FILOZOFIA
Roč. 67, 2012, č. 6

KANTOVSKÉ MOTIVY PROSTORU V GAUSSOVĚ DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII*

MARIE BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ, Katedra filosofie FF ZČU, Plzeň & Mezioborové aktivity NTC ZČU, Plzeň, ČR

BENEDIKTOVÁ VĚTROVCOVÁ, M.: The Kantian Motives of Space in Gauss' Differential Geometry
FILOZOFIA 67, 2012, No 6, p. 476

The aim of this contribution is to show the Kantian concept of space as a hidden presupposition of Gauss' geometrical treatises. First, the introduction of mathematization, origins of mathematics and geometry is depicted on the philosophical background of Husserl's phenomenology as one possible interpretation of space. Further, Kant's ideas on mathematics and space are summarized. The motivations of Gauss' differential geometry exemplify the revolution in mathematics in 19th century. In conclusion Kantian motives of space in Gauss' differential geometry as the intrinsic geometry of a curved surface are shown.

Keywords: Philosophy of mathematics – History of mathematics – Platonism – Differential geometry – Ontology of space – I. Kant – C. F. Gauss

Cílem příspěvku je poukázat na kantovské pojetí prostoru jako skrytý předpoklad Gaussových geometrických pojednání. K tomu bude nejprve představen proces matematizace, povstání matematiky a geometrie na pozadí Husserlovy fenomenologie jako jeden z možných výkladů prostoru. Text dále shrne Kantovy myšlenky o matematice a prostoru. Motivace pojetí Gaussovy diferenciální geometrie exemplifikuje revoluci v matematice 19. století. To vše směřuje k tomu, aby na závěr přišlo poukázání na kantovské motivy prostoru v Gaussově diferenciální geometrii jakožto vnitřní geometrii křivé plochy.

Úvodní metodologická poznámka. Z historického pohledu, z pohledu vnějších dějin vědy, se matematika od filosofie odděluje zároveň s novověkou přírodovědou. Všechna starší matematická pojednání tedy nemají nutně jen matematickou povahu, mohou mít také rysy filosofické. Proto zastávám pozici pro čtení starých matematických textů jakožto komplexních textů, které mají filosofickou (u nejstarších i náboženskou) povahu,[1] aby

* Za cenné postřehy a náměty bych chtěla poděkovat Jiřímu Fialovi, Ladislavu Kvaszovi a Petru Vopěnkovi.

[1] V tomto následuji Karla R. Poppera, který v *Conjuctures and Refutations* ([24], 116 – 124) dokládá kosmologickou povahu Eukleidových *Základů*. Popper hledá *záměr*, se kterým a proč byly *Základy* psané. Nachází k tomu Platónův dialog *Timaios*, který je aritmeticko-geometrickým modelem světa a Eukleidova geometrie je instrumentálním prostředkem k teorii tohoto světa (a nikoli pouhou čistou geo-

tak bylo možné objevovat vnitřní dějiny matematiky.[2] To vyžaduje hledání přímých či skrytých filosofických předpokladů k příslušným matematickým koncepcím – každé (i matematické) vysvětlení je vysvětlením v nějaké dané (byť skryté) teorii. U novověkých matematických textů tak stojíme před výzvou, zda i čistě matematický text má (příp. jaké má) metafyzické přesahy. Přijetí této výzvy je pro mne důvodem, proč se pokusit interpretovat Gaussovu geometrii (tj. čistě matematické texty) na pozadí kantovských motivů prostoru.

Matematizace a matematika. Ve filosofii matematiky se přikloním k tradici epistemologického platonismu. Na proces poznávání jevů pak lze nahlížet skrz matematizaci a idealizaci přírody a/nebo zkoumání ideálních jsoucen, která jsou nám skryta za rozmanitostí jednotlivin. Podle Husserla jsou jevy tím, co se nám ve zkušenosti, v názoru dává: „Každý originálně dávající názor je zdrojem oprávnění pro poznání a vše, co se nám v „intuici" originálně nabízí (tak říkajíc ve své tělesné skutečnosti), je třeba brát jednoduše tak, jak se to dává, ale rovněž jen v mezích, v nichž se to zde dává" ([17], 56).

Matematická jsoucna pak z těchto jevů procesem *matematizace* povstávají, přičemž mezi světem jevů a světem matematických objektů je vzájemná (ne nutně jednoznačná) korespondence.[3] Matematika jakožto odvětví se už nezabývá vztahy mezi jevy, ale přímo těmito ideálními jsoucny.

Z pohledu filosofie matematiky je *matematický platonismus* filosofické pojetí, v němž je svět matematických objektů odvěký, neměnný, s trvalou existencí, a přesto reálný. Protože jsou vztahy mezi matematickými objekty nezpochybnitelné, jsou mimo fyzikální čas a prostor.

K tomu je potřeba připojit několik poznámek, protože platonismus ve filosofii matematiky lze uchopit z různých stran.[4] Matematický platonismus vychází z nepochybnitelnosti matematických vztahů, která nutně implikuje existenci a trvalou neměnnost matematických entit. Podle Davise a Hershe „platonismus pokládá matematické objekty

---

metrií). Z tohoto pohledu jsou *Základy* systematickým dovyřešením Platónovy kosmologie, která se zakládá v matematickém rozvrhu. „[Platón] pochopil, že k popisu a vysvětlení světa je nutná nová matematická metoda. A tedy doporučil rozvíjet samostatnou geometrickou metodu" ([24], 116). Metoda je pak podána v Eukleidových *Základech*. Tím Popper navazuje na tradici Proklových komentářů *Základů* ([25], 71, 2 – 5). Podobně je potřeba sledovat a odkrývat záměry i ostatních (pouze) matematických děl.

[2] Rozlišení vnitřních a vnějších dějin vědy držím ve smyslu, jakým o nich často mluví Jiří Fiala.

[3] Existují totiž natolik abstraktní matematické objekty, jejichž interpretace ve světě jevů, tedy interpretace ve *fysis*, není možná. A nemusí se jednat jen o vysoce abstraktní objekty. Ani konečná veliká přirozená čísla, jako je $10^{10^{10}}$, nemají ve světě jevů svou interpretaci (např. počet molekul, ba ani všech kombinací všech subatomárních částic (míněno jejich instancí) v celém aktuálním vesmíru). Na druhou stranu zde máme epistemologickou bariéru: s ohledem na konečnost našeho poznání a konečnost aktuálního vesmíru není možné zmatematizovat (v potenci) všechny (stále se proměňující) jevy. O vztahu světa matematiky a přirozeného světa viz např. [26].

[4] Uvedu zde jen krátké exposé, přičemž vycházím ze souhrnu ([26], 241 – 242). Více viz např. ([6], 318 – 330) oproti ([23], 96), nebo též [20].

za reálné. Jejich existence je objektivní fakt, zcela nezávislý na našich znalostech o nich.“[5] Vedle tohoto přístupu se však matematici rozlišují z epistemologického hlediska, zda matematické entity objevují (platonici) anebo vynalézají, konstruují (formalisté). K tomu se nejčastěji uvádí umírněnější platonistická proposice Rogera Penrose:[6] „V matematice jsou věci, pro které je *objev* mnohem vhodnější pojmenování než *vynález*. […] Na skutečné matematické objevy se díváme jako na větší výkony či aspirace, než by byly pouhé vynálezy. […] Nemohu se ubránit pocitu, že v matematice je důvod pro víru v jistý druh éterické věčné existence přinejmenším těch hlubších matematických pojmů o dost silnější než v jiných oborech.“

Samostatnou otázkou oprávněnosti a udržitelnosti platonismu otevírají Gödelovy věty o neúplnosti, ale to už je pohled filosofie matematiky 20. století, který není plausibilní při zkoumání kantovských motivů na Gaussovu matematiku.

Matematika se od novověku zabývá kvantitou, strukturou, prostorem a změnou, a to v příslušných základních matematických disciplínách – aritmetice, algebře, geometrii a matematické analýze. S ohledem na to, že se dále zaměřím na metafyziku diferenciální geometrie Carla Friedricha Gausse, je nutno podotknout, že do všech těchto oblastí Gauss radikálně, revolučně přispěl tak, že na základě jeho výsledků se příslušná disciplína stává moderní (a dodnes se takto téměř beze změny na vysokých školách přednáší).

Geometrie jako matematizace prostoru. Geometrie pro starověk znamenala nauku o čistých (geometrických) tvarech a jejich vztazích. Podobně jako Platónova ontologie zkoumá *logos* mezi idejemi, antická geometrie zkoumá *logos* geometrických entit. Eukleidovy *Základy* pojímají matematické ideality jako nemetrizovatelné geometrické objekty. Zkoumají pouze jejich vztahy (a to jak v rozlehlosti, tak i v rozprostraněnosti).[7]

K tematizování a matematizaci prostoru dochází až s nástupem novověké přírodovědy. „Idealizace prostoročasové formy byla známa již ve starověku a přirozeně i možnost použití idealizované (čisté) matematiky na empirii, tedy při pojetí empirických obrazců jako „ideálních“ obrazců (v hrubém přiblížení). Novověk přináší v čistě matematické sféře matematizaci. […]“ ([18], 366). Pro Husserla je matematizace koncipována jako univerzální exaktní kauzalita, která se realizuje matematizací prostoru, matematizací prostoročasovosti jako celku a matematizací prostoročasovosti naplněné trvalými realitami skrz jejich vlastnosti (a to jak primární – reálný pohyb a deformace, tak nepřímou matematizací ostatních kvalit). Pod tíhou tohoto procesu je už existence čistých geometrických objektů podmíněna (a zdeformována) koexistencí prostoru jakožto jsoucna, do něhož jsou tyto objekty vnořeny.

Nakolik je toto Husserlovo vymezení matematického pojetí prostoru ovlivněno no-

---

[5] Viz ([6], 318), cit. podle ([26], 241).

[6] Viz ([23], 96), cit. podle ([26], 241 – 242).

[7] Mohli bychom říci, že Eukleides umisťuje své geometrické objekty do roviny či do prostoru a řeší vztahy mezi nimi. Ale při pročítání *Základů* tento předpoklad vnoření do vnějšího prostoru nenacházím. Rovinnost a prostorovost jsou až berličky novověkého čtení eukleidovského prostoru.

vým (ať už topologickým či algebraickým anebo jen neeukleidovským) vnímáním geometrie, nebudu zde rozebírat. Namísto toho se pokusím poukázat na podhoubí, které stálo na prahu revoluce v geometrii na začátku 19. století.[8] Nejdříve ovšem poukážu na základní Kantovy myšlenky o povaze matematiky a prostoru.

Matematika a prostor u Immanuela Kanta. Kantova filosofie matematiky byla nesčetněkrát interpretována v různých filosofických směrech. Protože cílem je poukázat na čtení Gausse skrz Kanta, pokusím se shrnout Kantovu matematiku a prostor z *Kritiky čistého rozumu*.[9] K tomu je nutno připojit několik poznámek: Kant rozvrhuje tento spis jako traktát o metodě vědy, kterým se pokouší po vzoru geometrů a přírodovědců provést revoluci v metodě metafyziky. Syntetickou metodou zkoumá, zda je metafyzika vůbec možná, a vychází přitom z „našich představ o prostoru a čase a z elementárních pojmů rozvažování" ([19], B XXII). Prostor (jako názor) je tedy ústřední pojem pro celou kantovskou epistemologii.

Matematika společně s fyzikou je druh teoretického, rozumového poznání. Objekty matematiky se mají přitom určovat zcela a priori.

Základní Kantova teze: „Matematické soudy jsou všechny syntetické" ([19], B 14). To, že jsou matematické soudy apriorní, plyne z nutnosti, kterou nelze získat ze zkušenosti. Syntetičnost matematických soudů pak Kant dokládá názorem, a to jak geometrickým, tak i aritmetickým.[10] Analytické zásady (tj. logické zákony), které geometrie předpokládá, jsou identity, nikoli principy. Přestože jejich platnost se zakládá jen na pojmech, v matematice jsou připouštěny jen proto, že je lze znázornit ([19], B 17).

Dále: „Přírodověda (physica) v sobě obsahuje syntetické soudy a priori jako principy" ([19], B 17). To jest principy přírodovědy mají matematickou povahu.

A završující: „V metafyzice mají být obsaženy syntetické soudy a priori." Vedle rozboru pojmů musíme své poznání (apriorně) rozšiřovat.

Protože matematické soudy jsou apriorní a zároveň názorné, může matematika konstruovat. Konstruovat ano, ale v čem? V prostoru. V prostoru, kde je určitelný tvar, velikost nebo vzájemný vztah všech předmětností existujících mimo nás. Co je ale prostor? Je to skutečné jsoucno? Kantův metafyzický výklad pojmu prostor lze shrnout v následujících tvrzeních:

1. „Prostor není empirický pojem, který by byl odvozen z vnějších zkušeností" ([19], B 38). Pro Kanta je prostor založen v možnosti vnějších vztahů pojmů, vět k „něčemu vnějšímu".

---

[8] Pojem „revoluce v matematice" přejímám z kuhnovské tradice – viz ([13]; [15]; [1]; [4]; [28]); srov. [21].

[9] Vede mne k tomu také pateré Gaussovo pročítání *Kritiky čistého rozumu*, na závěr něhož údajně mladý Gauss podotknul, že se mu konečně rozsvítilo. O Gaussových postřezích ke Kantovi viz např. ([5], 298 – 317).

[10] Kantovy příklady jsou „7+5=12" a „Přímka je nejkratší spojnicí mezi dvěma body."

2. „Prostor je nutnou představou a priori, která je základem všech vnějších názorů“ ([19], A 24). Apriorní nutností prostoru je založena jistota všech základních geometrických vět a možnost jejich konstrukce a priori.

3. „Prostor není diskursivním nebo, jak se říká, obecným pojmem vztahů mezi věcmi vůbec, nýbrž je to čistý názor“ ([19], B 39). Pro Kanta v kritickém období je prostor je jen jeden a je jednotný.

4. „Prostor si představujeme jako nekonečnou danou velikost“ ([19], A 25). Nekonečnost prostoru je nevyhnutelná, neboť všechny jeho (nekonečné) části existují zároveň.

Prostor je apriorní názor, pouhý názor, který Kantova filosofie matematiky bere jako svůj základ. Podobně je na tom i čas. S ohledem na nutnost názoru lze v souladu s *Kritikou čistého rozumu* konstatovat:[11] kantovský prostor má právě tři rozměry,[12] je eukleidovský[13] a je prázdný. Prostor je „pouhá forma všech jevů vnějších smyslů“, forma sensibility a zkušenost je dána skrz apriorní formy názoru.

V transcendentálním výkladu pojmu prostoru Kant vysvětlí úlohu geometrie:

„Geometrie je věda, která určuje vlastnosti prostoru synteticky, a přesto a priori“ ([19], B 40).

Jde o vědu, která zprostředkovává vlastnosti prostoru.

Motivace Gaussovy geometrie. Gaussovi životopisci, Dunnington [5] i Bühler [2], uvádí, že Gauss našel inspiraci pro geometrii v praktickém geodetickém proměřování Hannoverského království. To vyžadovalo vypracování nového teoretického podkladu pro měření na zakřivených. Metoda byla celkem jednoduchá: danou plochu matematizovat, jako matematickou idealitu triangulovat (pokrýt sítí disjunktních sousedících trojúhelníků) a její obsah spočítat jako součet obsahů pokrývajících trojúhelníků.

Vzhledem k tomu, že se jednalo o fyzikální měření,[14] vedle geometrického teoretického podkladu (čisté, matematické geometrie) musel Gauss vypracovat i další oblasti aplikované (užité, inženýrské) matematiky – nejužitečnější a dodnes nejpoužívanější je z nich metoda nejmenších čtverců.[15] Tyto metody nevyhlazovaly nepřesnosti procesu

---

[11] Díky podmínce názornosti padlo Kantovo pojetí prostoru ve chvíli, kdy byly objeveny neeukleidovské geometrie. Revoluce objevu neeukleidovských geometrií si na oltář tak zároveň vyžádala matematický styl, který stál na názoru, ačkoli Hermann von Helmholtz jako první roku 1870 poukázal na to, že neeukleidovská geometrie je v jisté míře přijatelná i názorem. Srov. ([8], 189).

[12] V otázce počtu dimenzí prostoru je Kant místy umírněnější: „Dalo by se tedy jen říci, že pokud jsme až dosud zjistili, nebyl nalezen prostor, který by měl víc než tři rozměry“ ([19], A 24). Věty geometrie sice pojednávají o prostoru s třemi rozměry, to ale nevylučuje možnost, že prostor může mít více rozměrů.

[13] Ke spojování eukleidovského prostoru s Kantovou filosofií a k úskalím Kantova pojetí prostoru viz např. ([3], 181 – 182) a následně ([28], 174; [4], 218; [15], 229). V současné době se však toto spojení, obzvláště ve spojení s Gaussem, rozmělňuje a rehabilituje tak Kantovu filosofii matematiky ([9] a [14], 221 – 222).

[14] Ve smyslu střetu teoretického podkladu s *fysis*.

[15] Gauss je prvním, kdo se systematicky zabývá teorií chyb, pokládá základy statistiky a především numerické matematiky založené na propojení algebry, geometrie a analýzy.

Revolučnost Gaussovy matematiky je ale i v novém ontologickém pojetí důkazu – vedle milníků, matematizace, tj. vytvoření ideální (zatím matematicky neuchopitelné) plochy – geoidu, ale nepřesnosti v matematickém co nejpřesnějším přiblížení se jednodušší ideality (modelu – „trojúhelníkové“ plochy) k oné ideální ploše, kterou jsme získali procesem matematizace krajiny (např. Hannoverského království). Z geometrického pohledu šlo o obecné vypracování modelu eliptického sféroidu, který bude co nejvěrnějším obrazem geoidu. Dochází tak k epistemologickému posunu v geometrii – nehledat obecné řešení úlohy, ale aproximaci řešení jako nejlepší možné řešení.

„Zobrazit první plochu na druhou znamená stanovit zákon, podle kterého každému bodu první plochy bude odpovídat určitý bod druhé plochy. […] Pokud zobrazení bude dostatečně splňovat jisté podmínky, nemohou být tyto funkce libovolně daleko.“[16] Zobrazovaná a původní plocha by si měly být na (nekonečně) malých kouscích rovny.

K tomu Gauss systematicky rozpracoval diferenciální geometrii jako teorii křivých ploch na základě infinitesimálního pojetí veličin a vnitřní geometrie. Co se týče matematických technik, tak použil kartesiánských algebraických prostředků a teorii komplexních funkcí – té se věnoval ve svých předchozích pracech. Pro doplnění: články, v nichž Gauss o diferenciální geometrii pojednává, jsou především *Allgemeine Auflärnung der Aufgabe…* [10] a *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [12].

Diferenciální geometrie jako vnitřní geometrie. „Povaha křivé plochy je určená rovnicí souřadnic x , y , z pro každý bod této plochy. Důsledkem této rovnice je, že každou z těchto tří proměnných lze uvažovat jako funkci zbylých dvou. Obecnější je zavést dvě nové proměnné (veličiny) t , u a reprezentovat každou proměnnou x , y , z jako funkci t a u , což znamená, aspoň obecně řečeno, že určité hodnoty t a u pokaždé příslušejí určitým bodům plochy a naopak.“[17]

Tím, že souřadnice x , y , z jsou kartézské souřadnice eukleidovského prostoru, do kterého je daná plocha vnořena, je na jednu stranu vidět Gaussovo držení kantovského prostoru, na straně druhé je jasné, že o ploše uvažuje jako o svébytném geometrickém prostoru, který je do třírozměrného vnořen a na němž provádí vlastní geometrii v proměnných t a u .

Ústředním pojmem pro Gaussovo pojetí této oblasti geometrie je křivost (či přesněji míra křivosti). V době před Gaussem se *křivost plochy* charakterizovala pomocí křivostí k_1 a k_2 dvou ortogonálních křivek v daném bodě na této ploše. Tyto křivky vzniknou

---

kterými byly geometrické konstrukce, aritmeticko-algoritmické výpočty, algebraické manipulace a $\varepsilon - \delta$ analýza, přichází s existenčním důkazem – dokazuje existenci analytického vyjádření pro sestrojení vepsaného pravidelného sedmnáctiúhelníku.

Gauss přitom nejspíš pracoval s distinkcí mezi obecnou a aplikovanou matematikou a geometrií v tom smyslu, že aplikovaná geometrie je chápána jako teorie prostoru vyplněného *fysis* – k tomu viz např. ([22], 236 –240) nebo ([3], 181 – 183).

[16] Viz ([10], 193 – 194).

[17] Viz ([10], 193).

jako průnik plochy s rovinami, obsahující normálu plochy v tomto bodě. *Střední křivost* plochy (v daném bodě) je pak vyjádřena jako aritmetický průměr křivostí křivek $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ a nově zavedená *totální* (též integrální, dnes nazývaná Gaussova) *křivost* jako jejich součin, tj. kvadrát jejich geometrického průměru $K = k_1 k_2$. Pro rovinné plochy tak máme nulové jak křivosti ortogonálních křivek, tak i střední a totální křivost. Ovšem např. válcové plochy, které jsou rozvinutelné do roviny, mají totální křivost nulovou, ale střední křivost nenulovou. Rozvinutelnost plochy na plochu shrnuje i jeho slavný výsledek, tradičně nazývaný Theorema egregium:[18] „Pokud je křivá plocha rozvinutelná do jiné křivé plochy, pak míra křivosti v každém bodě zůstává neměnná. A tedy je zjevné, že každá konečná část dané křivé plochy bude mít po rozvinutí do druhé plochy stejnou totální křivost."

Povahu plochy jako takové lze zjistit jen vnitřními prostředky (tj. z vlastních křivočarých souřadnic této plochy),[19] ačkoli k ukotvení takovýchto pojmů (křivočaré souřadnice, totální křivost, křivost křivky, …) je nutné uvažovat vnější prostor.

A ještě jeden postřeh: Z hlediska nekonečně malých ploch je nutné podotknout, že každou tuto plochu (kousek) můžeme brát jako (lokální) eukleidovský prostor,[20] tj. prostor, v němž součet úhlů v trojúhelníku (na ploše) je roven dvěma pravým. Co se děje vně každého takovéhoto ideálního eukleidovského prostoru, nazíráním na celek, není možné a priori určit. Gauss roku 1830 Besselovi píše:[21] „[…] zatímco číslo je čistě výtvor naší mysli, prostor má realitu i mimo naši mysl, které nelze a priori předepsat její zákony."

Závěr. Pokusila jsem se ukázat, že Gauss stojí na hranici stínu kantovského prostoru. Na jednu stranu jeho geometrie křivých ploch stále zůstává ještě názorná, i když k jejím důkazům používá čistě výpočtové prostředky. Na straně druhé v jeho práci z diferenciální geometrie spatřuji odklon od tradičního kantovského pojetí prostoru jako matematické ideality, exemplifikovaného třírozměrným, nekonečným, prázdným eukleidovským prostorem.

[18] „Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in sinalis punctis invarianta manet. Manifesto quoque quaevis pars finita superficiei curie post exaplicationem in aliam superficiem eandem curvaturam integram retinebit" ([12], 237).

Tato stěžejní věta diferenciální geometrie má mnoho jiných obdob. Nejčastější je, že Gaussovu křivost plochy v daném bodě lze vyjádřit pouze pomocí metrického tenzoru a prvních a druhých derivací jeho složek, anebo jinak: míra křivosti plochy závisí pouze na kvadrátu lineárních členů příslušné diferenciální formy a jejich derivacích.

[19] V geodézii jim budou odpovídat zeměpisná délka a šířka.

[20] Nekonečně malou plochu získáme jako rovnoběžník, jehož strany dostaneme z nekonečně malé změny křivočarých souřadnic.

[21] Nr. 166, Gauss an Bessel, Göttingen 9. April 1830, viz ([11], 497).

LITERATURA

[1] BOI, L.: The „revolution“ in the geometrical vision of space in the nineteenth century, and the hermeneutical epistemology of mathematics. In: Gilles, D.: *Revolutions in Mathematics,* 1992, pp. 183 – 208.

[2] BÜHLER, W. K.: *Gauss. A Bibliographical Study*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1981.

[3] CARNAP, R.: *Philosophical Foundations of Physics*. New York: Basic Books 1966.

[4] DUNMORE, C.: Meta-level revolutions in mathematics. In: Gilles, D.: *Revolutions in athematics,* 1992, pp. 209 – 225.

[5] DUNNINGTON, G. W.: *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. New York: Mathematical Association of America 2004.

[6] DAVIS, P. J. – HERSH, R.: *The Mathematical Experience*. London: Penguin Books 1981.

[7] EUKLIDES: *Základy*. Přel. F. Servít. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků 1907.

[8] FIALA, J.: Henri Poincaré a filosofie vědy. In: Poincaré, H.: *Číslo – prostor – čas*, OPS, Kanina 2010, s. 179 – 214.

[9] FRIEDMAN, M.: *Kant and the Exact Science*. Cambridge, MA: Harvard University Press 1992.

[10] GAUSS, C. F.: Allgemeine Auflärnung der Aufgabe die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so absubilden der die Abbildung dem Abgebildeten in der kleistern Teilen ähulich wird. In: Gauss, C. F.: *Werke,* Bd IV. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften 1873, S. 187 – 216.

[11] GAUSS, C. F. – BESSEL, F. W.: *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*. Leipzig: W. Engelmann 1880.

[12] GAUSS, C. F.: Disquisitiones generales circa superficies curvas. In: Gauss, C. F.: *Werke,* Bd IV. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften 1873, S. 217 – 258.

[13] GILLIES, D. (ed.): *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press 1992.

[14] GRAY, J.: *Worlds Out of Nothing*. London: Springer-Verlag 2007.

[15] GRAY, J.: The nineteenth century revolution in mathematical ontology. In: Gilles, D.: *Revolutions in Mathematics*, 1992, pp. 226 – 248.

[16] GRAY, J.: Gauss and non-Euclidean geometry. In: Prékopa, A. – Molnár, E.: *Non-Euclidean Geometries*. New York: Springer Verlag 2006, pp. 61 – 80.

[17] HUSSERL, E.: *Ideje k čisté fenomenologii a fenomenologické filosofii*, sv. 1. Přel. M. Rettová, P. Urban. Praha: Oikoymenh 2004.

[18] HUSSERL, E.: Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie. In: *Husserliana*, sv. VI. Den Haag: Martinus Nijhoff 1954; česky: *Krize evropských věd a transcendentální fenomenologie*. Přel. O. Kuba. Praha: Academia 1972.

[19] KANT, I.: *Kritik der reinen Vernuft*. Berlin: Georg Reimer 1903 – 1904; česky: *Kritika čistého rozumu*. Přel. J. Loužil. Praha: Oikoymenh 2001.

[20] KOLMAN, V.: *Filosofie čísla*. Praha: Filosofia 2008.

[21] KVASZ, L.: *Patterns of Change*. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser 2008.

[22] KVASZ, L.: Hintikka a Friedman o Kantovej filozofii geometrie. In: Sousedík, P.: *Jazyk-logika-věda*. Praha: FILOSOFIA 2005, s. 233 – 251.

[23] PENROSE, R.: The Emperor's New Mind. Oxford: Oxford University Press 1989.

[24] POPPER, K. R.: *Conjectures and Refutations*. New York-London: Basic Books 1962.

[25] PROKLOS: *Procli diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*. Lipsiae: B. G. Teubner 1873.

[26] VELICKÝ, B. – TRLIFAJOVÁ, K. – KOUBA, P. et al.: *Spor o přirozený svět*. Praha: Filosofia 2010.

[27] VOPĚNKA, P.: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Praha: Práh 2000.

[28] Zheng, Y.: Non-Euclidean geometry and revolutions in mathematics. In: Gilles, D.: *Revolutions in Mathematics,* 1992, pp. 169 – 182.

Práce vznikla za podpory grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky*, který je řešen na katedře filosofie FF ZČU.

Výše zmíněné pasáže jsem v příspěvku „Filosofické aspekty Gaussovy diferenciální geometrie" představila na konferenci „The Character of the Current Philosophy and its Methods" z cyklu Young Philosophy, která se uskutečnila ve dnech 2. a 3. března 2011 na půdě Filozofického ústavu SAV v Bratislavě. Tímto bych chtěla také poděkovat jejím pořadatelům za možnost vystoupení zde a setkání se s rozmanitými přístupy v nynější filosofii.

Vybrané části zazněly rovněž v rámci *Semináře z fenomenologie exaktních věd: Fyzikální a matematické revoluce 19. až 21. století*, pořádaném Mezioborovými aktivitami Výzkumného centra Nové technologie Západočeské university v Plzni. Tento seminář je součástí projektu OPVK ESF č. CZ.1.07/2.3.00/09.0070 *Mezioborový dialog jako podpora rozvoje vzdělanosti na vysokých školách, ve vědě, výzkumu a vývoji*. Tento projekt je spolufinancován z prostředků Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

Marie Benediktová Větrovcová
Katedra filosofie FF ZČU
Sedláčkova 19
306 14 Plzeň
Česká republika
e-mail: vetrovc5@kfi.zcu.cz
marie.benediktova@gmail.com

Mezioborové aktivity NTC ZČU
Husova 11
306 14 Plzeň
Česká republika