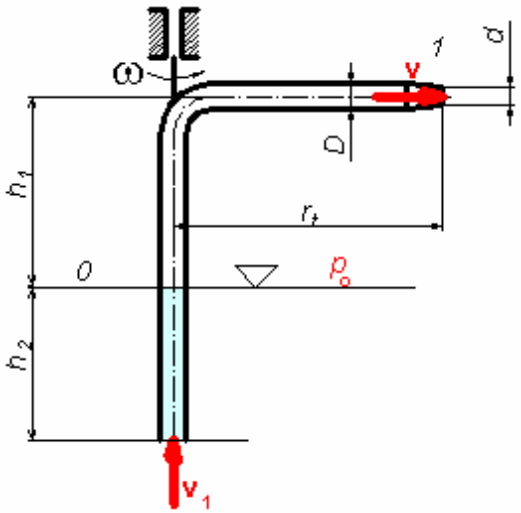
Přihlíží-li se k hydraulickým odporům při ustáleném proudění skutečné kapaliny rotujícím kanálem, platí pro dva průřezy jedné a též proudové trubice Bernoulliho rovnice

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{w_1^2}{2}+gh_1-\frac{u_1^2}{2}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{w_2^2}{2}+gh_2-\frac{u_2^2}{2}+gh_z \qquad (13.1.6)$$

Řešený příklad

Stanovte otáčky n, při nichž voda vytéká z rotujícího nátrubku rychlostí v. Průměr rotující trubky je D. Konec trubky je zúžen na průměr d. Ústí trysky je na poloměru r_t a ve výšce h_1. Voda je nasávána z hloubky h_2. Dále jsou dány ztrátové součinitele dle schématu. Určete otáčky pro ideální kapalinu n_1, skutečnou kapalinu n_2 a otáčky n_3, při nichž začne kapalina vytékat z nátrubku.

Zadáno:			
$v=$	8	$m.s^{-1}$	
$h_1=$	0.3	m	
$h_2=$	0.5	m	
$r_t=$	0.5	m	
$D=$	0.05	m	
$d=$	0.03	m	
$\lambda=$	0.022		
$\zeta_k=$	0.2		
$\zeta_t=$	0.05		
$\rho=$	1000	$kg.m^{-3}$	
Vypočtěte:			Výsledky:
$n_1=$	?	s^{-1}	2.661
$n_2=$	?	s^{-1}	2.838
$n_3=$	?	s^{-1}	0.772



Řešení:

ad 1) Bernoulliho rovnice pro rotující kanál a ideální kapalinu má pro průřezy 0-1 tvar:

$$\frac{p_0}{\rho}+0+0=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh_1-\frac{u^2}{2}\Rightarrow u=\sqrt{2\,g\,h_1+v^2}$$

$$n_1=\frac{\omega}{2\cdot\pi}=\frac{u}{2\cdot\pi\cdot r_t}$$

ad 2) V případě skutečné kapaliny je nutné uvažovat ztráty třením a místní

$$\frac{p_0}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh_1-\frac{u^2}{2}+\left(\lambda\frac{h_1+h_2+r_t}{D}+\zeta_k\right)\frac{v_1^2}{2}+\zeta_t\frac{v^2}{2}$$

$$u=\sqrt{2gh_1+\left(\lambda\frac{h_1+h_2+r_t}{D}+\zeta_k\right)v_1^2+(1+\zeta_t)v^2}$$

$$n_2=\frac{u}{2\pi r_t}$$

kde rychlost v_1 vypočteme z rovnice kontinuity $v_1S_1=vS\Rightarrow v_1=v\left(\frac{d}{D}\right)^2$

ad 3) Pokud voda z nátrubku nevytéká, je výtoková rychlost $v=0$ a rovněž ztráty v potrubí jsou nulové. Bernoulliho rovnice se zjednoduší na tvar

$$\frac{p_0}{\rho}=\frac{p_0}{\rho}+gh_1-\frac{u^2}{2}\Rightarrow u=\sqrt{2\,g\,h_1}$$

Otáčky n_3 ve všech případech se vypočtou ze vztahu

$$n_3=\frac{\omega}{2\,\pi}=\frac{u}{2\,\pi\,r_t}$$

13.2. Kinematické poměry v oběžném kole čerpadla

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

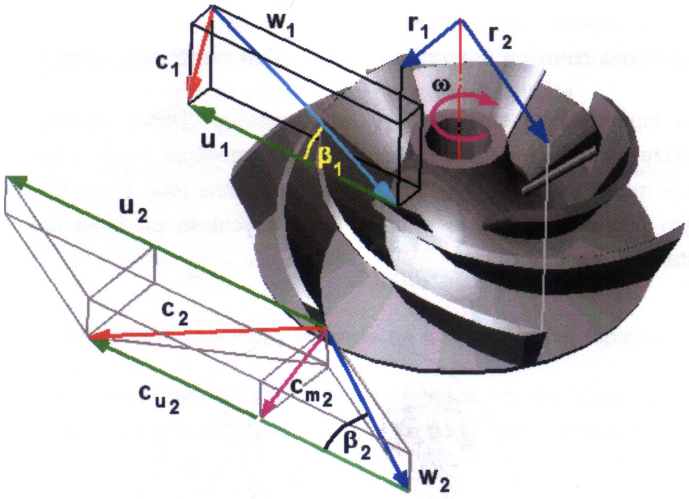
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat kinematické poměry v oběžném kole čerpadla
nakreslit rychlostní trojúhelníky

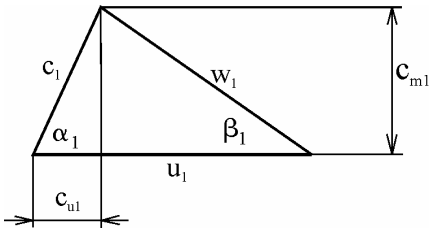
Výklad

Princip rotujícího kanálu je využit při zvyšování energie v oběžném kole hydrodynamického čerpadla. Činnost hydrodynamického čerpadla spočívá v přeměně energie mechanické na energii hydraulickou. Tato přeměna je nepřímá, děje se prostřednictvím energie kinetické.

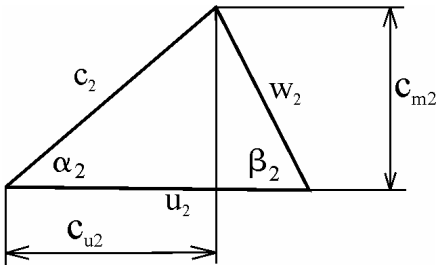
Oběžné kolo je představuje soustavou rotujících kanálů, které jsou vymezeny lopatkami oběžného kola a předním a zadním diskem, viz obr.13.2.



Vstup:



Výstup:



obr.13.2 Kinematické poměry v oběžném kole

K popisu kinematických poměrů definujeme tyto rychlosti:

$\vec{c}$ - **absolutní rychlost** kapaliny, tj. rychlost vůči vnějšímu pozorovateli, je vztažena na pevný souřadnicový systém spojený se statorem čerpadla

$\vec{w}$ - **relativní rychlost**, tj. rychlost kapaliny vzhledem k lopatkám a diskům oběžného kola, vztažená na souřadný systém, který rotuje spolu s oběžným kolem úhlovou rychlostí ω

$\vec{u}$ - **unášivá rychlost**, tj. obvodová rychlost oběžného kola

Doplňující složky absolutní rychlosti jsou:

$\vec{c}_m$ - **meridiánová rychlost** $\left(c_m = c.\sin\alpha\right)$

$\vec{c}_u$ - **hybná** (obvodová nebo unášivá) složka absolutní rychlosti $\left(c_u = c.\cos\alpha\right)$

kde α je úhel mezi obvodovou a absolutní rychlostí, β je úhel mezi obvodovou a relativní rychlostí.

Užitím kosinové věty lze vyjádřit:

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1c_1\cos\alpha_1$$
$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2c_2\cos\alpha_2 \qquad (13.2.1)$$

Meridiánová rychlost má význam pro definici průtoku oběžným kolem (rovnice kontinuity), hybná složka absolutní rychlosti má význam pro definici hybnosti. Teoretická měrná energie, kterou čerpadlo předá kapalině, je dána Eulerovou čerpadlovou rovnicí.

13.3. Eulerova čerpadlová rovnice

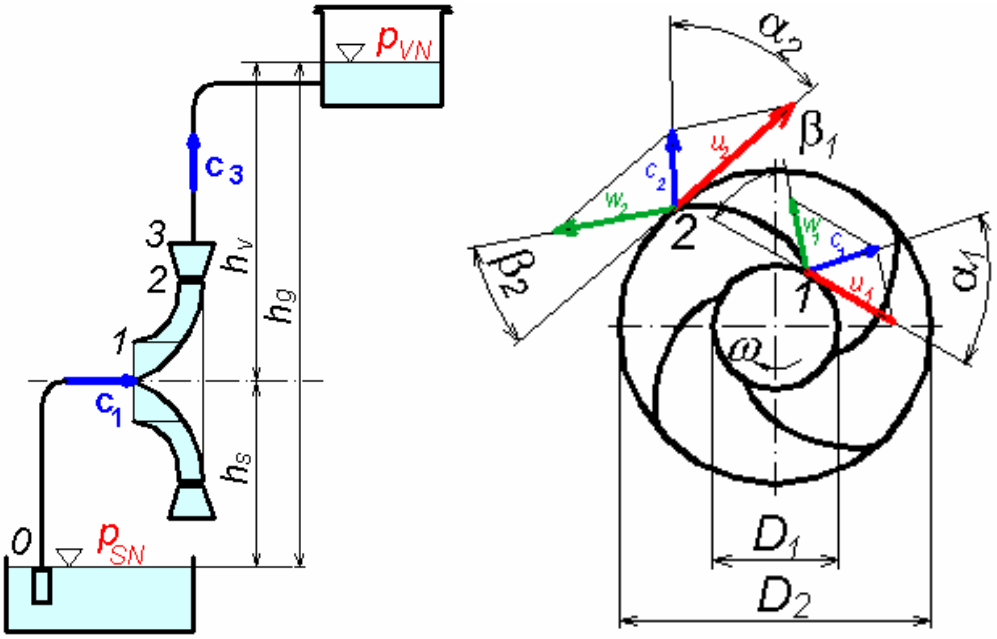
Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

vyjádřit skutečnou a teoretickou měrnou energii čerpadla v systému
odvodit Eulerovou čerpadlovou rovnici

Výklad

Čerpadlo pracuje v systému s potrubím (obr. 12.3). Sací potrubí SP spojuje čerpadlo se sací nádrží SN, která je zdrojem čerpané kapaliny. Výtlačným potrubím VP je kapalina dopravována do výtlačné nádrže VN. Celou dráhu kapaliny je možno rozdělit na čtyři části :



obr. 13.3 Odstředivé čerpadlo a schéma kola hydrodynamického čerpadla a rychlostní trojúhelníky

1. sací nádrž a potrubí – kapalina proudí ve stojícím potrubí z nádrže k čerpadlu, zpravidla výše položenému,
2. oběžné kolo – kapalina proudí v rotujícím kanále
3. difuzor nebo spirála – kapalina proudí ve stojícím kanále,
4. výtlačné potrubí a nádrž – kapalina proudí z čerpadla do nádrže výtlačným potrubím, pro které platí Bernoulliho rovnice pro stojící kanál.

Přitom h_g je rozdíl geodetických výšek horní a spodní hladiny, tato výška sestává z **výšky sací** h_s a **výtlačné** h_v, dělítkem obou výšek je horizontální osa čerpadla.

Bernoulliho rovnice pro sací potrubí – mezi průřezy 0-1, psaná pro hladinu ve spodní nádrži a vstup do oběžného kola je

$$\frac{p_{SN}}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + gh_s + \frac{c_1^2}{2} + gh_{zs} \tag{13.3.1}$$

kde h_s je geodetická **sací výška**, h_{zs} jsou **hydraulické odpory** v sacím potrubí čerpadla, p_{SN} je tlak na hladině v sací nádrži. Veličiny označené indexem 1 se vztahují na vstup do oběžného kola čerpadla.

Pro oběžné kolo platí Bernoulliho rovnice pro rotující kanál – mezi průřezy 1-2, která je pro vstupní a výstupní průřez

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + gh_{zo} \tag{13.3.2}$$

Rychlosti $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ jsou **relativní**, rychlosti $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ jsou **unášivé**, index 1 značí vstup do oběžného kola, index 2 výstup z oběžného kola. **Ztrátová výška** h_{z0} zahrnuje ztráty spojené s průtokem kapaliny oběžným kolem (hydraulické). Mezi vektory rychlosti **absolutní**, **relativní** a **unášivou** platí pro vstup i výstup z oběžného kola vztah $\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$. **Absolutní** rychlostí c_2 vystupuje kapalina z oběžného kola a vstupuje do difuzoru, kde se kinetická energie mění v tlakovou.

Pro difuzor (nebo spirálu) jako stojící kanál platí Bernoulliho rovnice psaná pro vstupní a výstupní průřez – mezi průřezy 2-3.

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{c_3^2}{2} + gh_{zd} \tag{13.3.3}$$

Ztráty třením v difuzoru včetně vstupních a výstupních místních ztrát jsou zahrnuty ztrátovou výškou v difuzoru h_{zd}. Rychlost c_3 a tlak p_3 jsou shodné s tlakem a rychlostí ve výtlačném hrdle čerpadla, na které je připojeno výtlačné potrubí nádrže

Bernoulliho rovnice pro výtlačné potrubí – mezi průřezy 3-VN

$$\frac{p_3}{\rho} + \frac{c_3^2}{2} = \frac{p_{VN}}{\rho} + gh_v + gh_{zv} \tag{13.3.4}$$

Celkové ztráty ve výtlačném potrubí jsou vyjádřeny ztrátovou výškou h_{zv}. Veličiny označené indexem v se vztahují na výtlačné potrubí a nádrž.

Sečtením všech čtyř rovnic se dostane tzv. **teoretická měrná energie**

$$Y_t = g(h_s + h_v) + \frac{p_{VN} - p_{SN}}{\rho} + g(h_{zs} + h_{zv} + h_{zo} + h_{zd}) = \frac{1}{2}\left(u_2^2 - u_1^2 - w_2^2 + w_1^2 + c_2^2 - c_1^2\right) \quad (13.3.5)$$

Hydraulické ztráty v čerpadle představují součet ztrátových energií v oběžném kole a rozvaděči

$$g(h_{zo} + h_{zd}) = gh_{zč} \quad (13.3.6)$$

Skutečná měrná energie čerpadla Y je

$$Y = Y_t - gh_{zč} = g(h_s + h_v) + \frac{p_{VN} - p_{SN}}{\rho} + g(h_{zs} + h_{zv}) \quad (13.3.7)$$

Členy na pravé straně rovnice představují měrnou energii (pro 1 kg kapaliny) pro **zvedání** $g(h_s + h_v)$, zvyšování **tlakové energie** $\frac{p_{VN} - p_{SN}}{\rho}$ a **dopravu kapaliny**, která je spojena s překonáváním **hydraulických odporů** v sacím a výtlačném potrubí $g(h_{zs} + h_{zv})$. Tato rovnice je důležitá především pro provozovatele a projektanta čerpadla. Dále se zavádí pojem **dopravní výška** H.

$$H = \frac{Y}{g} \quad (13.3.8)$$

Teoretická měrná energie Y_t, jak vyplývá z odvozené rovnice 12.3.5, je dána rychlostními poměry na vstupu a výstupu z oběžného kola, tj. vektory rychlosti $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$, které určují rychlostní trojúhelníky na vstupu a výstupu z oběžného kola, viz obr. 13.3.

Pravá část rovnice pro teoretickou měrnou energii čerpadla se dá upravit užitím kosinové věty $w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1c_1 \cos\alpha_1$, $w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2c_2 \cos\alpha_2$

$$Y_t = \frac{c_2^2 + u_2^2 - w_2^2}{2} - \frac{c_1^2 + u_1^2 - w_1^2}{2} = \frac{2u_2c_2\cos\alpha_2}{2} - \frac{2u_1c_1\cos\alpha_1}{2} = u_2c_{u2} - u_1c_{u1} \quad (13.3.9)$$

a získá se známá **Eulerova čerpadlová rovnice**.

$$Y_t = gH_t = u_2c_{u2} - u_1c_{u1} \quad (13.3.10)$$

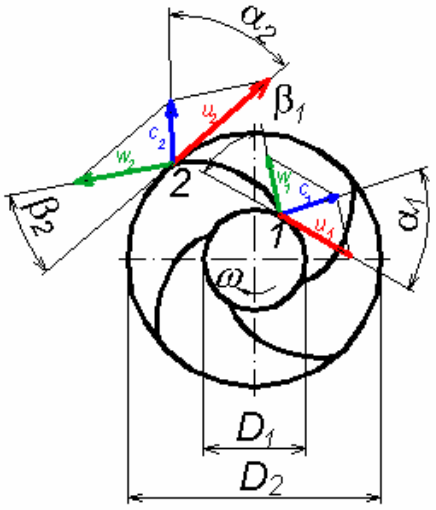
Hydraulická účinnost čerpadla je určena vztahem

$$\eta = \frac{Y}{Y_t} \quad (13.3.11)$$

Řešený příklad

Stanovte teoretickou měrnou energii Y_t radiálního kola hydrodynamického čerpadla. Je dán vnější a vnitřní průměr oběžného kola D_2 a D_1, vstupní a výstupní úhel lopatky β_1, β_2 meridiánová rychlost na vstupu c_{m1} a výstupu c_{m2} a kolo rotuje konstantní rychlostí ω.

Zadáno:			
$D_1 =$	0.115	m	
$D_2 =$	0.265	m	
$\beta_1 =$	25	°	
$\beta_2 =$	35	°	
$c_{m1} =$	6.09	$m.s^{-1}$	
$c_{m2} =$	4.38	$m.s^{-1}$	
$\omega =$	303.68	s^{-1}	
Vypočtěte:			Výsledky:
$u_1 =$	?	$m.s^{-1}$	17.46
$u_2 =$	?	$m.s^{-1}$	40.24
$c_{u1} =$	?	$m.s^{-1}$	4.40
$c_{u2} =$	?	$m.s^{-1}$	33.98
$Y_t =$	?	$J.kg^{-1}$	1290.617



Řešení:

Teoretická měrná energie čerpadla je definována Eulerovou čerpadlovou rovnicí

$gH_t = Y_t = (u_2 c_2 \cos\alpha_1 - u_1 c_1 \cos\alpha_1) = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$, c_{u1}, c_{u2} se určí z rychlostních trojúhelníků

$$u_1 = \frac{D_1}{2}\omega \qquad u_2 = \frac{D_2}{2}\omega$$

$$c_{u1} = u_1 - \frac{c_{m1}}{tg\beta_1} \qquad c_{u2} = u_2 - \frac{c_{m2}}{tg\beta_2}$$

, , $Y_t = (u_2 c_2 \cos\alpha_1 - u_1 c_1 \cos\alpha_1) = u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}$

13.4. Základní parametry čerpadel

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat základní parametry čerpadla (průtok, otáčky, měrná energie, dopravní výška, výkon, příkon, účinnost)
vyjádřit celkovou účinnost čerpadla
popsat charakteristiku odstředivého čerpadla

Výklad

Čerpadlo dodává kapalině energii, která je obecně využívána na:

- zvedání kapaliny (zvyšování polohové energie),
- zvyšování tlakové energie (přemístění kapaliny do prostoru s vyšším tlakem)
- dopravu kapaliny (překonání hydraulických odporů v potrubí).

Každé čerpadlo je charakterizováno průtokem Q, otáčkami n, měrnou energií Y případně dopravní výškou H, výkonem P_h , příkonem P_p [W], účinností η a kavitačními (sacími) vlastnostmi.

Průtok Q je dán požadavkem na dopravované množství kapaliny. Je definován jako objemový průtok Q_v [$m^3.s^{-1}$] nebo hmotnostní průtok [$kg.s^{-1}$], můžeme se setkat i s vyjádřením v jiných jednotkách [$l.s^{-1}$, $l.min^{-1}$, $m^3.h^{-1}$].

Měrná energie Y [$m^2.s^{-2}$] je energie, kterou čerpadlo předá 1 kg čerpané kapaliny. Pokud známe uspořádání čerpacího systému a parametry potrubí, můžeme ji určit pomocí rovnice

$$Y = gH = g(h_s + h_v) + \frac{p_{VN} - p_{SN}}{\rho} + g(h_{zs} + h_{zv}) \qquad (13.4.1)$$

Výkon P_h [W] čerpadla je dán výrazem

$$P_h = YQ_m = \rho gHQ \qquad (13.4.2)$$

Výkon čerpadla představuje energii kapaliny protékající čerpadlem za časovou jednotku. **Příkon** P_p [W] je možno určit z **krouticího momentu** na hřídeli čerpadla M_k a jeho **úhlové rychlosti** ω

$$P_p = M_k \omega \qquad (13.4.3)$$

Je to výkon, který předává čerpadlu na jeho hřídel hnací stroj (elektromotor, spalovací motor apod). **Celková účinnost** čerpadla $\eta_č$ je pak definována poměrem výkonu ku příkonu čerpadla

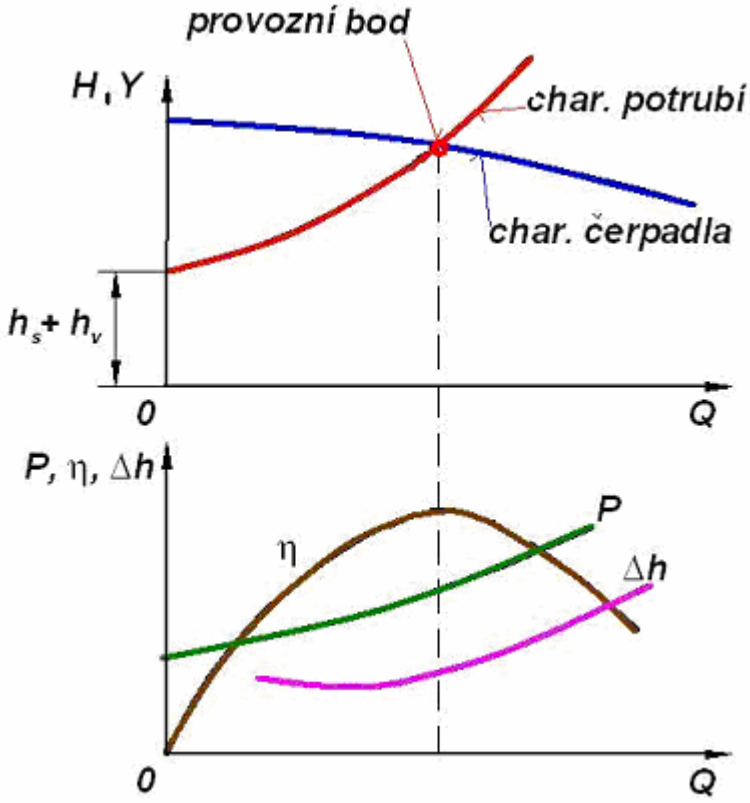
$$\eta_č = \frac{P_h}{P_p} = \eta_o \eta_m \eta_h \qquad (13.4.4)$$

V účinnosti čerpadla jsou zahrnuty všechny **ztráty** v čerpadle, které se skládají ze tří složek, tj. ztrát **objemových**, **mechanických a hydraulických**.

Objemová účinnost η_o zahrnuje ztráty netěsností v čerpadle mezi oběžným kolem a tělesem čerpadla. Z provozních důvodů jsou nutné mezery, kterými v důsledku tlakového spádu protéká kapalina z výtlaku do sání. **Mechanická účinnost** η_m respektuje pak ztráty třením v mechanických ucpávkách, ložiskách a hydraulické ztráty na plochách mimo

pracovní kanály oběžného kola a difuzoru. V hydraulické účinnosti jsou zahrnuty hydraulické ztráty v pracovních prostorech čerpadla, tj. v oběžném kole a difuzoru, a třecí a místní hydraulické ztráty v čerpadle. Protože tyto ztráty nelze vzhledem ke složitosti jevů určit přímo, je možno účinnost stanovit jen experimentálně. U hydrodynamických čerpadel hrají hydraulické ztráty rozhodující úlohu.

Charakteristika čerpadla je závislost **skutečné měrné energie** Y (resp. **skutečné dopravní výšky** H) na **průtoku** Q. K této základní $Y-Q$ charakteristice se připojují křivky **výkonu** P_h-Q, **účinnosti** η_c-Q a **měrné energie pro potrubí** Y_P-Q, viz obr. 13.4. Charakteristiku čerpadla nelze určit přímo, protože složité proudění v oběžném kole a difuzoru a především hydraulické ztráty z geometrických charakteristik a provozních podmínek čerpadla nelze matematicky prozatím kvantitativně přesně popsat. Rozbor hydraulických ztrát lze však provést kvalitativně.



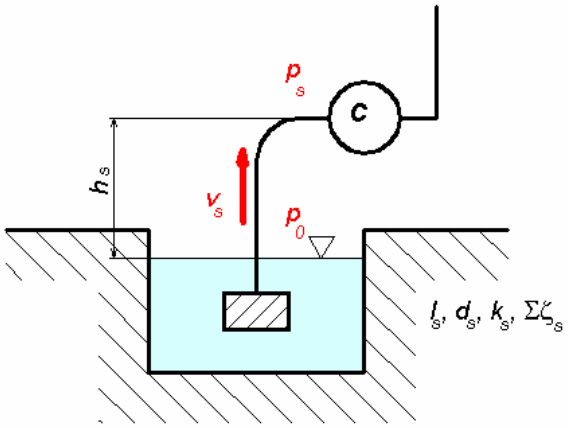
obr. 13.4 – Charakteristika čerpadla

Řešený příklad

Ověřte, zda v sacím hrdle čerpadla bude tlak p_s větší než tlak nasycené vodní páry 20°C teplé, který je dán jako p_N. V sacím potrubí je dána rychlost, geometrické parametry, místní ztráty a drsnost.

Zadáno:		
$p_N = 2$	kPa	
$l_s = 6.5$	m	
$h_s = 6$	m	
$d_s = 80$	mm	
$v_s = 2.1$	$m.s^{-1}$	
$\sum \zeta_s = 5$		
$k_s = 0.065$	mm	
$\rho = 1000$	$kg.m^{-3}$	
$\upsilon = 1e\text{-}6$	$m^2.s^{-1}$	
$p_o = 101325$	Pa	

Vypočtěte:		Výsledky:
Re= ?		168 000
$\lambda_s = ?$		0.0194
$h_{zs} = ?$	m	1.478
$p_s = ?$	Pa	25764.7



Řešení:

Pro sací potrubí lze napsat Bernouliho rovnici :

$$\frac{p_0}{\rho} + 0 + 0 = \frac{p_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + g\left(h_{zs} + h_s\right)$$

Součinitel tření λ se určí podle velikosti Re čísla $\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}$, v případě turbulentního proudění, kdy se uvažuje drsné potrubí, se λ určí dle Altšula $\lambda = 0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}} + \frac{k}{d}\right)^{0.25}$

$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu}$, $\lambda = 0.1\left(\frac{100}{\mathrm{Re}} + \frac{k}{d}\right)^{0.25}$, Ztrátová výška je $h_{zs} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \varsigma\right)\frac{v^2}{2g}$

Tlak v sacím hrdle je

$$p_s = p_0 - \frac{1}{2}\rho v_s^2 - \rho g h_s - \rho g\, h_{zs}$$

Shrnutí kapitoly

Rotující kanál, Bernoulliho rovnice pro rotující kanál, rovnoměrná rotace rotujícího kanálu, relativní rychlost, obvodová neboli unášivá rychlost, odstředivé čerpadlo, rychlostní trojúhelník v oběžném kole, absolutní rychlost, unášivá rychlost, relativní rychlost, meridiánová rychlost, hybná rychlost, skutečná a teoretická měrná energie čerpadla, objemový průtok, otáčky, měrná energie, dopravní výkon, příkon, účinnost, kroutící moment, úhlová rychlost, objemové, hydraulické a mechanické ztráty, charakteristika čerpadla a charakteristika potrubí.

Kontrolní otázka

Čím se vyznačuje Bernoulliho rovnice pro rotující kanál?

Jaké složky zrychlení působí na částice tekutiny?

Co je absolutní, relativní a unášivá rychlost a jaký vztah platí mezi nimi?

Pro jaké účely slouží čerpadlo?

Jaký je princip odstředivého čerpadla?

Co udává skutečná měrná energie čerpadla a na čem závisí?

Které jsou základní parametry čerpadla?

Na čem závisí výkon čerpadla?

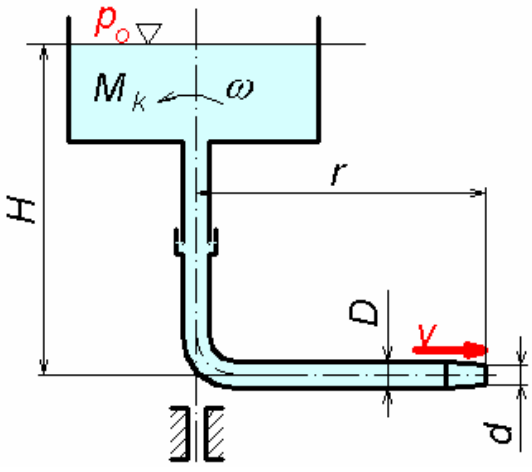
Které ztráty jsou respektovány celkovou účinností čerpadla?

Úkol k řešení

Příklad 13.1

Z nádoby, která se otáčí konstantními otáčkami n, vytéká voda připojenou trubkou do ovzduší. Výtokový průřez je v hloubce H pod hladinou na poloměru r, výstupní průměr trubky je d. Určete objemový průtok vody Q_v a kroutící moment M_k potřebný k otáčení, jsou-li hydraulické i mechanické ztráty zanedbány.

Zadáno:			
$d =$	0.02	m	
$H =$	1.2	m	
$r =$	0.5	m	
$n =$	200	min^{-1}	
Vypočtěte:			Výsledky:
$v =$	?	$m.s^{-1}$	11.541
$Q_v =$	?	$m^3.s^{-1}$	0.00363
$M_k =$	?	N.m	9.503

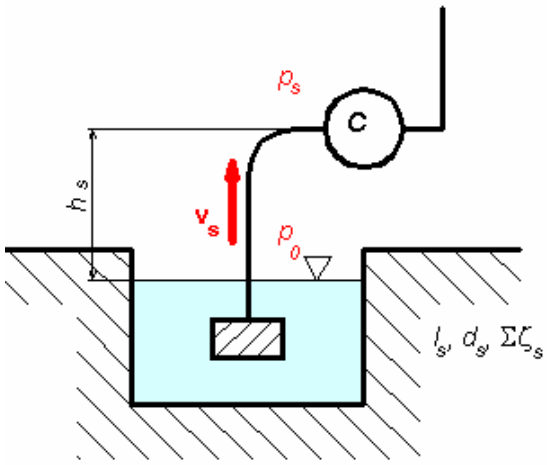


Příklad 13.2

V jaké výšce h_s nad hladinou vody v nádrži je umístěno čerpadlo, jestliže tlak před vstupem do čerpadla je p_s. Určete průtok sacím potrubím Q_V. Stanovte ekvivalentní délku potrubí l_e pro místní ztráty. Průměr potrubí je d_s a délka l_s. Voda proudí potrubím rychlostí v_s. Dále jsou známy třecí součinitel λ_s a součet všech místních ztrát $\sum \zeta_s$.

Zadáno:		
$v_s = 2$	m.s^{-1}	
$l_s = 12$	m	
$d_s = 0.2$	m	
$p_s = 10000$	Pa	abs
$\sum \zeta_s = 23$		
$\lambda_s = 0.022$		
$\rho = 1000$	kg.m^{-3}	

Vypočtěte:		Výsledky:
$h_s = ?$	m	4.012
$Q_v = ?$	m^3.s^{-1}	0.06283
$l_e = ?$	m	209.091

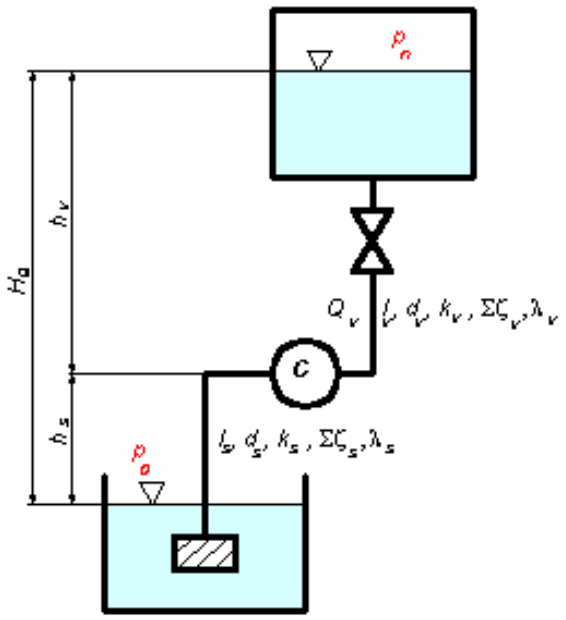


Příklad 13.3

Stanovte hydraulický výkon P a příkon P_p pro potrubní systém, v němž se má dopravovat daný průtok vody Q_v z otevřené nádrže do horní tlakové nádrže, ve které je přetlak p_N. Jsou dány rozměry sacího a výtlačného potrubí, místní ztráty, drsnosti potrubí a účinnost čerpadla.

Zadáno:		
$Q_v =$	500 dm^3.min^{-1}	
$p_N =$	0.12 MPa	
$H_g =$	60 m	
$l_s =$	8 m	
$d_s =$	80 mm	
$\sum \zeta_s =$	6	
$k_s =$	0.08 mm	
$l_v =$	57 m	
$d_v =$	60 mm	
$\sum \zeta_v =$	20	
$k_v =$	0.06 mm	
$\eta_c =$	70 %	

Vypočtěte:		Výsledky:
$v_s = ?$	m.s^{-1}	1.6579
$v_v = ?$	m.s^{-1}	2.9473
$\lambda_s = ?$		0.0205
$\lambda_v = ?$		0.0199
$h_{zs} = ?$	m	1.128



h_{zv} = ?	m	17.225
Y_d = ?	$J.kg^{-1}$	888.643
P = ?	kW	7.405
P_p = ?	kW	10.579

14. Proudění v korytech

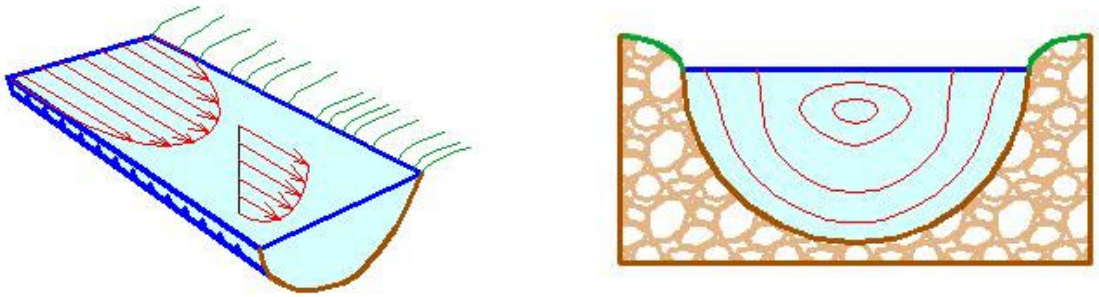
Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• popsat proudění v korytech • definovat základní vztahy pro výpočet parametrů koryt • navrhnout parametry koryt pro jednodušší případy při rovnoměrném průtoku	

Při průtoku koryty je kapalina vedena stěnami, které neohraničují celý průtočný průřez, jen část, takže vzniká volná hladina. Na této hladině se stýká proud kapaliny s ovzduším. Může jít o průtok neplným potrubím, stokami, umělými otevřenými kanály nebo přirozenými koryty potoků a řek, obr. 14.1. Zpravidla jde v těchto případech o turbulentní proudění.

obr. 14.1 Umělé a přírodní koryto

Rychlostní profil proudu je znázorněn na obr. 14.2. Rychlost proudění se mění jak s hloubkou, tak po šířce koryta. Maximální rychlost ovšem není uprostřed koryta na hladině, ale jak je zřejmé z izočar rychlosti, je oblast maximální rychlosti posunuta pod hladinu, což je způsobeno brzděním hladiny o okolní prostředí, tedy o vzduch.



obr. 14.2 Rychlostní profil proudění v korytě

K symetrickému rozložení rychlostního profilu kolem svislé osy dojde pouze tehdy, je-li osově symetrické koryto a jedná se o rovný úsek. U přirozených toků řek je rozložení rychlosti závislé na profilu dna. V obloucích, či zátočinách se oblast maximální rychlosti přesouvá k vnějšímu břehu a dochází zde rovněž k příčnému proudění, podobně jako při proudění kapalin potrubními oblouky (koleny).

Dále se ovšem zaměřme pouze na rovné úseky kanálů. Při ustáleném průtoku, tedy za podmínky, že se střední rychlost proudění nemění v závislosti na čase t, mohou nastat dva případy, **pohyb rovnoměrný a nerovnoměrný**. Při rovnoměrném průtoku korytem se střední rychlost a tím ani průtočný průřez nemění, hladina je rovnoběžná se dnem. Naopak při pohybu nerovnoměrném se rychlost a tím i průtočný průřez mění. K tomu může dojít například při změně spádu koryta.

14.1. Rovnoměrný průtok

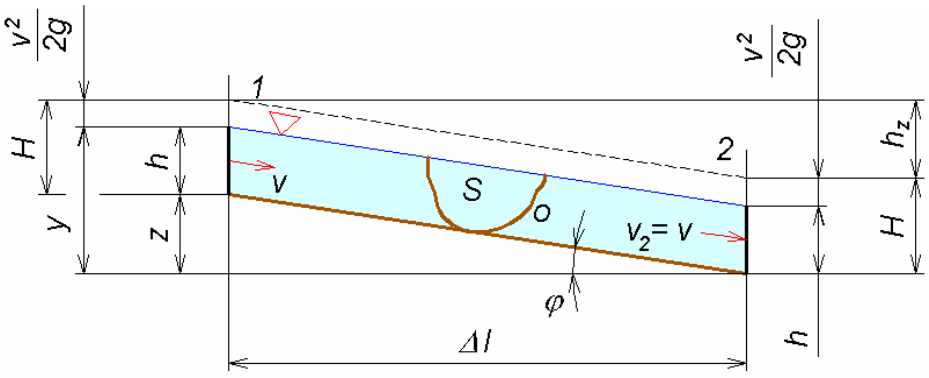
Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat základní pojmy spojené s touto problematikou
popsat rovnoměrné proudění v korytech
vypočítat poměrný spád a průtok koryty pro jednodušší příklady

Výklad

Rovnoměrný průtok nastane v korytě stálého průřezu, jestliže spád dna z na délce Δl je v rovnováze se ztrátovou výškou $h_z = z$.



$S = konst.;\ i = konst.;\ v = konst.$

obr. 14.3 Rovnoměrný průtok v korytě

Hladina vody je v tomto případě rovnoběžná se dnem koryta a můžeme napsat Bernoulliho rovnici pro body na hladině 1 a 2:

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+g(h+z)=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh+gh_z \qquad (14.1.1)$$

Pro ztráty třením platí vzorec

$$h_z = z = \lambda\frac{\Delta l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (14.1.2)$$

Poměrný spád koryta je

$$i=\frac{z}{\Delta l}=\frac{\lambda}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (14.1.3)$$

Průřez korytem je zpravidla nekruhový, proto se zavádí místo průměru d hydraulický poloměr

$$r_h=\frac{S}{O} \qquad (14.1.4)$$

kde S je průřez koryta (protékaná plocha) a O je smáčený obvod. Na tomto místě je třeba upozornit na rozdíl s dříve uvedeným hydraulickým průměrem d_h, který je definován jako 4-násobek hydraulického poloměru r_h a nikoliv 2- násobek. Dosazením $d=d_h=4r_h$ se upraví rovnice pro rovnoměrný průtok korytem takto:

$$i=\frac{\lambda}{8g}\frac{v^2}{r_h} \qquad (14.1.5)$$

Střední rychlost rovnoměrného průtoku v korytě je

$$v=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}}\sqrt{ir_h}=C\sqrt{ir_h} \qquad (14.1.6)$$

což je Chezyho rovnice. Rychlostní součinitel C pro střední rychlost rovnoměrného proudu v korytech je vázán se součinitelem tření vztahem

$$C=\sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \qquad (14.1.7)$$

z čehož plyne, že $C=f(\mathrm{Re},\varepsilon)$

Odborná literatura uvádí celou řadu empirických vztahů pro stanovení rychlostního součinitele C, které byly stanoveny na základě měření, například tab. 14.1. Tyto definují závislost rychlostního součinitele C na hydraulickém poloměru r_h a stupni drsnosti n_0, případně n_1, m, jejichž hodnoty závisí na druhu smáčeného povrchu. V tab. 14.2 jsou uvedeny stupně drsnosti různých materiálů koryt.

tab. 14.1 Rychlostní součinitel podle různých autorů

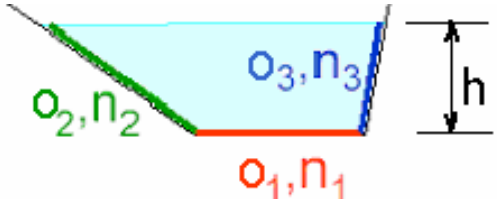
Manning	Pavlovskij	Bazin	Kutter
$C = \frac{1}{n_0} r_h^{\frac{1}{6}}$	$C = \frac{1}{n_0} r_h^{\frac{1}{5\sqrt{n_0}}}$	$C = \frac{87}{1 + \frac{n_1}{\sqrt{r_h}}}$	$C = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{r_h}}}$

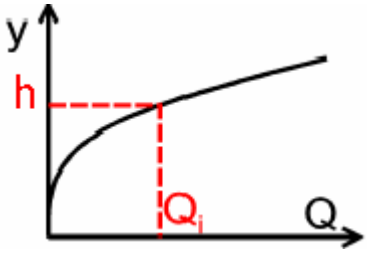
tab. 14.2 Stupně drsnosti různých materiálů koryt

Jakost omočeného povrchu	Stupeň drsnosti			
	n_0	n_1	m	$\frac{1}{n_0}$
Hoblovaná dřeva, dobře hlazená omítka, cihly „zvonivky“	0.100	0.06	0.15	100.00
Dobře spojovaná prkna	-	-	0.20	-
Dlouhá železná a železobetonová potrubí (nová)	-	-	0.20	-
Drsná prkna	0.012	0.16	0.25	83.33
Kvádrové, dobře spárované cihelné zdivo	0.013	0.16	0.25	76.92
Čisté kameninové kanály	-	-	0.25	-
Kanály z cementových trub a jemnou usazeninou, podélně nýtované železné trouby (menších průměrů)	-	-	0.30	-
Obyčejné cihelné zdivo, stěny z fošen	-	-	0.35	-
Zdivo na maltu se špičatými kameny, hrubá betonová omítka	-	-	0.45	-
Zdivo z lomového kamene	0.017	0.46	0.55	58.82
Zdivo z lomového kamene s bahnitým dnem	-	-	0.75	-
Starší zdivo s bahnitým dnem, hladší skála	-	-	1.00	-
Dlažba, pravidelné koryto v zemi	-	0.85	1.50	-
Starý beton	0.020	-	-	50.00
Starší zemní kanály	0.025	1.30	1.75	40.00
Starší zemní kanály s kamením a porostem	0.030	1.75	2.00	33.33
Drenážní příkopy, hrubá skála	0.030	-	-	33.33
Horské bystřiny	0.080	3.50	-	12.50

U přirozených toků bývá poměrný spád i velmi malý. U horských řek je např. 0,002, u velkých řek v nížinách jen 0,0002. V případě různých drsností po omočeném obvodě se určí ekvivalentní drsnostní součinitel metodou váženého průměru

$$n = \frac{\sum o_i n_i}{o}$$





obr. 14.4 Rovnoměrný průtok v korytě

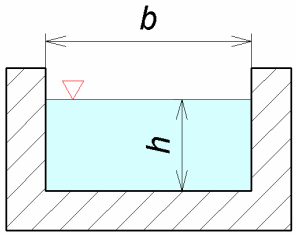
Při návrhu koryt, stok pod. bývá obvykle zadán průtok Q_v a volí se rychlost, z čehož se vypočítá průřez S a poměrný spád i. Aby poměrný spád i, který je úměrný ztrátám, byl

co nejmenší, je třeba volit profil nejmenšího odporu, tj. s co největším hydraulickým poloměrem. K určení hloubky se používá polografická metoda pomocí konzumční křivky $h = f(Qv)$, což je závislost hloubky na objemovém průtoku, viz obr. 14.4.

Řešený příklad

Stanovte poměrný spád i betonového kanálu, jímž má protékat objemový průtok Q_v. Kanál má obdélníkový průřez, jeho šířka je b a maximální povolená výška hladiny je h. Výpočet rychlostního součinitele proveďte podle Manninga. Stupeň drsnosti betonového kanálu je n_0.

Zadáno:			
$b =$	0.8	m	
$h =$	0.5	m	
$n_0 =$	0.2		
$Q_v =$	0.2	m^3s^{-1}	
Vypočtěte:			**Výsledky:**
$r_h =$	?	m	0.222
$C_M =$	?	$m^{0.5}.s^{-1}$	38.9
$v =$	?	$m.s^{-1}$	0.5
$i =$	?		0.00074



Řešení:

Nejprve se určí hydraulický poloměr dosazením za plochu S a obvod O do rov. (14.1.4)

$$r_h = \frac{S}{O} = \frac{bh}{b + 2h}$$

Dále se vypočítá rychlostní součinitel (tab. 14.1)

$$C_M = \frac{1}{n_0} \cdot r_h^{\frac{1}{6}}$$

Z rovnice kontinuity se vypočítá rychlost proudění

$$Q_v = S \cdot v \Rightarrow v = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_v}{b \cdot h}$$

Chezyho rovnice (14.1.6) se upraví pro výpočet poměrného spádu i

$$v = C_M \sqrt{i r_h} \Rightarrow i = \frac{1}{r_h} \cdot \left(\frac{v}{C_M} \right)^2$$

14.2. Nerovnoměrný průtok

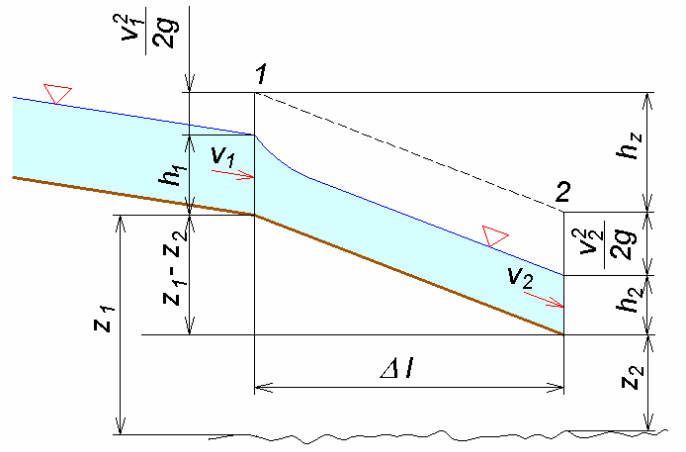
Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

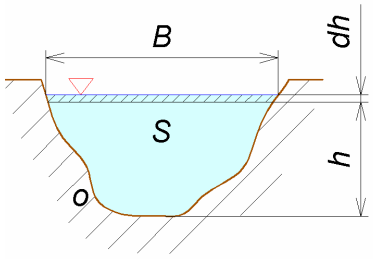
popsat nerovnoměrné proudění v korytech

Výklad

V místech, kde se spád koryta mění, takže $z \neq h_z$, vzniká pohyb nerovnoměrný. Při proměnném spádu se průtočná rychlost v a tím i hloubka h mění po délce koryta, nikoliv však v závislosti na čase – obr. 14.5.



obr. 14.5 Nerovnoměrný proud v korytě



obr. 14.6 Průtočný průřez koryta

Energie skutečné kapaliny v libovolném průřezu je dána rovnicí

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gz_1+gh_1=\frac{p_0}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gz_2+gh_2+gh_z \qquad (14.2.1)$$

Součet $y = z + h$, tedy součet výšky od hladiny nulového potenciálu z a hloubky koryta h, vyjadřuje potenciální energii bodu na hladině. Jestliže by platilo $h_z = z_1 - z_2$, vznikl by průtok rovnoměrný. Při poměrném spádu $i = \frac{z_1 - z_2}{\Delta l}$ větším než poměrná ztráta $i_z = \frac{h_z}{\Delta l}$ nastává pohyb zrychlený a naopak při $i < i_z$ bude pohyb zpomalený. Tlak vzduchu na hladině je po celé délce stejný a pro nerovnoměrný průtok potom platí rovnice

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}+g(z_1 - z_2)+g(h_1 - h_2)-gh_z = konst \qquad (14.2.2)$$

Diferencováním se dostane diferenciální rovnice

$$v \cdot dv + g(dz + dh - dh_z) = 0 \qquad (14.2.3)$$

Řešení této rovnice je komplikované a využívá se numerických výpočetních metod.

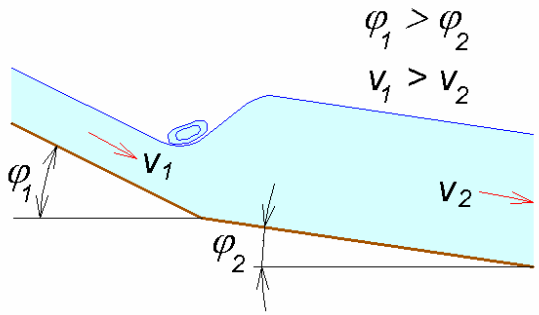
Pro změnu výšky hladiny je možné odvodit diferenciální rovnici ve tvaru

$$dh = \frac{i - \frac{Q_v^2}{S^2 C^2 r_h}}{1 - \frac{bQ_v^2}{gS^3}} dx \qquad (14.2.4)$$

kde , označení veličin je patrné z obr. 14.6.

K integraci poslední rovnice je třeba znát tvar koryta a stanovit funkce:

$S = S(h)$, $r_h = \frac{S}{O} = f(h)$; $C = C(h)$; $b = b(h)$. Řešení se dá provést jen v jednoduchých případech exaktně, u složitějších profilů koryt se s výhodou použije numerické metody.



obr. 14.7 Vodní skok

Při zvětšení poměrného spádu koryta se proud zrychluje a jeho hloubka klesá. V opačném případě při zmenšení poměrného spádu se proud zpomaluje a jeho hloubka stoupá. V druhém případě může dojít k náhlé změně rychlosti a tím hloubky, čemuž se říká vodní skok - obr. 14.7.

Shrnutí kapitoly

Proudění v korytech, volná hladina, rovnoměrný průtok, nerovnoměrný průtok, hydraulický poloměr, Chezyho rovnice, rychlostní součinitel, stupeň drsnosti.

Kontrolní otázka

Čím se liší proudění v korytech od proudění kapaliny v potrubí?

Která dvě hodnoty musí být v rovnováze aby nastal rovnoměrný průtok?

Jaký je rozdíl mezi rovnoměrným a nerovnoměrným průtokem v korytech?

Jak lze vypočítat poměrný spád koryta?

Jak je definován hydraulický poloměr?

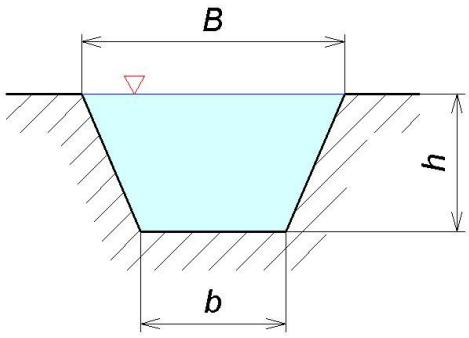
Které parametry koryt lze vypočítat z Chezyho rovnice?

Na čem závisí velikost rychlostního součinitele?

Úkol k řešení

Příklad 14.1

Kanál se stěnami z lomového kamene má lichoběžníkový průřez o rozměrech B, b a hloubce h. Kanálem má protékat objemový průtok Q_v. Jaký poměrný spád musí mít tento kanál? Pro výpočet rychlostního součinitele použijte vztah podle Manninga, Pavlovského, Basina a Kuttera. Stupeň drsnosti n_1 a m vyhledejte v tab. **14.2**. Výsledky porovnejte.



Zadáno:			
$B =$	5	m	
$b =$	1.4	m	
$h =$	1.2	m	
$n_0 =$	0.017		
$Q_v =$	6.0	m^3s^{-1}	
Vypočtěte:			**Výsledky:**
$r_h =$?		m	0.671
$C_M =$?		$m^{0.5}.s^{-1}$	55.039
$C_P =$?		$m^{0.5}.s^{-1}$	58.215
$C_B =$?		$m^{0.5}.s^{-1}$	55.713
$C_K =$?		$m^{0.5}.s^{-1}$	59.829
$v =$?		$m.s^{-1}$	1.563
$i_M =$			0.00120
$i_P =$?			0.001074
$i_B =$?			0.001173
$i_K =$?			0.001017

15. Silové účinky proudící tekutiny na plochy a tělesa

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat větu o změně hybnosti • určit síly, které vyvolá proud kapaliny dopadající na plochy a tělesa	

Vedle bilance hmotnosti (rovnice kontinuity) a bilance energie pro 1 kg proudící kapaliny (Bernouliho rovnice) lze určit také impulzovou větu – větu o změně hybnosti. V inženýrské praxi se s výhodou používá všude tam, kde se sleduje jen výsledný silový účinek tekutiny na stěnu pevného tělesa.

15.1. Věta o změně hybnosti

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat větu o změně hybnosti pro proudící tekutinu

Výklad

Z mechaniky tuhého tělesa již známe, že impuls síly je roven změně hybnosti

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{v_1}^{v_2} m d\vec{v} \qquad (15.1.1)$$

Pro konstantní sílu F a hmotnost m a za předpokladu $t_1 = 0, t_2 = t$ se dostane po integraci

$$\vec{F}\, t = m\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) \qquad (15.1.2)$$

Úpravou této rovnice (dělením t) se získá rovnice

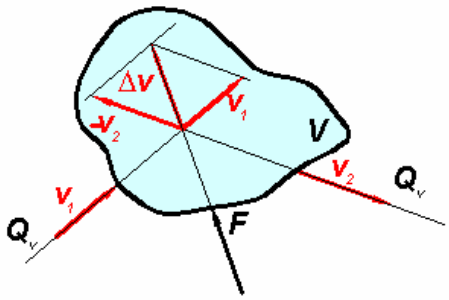
$$\vec{F} = \frac{m}{t}\Delta\vec{v} = |Q_m|\Delta\vec{v} = |Q_m|\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \Delta\vec{H} \qquad (15.1.3)$$

která slouží k výpočtu síly, kterými působí obtékané plochy na proud kapaliny (reakce). Součin $\vec{H} = |Q_m|\vec{v}$ je průtoková hybnost.

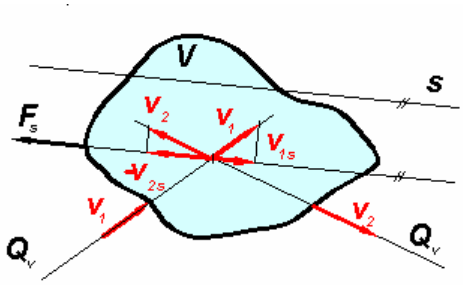
Síla $\vec{F}$ vyvolaná proudící kapalinou (akce) musí být stejně velká, ale opačně orientovaná

$$\vec{F} = -|Q_m|\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = |Q_m|\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \tag{15.1.4}$$

Kapalina, která vtéká do kontrolního objemu V rychlostí $\vec{v}_1$ a vytéká z něho rychlostí $\vec{v}_2$ vyvolá při průtoku Q_v sílu $\vec{F}$ obr. 15.1.



obr. 15.1 Věta o změně hybnosti při interakci proudů kapaliny s tělesem



obr. 15.2 Určení síly ve směru s

Pro výpočet složky síly ve směru s (obr. 15.2) platí hybnostní věta

$$\vec{F} = |Q_m|\Delta\vec{v}_s = |Q_m|\left(\vec{v}_{1s} - \vec{v}_{2s}\right) = \Delta\vec{H}_s \tag{15.1.5}$$

kde $\vec{v}_{1s}, \vec{v}_{2s}$ jsou složky rychlostí $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ do směru $\vec{s}$.

Hybnostní věta v hydromechanice slouží k výpočtu sil, které by bylo nutno určit integrací z Eulerových rovnic hydrodynamiky.

15.2. Aplikace věty o změně hybnosti

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

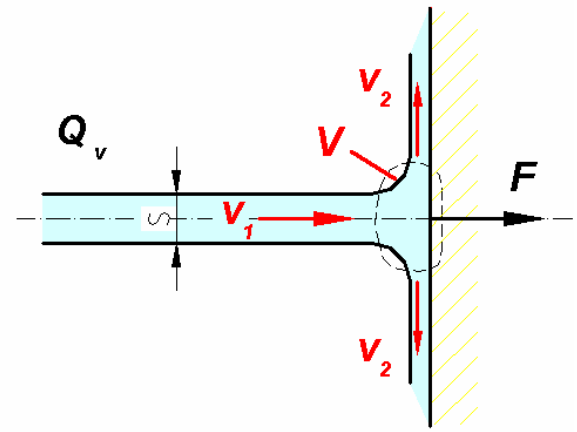
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

aplikovat větu o změně hybnosti při řešení silových účinků proudu tekutiny na obtékané plochy a tělesa

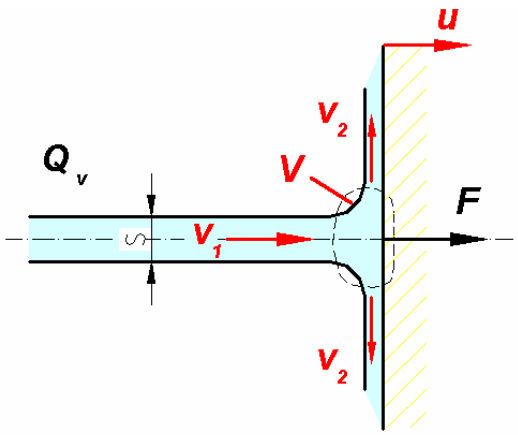
Výklad

Příkladem aplikace hybností v hydrodynamice je výpočet silových účinků paprsků kapalin na desky a tělesa.

Paprsek kapaliny dopadající kolmo na rozlehlou rovinnou desku změní po dopadu směr proudění (obr.15.3) a kapalina se roztéká po desce.



obr. 15.3 Účinek paprsku na kolmou stojící desku



obr. 15.4 Účinek paprsku na kolmou unášenou desku

Změnou hybnosti se vyvolá síla $\vec{F}$. Kontrolní objem V se volí tak, aby ve vstupním průřezu proudu kapaliny byla nenarušená rychlost $\vec{v}_1$, podobně ve výstupním průřezu musí proud mít směr odtokové rychlosti $\vec{v}_2$ shodný s povrchem desky.

Protože paprsek kapaliny proudí v ovzduší, je tlaková energie konstantní. Rovněž polohová energie vodorovného paprsku se nemění. Neuvažují-li se hydraulické odpory (po dopadu na desku), musí být odtoková rychlost $\vec{v}_2$ stejná jako přítoková $\vec{v}_1$ (což vyplývá z Bernoulliho rovnice).

V prvém případě je **deska stojící**, viz obr. 15.3. Změna rychlosti ve směru síly $\vec{F}$ (vodorovném směru) je $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - 0$, neboť složka rychlosti $\vec{v}_2$ do směru síly $\vec{F}$ je nulová. Hmotnostní průtok Q_m je $Q_m = \rho Q_V$, takže síla $\vec{F}$ je definovaná rovnicí (15.2.1)

$$\vec{F} = \rho|Q_v|\vec{v} = \rho S|v|\vec{v} \qquad (15.2.1)$$

a její velikost je

$$F = \rho Q_v v = \rho S v^2 \qquad (15.2.2)$$

Ve druhém případě je **deska unášená**, tj. pohybuje se rychlostí $u < v$, viz obr. 15.4 . Na unášenou desku při kolmém dopadu paprsku kapaliny (obr.15.5) působí síla o velikosti

$$F = Q_m \Delta v \qquad (15.2.3)$$

kde změna velikosti rychlosti je určena relativní rychlostí dopadu $(v-u)$. Odtoková rychlost má ve směru síly $\vec{F}$ nulovou složku. Je tedy

$$\Delta v = (v-u) - 0 = v - u \qquad (15.2.4)$$

Hmotnostní průtok kapaliny, která dopadne na desku je

$$Q_m = \rho S(v-u). \qquad (15.2.5)$$

Velikost silového účinku je tedy pro $u < v$

$$F = \rho S(v-u)^2 \qquad (15.2.6)$$

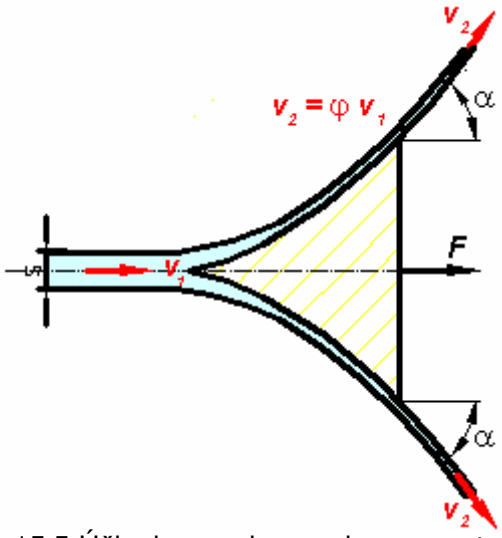
Pohybující se deska může konat silovým účinkem práci. Její výkon je určen výrazem

$$P = Fu = \rho S(v-u)^2 u \qquad (u\langle v) \qquad (15.2.7)$$

Z rovnice vyplývá, že pro $u = 0$ a $u = v$ je výkon P nulový. Musí tedy existovat aspoň jeden extrém pro rychlost v intervalu $0\langle v\langle u$. Ten lze najít pro $u = \frac{1}{3}v$. Maximální výkon desky je

$$P_{\max} = \rho S\left(v - \frac{v}{3}\right)^2 \frac{v}{3} = \frac{4}{27}\rho S v^3 \qquad (15.2.8)$$

Aby odtoková rychlost byla rovnoběžná s povrchem desky, musí být deska rozměrná. Při malé desce se proud kapaliny částečně odkloní, což lze ilustrovat příkladem **dopadu paprsku tekutiny na rotační plochu** (podstavu válce), viz obr. 15.5.



obr. 15.5 Účinek paprsku na obecnou rotační plochu

Paprsek kapaliny dopadající na rotační plochu ve směru její osy vyvolává sílu o velikosti

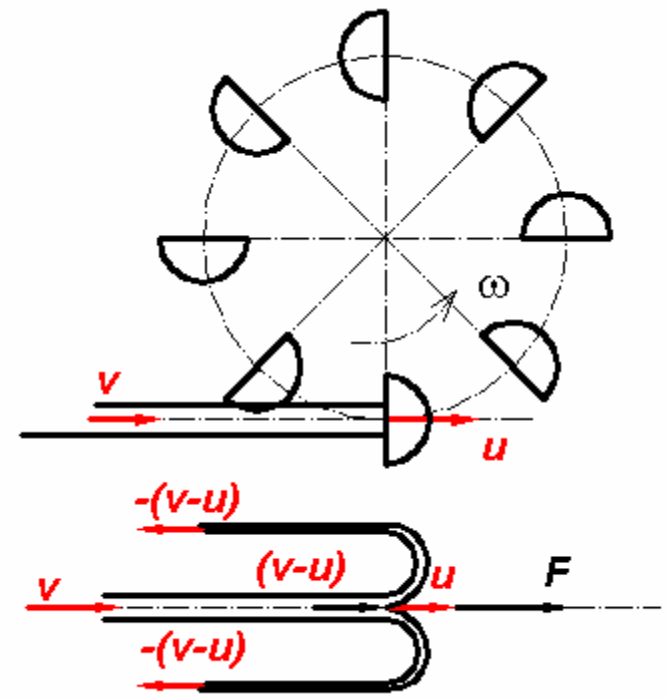
$$F = Q_m \Delta v$$

kde $\Delta v = v_1 - v_2 \cos\alpha = v_1 - \varphi v_1 \cos\alpha = v_1(1 - \varphi\cos\alpha)$ a $Q_m = \rho S v_1$ a tedy

$$F = \rho S v_1^2 (1 - \varphi\cos\alpha) \tag{15.2.9}$$

Součinitel φ (rychlostní) vyjadřuje vliv hydraulických odporů (tření) při obtékání rotační plochy na rychlost, která se snižuje.

Podobným způsobem lze určit **silový účinek na Peltonovo kolo** (obr. 15.6), které sestává z korečků, na něž dopadá paprsek vody.



obr. 15.6 Účinek paprsku na Peltonovo kolo

Na korečku mění proud kapaliny směr proudění a tím vyvolává silový účinek. Voda dopadá na koreček pohybující se unášivou rychlostí u relativní rychlostí $(v-u)$. V ideálním případě se změní směr proudění o 180°, takže z korečku odtéká relativní rychlostí $-(v-u)$. Neuvažují se hydraulické ztráty. Změna rychlosti Δv po průtoku korečkem je určena vztahem

$$\Delta v = (v-u) - [-(v-u)] = 2(v-u) \tag{15.2.10}$$

Na všechny korečky Peltonova kola dopadne veškerá voda vytékající z trysky, jejíž hmotnostní průtok je $Q_m = \rho S v$. Velikost silového účinku na Peltonovo kolo je

$$F = Q_m \Delta v = 2\rho S v (v-u) \tag{15.2.11}$$

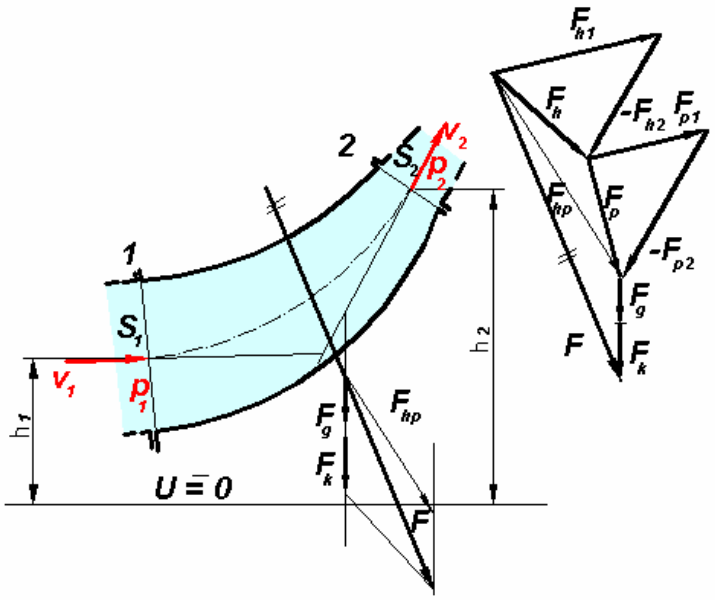
a výkon

$$P = Fu = 2\rho Sv(v-u)u \tag{15.2.12}$$

který má maximální hodnotu pro $u = \frac{v}{2}$

$$P_{\max} = 2\rho Sv\left(v - \frac{v}{2}\right)\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\rho Sv^3 \tag{15.2.13}$$

Větu o změně hybnosti můžeme použít i pro **výpočet silového účinku na zakřivené potrubí** (koleno), viz obr. 15.7.



obr. 15.7 Účinek proudu kapaliny na potrubí

Silové účinky proudu kapaliny na potrubí (obr.15.7) se skládají z několika sil. Na úsek potrubí (mezi průřezy 1 a 2) působí síla vyvolaná změnou průtokové hybnosti kapaliny, a to jak směrem, tak i velikostí rychlosti

$$\vec{F}_h = |Q_m|\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \vec{F}_{h1} - \vec{F}_{h2} \tag{15.2.14}$$

kde

$$\vec{F}_{h1} = |Q_m|\,\vec{v}_1,\ \vec{F}_{h2} = |Q_m|\,\vec{v}_2 \tag{15.2.15}$$

Dále působí na zvolený úsek potrubí tlakové síly vyplývající z Bernoulliho rovnice. Účinek kapaliny v průřezu 1 a 2 vyjadřuje tlaková síla

$$\vec{F}_{p1} = \vec{n}_1\, p_1 S_1,\ \vec{F}_{p2} = \vec{n}_2\, p_2 S_2 \tag{15.2.16}$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor k ploše

K určení výslednice sil $\vec{F}$ na zvolený úsek potrubí se přičte tíha kapaliny $\vec{F}_k$, která zaplňuje úsek potrubí a vlastní tíha potrubí $\vec{F}_g$. Vektorový součet sil $\vec{F}_h, \vec{F}_p, \vec{F}_k, \vec{F}_g$ dává výslednici sil, které působí na úsek potrubí 1-2:

$$\vec{F} = \vec{F}_h + \vec{F}_p + \vec{F}_k + \vec{F}_g \qquad (15.2.17)$$

Výslednici sil $\vec{F}$ musí přenést uchycení nebo zakotvení potrubí.

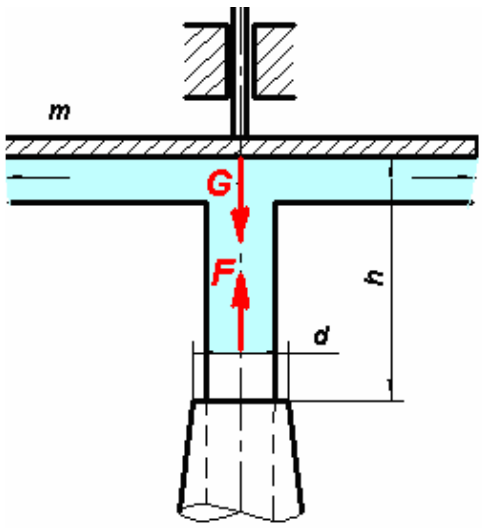
Poznámka: Vliv hydraulických odporů při proudění skutečné kapaliny je zahrnut v tlakových silách, neboť ty závisejí na tlacích v průřezech 1a 2, které jsou ovlivněny hydraulickými odpory, jak vyplývá z Bernoulliho rovnice:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1}{2} + gh_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + gh_z$$

Řešený příklad

V jaké výšce h nad ústím trysky bude nesena rozlehlá deska o hmotnosti m proudem vody, který vytéká z trysky o průměru d rychlostí v_0. Tření v ložisku zanedbejte. Jakou rychlostí v_y dopadá paprsek na desku? Voda odtéká z desky ve směru jejího povrchu

Zadáno:		
$v_0 =$	6 m.s^{-1}	
$d =$	0.05 m	
$m =$	6 kg	
$\rho =$	1000 kg.m^{-3}	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
$v_y =$?	m.s^{-1}	4.996
$h =$?	m	0.56269



Řešení: Hybnostní síla musí být v rovnováze se silou tíhovou, tj. $F = G$, přitom paprsek dopadá na desku rychlostí v_y, a tedy

$$\rho S v_0 v_y = m \cdot g \Rightarrow v_y = \frac{mg}{\rho S v_0} = \frac{4mg}{\rho \pi d^2 v_0}$$

Z Bernoulliho rovnice definované pro ústí trysky a průřez ve výšce h plyne:

$$\frac{v_0^2}{2} + 0 = \frac{v_y^2}{2} + gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2 - v_y^2}{2g}$$

Shrnutí kapitoly

Věta o změně hybnosti, průtoková hybnost, silový účinek na proudu kapaliny na plochy a tělesa, aplikace věta o změně hybnosti.

Kontrolní otázka

Jaký význam má věta o změně hybnosti v mechanice tekutin?

Jak je definována průtoková hybnost?

Jak vypočítáme silový účinek proudu kapaliny na stojící a unášenou desku?

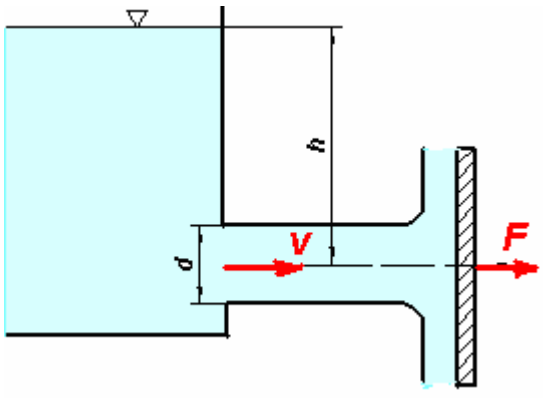
Jak vypočítáme silový účinek proudu kapaliny na Peltonovo kolo?

Jak vypočítáme silový účinek proudu kapaliny na rotační plochu?

Úkol k řešení

Otvorem ve stěně rozlehlé nádrže vytéká voda. Stanovte, jakou silou působí vodní proud na stojící velkou desku. Vliv gravitace na vytékající proud zanedbejte. Je dána hloubka otvoru pod hladinou h, průměr otvoru d, součinitel kontrakce ε, a rychlostní součinitel výtokového otvoru φ.

Zadáno:		
d =	110 mm	
h =	20 m	
ε =	0.64	
φ =	0.97	
Vypočtěte:		**Výsledky:**
v_1 = ?	m.s^{-1}	19.215
S_p = ?	m^2	0.00608
F = ?	N	2 244.835



16. Obtékání těles

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• pojmenovat síly působící na těleso, které se pohybuje v tekutině nebo je tekutinou obtékané • zdůvodnit proč vznikají a jak působí síly při proudění tekutiny kolem těles. • vysvětlit pojem mezní vrstva a vypočítat odpor tělesa, jež je obtékáno tekutinou.	

Určení sil působících na obtékaná tělesa patří k praktickým úlohám mechaniky tekutin. Má aplikace nejen v letectví, automobilovém průmyslu, energetice, vodohospodářství, ale i ve stavebnictví při řešení silových účinků na budovy, mostní konstrukce, komíny, apod. Experimentální zkoumání tohoto problému probíhá v aerodynamických tunelech. Tyto experimenty jsou v současnosti neodmyslitelnou součástí konstrukční a projektové praxe. Z důvodů velké finanční a časové náročnosti zkoušek se do popředí dostává také numerické modelování těchto problémů pomocí programových systému, souhrnně označovaných jak CFD (Computational Fluid Dynamics).

16.1. Síly působící na obtékaná tělesa

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

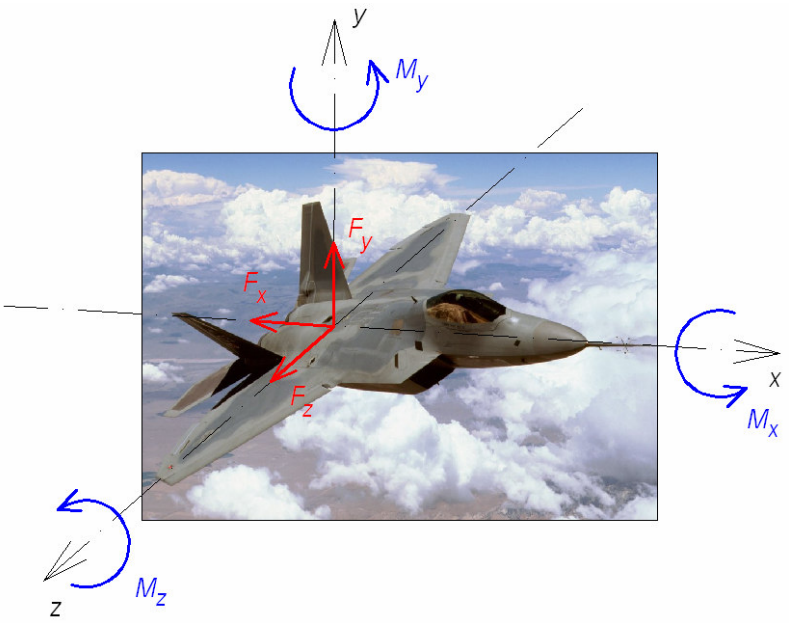
Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat síly a momenty působící na obtékaná tělesa

Výklad

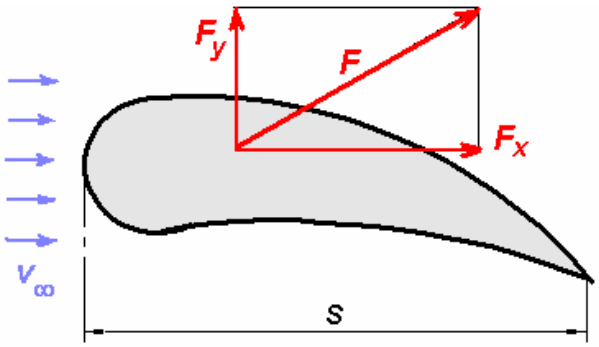
Při obtékání těles či pohybu tělesa ve skutečné (vazké) tekutině vznikají síly a momenty, které působí na samotné těleso.

Výslednou sílu a moment lze rozložit obecně na tři složky: **odpor** F_x, **vztlak** F_y a **boční sílu** F_z a moment **klopivý** M_z, **klonivý** M_x a **zatáčivý** M_y, jak je znázorněno na příkladu obtékání letadla na obr. 16.1. Velikost těchto sil a momentů závisí na geometrii (tvaru) tělesa, jeho poloze vzhledem ke směru proudění a na podmínkách proudění (rychlosti, viskozitě, hustotě).



obr. 16.1 Síly a momenty působící na obtékané těleso

Při symetrickém obtékání těles pak budou některé z těchto složek rovny nule (boční síla F_z, klonivý moment M_x a zatáčivý moment M_y). Příkladem mohou být síly, které vyvolává tekutina na obtékaný letecký profil. Ty je možno rozložit na složku rovnoběžnou se směrem pohybu (**odpor**) a na složku kolmou ke směru pohybu (**vztlak**). Výsledná síla se označuje jako hydraulická, případně (aerodynamická) síla, viz obr. 16.2.



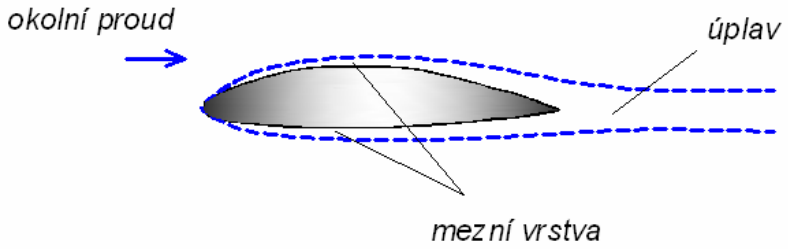
obr. 16.2 Síly na obtékaný letecký profil

Sílu odporu F_x, vztlakovou sílu F_y a výslednou hydrodynamickou (aerodynamickou) sílu F určíme ze vztahu

$$F_x = F_o = c_x S \rho \frac{v_\infty^2}{2},\ F_y = F_v = c_y S \rho \frac{v_\infty^2}{2},\ F = F = c\, S \rho \frac{v_\infty^2}{2} \qquad (16.1.1)$$

kde c_x je součinitel odporu, c_y součinitel vztlaku, c součinitel výsledné aerodynamické síly, S charakteristická plocha obtékaného tělesa, $p_d = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2$ je dynamický tlak.

Při obtékání reálných těles konečné tloušťky, symetrických k vektoru rychlosti v_∞, jsou všechny složky sil kromě odporu F_x nulové. Teoretické stanovení odporu tělesa F_x je obtížné, zejména nachází-li se těleso v rozlehlém proudu tekutiny. Přitom například pokus o zjednodušení této úlohy použitím ideální tekutiny místo skutečné (tj. zanedbání viskozity) nevede ke správnému výsledku. Jestliže provádíme výpočet s modelem nevazké tekutiny, dostáváme nulový odpor, což je v rozporu s naší zkušeností (D'Alembertův paradox), neboť i při obtékání těles vzduchem, který má velmi malou viskozitu, vzniká vždy odpor, tj. složka paralelní s vektorem rychlosti. Řešení těchto úloh se proto nejčastěji provádí pomocí nejrůznějších fyzikálních experimentů. Tímto způsobem bylo zjištěno, že při velkých Reynoldsových číslech sahá vliv viskozity jen do malé vzdálenosti od povrchu tělesa. Tato část proudu byla nazvána **mezní vrstva.** Bylo také zjištěno, že částice proudu, které projdou mezní vrstvou tvoří za obtékaným tělesem **úplav**, viz obr. 16.3.



obr. 16.3 Schéma proudového pole

16.2. Mezní vrstva

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat co to je a proč vzniká mezní vrstva

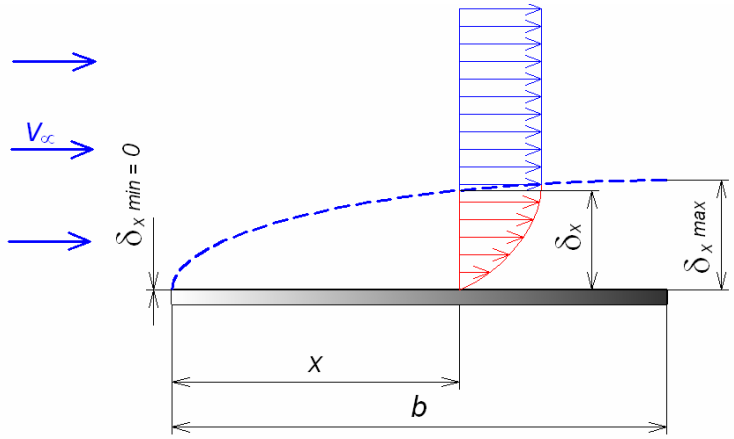
definovat vliv mezní vrstvy na obtékané těleso a na výsledný odpor tělesa

vyřešit základní příklady na výpočet odporu tělesa v proudící tekutině

Výklad

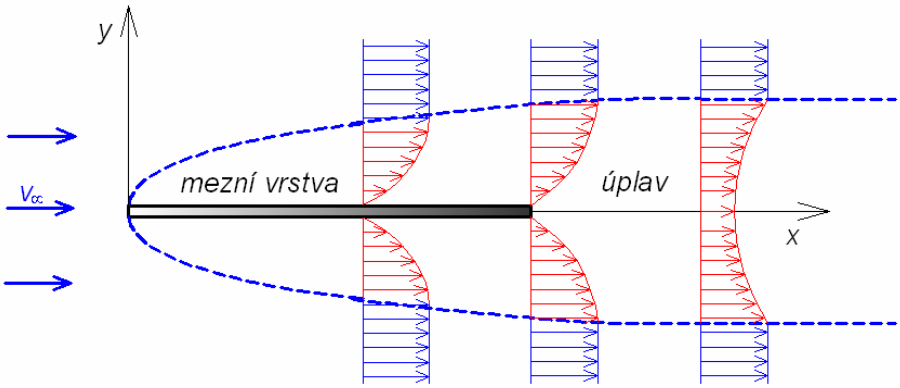
Jak již bylo uvedeno na začátku kapitoly, na každém tělese kolem kterého proudí tekutina, nebo které se samo v tekutině pohybuje, vzniká vlivem viskozity tenká vrstva zbrzděné tekutiny – mezní vrstva. Tato vrstva může mít několik podob. Nejjednodušší případ mezní vrstvy vzniká na tenké desce umístěné paralelně s proudem tekutiny viz obr. 16.4, ve

které je v celém jejím objemu konstantní tlak. Mezní vrstva vzniká tak, že tekutina na stěně ulpí $v_0 = 0$. Vlivem viskozity se zabrzdí nejbližší vrstvy tekutiny u povrchu desky. Rychlost s odlehlostí od stěny narůstá až na hodnotu rychlosti nenarušeného proudu v_∞. Tato tloušťka "zabrzděné" tekutiny δ_x je u **náběžné hrany** nulová a na **odtokové hraně** je maximální viz obr. 16.4.



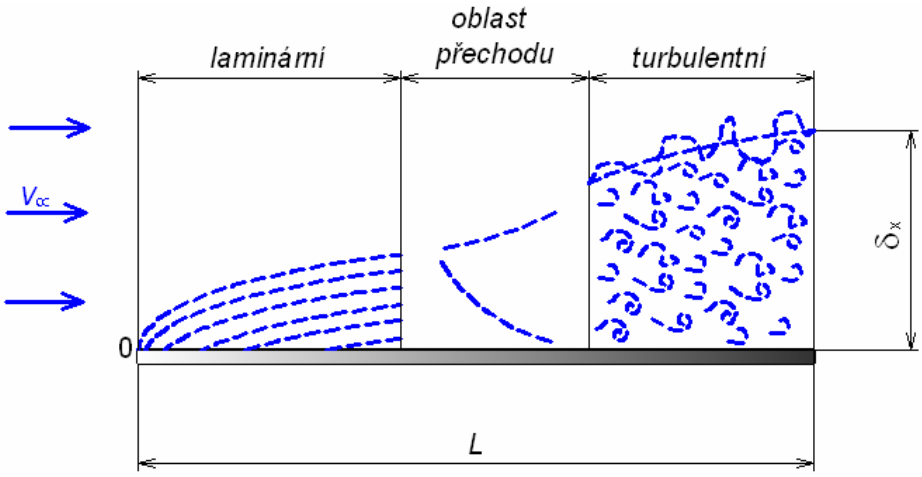
obr. 16.4 Schématické zobrazení mezní vrstvy

V mezní vrstvě a oblasti kolem desky viz obr. 16.5 nejsou proudnice paralelní přímky, ale tvoří mírně se rozbíhající svazek. Hranice mezní vrstvy není shodná s proudnicemi. Složka rychlosti kolmá k desce je mnohem menší než rychlost volného proudu v_∞ a lze ji zanedbat. Mimo mezní vrstvu je všude rychlost téměř konstantní, tedy $\frac{\partial v_\infty}{\partial y} = 0$ a proto i tečné napětí je zde rovno nule, bez ohledu na viskozitu tekutiny. **Mimo mezní vrstvu můžeme tedy počítat s Bernoulliho rovnicí pro ideální tekutiny. V mezní vrstvě však musíme viskozitu uvažovat**.



obr. 16.5 Mezní vrstva na desce

Mezní vrstvu dále ovlivňuje skutečnost, že proudění v ní může být buď **laminární** nebo **turbulentní** viz obr. 16.6. V přední části je **mezní vrstva laminární**, v zadní **turbulentní**, mezi nimi **přechodová oblast**. Okamžitá hranice turbulentní mezní vrstvy – plná nepravidelná křivka - se s časem mění. Střední tloušťka turbulentní mezní vrstvy je zakreslena čárkovaně.



obr. 16.6 Smíšená mezní vrstva na desce

Kritérium pro stanovení přechodu laminární mezní vrstvy na turbulentní je opět Reynoldsovo číslo, jehož hodnota se mění se stupněm turbulence proudu.

$$\mathrm{Re}_x = \frac{v_\infty x}{\nu} \tag{16.2.1}$$

Jeho kritická hodnota se zpravidla udává

$$\mathrm{Re}_k = \frac{v_\infty x_k}{\nu} = 5 \cdot 10^5, \tag{16.2.2}$$

kde x_k je vzdálenost od náběžné hrany, ve které laminární mezní vrstva přechází do turbulentní. Odpor v turbulentní mezní vrstvě je větší než v laminární, což se projeví na hodnotě koeficientu odporu c_x. Při řešení třecího odporu na desce se výpočet tloušťky mezní vrstvy δ_x a součinitele odporu c_x hladké desky rovnoběžné se směrem proudu řídí vztahy odlišnými pro oblasti laminárního a turbulentního proudění a smíšené oblasti, uvedenými v následující tabulce tab. 16.1.

Jestliže nabíhající proud tekutiny je turbulentní, nebo jestliže je proud laminární, ale před desku umístíme turbulizátor, např. síto, drát, apod., pak mezní vrstva je již od náběžné hrany turbulentní a její odpor je vyšší.

tab. 16.1

druh mezní vrstvy	tloušťka mezní vrstvy	součinitel odporu desky	pozn.
laminární	$\delta_x = \frac{3{,}46x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$	$c_x = \frac{1{,}33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$	$\mathrm{Re}_x \langle\langle \mathrm{Re}_k$
turbulentní	$\delta_x = \frac{0{,}37x}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}}$ pro $x \rangle x_k$	$c_x = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}}$	$\mathrm{Re}_x \rangle\rangle \mathrm{Re}_k$
smíšená	$\delta_x = \frac{3{,}46x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ pro $x \langle x_k$	$c_x = \frac{0{,}074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}} - \frac{1700}{\mathrm{Re}_L}$	$\mathrm{Re}_x \approx \mathrm{Re}_k$

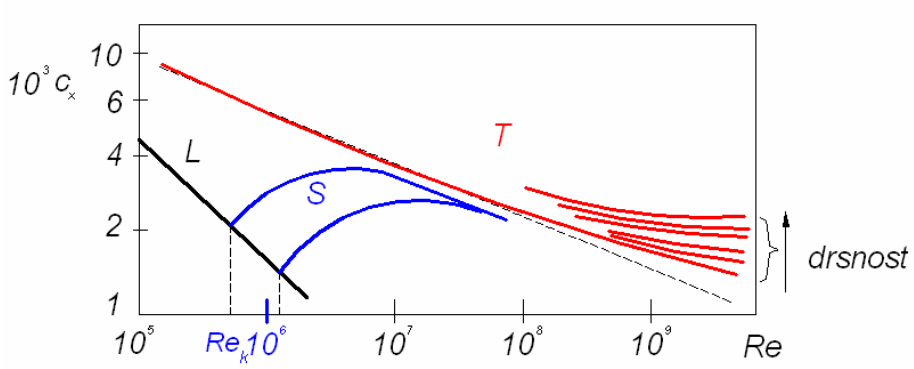
Pozn. $\mathrm{Re}_L = \mathrm{Re}_x$ pro $x = L$, kde L je délka desky.

Odpor desky paralelní s proudem vypočteme z již známého vztahu

$$F_x = c_x S \rho \frac{v_\infty^2}{2}, \tag{16.2.3}$$

kde $\frac{\rho v_\infty^2}{2} = p_d$, tj. dynamický (resp. kinetický) tlak, S je obtékaná plocha desky, ρ je hustota tekutiny, c_x je součinitel odporu .

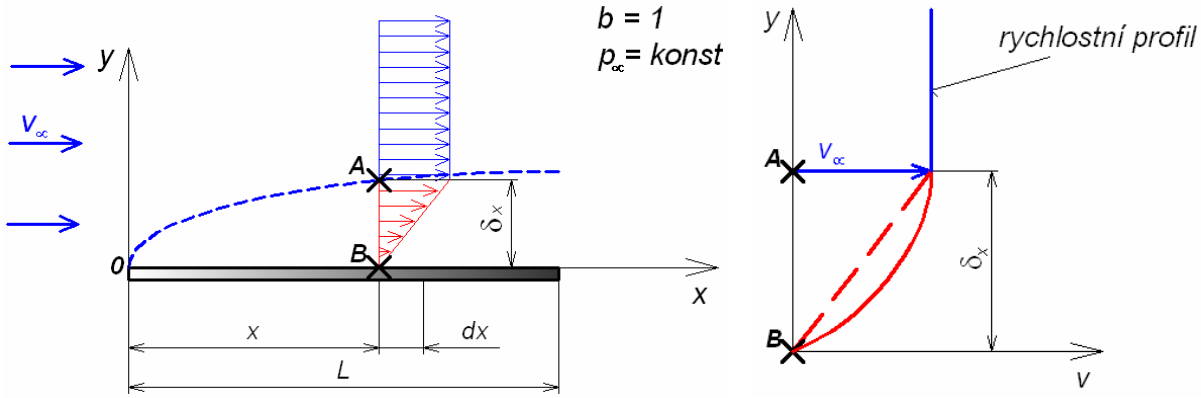
Závislost součinitele odporu c_x tenké desky na Reynoldsově čísle je na obr. 16.7. Protože je diagram vynesen v logaritmických souřadnicích, je závislost součinitele odporu laminární mezní vrstvy znázorněna přímkou „L“ stejně jako součinitele odporu turbulentní mezní vrstvy pro hladkou desku čárkovanou přímkou „T“ s menším sklonem. Skutečné hodnoty součinitele odporu v turbulentní mezní vrstvě budou při vyšších hodnotách Re (nad 10^7) vyšší a jsou v znázorněny plnou křivkou. V turbulentní oblasti je odpor závislý i na drsnosti desky a s rostoucí drsností roste i součinitel odporu. Křivky pro smíšenou vrstvu „S“ (je jich více podle velikosti Re) se asymptoticky blíží křivkám součinitele odporu turbulentní mezní vrstvy, neboť při rostoucích Reynoldsových číslech je část plochy desky s laminární mezní vrstvou stále menší.



obr. 16.7 Závislost součinitele odporu tenké desky na Reynoldsově čísle: L - laminární mezní vrstva, S - smíšená mezní vrstva, T - turbulentní mezní vrstva.

Doplňující (nepovinný) text

Odvoďme pomocí věty o změně hybnosti vztah udávající růst tloušťky mezní vrstvy δ_x se vzdáleností od náběžné hrany x. Zvolme kontrolní oblast $0AB$, která je ohraničena deskou, hranicí mezní vrstvy a úsečkou AB viz obr. 16.8 . Uvažujme jednotkovou šířku desky b.



obr. 16.8 Zjednodušení rychlostního profilu u laminární mezní vrstvy

Pro zjednodušení se volí rychlostní profil jako přímka, jež dá pro laminární mezní vrstvu vyhovující výsledek:

$$v = v_\infty \frac{y}{\delta_x} \text{ , kde } y \text{ je v intervalu od 0 do } \delta_x . \qquad (16.2.4)$$

Ve směru proudění působí na tekutinu v uvažované oblasti pouze tření o stěnu:

$$F_x = \int_0^x \tau_0 dx , \qquad (16.2.5)$$

kde τ_0 je tečné napětí na stěně

$$\tau_0 = \eta\left(\frac{dv}{dy}\right)_{y=0} = \eta\frac{v_\infty}{\delta_x}. \tag{16.2.6}$$

Z kontrolní oblasti vytéká průřezem AB

$$Q_M = \rho\int_0^{\delta_x} v dy = \rho\frac{v_\infty\delta_x}{2}. \tag{16.2.7}$$

Toto množství tekutiny přitéká do kontrolní oblasti plochou OA konstantní rychlostí v_∞, takže hybnost přitékající tekutiny je

$$H_1 = Q_M v_\infty = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2\delta_x. \tag{16.2.8}$$

Hybnost tekutiny vytékající průřezem AB z kontrolní oblasti

$$H_2 = \int_0^{\delta_x} v dQ_M = \rho\int_0^{\delta_x} v^2 dy = \frac{1}{3}\rho v_\infty^2\delta_x. \tag{16.2.9}$$

Dosadíme-li rov. (16.2.5), (16.2.6), (16.2.8), (16.2.9) do věty o změně hybnosti napsané pro elementární část mezní vrstvy o délce dx:

$$dF = d(H_1 - H_2) = \frac{\partial(H_1 - H_2)}{\partial x}dx,$$

$$\tau_0 dx = \eta\frac{v_\infty}{\delta_x}dx = \frac{1}{6}\rho v_\infty^2\frac{\partial\delta_x}{\partial x}dx.$$

Protože $\frac{\partial\delta_x}{\partial x}dx = d\delta_x$, upraví se diferenciální rovnice separací proměnných na tvar $\delta_x d\delta_x = \frac{6\eta}{\rho v_\infty}$ a po integraci

$$\delta_x^2 = 12\frac{\nu}{v_\infty}x + K, \tag{16.2.10}$$

což je parabola druhého stupně, kde $K = 0$ neboť pro $x = 0$ je $\delta_x = 0$. Zavedeme-li do rovnice (16.2.10) Reynoldsovo číslo, v němž charakteristickou délkou bude vzdálenost od náběžné hrany x, bude:

$\delta_x = \frac{3{,}46x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$, což je **tloušťka mezní vrstvy** ve vzdálenosti x. (16.2.11)

Pomocí přesnějších výpočtů potvrzených experimenty dostaneme stejný výraz, jen konstanta je vyšší: 5,8.

Chceme-li vypočítat **odpor**, dosadíme z rov. (16.2.6) za použití rov. (16.2.10)

$$F_x = b\int_0^L \tau_0 dx = \frac{1{,}15}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} bL\rho\frac{v_\infty^2}{2}, \qquad (16.2.12)$$

tj. odpor jedné strany desky, jejíž plocha $S = b.L$. Prvý zlomek se zpravidla označuje součinitel odporu c_x a přesnějším výpočtem dostaneme opět stejný vztah s vyšší konstantou

$$c_x = \frac{1{,}33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}. \qquad (16.2.13)$$

Odpor desky se pak počítá z rovnice

$$F_x = c_x S\rho\frac{v_\infty^2}{2}, \qquad (16.2.14)$$

Řešený příklad

Tenká a hladká rovinná deska je obtékána rovnoběžným proudem vzduchu. Určete délku laminární vrstvy při rychlosti $v_\infty = 20$ ms^{-1}. Kritické Reynoldsovo číslo desky je Re_k a viskozita vzduchu je ν.

Zadáno:

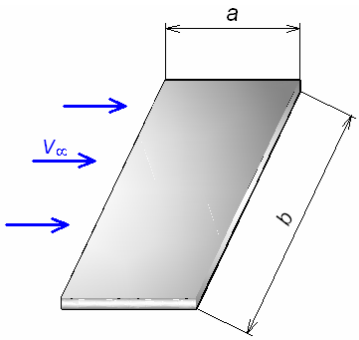
$v_\infty =$ 20 m.s^{-1}

$\mathrm{Re}_k =$ 500000

$\nu =$ 0.000015 m^{2}s^{-1}

Vypočtěte: Výsledky:

$x_k =$? m 0.37500



Řešení:

$$\mathrm{Re}_k = \frac{v_\infty x_k}{\nu} \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{\mathrm{Re}_k \cdot \nu}{v_\infty}$$

16.3. Odpor těles

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

rozdělit obtékaná tělesa do kategorií podle typu odporu

vysvětlit jev nazývaný odtržení mezní vrstvy a popsat důsledky tohoto jevu

popsat jev nazývaný Kármánova vírová stezka a jeho důsledky v praxi

Výklad

Obtékání tenké desky paralelní s proudem je příkladem třecího odporu. V případě obtékaných těles konečné tloušťky je podstata odporu složitější. **Celkový odpor** lze rozložit na **odpor třecí** (vliv viskozity) daný integrálem tečných sil po povrchu a **tlakový odpor**, způsobený nesymetrickým rozložením tlaku po povrchu tělesa. Ve většině případů je nelze určit odděleně.

Podle toho, která složka odporu převládá, což závisí na tvaru, můžeme tělesa rozdělit do tří skupin:

- deskovitá a paralelní s proudem (dominantní třecí odpor),
- deskovitá a kolmá k proudu (dominantní tlakový odpor),
- spojitě zakřivená s relativně velikou tloušťkou (kombinace třecího a tlakového odporu).

Vztah pro výpočet celkového odporu je formálně stejný, ale v tomto případě je c_x součinitel celkového odporu, který zahrnuje odpor třecí i tlakový, S je charakteristická plocha určena jako příčný průřez, půdorysný průmět nebo omočená plocha podle dohody.

$$F_x = c_x S \rho \frac{v_\infty^2}{2}. \qquad (16.3.1)$$

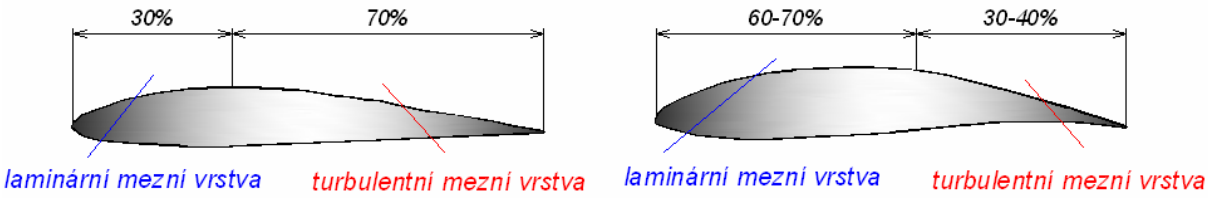
Tělesa s dominantním třecím odporem

Ocasní plochy letadel jsou typickými příklady profilovaných desek, u nichž převládá třecí odpor. Do rovnice (16.3.1) se však obyčejně nedosazuje smáčená plocha, jako u tenké desky, nýbrž plocha půdorysu, neboť se určí snadněji.

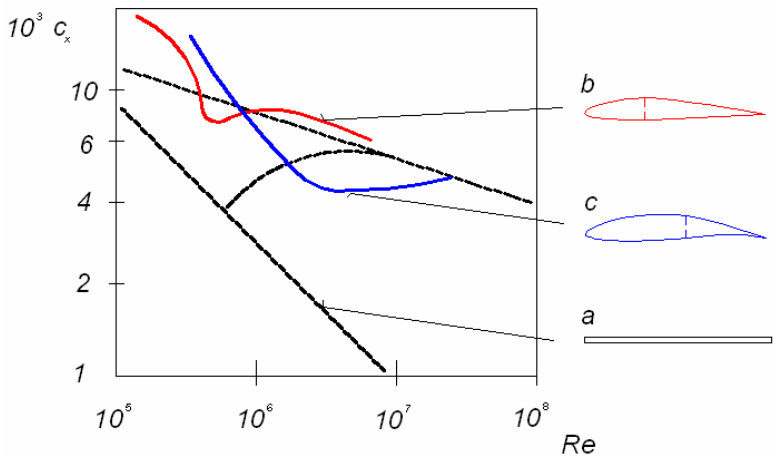
Součinitel odporu závisí na tvaru profilu desky, Reynoldsově čísle, drsnosti povrchu a turbulenci proudu. Průběh součinitele odporu v závislosti na Reynoldsově čísle je podobný jako pro tenkou desku, jen s o něco větším vlivem malého tlakového odporu. Úplav je malý.

Protože přechod laminárního proudění v turbulentní je silně závislý na tlakovém spádu, lze vhodným tvarováním snížit odpor v určité oblasti Re. Tento poznatek byl zásadní při návrhu leteckých profilů křídel. Jedná se o tzv. **laminární profily** viz obr. 16.9 , u nichž je maximální tloušťka posunuta do vzdálenosti 40 až 60% od náběžné hrany, zatímco u

klasických profilů byla asi 30%, snížení odporu je patrné z grafu na obr. 16.10. Důsledkem tohoto snížení odporu bylo zvýšení rychlosti letadel.



obr. 16.9 Schéma klasického a laminárního leteckého profilu



obr. 16.10 Srovnání hodnot součinitele odporu při různých Re pro:

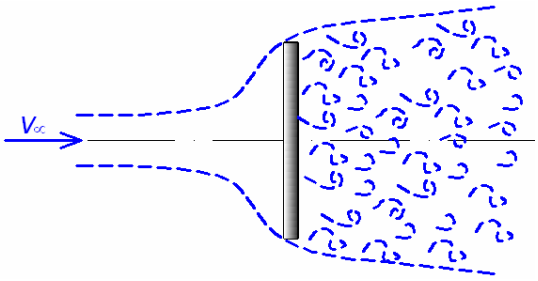
a) tenkou desku (součinitel odporu vztažen na plochu půdorysu desky),

b) klasický profil,

c) laminární profil.

Tělesa s dominantním tlakovým odporem

U deskovitých těles postavených kolmo k proudu, obr. 16.11, nebo u těles s ostrými hranami na zadní části, dochází k odtržení proudu na hranách a k tvorbě vírů a vírových oblastí. Vírová oblast je ohraničena odtrženými proudnicemi a obtékaným povrchem, bod odtržení nemění svou polohu. Tento odpor převažuje například při obtékání desky kolmé k proudu.

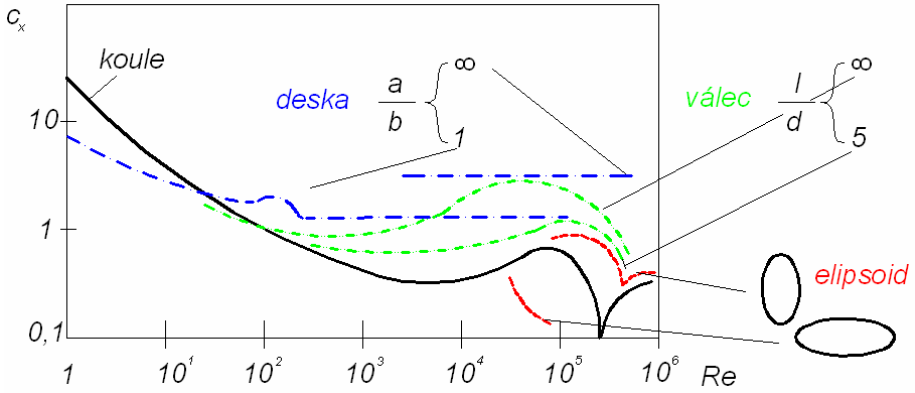


obr. 16.11 Obtékání desky kolmé k proudu

Před tělesem je přetlak, za tělesem podtlak – což je nevhodné rozložení tlaku. Úplav je veliký. Součinitel odporu závisí hlavně na tvaru tělesa, jen pro malé rychlosti, tj. $Re < 10^3$ je závislý i na Re, neboť roste vliv viskozity, obr. 16.12. Hodnoty součinitelů při $Re > 10^3$ jsou závislé hlavně na tvaru obtékaného tělesa, např. kruhová a čtvercová deska mají $c_x = 1{,}1$; obdélníková deska (s teoreticky nekonečným rozpětím) $c_x = 2$. Jako charakteristickou plochu A dosazujeme v tomto případě do rov. (16.3.1) plochu průmětu do roviny kolmé k rychlosti v_∞ , tj. čelní průmět.

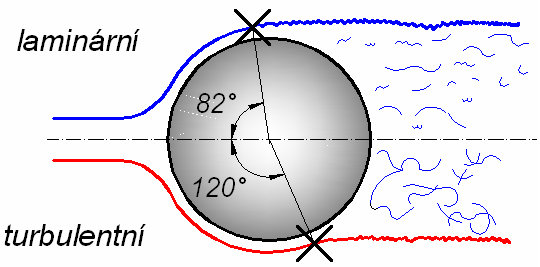
Tělesa s kombinací třecího a tlakového odporu

Pro tělesa spojitě zakřivená (koule, elipsoidy, válce a p.) je charakteristické, že při určitých hodnotách Reynoldsových čísel dochází k pronikavým změnám součinitele odporu c_x např. na obr. 16.12, při $Re \approx 10^5$ nastává tzv. **krize odporu**. Příčinou je posunutí bodu odtržení mezní vrstvy směrem dozadu při přechodu proudění v mezní vrstvě z laminárního na turbulentní. To má za následek zmenšení úplavu i odporu.



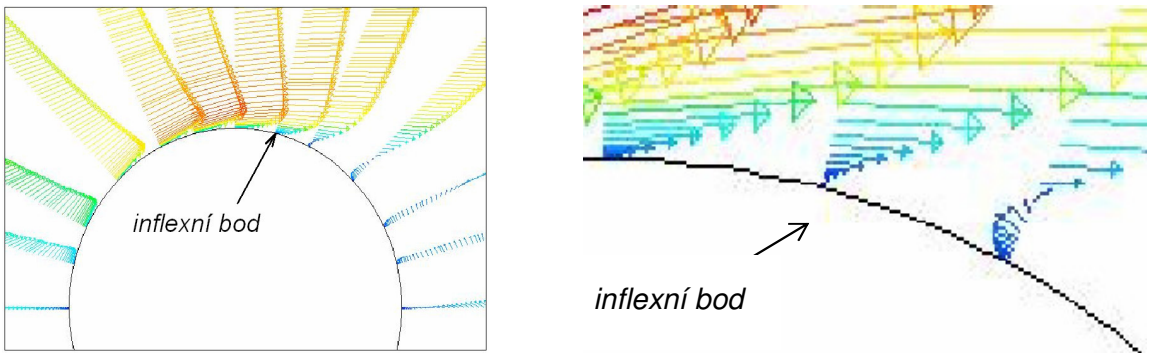
obr. 16.12 Závislost součinitele odporu různých těles na Reynoldsově čísle:

Například při obtékání koule je proudění v mezní vrstvě laminární - **podkritické** do Reynoldsova kritického čísla, jež pro kouli nabývá hodnot $Re_k = \frac{v_\infty d}{\nu} = (1{,}5 \text{ až } 4)\cdot 10^5$ a bod odtržení mezní vrstvy je ještě před maximálním průřezem, viz obr. 16.13 – modrá křivka. Při **nadkritickém** obtékání je bod odtržení za maximálním průřezem, obr. 16.13 – červená křivka, úplav se zmenší.



obr. 16.13 Odtržení proudu při obtékání koule

K odtržení mezní vrstvy dochází zpravidla tehdy, když tekutina proudí do míst s vyšším tlakem např. na zadní části koule, válce, ale i v difuzoru a podobně. Tlakové a třecí síly působící proti pohybu částice jsou překonávány setrvačností částice tekutiny, její rychlost proto klesá, až v určitém místě na povrchu tělesa má rychlost nulovou, obr. 16.14. Rychlostní profil v tomto místě má **inflexní bod**. Za tímto místem mají rychlosti u stěny opačný smysl, než je tomu u hlavního proudu a u stěny vzniká zpětně proudění .



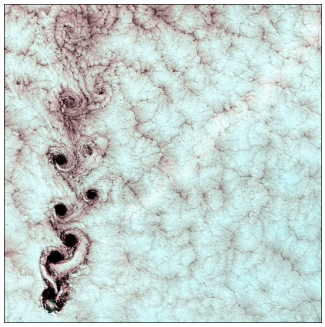
obr. 16.14 Proudění v okolí bodu odtržení

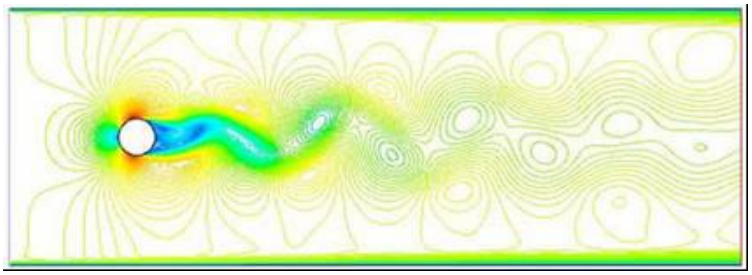
V turbulentní mezní vrstvě mají částice u stěny větší kinetickou energii, protože rychlostní profil je plnější než při laminárním proudění. To je příčina posunu bodu odtržení dozadu a zmenšení úplavu při přechodu laminárního proudění v mezní vrstvě v proudění turbulentní. Proto při Reynoldsově kritickém čísle dojde k poklesu součinitele odporu, jak již bylo uvedeno dříve (obr. 16.12).

Při velmi malých Reynoldsových číslech, menších než 1, převládá vliv vazkých sil nad tlakovými. U koule a válce je bod odtržení posunut daleko dozadu - nedochází téměř k odtržení. Součinitel odporu je silně závislý na Re. Pro kouli odvodil Stokes vztah $F_x = 3\pi\nu v_\infty d$. Srovnáním s rovnicí (16.3.1) při dosazení $S = \frac{\pi d^2}{4}$ dostaneme $c_x = \frac{24}{\mathrm{Re}}$.

Při těchto obtékáních (tzv. plíživé proudění) nelze hovořit o mezní vrstvě, neboť vliv viskozity sahá velmi daleko od tělesa.

U válců dochází v oblasti 40 < Re < 500 k pravidelnému, střídavému odtrhávání vírů a za válcem vzniká tzv. **Kármánova vírová stezka,** obr. 16.15.

a) 

b) 

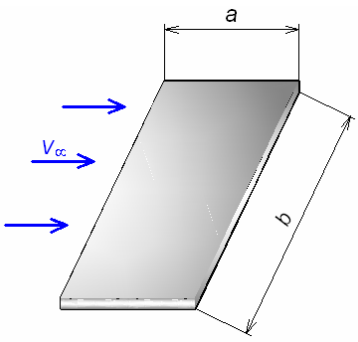
obr. 16.15 Kármánova vírová stezka

a) v mracích za vrcholem hory b) za obtékaným válcem – numerická simulace

Tento jev je nutno respektovat u různých stavebních konstrukcí, a dbát na to, aby nedošlo k rezonanci frekvence odtrhávání vírů a vlastní frekvence konstrukce. Tento jev je také příčinou "zpívání" telefonních drátů - tzv. Strouhalových třecích tónů.

Řešený příklad

Tenká a hladká deska o rozměrech a, b je obtékána z obou stran rovnoběžným proudem vzduchu rychlostí a) $v_{\infty 1}$ resp. b) $v_{\infty 2}$ o hustotě ρ_{vz} a viskozitě ν. Stanovte charakter proudění v mezní vrstvě, součinitele odporu desky, třecí odpory a tloušťky mezní vrstvy na konci desky pro obě varianty rychlostí.



Zadáno:

$v_{\infty 1}$ =	30	m.s^{-1}
$v_{\infty 2}$ =	100	m.s^{-1}
ρ_{vz} =	1.2	kg.m^{-3}
ν =	0.000015	m^{2}s^{-1}
a =	0.1	m
b =	1	m

Vypočtěte:		Výsledky:
Re_{L1} = ?		200 000
Re_{L2} = ?		666 667
c_{x1} = ?		0.00297
c_{x2} = ?		0.00506
F_{x1} = ?	N	0.32076
F_{x2} = ?	N	6.072
δ_{x1} = ?	m	0.00077
δ_{x2} = ?	m	0.00253

Řešení:

a) $\mathrm{Re}_L = \frac{v_\infty a}{\nu} < \mathrm{Re}_k = 5 * 10^5 \Rightarrow$ laminární proudění v mezní vrstvě

$$c_x = \frac{1.33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

$$\delta_x = \frac{3.46x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

$$F_x = 2c_x S\rho\frac{v_\infty^2}{2}$$

b) $\mathrm{Re}_L = \frac{v_\infty a}{\nu} > \mathrm{Re}_k = 5 * 10^5 \Rightarrow$ turbulentní proudění v mezní vrstvě

$$c_x = \frac{0.074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}}$$

$$\delta_x = \frac{0.37x}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_x}}$$

$$F_x = 2c_x S\rho\frac{v_\infty^2}{2}$$

Shrnutí kapitoly

Odpor, vztlak a boční síla, momenty klopivý, klonivý a zatáčivý. Proud tekutiny, mezní vrstva a úplav. Tenká deska obtékaná paralelně proudem tekutiny. Mezní vrstva, proudění v mezní vrstvě. Laminární, smíšená a turbulentní mezní vrstva. Odpor třecí a odpor tlakový. Tělesa s dominantním třecím odporem, tělesa s dominantním tlakovým odporem a tělesa s kombinovaným odporem. Odtržení mezní vrstvy, Kármánova vírová stezka.

Kontrolní otázky

Jaké odporové síly a momenty vznikají při obtékání těles skutečnou tekutinou?

Co se stane, bude-li těleso obtékáno symetricky?

Proč se tvoří za obtékaným tělesem úplav?

Můžeme použít pro výpočet odporových sil model s ideální tekutinou?

Co je mezní vrstva?

Kde je mezní vrstva nejtenčí a kde je naopak nejširší?

Jaký je rozdíl mezi laminární a turbulentní mezní vrstvou?

Může existovat na jedné desce současně laminární i turbulentní mezní vrstva?

Na čem závisí tloušťka mezní vrstvy?

Napište rovnici pro výpočet odporu F_x.

Rozdělte obtékaná tělesa do 3 kategorií podle typu odporu.

Jaký odpor převládá u profilu křídla?

U kterých těles se nemění bod odtržení?

Co to je inflexní bod?

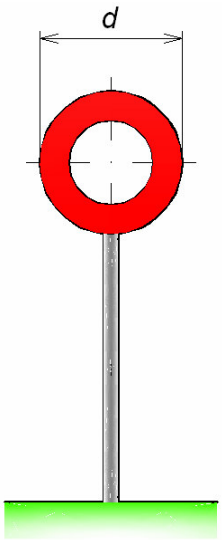
Co se stane při odtržení mezní vrstvy se součinitelem odporu c_x ?

Co to je a kdy vzniká Kármánova vírová stezka?

Co může způsobit Kármánova vírová stezka na obtékaném tělese?

Úkol k řešení

Jak velká síla F_x bude působit na dopravní značku o průměru d při rychlosti větru v.
Hustota vzduchu je ρ_{vz} a součinitel odporu kruhové desky je c_x.



Zadáno:

d =	0.6 m	
v_∞ =	120 km.hod^{-1}	
ρ_{vz} =	1.23 kg.m^{-3}	
c_x =	1.1	
Vypočtěte:		Výsledky:
F_{x1} = ?	N	212.42

17. Fyzikální podobnost a teorie modelování

Po úspěšném a aktivním absolvování této KAPITOLY

Budete umět:	**Budete umět**
• definovat základní podobnostní čísla • využívat podobnost při definování fyzikálních modelů	

17.1. Fyzikální podobnost při proudění tekutin

Čas ke studiu: **1/2 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

rozlišit pojem dílo a fyzikální a matematický model
definovat pojem podobnostní číslo

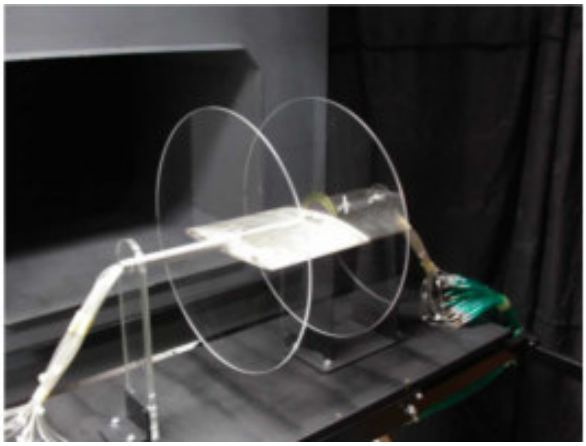
Výklad

Experimentální práce v hydraulické laboratoři je velmi významnou složkou výzkumné práce. Zkoumají se modely nejrůznějších strojů a zařízení, aby se poznaly jejich základní vlastnosti nebo zjistily a opravily vady, ověřují se teoretické předpoklady návrhu či projektu a velmi často se pokusně zjišťují vzájemné závislosti zúčastněných veličin. Výsledky získané na **modelu (M)** se pak přepočítávají na skutečné zařízení, tzv. **dílo (D)**. Prozkoumání jevu na modelu umožňuje také zavést opravné součinitele do teoreticky odvozených rovnic, jejichž řešení bylo založené na zjednodušujících předpokladech (aby se matematické řešení usnadnilo nebo zjednodušilo), které se však od skutečných poměrů částečně odchylují. V některých složitých případech, které nejsou dosud teoreticky řešitelné, se experimentem získávají pro praxi potřebné vztahy veličin.

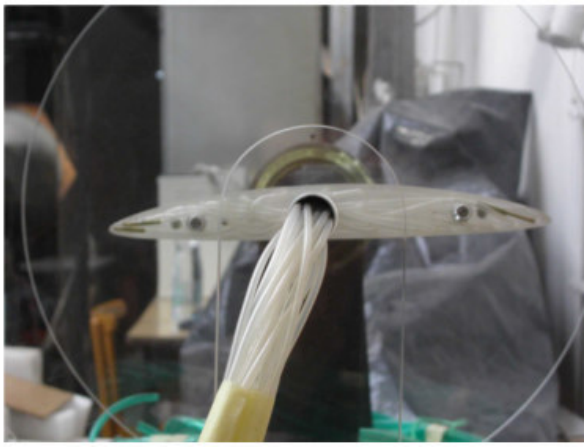
Model se zhotovuje téměř vždy menší než dílo, proto je levnější, lehčí, manipulace s ním je snadnější, výroba modelu časově méně náročná a lze s ním experimentovat v laboratořích. Menší náklady umožňují vyšetřovat na modelu několik alternativ a provádět úpravy během experimentování. Na obr. 17.1 je znázorněno dílo, tj. letadlo, fyzikální model části křídla, kde se prování měření rozložení tlaku a detail a matematický model daný sítí a izoplochami tlaku a tím i rozložením tlaku podél křídla.

Dílo

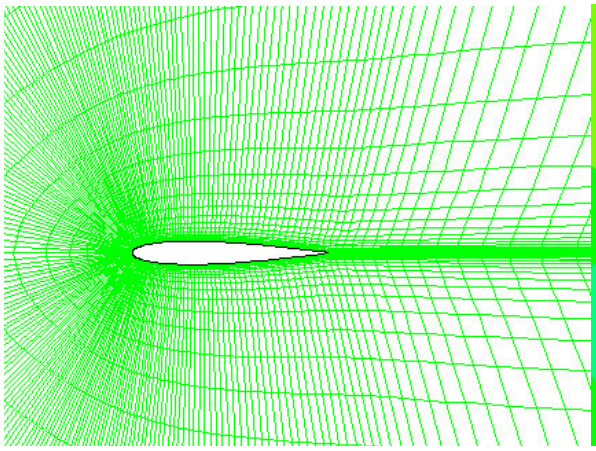
Fyzikální model křídla s odběry tlaku



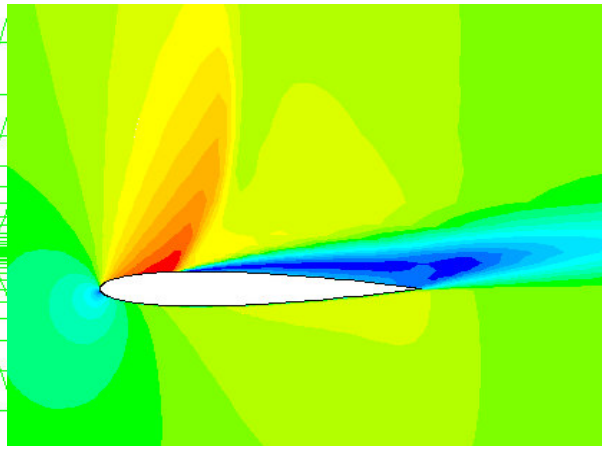
Detail



Matematický model křídla s sítí



Rozložení tlaku



obr. 17.1 Dílo, fyzikální model, matematický model

Výsledky měření na modelu, mají-li splnit svůj úkol, je nutno přepočítat na skutečné provedení – dílo, což se provádí na základě poznatků teorie fyzikální podobnosti. Fyzikální podobnost stanoví podmínky, za kterých je zkoumaný jev na modelu fyzikálně podobný jevu ve skutečném provedení – díle. Úplná fyzikální podobnost je splněna tehdy, když jsou současně splněny následující tři podmínky:

1. **geometrická podobnost,** kdy se vyžaduje, aby poměr odpovídajících si délek na modelu a na díle byl konstantní a úhly stejné

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)_M = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)_D = konst \tag{17.1.1}$$

2. **kinematická podobnost,** kdy se předpokládá, že poměr odpovídajících si rychlostí a zrychlení na modelu a díle bude konstantní

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)_M = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)_D = konst \tag{17.1.2}$$

3. **dynamická podobnost** se týká silových účinků. Proudění tekutin je pohyb hmotných částic a podle klasické Newtonovy mechaniky jsou příčinou pohybu síly. Tedy dynamická podobnost vyžaduje, aby poměr odpovídajících sil na modelu a na díle byl konstantní

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right)_M = \left(\frac{F_1}{F_2}\right)_D = konst \tag{17.1.3}$$

Splnění podmínek geometrické a kinematické podobnosti je obvykle snadné, složitější bývá splnění dynamické podobnosti.

V mechanice tekutin se vyskytuje mnoho sil, vyberme ze všech pouze ty, které se nejčastěji vyskytují a tyto nechť jsou:

- **tlaková síla** $F_p = p.S \approx pl^2$
- **třecí síla** $F_t = \tau.S \approx \eta lv$
- **setrvačná síla** $F_s = m.a \approx \rho\, l^2 v^2$
- **tíhová síla** $F_g = mg \approx \rho g l^3$

Pro n sil je možno sestavit $\binom{n}{2}$ kritérií fyzikální podobnosti (tj. poměr dvou sil), z čehož polovina je na sobě nezávislá.

Kriterium fyzikální podobnosti proudění, ve kterém budou hlavní (dominantní) síly setrvačné – F_s a třecí – F_t je podle rovnice (17.1.3) poměr $\frac{F_{sM}}{F_{sD}} = \frac{F_{tM}}{F_{tD}} = konst$, odkud

$$\left(\frac{F_s}{F_t}\right)_M = \left(\frac{F_s}{F_t}\right)_D$$

Po dosazení za jednotlivé síly, je-li $\frac{\eta}{\rho} = \nu$ kinematická viskozita, se dostane

$$\left(\frac{\rho l^2 v^2}{\eta l v}\right)_M = \left(\frac{\rho l^2 v^2}{\eta l v}\right)_D \qquad \left(\frac{vl}{\nu}\right)_M = \left(\frac{vl}{\nu}\right)_D \qquad \mathrm{Re}_M = \mathrm{Re}_D \qquad (17.1.4)$$

Výraz na levé straně je **Reynoldsovo číslo** na modelu a na pravé straně pak Reynoldsovo číslo na díle. Podobnost je v tomto případě splněna tehdy, jsou-li stejná Reynoldsova čísla na modelu a na díle. $\mathrm{Re}_M = \mathrm{Re}_D$. Podobně lze odvodit i další kriteria podobnosti.

Pro hlavní sílu tlakovou F_p a setrvačnou F_s se dostane

$$\left(\frac{F_p}{F_s}\right)_M = \left(\frac{F_p}{F_s}\right)_D$$

Po dosazení za jednotlivé síly a po úpravě

$$\left(\frac{pl^2}{\rho l^2 v^2}\right)_M = \left(\frac{p.l^2}{\rho l^2 v^2}\right)_D \qquad \left(\frac{p}{\rho v^2}\right)_M = \left(\frac{p}{\rho v^2}\right)_D \qquad Eu_M = Eu_D \qquad (17.1.5)$$

Zlomek $Eu = \frac{p}{\rho v^2}$ je **Eulerovo číslo.** Podobnost v tomto případě je splněna, jsou-li stejná

Eulerova čísla na modelu a na díle $Eu_M = Eu_D$.

Jsou-li hlavní síly F_s síla setrvačná a F_g síla tíhová, dostane se

$$\left(\frac{F_s}{F_g}\right)_M = \left(\frac{F_s}{F_g}\right)_D$$

Po dosazení za jednotlivé síly a úpravě

$$\left(\frac{\rho l^2 v^2}{\rho g l^3}\right)_M = \left(\frac{\rho l^2 v^2}{\rho g l^3}\right)_D \qquad \left(\frac{v^2}{gl}\right)_M = \left(\frac{v^2}{gl}\right)_D \qquad Fr_M = Fr_D \qquad (17.1.6)$$

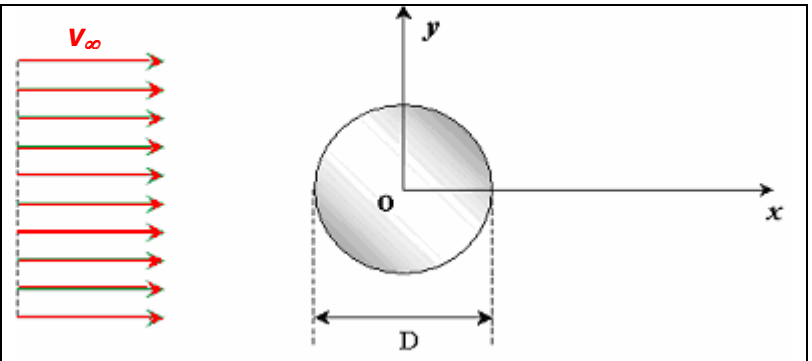
Zlomek $Fr = \frac{v^2}{gl}$ je **Froudovo číslo.** Podobnost v tomto případě je splněna, jsou-li stejná

Froudova čísla na modelu a na díle $Fr_M = Fr_D$.

Řešený příklad

Koule o průměru D je obtékána vodním proudem rychlostí v_{H_2O}. Jaká musí být rychlost vzduchu v_{vz}, aby si obě proudění byla fyzikálně podobná? Kinematická viskozita vzduchu a vody je dána.

Zadáno:	
$D =$	1 m
$v_{H_2O} =$	2 $m.s^{-1}$
$\nu_{H_2O} =$	10^{-6} $m^2.s^{-1}$
$\nu_{vz} =$	$1.7 \cdot 10^{-5}$ $m^2.s^{-1}$
Vypočtěte:	Výsledky:
$v_{vz} =$?	$m.s^{-1}$ 34



Řešení: Pro zkoumaný jev jsou významné síly setrvačné a třecí, dané Reynoldsovým kritériem.

$$\mathrm{Re}_{H_2O} = \mathrm{Re}_{vz}$$

$$\frac{v_{H_2O} D}{\nu_{H_2O}} = \frac{v_{vz} D}{\nu_{vz}} \Rightarrow v_{vz} = v_{H_2O} \frac{\nu_{vz}}{\nu_{H_2O}}$$

17.2. Dimenzionální analýza (π-teorém)

Čas ke studiu: **1/4 hodiny**

Cíl **Po prostudování tohoto odstavce budete umět**

definovat zákon zachování hmotnosti
popsat princip odvození rovnice kontinuity
vyřešit příklady s aplikací rovnice kontinuity

Výklad

Aplikace π-teorému bude názornější vysvětlena na následujícím příkladě. Pro součinitel tření λ v potrubí lze na základě zkušeností psát, že je funkcí čtyř fyzikálních veličin $\lambda = f(v, D, \nu, k)$, tzn. že počet proměnných veličin $n = 4$. Tyto čtyři veličiny se dají vyjádřit pomocí dvou základních rozměrů a sice délky M a času t. Počet základních rozměrů tedy je $r = 2$. Počet bezrozměrných veličin je

$$\pi = n - r = 4 - 2 = 2$$

Bezrozměrné veličiny se stanovují z dimensionální matice, která je pro čtyři uvedené fyzikální veličiny ve tvaru

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{s} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{v} & \nu & D & \mathrm{k} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Protože průměr D a drsnost k mají stejný rozměr, tvoří tzv. simplex – jeden z bezrozměrových argumentů, který může být ve tvaru

$$\pi_1 = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{D}} = \varepsilon, \text{ resp. } \pi_1 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{k}} = \frac{1}{\varepsilon}$$

Tento poměr je už znám jako *relativní drsnost.*

Druhý bezrozměrový argument musí být vyjádřen s dimenzionální matice, ve které sa může objevit jenom jedna fyzikální veličina ze dvou se shodným rozměrem (buď D, resp. k). Taková dimensionálni matice je ve tvaru

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{s} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{v} & \nu & D \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Její řešení vychází z převedení této matice do soustavy lineárních rovnic a nalezení řešení pro dva podmínky: $\nu = 0$ a $\nu = 1$. Postupujeme tak, že uvedenou matici převedeme na čtvercovou matici ve tvaru

$$\begin{array}{c} \\ \mathrm{m} \\ \mathrm{s} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{v} & \nu \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{array} \right\| \end{array} = (-1) \begin{array}{c} D \\ \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

řešení patrně hledáme ze soustavy lineárních rovníc plynoucích z posledního zápisu matice, která má tvar

$$v + 2\nu = -D$$

$$- v - \nu = 0$$

Pro podmínku $\nu = 0$ vyplyne: $D = 0, \quad \nu = 0.$

Pro podmínku $\nu = 1$ vyplyne: $D = 1, \quad \nu = -1.$

Z výpočtu získaný bezrozměrový argument se zůstavuje tak, že vypočtena veličina s kladným znamínkem je ve zlomku v čitateli a se záporným znamínkem v jmenovateli. Na základě toho druhý bezrozměrový argument má tvar

$$\pi_2 = \mathrm{Re} = \frac{\mathrm{vD}}{\nu}$$

Mohou to být tato bezrozměrná podobnostní čísla:

- $\pi_1 = \mathrm{Re} = \frac{vD}{\nu}$ - číslo Reynoldsovo
- $\pi_2 = \varepsilon = \frac{k}{D}$ - relativní drsnost

Závislost třecího součinitele se zapíše ve tvaru

$$\lambda = f(\mathrm{Re}, \varepsilon)$$

Pomocí π-teorému, se tedy snížil počet nezávisle proměnných z původních 4 pouze na 2, což představuje významné zjednodušení problému.

Shrnutí kapitoly

Fyzikální podobnost, dílo, model, hydrodynamická podobnost, π teorém

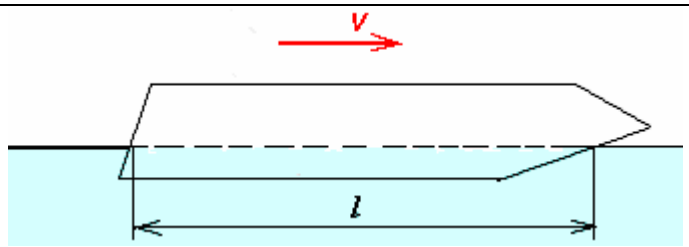
Kontrolní otázka

Jaký význam má hydrodynamická podobnost?
Vyjmenujte podmínky hydrodynamické podobnosti.
Jaký je význam Eulerova kritéria?
V jakém smyslu lze aplikovat π teorém?

Úkol k řešení

Vodní kluzák o délce l se pohybuje po vodě rychlostí v. Jakou rychlostí je nutno provádět zkoušky na modelu o délce l_m na vodním kanálu, aby byla zachována fyzikální podobnost ?

Zadáno:		
l =	10.4 m	
v =	36 km.h^{-1}	
l_m =	0.5 m	
Vypočtěte:		Výsledky:
v_m = ?	m.s^{-1}	2.19



Řešeni: Pro zkoumaný jev jsou významné síly setrvačné a tíhové, dané Froudovým kritériem.

18. Doporučená literatura

BIRD, B.R, STEWART, W.E, LIGHTFOOT, E.N.: *Přenosové jevy*. Academia 1968

JANALÍK, J., ŠŤÁVA, P.: *Mechanika tekutin.* Skriptum. VŠB-TU Ostrava 2002

DRÁBKOVÁ, S., KOZUBKOVÁ, M.: *Cvičení z Mechaniky tekutin*. Sbírka příkladů. VŠB-TU Ostrava 2004

ŠOB, F.: *Hydromechanika.* Skriptum. VUT Brno 2002

JEŽEK, J.,VÁRADIOVÁ, B.: *Mechanika tekutin pro pětileté obory*. ČVUT Praha,1983, 1991

JEŽEK, J.: *Hydromechanika v příkladech*. ČVUT Praha, 1975, 1988

MAŠTOVSKÝ, O.: *Hydromechanika.* SNTL Praha 1956, 1963

NOSKIEVIČ, J. A KOL.: *Mechanika tekutin.* SNTL/ALFA Praha 1990

NOŽIČKA, J.: *Mechanika a termodynamika*. ČVUT, Praha 1991

SMETANA, J.: *Hydraulika, 1. a 2. díl.* N ČSAV Praha, 1957

v angličtině

FOX, R.W., MC DONALD, A.T.: *Introduction to Fluid Mechanics,* J. Wiley & sons, New York, 1994

RODI, W.; FUEYO, N. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 5.* Oxford. Elsevier Science Ltd. Oxford, 2002.

STREETER, V.L*.: Fluid Mechanics*, Mc Graw-Hill, New York, 1971

WHITE, F.M.: *Fluid Mechanics*, Mc Graw-Hill, New York, 1986

v němčině

ALBRING, W.: *Angewandte Strömungslehre, Steinkopf.* Dresden 1961, 1966, 1970

PRANDTL, L., OSWATITSCH, K, WIEGHARDT, K.: *Fuhrer durch die Strömungslehre Vieweg*. Braunschweig, 1969

SPURK, J.H.: *Strömungslehre, Springer,* Berlin 1989

v ruštině

HINZE, J.O.: *Turbulentnosť* (překlad z angličtiny). Moskva, 1963

KOČIN, N.E., KIBEL, I.A, ROZE, N.V.: *Teoretičeskaja gidromechanika.* Izd. tech.-teor. lit. Moskva, 1948

LOJCJANSKIJ, L.G.: *Mechanika židkosti i gaza.* Moskva, Nauka 1987

v polštině

GRYBOS, R.: *Postavy mechaniky plynow*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998

19. Přehled použitých označení

Označení	Jednotka	Význam
A	J	práce
C	$m^{1/2}. s^{-1}$	Chézyho součinitel
E	$N . m^{-2}$	modul objemové pružnosti v tahu
E	J	energie
F	$N = kg . m . s^{-2}$	síla
F_o	N	objemová síla (= F_m)
F_p	N	tlaková síla – plošná síla
F_s	N	setrvačná síla
F_t	N	tečná síla, třecí síla
G	N	tíha (= F_g)
H	$kg . m . s^{-1}$	hybnost
H	m	tlaková výška
I	1	intenzita turbulence
J_x	m^4	moment setrvačnosti průřezu k ose x
J_{xy}	m^4	deviační moment průřezu
J_y	m^4	moment setrvačnosti průřezu k ose y
K	$N . m^{-2}$	modul objemové pružnosti tekutiny
M_y	m^3	statický moment plochy k ose y
P	W	výkon
Q	J	teplo
Q_m	$kg . s^{-1}$	hmotnostní průtok
Q_v	$m^3 . s^{-1}$	objemový průtok
R	m	poloměr
S	m^2	plocha
T	K	absolutní teplota
T	s	doba běhu vlny
U	$J . kg^{-1}$	potenciál vnějších sil
V	m^3	objem

W	J = N . m	práce
Y	J . kg $^{-1}$	měrná energie
Y_d	J . kg $^{-1}$	skutečná měrná energie čerpadla
Y_t	J . kg $^{-1}$	teoretická měrná energie čerpadla
a	m . s $^{-2}$	zrychlení
a	m . s $^{-1}$	rychlost zvuku
c	m . s $^{-1}$	absolutní rychlost
c_x	1	součinitel odporu
d	m	průměr
d_h	m	hydraulický průměr
e	J . kg $^{-1}$	měrná energie
e_z	J . kg $^{-1}$	ztrátová měrná energie (= e_r = Y_z)
g	m . s $^{-2}$	tíhové zrychlení
h	m	výška, svislá vzdálenost, hloubka
h_z	m	ztrátová výška
i	Pa.m^{-1}	spád tlaku
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	1	jednotkové vektory
k	m	absolutní drsnost stěny
l	m	směšovací délka
l	m	délka, vzdálenost
l_e	m	ekvivalentní délka potrubí
m	kg	hmotnost
n	1	index toku
p	Pa = N . m $^{-2}$	tlak, hydrostatický tlak
p_c	Pa	celkový tlak
p_d	Pa	dynamický tlak
p_s	Pa	statický tlak
p_z	Pa	tlaková ztráta
q	J . kg $^{-1}$	teplo sdělené 1 kg látky
r	J . kg $^{-1}$. K $^{-1}$	měrná plynová konstanta
r	m	poloměr
r_h	m	hydraulický poloměr
s	m	dráha

t	°C	teplota
t	s	čas
t_z	s	doba uzavírání armatury
u	m . s $^{-1}$	unášivá, obvodová rychlost
v	m . s $^{-1}$	rychlost, relativní rychlost
v	m ^{3} . kg $^{-1}$	měrný objem
v_{max}	m . s $^{-1}$	maximální rychlost
v_s	m . s $^{-1}$	střední rychlost z průtoku
v^*	m. s^{-1}	třecí rychlost
w	m . s $^{-1}$	relativní rychlost
x, y, z	m	souřadnice
α	rad	úhel, směrový úhel
β	rad	úhel, směrový úhel
β	K $^{-1}$	součinitel teplotní objemové roztažnosti
γ	rad	úhel, směrový úhel
γ	N . m $^{-3}$	měrná tíha
δ	m	tloušťka mezní vrstvy
δ	m ^{2} . N $^{-1}$	součinitel stlačitelnosti
ε	rad . s $^{-1}$	úhlová deformace
ε	1	součinitel kontrakce proud
ε	1	relativní drsnost stěny trubky
ζ	1	ztrátový součinitel
η	Pa . s	dynamická viskozita
η_c	1	celková účinnost čerpadla
η_h	1	hydraulická účinnost čerpadla
η_m	1	mechanická účinnost čerpadla
η_v	1	objemová účinnost čerpadla
κ	1	součinitel (vliv pružnosti potrubí)
κ	1	izoentropický exponent
λ	1	součinitel tření
μ	1	výtokový součinitel
μ_t	Pa.s	vírová, zdánlivá viskozita
ν	m ^{2} . s $^{-1}$	kinematická viskozita
π	1	bezrozměrový parametr

ρ	kg . m $^{-3}$	hustota (měrná hmotnost)
σ	Pa	normálové napětí
σ	N . m $^{-1}$	povrchové napětí
τ	Pa, N . m $^{-2}$	tečné (smykové napětí)
τ_p	Pa, N . m $^{-2}$	počáteční smykové napětí
φ	rad	úhel
φ	1	rychlostní součinitel
ω	s $^{-1}$	úhlová rychlost

Bezrozměrná čísla:

Eu - Eulerovo
Fr - Froudovo
Ma - Machovo
Ne - Newtonovo
Re - Reynoldsovo
Sh - Strouhalovo
We - Weberovo

Poznámka:

- střední hodnoty značeny pruhem
- fluktuační hodnoty značeny čárkou
- vektory značeny se šipkou