HYDROMECHANIKA

HYDRODYNAMIKA
základní rovnice a zákony

přednáška 3

Literatura :
Otakar Maštovský; HYDROMECHANIKA
Jaromír Noskijevič, MECHANIKA TEKUTIN
František Šob; HYDROMECHANIKA

3 Hydrodynamika

Úvod:
- Metody popisu kontinua
- Slovo úvodem
- Rozdělení proudění

- Základní pojmy - trajektorie, proudnice
- Trocha matematiky

Základní rovnice:
- Rovnice kontinuity
- Pohybové rovnice

Odvozené rovnice
- Bernoulliho rovnice
- Věta o změně hybnosti
- Síla na obtékané těleso

Konec

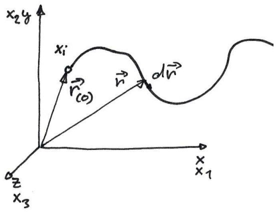
3 Hydrodynamika – metody popisu kontinua

Lagrangeova metoda popisu kontinua

$$\mathbf{r}_{(0)} = (a, b, c, t_{(0)}) \qquad \mathbf{r} = (a, b, c, t)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

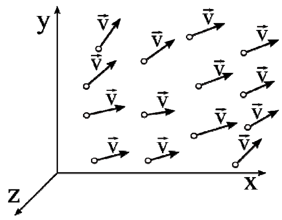


Eulerova metoda popisu kontinua

$$\mathbf{v} = (x, y, z, t)$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}(\mathbf{v}).\mathbf{v}$$

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$



Obsah

3 Hydrodynamika – Slovo úvodem

V hydrodynamice se již zabýváme kapalinou jejíž částice se vůči sobě navzájem pohybují.

Chceme-li něco zjistit o proudění kapaliny pak musíme určit následující veličiny.

- rychlost **v** [m.s^{-1}].
- Stavové veličiny kapaliny.

  tlak p[Pa]

  hustota r [kg.m^{-3}] (Pro nás konstanta, nebo barotrobní kapaliny)

  teplota T [K] (S teplotou nebudeme zpravidla počítat)

Rovnice, které máme k dispozici

Rovnice vyjadřující zákon zachování hmoty.

Pohybová rovnice.(Eulerova rovnice HD, Navier-Stokesova rovnice, Reynoldsova rovnice)

Odvozené rovnice. (Bernouliho rovnice, věta o změně hybnosti, atd.)

Obsah

3 Hydrodynamika – rozdělení proudění

Podle dimense

1D - jednorozměrné

2D – dvourozměrné, plošné.

3D – třírozměrné, prostorové.

Podle závislosti na čase

Stacionární

Nestacionární

Podle vlastností kapaliny - tekutiny

Podle závislosti na viskozitě : proudění neviskosní kapaliny
: proudění viskozní kapaliny
- newtonské kapaliny
- nenewtonské kapaliny

Podle stlačitelnosti : proudění nestlačitelné kapaliny
: proudění stlačitelné kapaliny

Obsah

3 Hydrodynamika – rozdělení proudění

Podle pohybu částic

Nevířivé = potenciální proudění

Vířivé proudění ideální kapaliny (není zde disipace energie)

Proudění skutečné kapaliny

- Laminární proudění
- Turbulentní proudění
- Přechodové proudění

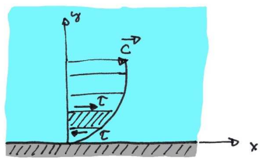
Obsah

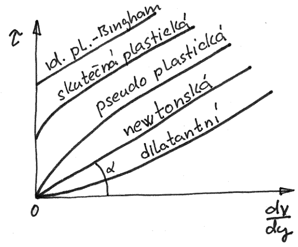
3 Hydrodynamika – proudění skutečných kapalin

Newtonův zákon.

Vlivem viskozity se v kapalině objeví tečné napětí τ

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$



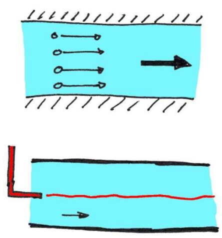


Obsah

3 Hydrodynamika – proudění skutečných kapalin

Laminární proudění

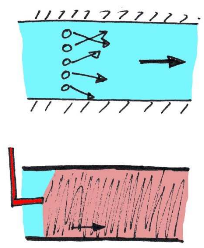
Částice se pohybují po vrstvách, ve směru středního proudu



$$Re < Re_{kr}$$

Turbulentní proudění

Částice se pohybují napříč středního proudu.



$$Re_{kr} < Re$$

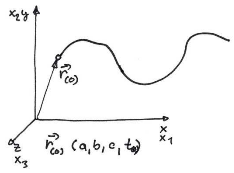
$$Re = \frac{v.d}{\nu}$$

Obsah

3 Hydrodynamika – základní pojmy

Trajektorie – je dráha částice.

$$\mathbf{r} = (a, b, c, t)$$

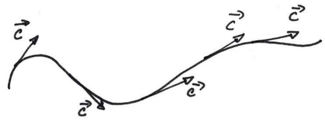


Proudnice – je křivka, myšlená čára, ke které jsou rychlosti tečné

$$\mathbf{v} = (x, y, z, t)$$

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = 0$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$



Obsah

3 Hydrodynamika – trocha matematiky

Gaus Ostrogradského věta

$$\int_V \left(\frac{dP(x,y,z)}{dx} + \frac{dQ(x,y,z)}{dy} + \frac{dR(x,y,z)}{dz} \right).dV = \int_S \left(P(x,y,z).n_x + Q(x,y,z).n_y + R(x,y,z).n_z \right) dS$$

$$P(x,y,z) = Q(x,y,z) = R(x,y,z) = f(x,y,z)$$

$$\int_V \left(\frac{df(x,y,z)}{dx} + \frac{df(x,y,z)}{dy} + \frac{df(x,y,z)}{dz} \right).dV = \int_S f(x,y,z).\vec{n} dS$$

Pro náš případ si pod uvedenými funkcemi můžeme představit složky rychlostí

$$v_x = P(x,y,z) \qquad v_y = Q(x,y,z) \qquad v_z = R(x,y,z)$$

$$\int_V \left(\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} \right).dV = \int_V \mathrm{div}\mathbf{v}.dV = \int_S \mathbf{v}.\mathbf{n}.dS$$

$$\int_V \frac{df(x,y,z)}{dx_i}.dV = \int_S f(x,y,z).n_i dS$$

Obsah

3 Hydrodynamika – zákon zachování hmoty

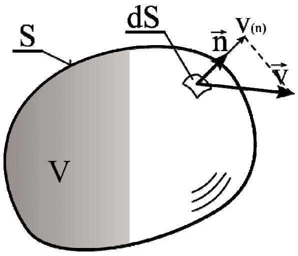
Zákon zachování hmoty je vyjádřen rovnicí kontinuity. Máme dvě možnosti vyjádření

I. Kontrolní objem

$$dQ_m = \rho \cdot \mathbf{v}.\mathbf{n} \cdot dS$$

$$\Delta Q_m = \int_S \rho \cdot \mathbf{v}.\mathbf{n} \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \mathrm{div}\mathbf{v} = 0$$



Odvození

II. Plovoucí objem

$$\frac{d}{dt}(\rho \cdot dV) = 0$$

Důkaz

Obsah

3 Hydrodynamika – zákon zachování hmoty

Odvození

$$\int_S \rho \cdot \mathbf{v}.\mathbf{n} \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho .dV$$

Na levou stranu použijeme GO větu

$$\int_V \left[\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z}\right] \cdot dV + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}.dV = 0$$

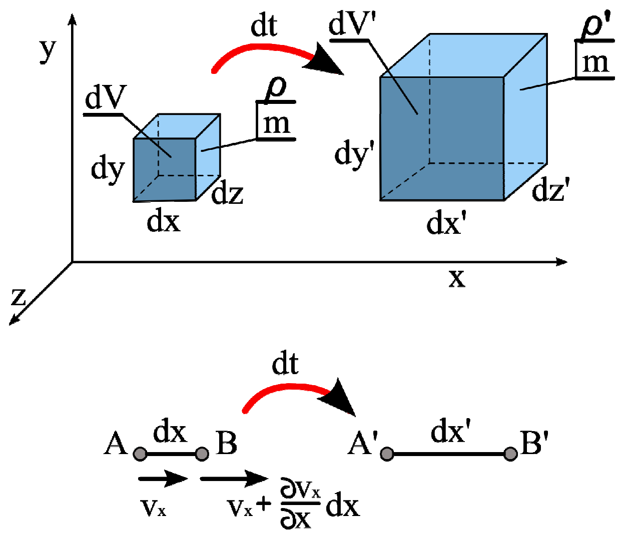
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \mathrm{div}\mathbf{v} = 0$$

Obsah

3 Hydrodynamika – důkaz



Zpět RK

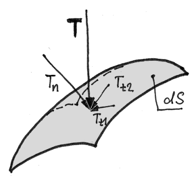
3 Hydrodynamika – Pohybová rovnice

Pohybová rovnice je sestavena na základě dynamické silové rovnováhy na makroskopickou částici. Využívá se d'Alambertova principu.

Síly působící na element kapaliny (makroskopickou částici)

Hmotnostní síly Jsou úměrné hmotnosti elementu. Např. tíhová síla, setrvačná síla.

Plošné síly Jsou úměrné ploše elementu.
Síla vyvolaná vektorem napětí



Pohybové rovnice v hydrodynamice

Eulerova rovnice hydrodynamiky. Pohybová rovnice ideální kapaliny. Jedná se o neviskósní nestlačitelnou kapalinu.

Navier Stokesova rovnice. Pohybová rovnice viskósní nestlačitelné kapaliny. Jedná se o pohybovou rovnici při laminárním proudění

Reynoldsova rovnice. Pohybová rovnice viskósní nestlačitelné kapaliny. Jedná se o pohybovou rovnici při turbulentním proudění.

Obsah

3 Hydrodynamika – Eulerova rovnice hydrodynamiky

Eulerova rovnice hydrodynamiky – pohybová rovnice ***ideální*** (neviskózní) kapaliny. Vyjadřu-je silovou rovnováhu na element kapaliny.

Vycházíme z Eulerovy rovnice hydrostatiky. S tím, že částice se již pohybuje. Využijeme d'Alambertova principu.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(f)} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{a}_{(f)} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathrm{grad}\mathbf{v}).\mathbf{v} = \mathbf{a}_{(f)} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p)}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Obsah

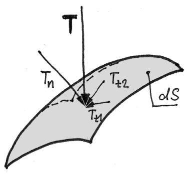
3 Hydrodynamika – Navier Stokesova rovnice

Navier Stokesova rovnice – pohybová rovnice ***viskózní, nestlačitelné*** kapaliny při laminárním proudění. Odvození je stejné jako v případě Eulerovy rovnice hydrostatiky a hydrodynamiky. Hlavní změna je v plošných silách.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = a_{(f)x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z.\partial z}\right)$$

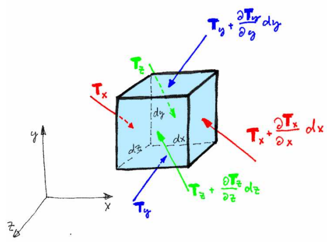
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z = a_{(f)y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z.\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z = a_{(f)z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z.\partial z}\right)$$



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}.\mathrm{grad}(\mathbf{v}) = \mathbf{a}_{(f)} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p) + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$



Odvození **Obsah**

3 Hydrodynamika – Navier Stokesova rovnice, odvození

Změna při psaní silové rovnováhy na element kapaliny je pouze v plošných silách. Úprava bude prováděna pouze pro plošné síly ostatní zůstává.

$$\mathbf{T}_x = \lfloor T_{xx},\quad T_{xy},\quad T_{xz} \rfloor = \lfloor p_x,\quad -\tau'_{xy},\quad -\tau'_{xz} \rfloor$$

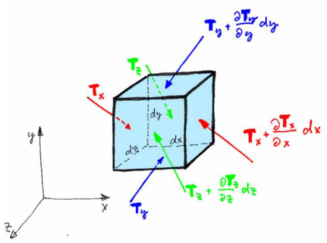
$$\mathbf{T}_y = \lfloor T_{yx},\quad T_{yy},\quad T_{yz} \rfloor = \lfloor -\tau'_{yx},\quad p_y,\quad -\tau'_{yz} \rfloor$$

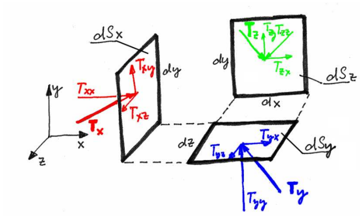
$$\mathbf{T}_z = \lfloor T_{zx},\quad T_{zy},\quad T_{zz} \rfloor = \lfloor -\tau'_{yx},\quad -\tau'_{zy},\quad p_z \rfloor$$

$$p_x = p - \tau'_{xx}$$

$$p_y = p - \tau'_{yy}$$

$$p_z = p - \tau'_{zz}$$





Zpět-NSR

3 Hydrodynamika – Navier Stokesova rovnice, odvození

Silová rovnováha na element kapaliny ve směru osy x:

$$a_x.\rho.dV = a_{(f)x}\rho.dV + T_{xx}dy.dz - \left(T_{xx} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x}dx\right)dy.dz +$$

$$+ T_{yx}dx.dz - \left(T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y}dy\right)dx.dz + T_{zx}dx.dy - \left(T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}dz\right)dx.dy$$

Po úpravě dostaneme:

$$a_x.\rho = a_{(f)x}\rho - \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z}\right)$$

Dosazením za jednotlivé složky vektoru plošných sil máme:

$$a_x = a_{(f)x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z}\right)$$

Zpět-NSR

3 Hydrodynamika – Navier Stokesova rovnice, odvození

Zobecněný Newtonův zákon (hypotéza):

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \qquad \tau'_{xx} = \lambda.\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$$

$$\tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad \tau'_{yy} = \lambda.\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)$$

$$\tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \qquad \tau'_{zz} = \lambda.\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\tau'_{ij} = \lambda.\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Zpět-NSR

3 Hydrodynamika – Navier Stokesova rovnice, odvození

Navier Stokesova rovnice

$$a_x = a_{(f)x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z.\partial z}\right) + \frac{\mu+\lambda}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$a_y = a_{(f)y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z.\partial z}\right) + \frac{\mu+\lambda}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$a_z = a_{(f)z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z.\partial z}\right) + \frac{\mu+\lambda}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$a_i = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j.\partial x_j} + \frac{\mu+\lambda}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)$$

Zpět-NSR

3 Hydrodynamika – Navier Stokesova rovnice, odvození

Pro nestlačitelnou kapalinu dostaneme:

$$a_x = a_{(f)x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z.\partial z}\right)$$

$$a_y = a_{(f)y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z.\partial z}\right)$$

$$a_z = a_{(f)z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x.\partial x} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y.\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z.\partial z}\right)$$

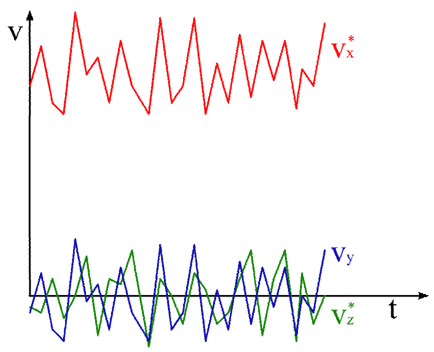
Zapsáno vektorově:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}(\mathbf{v}).\mathbf{v} = \mathbf{a}_{(f)} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p) + \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = a_{(f)i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j.\partial x_j}$$

Zpět-NSR

Hydrodynamics – Reynolds equation



Turbulentní proudění– okamžitou rychlost dělíme na dvě složky:
- Střední složka rychlosti
- Fluktuační složka rychlosti.

$$\vec{\mathbf{v}}^* = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}'$$

$\mathbf{v}^*$ Okamžitá rychlost

$\mathbf{v}$ Střední rychlost za časový interval Δt

$\mathbf{v}'$ Fluktuační složka okamžité rychlosti.

Střední hodnota rychlosti je vyjádřena:

$$\vec{v} = \overline{\vec{\mathbf{v}}^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \vec{\mathbf{v}}^* dt$$

Pro střední hodnotu fluktuační složky platí:

$$\overline{\vec{\mathbf{v}}'} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} \vec{\mathbf{v}}' dt = 0$$

Obsah

3 Hydrodynamika – Reynoldsova rovnice

Střední hodnoty součtů a součinů:

$$\overline{\mathbf{v}_1^* + \mathbf{v}_2^*} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$\overline{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2^*} = \overline{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2} + \overline{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}'_2} = \overline{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2}$$

$$\overline{\mathbf{v}_1^*.\mathbf{v}_2^*} = \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2 + \overline{\mathbf{v}'_1.\mathbf{v}'_2} \qquad \overline{\mathbf{v}'_1.\mathbf{v}'_2} \neq 0$$

Předpokládáme, že pro tlak také platí:

$$\overline{p^*} = \overline{p + p'} = p$$

Důkaz Obsah

3 Hydrodynamika – Reynoldsova rovnice

Okamžité hodnoty rychlostí a tlaků dosadíme do N-S rovnice a provedeme středování přes časový úsek Δt.

$$\overline{\frac{\partial v_x^*}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial v_x^*}{\partial x} v_x^*} + \overline{\frac{\partial v_x^*}{\partial y} v_y^*} + \overline{\frac{\partial v_x^*}{\partial z} v_z^*} = a_{(f)x} - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x}} + \frac{\mu}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x.\partial x}} + \overline{\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y.\partial y}} + \overline{\frac{\partial^2 v_x^*}{\partial z.\partial z}}\right)$$

$$\overline{\frac{\partial v_y^*}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial v_y^*}{\partial x} v_x^*} + \overline{\frac{\partial v_y^*}{\partial y} v_y^*} + \overline{\frac{\partial v_y^*}{\partial z} v_z^*} = a_{(f)y} - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial y}} + \frac{\mu}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x.\partial x}} + \overline{\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y.\partial y}} + \overline{\frac{\partial^2 v_y^*}{\partial z.\partial z}}\right)$$

$$\overline{\frac{\partial v_z^*}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial v_z^*}{\partial x} v_x^*} + \overline{\frac{\partial v_z^*}{\partial y} v_y^*} + \overline{\frac{\partial v_z^*}{\partial z} v_z^*} = a_{(f)z} - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial z}} + \frac{\mu}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial x.\partial x}} + \overline{\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial y.\partial y}} + \overline{\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z.\partial z}}\right)$$

Po provedení časového středování a využití rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu, pak dostáváme Reynoldsovu rovnici

Obsah

3 *Hydrodynamika – Reynoldsova rovnice*

Reynoldsovy rovnice:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z+\frac{\partial\left(\overline{v'_x v'_x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{v'_x v'_y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overline{v'_x v'_z}\right)}{\partial z}=$$

$$=a_{(f)x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x.\partial x}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y.\partial y}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z.\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}v_z+\frac{\partial\left(\overline{v'_y v'_x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{v'_y v'_y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overline{v'_y v'_z}\right)}{\partial z}=$$

$$=a_{(f)y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x.\partial x}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y.\partial y}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z.\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial v_z}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_z}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_z}{\partial z}v_z+\frac{\partial\left(\overline{v'_z v'_x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\overline{v'_z v'_y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\overline{v'_z v'_z}\right)}{\partial z}=$$

$$=a_{(f)z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x.\partial x}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y.\partial y}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z.\partial z}\right)$$

Obsah

3 *Hydrodynamika – Reynoldsova rovnice*

Reynoldsovy rovnice ESS:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j+\frac{\partial\left(\overline{v'_i v'_j}\right)}{\partial x_j}=a_{(f)i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j.\partial x_j}$$

Obsah

3 Hydrodynamika – časově středované hodnoty

Střední hodnoty součtů a součinů:

$$\overline{\mathbf{v}_1^* + \mathbf{v}_2^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2\right)dt = \frac{1}{\Delta t}\left(\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1 dt + \int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_1\, dt + \int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_2 dt + \int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_2\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1\int_0^{\Delta t}dt + 0 + \mathbf{v}_2\int_0^{\Delta t}dt + 0\right) = \frac{1}{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1\Delta t + \mathbf{v}_2\Delta t\right) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$\overline{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1.\left(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2\right)dt = \frac{1}{\Delta t}\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\int_0^{\Delta t}dt + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{v}_1\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_2\, dt = \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2$$

$$\overline{\mathbf{v}_1^*.\mathbf{v}_2^*} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'_1\right)\left(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'_2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 dt + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}_1\mathbf{v}'_2\, dt + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}_2 dt + \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}'_2\, dt =$$

$$= \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \overline{\mathbf{v}'_1\,\mathbf{v}'_2}$$

Zpět TP

3 Hydrodynamika – Bernouliho rovnice

Je odvozena z Eulerovy rovnice hydrodynamiky, za předpokladů

Existuje potenciál vnějších, hmotnostních sil $\mathbf{a}_{(f)} = \mathrm{grad}(U)$

Uvažujeme ideální kapalinu – neviskozní a nestlačitelnou

Jak je odvozena?

Integrací Eulerovy rovnice hydrodynamiky (pohybová rovnice ideální kapaliny) po **proudnici**.

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}(\mathbf{v}).\mathbf{v} = \mathbf{a}_{(f)} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p)}\ \Big|\cdot d\mathbf{L} = (dx, dy, dz)$$

$$\int_\ell \rho\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}.d\mathbf{L} + \int_\ell \rho\cdot\mathbf{v}.\mathrm{grad}(\mathbf{v}).d\mathbf{L} = \int_\ell \rho\cdot\mathbf{a}_{(f)}\cdot d\mathbf{L} - \int_\ell \mathrm{grad}(p)\cdot d\mathbf{L}$$

Odvození **Obsah**

3 Hydrodynamika – Bernouliho rovnice

Po integraci Eulerovy rovnice hydrodynamiky po **proudnici**

$$\int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} - (U_2 - U_1) = 0$$

Bernouliova rovnice vyjadřuje zákon zachování energie mezi dvěmi místy na **proudnici**

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - U_2 + \int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L}$$

$\frac{v_1^2}{2}$	kinetická měrná energie
$\frac{p}{\rho}$	tlaková měrná energie
U	polohová měrná energie
$\int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L}$	změna urychlující měrné energie v místě 1 a 2.

Obsah

3 Hydrodynamika – Bernouliho rovnice

Různé tvary Bernouliovy rovnice — Rozměr

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - U_2 + \int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L} \qquad \left[\frac{J}{kg}\right]$$

$$\rho.\frac{v_1^2}{2} + p_1 - \rho.U_1 = \rho.\frac{v_2^2}{2} + p_2 - \rho.U_2 + \rho.\int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L} \qquad [Pa]$$

$$\frac{v_1^2}{2.g} + \frac{p_1}{\rho.g} - \frac{U_1}{g} = \frac{v_2^2}{2.g} + \frac{p_2}{\rho.g} - \frac{U_2}{g} + \frac{1}{g}\int_1^2 \mathbf{a}_t d\mathbf{L} \qquad [m]$$

Obsah

3 Hydrodynamika – věta o změně hybnosti.

Věta o změně hybnosti je odvozena z Eulerovy rovnice hydrodynamiky, za předpokladů.

jedná se o **stacionární** proudění

Je odvozena pro **ideální** kapalinu – nestlačitelnou a neviskózní

Jak je odvozena?

Integrací Eulerovy rovnice hydrodynamiky přes uvažovaný (kontrolní) objem kapaliny.

$$\boxed{\operatorname{grad}(\mathbf{v}).\mathbf{v} = \mathbf{a}_{(f)} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}(p)} \qquad \Big|\cdot dm = \rho.dV$$

$$\int_V \rho \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{v}).\mathbf{v} \cdot dV = \int_V \rho \cdot \mathbf{a}_{(f)} \cdot dV - \int_V \operatorname{grad}(p) \cdot dV$$

Po úpravě, při které využijeme Gaus-Ostrogradského větu dostaneme:

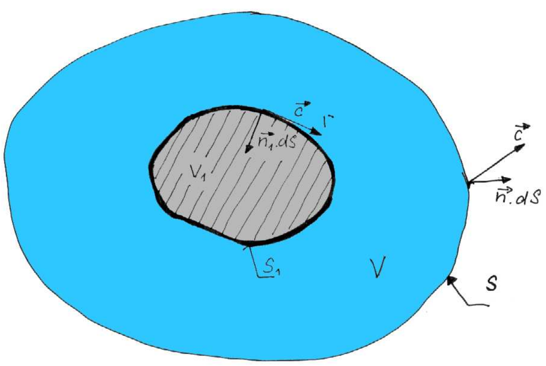
$$\boxed{\int_S \rho.\mathbf{v}(\mathbf{c}.\mathbf{v})dS = \mathbf{G} - \int_S p.\mathbf{n}dS}$$

Odvození *Obsah*

3 Hydrodynamika – věta o změně hybnosti.

Síla na obtékané těleso.

$$\int_S \rho.\mathbf{v}(\mathbf{v}.\mathbf{n})dS = \mathbf{G} - \int_S p.\mathbf{n}dS$$



Obsah

3 *Hydrodynamika – věta o změně hybnosti -odvození*

Vycházíme z ERH, a integrujeme ji přes zvolený objem kapaliny, ve kterém chceme znát silové působení kapaliny.

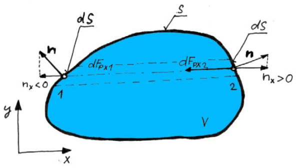
$$\int_V \rho \cdot \operatorname{grad}(\mathbf{v}).\mathbf{v} \cdot dV = \int_V \rho \cdot \mathbf{a}_{(f)} \cdot dV - \int_V \operatorname{grad}(p) \cdot dV$$

Objem V je kontrolním objemem

Složka ve směru x:

$$\rho \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) \cdot dx.dy.dz =$$

$$= \rho \int_V a_{(f)x} \cdot dx.dy.dz - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx.dy.dz$$



Označíme:

$$F_{dx} = G_x - F_{px}$$

Zpět VOZH

3 *Hydrodynamika – věta o změně hybnosti -odvození*

(Silové působení v objemu kapaliny)

Dynamická síla:

$$F_{dx} = \rho \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \right) \cdot dx.dy.dz$$

Přičteme nulu - platí to pouze pro nestlačitelnou kapalinu

$$F_{dx} = \rho \int_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + v_x \operatorname{div}\mathbf{v} \right) \cdot dx.dy.dz$$

$$F_{dx} = \rho \int_V \left(\frac{\partial (v_x.v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (v_x v_z)}{\partial z} \right) \cdot dV$$

Použijeme G-O větu:

$$F_{dx} = \rho \int_V v_x (v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z) dS = \rho \int_S v_x (\mathbf{v}.\mathbf{n}) dS$$

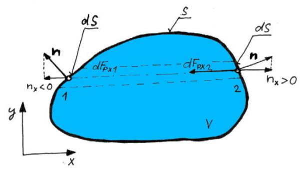
Zpět VOZH

3 Hydrodynamika – věta o změně hybnosti -odvození

(Silové působení v objemu kapaliny)

Obecná tíha:

$$G_x = \rho \int_V a_{(f)x} dV$$



Tlaková síla, s využitím G-O věty:

$$F_{px} = \int_V \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dV = \int_S p.n_x \cdot dS$$

Po úpravách složkové rovnice EHD po integraci přes objem:

x: $$\int_S c_x (\mathbf{v}.\mathbf{n}) dS = G_x - \int_S p.n_x dS$$

y: $$\int_S c_y (\mathbf{v}.\mathbf{n}) dS = G_y - \int_S p.n_y dS$$

z: $$\int_S c_z (\mathbf{v}.\mathbf{n}) dS = G_z - \int_S p.n_z \cdot dS$$

Zpět VOZH