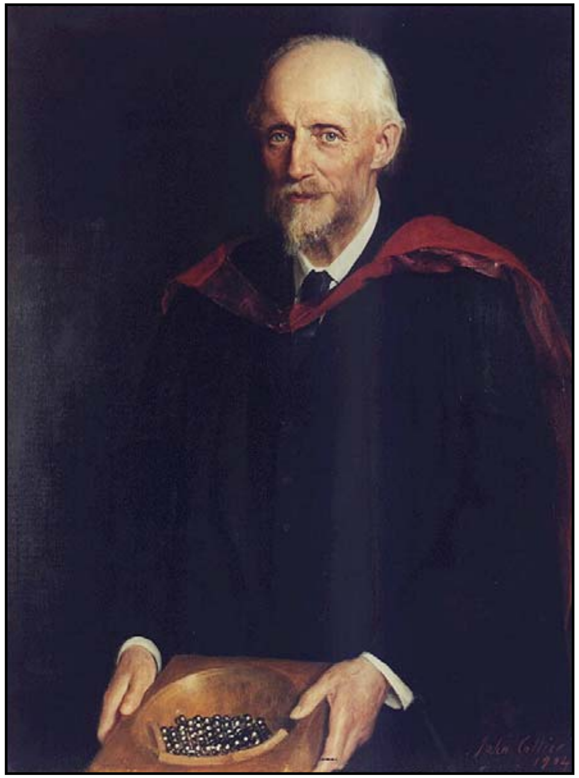
Fakulta strojního inženýrství VUT v Brně
Ústav konstruování

# KONSTRUOVÁNÍ STROJŮ
## strojní součásti

## Přednáška 9



# Kluzná ložiska

*... The novelty of his method (Reynolds) of approach made his papers very hard reading – in fact I think it is probable that some of them have never been read through by anyone.*

*SIR J. J. THOMSON (1936)*

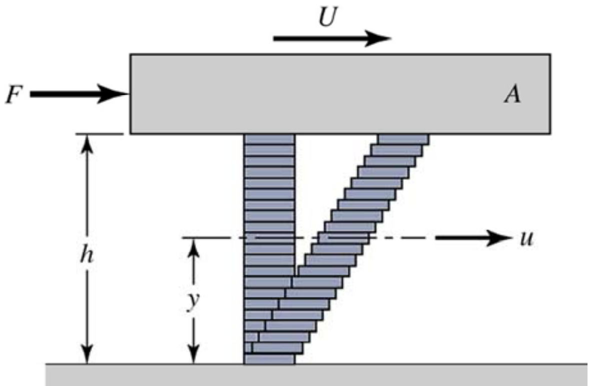
# Obsah

**Kluzná ložiska**

- Petrovova rovnice.
- Hranice mezi stabilním a nestabilním mazáním.
- Hydrodynamické radiální ložisko.
- Teorie hydrodynamického mazání.
- Reynoldsova rovnice.
- Sommerfeldovo a Ockvirkovo řešení Reynoldsovy rovnice.

# Viskozita

Viskozita je jednou z nejdůležitějších vlastností tekutých maziv, která se projevuje odporem při pohybu jejich částic. Podle Newtona platí pro pohyb tekutiny s laminárním tokem, že smykové napětí $\tau$ v rovině rovnoběžné s laminárním tokem, je přímo úměrné gradientu rychlosti d$u$/d$y$ neboli smykovému spádu $D$. Konstanta úměrnosti $\eta$ se nazývá **absolutní (dynamická) viskozita**. Často se používá také **kinematická viskozita** $\eta_k$ definovaná jako poměr absolutní viskozity a hustoty při dané teplotě.




$$\boxed{\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta\, D}$$

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}} = \frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pa.s}$$

$$\boxed{\eta_k = \frac{\eta}{\rho}}$$

$$\eta_k = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m.s}}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

**Jednotky absolutní viskozity**

SI soustava N.s/m$^2$

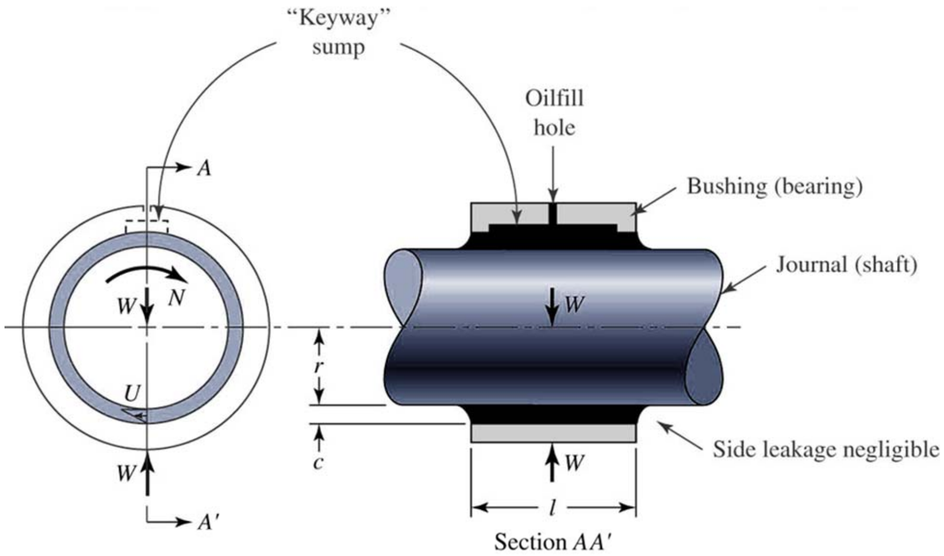
CGS soustava centipoise (cP)

Anglické reyn (lbf.s/in$^2$)

| To convert from | To | | | |
|---|---|---|---|---|
| | cP | kgf-s/m$^2$ | N-s/m$^2$ | lbf-s/in$^2$ |
| | Multiply by | | | |
| cP | 1 | 1.02 x $10^{-4}$ | $10^{-3}$ | 1.45 x $10^{-7}$ |
| kgf-s/m$^2$ | 9.807 x $10^{3}$ | 1 | 9.807 | 1.422 x $10^{-3}$ |
| N-s/m$^2$ | $10^{3}$ | 1.02 x $10^{-1}$ | 1 | 1.45 x $10^{-4}$ |
| lbf-s/in$^2$ | 6.9 x $10^{6}$ | 7.03 x $10^{2}$ | 6.9 x $10^{3}$ | 1 |

# Petrovova rovnice

Velikost **tření u kluzného ložiska** pracujícího v podmínkách **kapalinového mazání** byla poprvé stanovena **Petrovem** roku 1883. Petrovova rovnice nejenže dává dobrý odhad součinitele tření, ale také definuje základní bezrozměrné parametry používané při výpočtu kluzných ložisek.




$$\tau = \eta \frac{u}{c} = \frac{2\pi r \eta N}{c}$$

$$T = (\tau A)(r) = \left(\frac{2\pi r \eta N}{c}\right)(2\pi r l)(r)$$

$$T = \frac{4\pi^2 r^3 l \eta N}{c}$$

$$T = \mu W r = (\mu)(2 r l p)(r) = 2 r^2 \mu l p$$

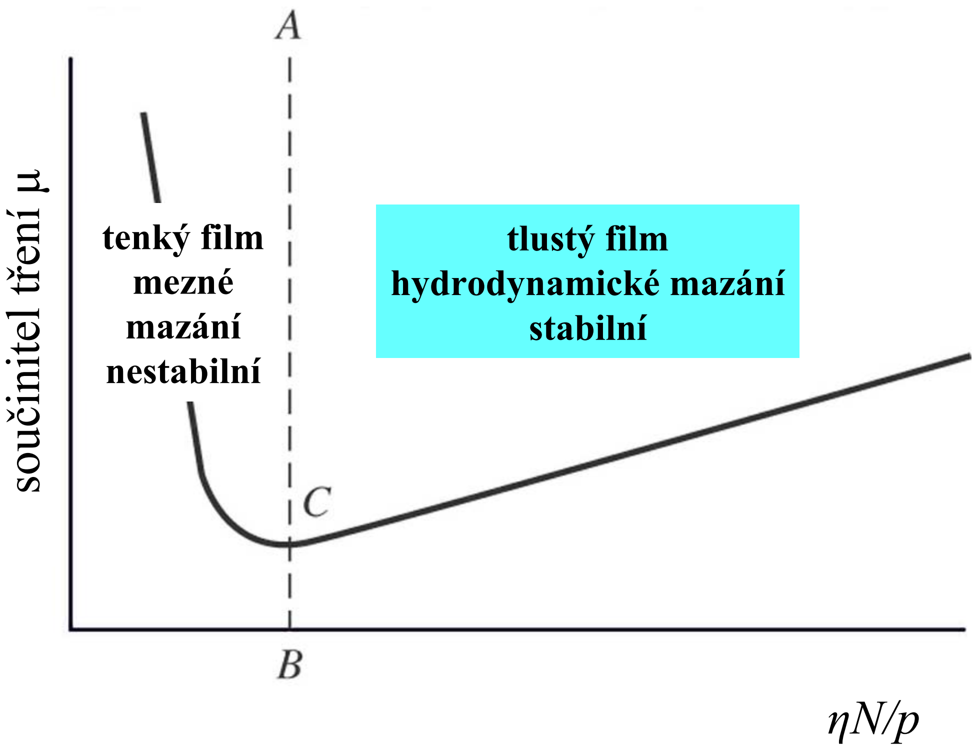
$$\boxed{\mu = 2\pi^2 \frac{\eta N}{p} \frac{r}{c}}$$ Petrovova rovnice

$$\boxed{S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\eta N}{p}}$$ Sommerfeldovo číslo

$\tau$ smykové napětí, $\eta$ absolutní viskozita maziva, $u$ obvodová rychlost, $c$ radiální vůle, $r$ poloměr čepu, $N$ otáčky čepu, $T$ kroutící moment, $l$ délka ložiska, $A$ plocha, $\mu$ součinitel tření, $W$ zatížení, $p$ tlak

# Hranice mezi stabilním a nestabilním mazáním

Hranici mezi kapalinovým a mezným mazáním je možné stanovit na základě **Stribeckovy křivky**. Provedené experimenty ukazují, že při dosažení určité hodnoty $\mu N/p$ nastává **hydrodynamické** neboli **stabilní mazání**.




$$\frac{\eta N}{p} \geq 1{,}7 . 10^{-6}$$

Zvýšení teploty maziva vede ke snížení jeho viskozity a tedy také k menší hodnotě $\eta N/p$. Součinitel tření $\mu$ se sníží, takže množství tepla vznikající v důsledku tření mezi jednotlivými vrstvami maziva se zmenší. To vede k poklesu teploty maziva.

# Hydrodynamické radiální ložisko

Při otáčení čepu vzniká v kluzném ložisku **klínová vrstva maziva**. Čep působí jako „čerpadlo" a v důsledku přilnavosti maziva strhává mazivo s sebou a tlačí jej pod sebe. Ve vrstvě maziva tak vzniká tlakové pole, jehož výslednice je v rovnováze se zatížením $W$. Minimální tloušťka mazacího filmu $h_0$ leží na spojnici středů čepu $O$ a pánve $O'$.

**Základní terminologie radiálních ložisek**

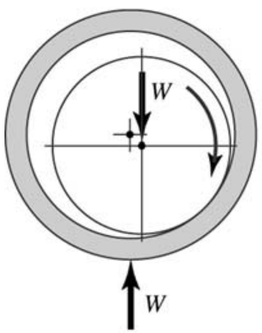
radiální ložisková vůle $c = R - r$

excentricita ložiska $e = OO'$

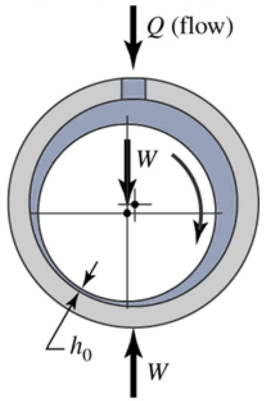
excentrický poměr $\varepsilon = e/c$

$\beta = 2\pi$ úplné ložisko

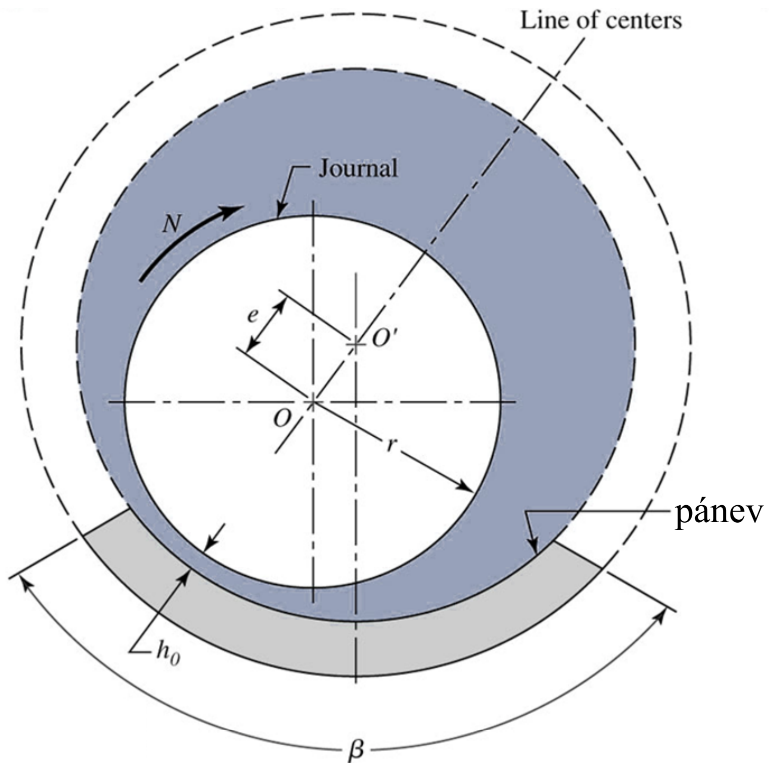
$\beta < 2\pi$ parciální ložisko



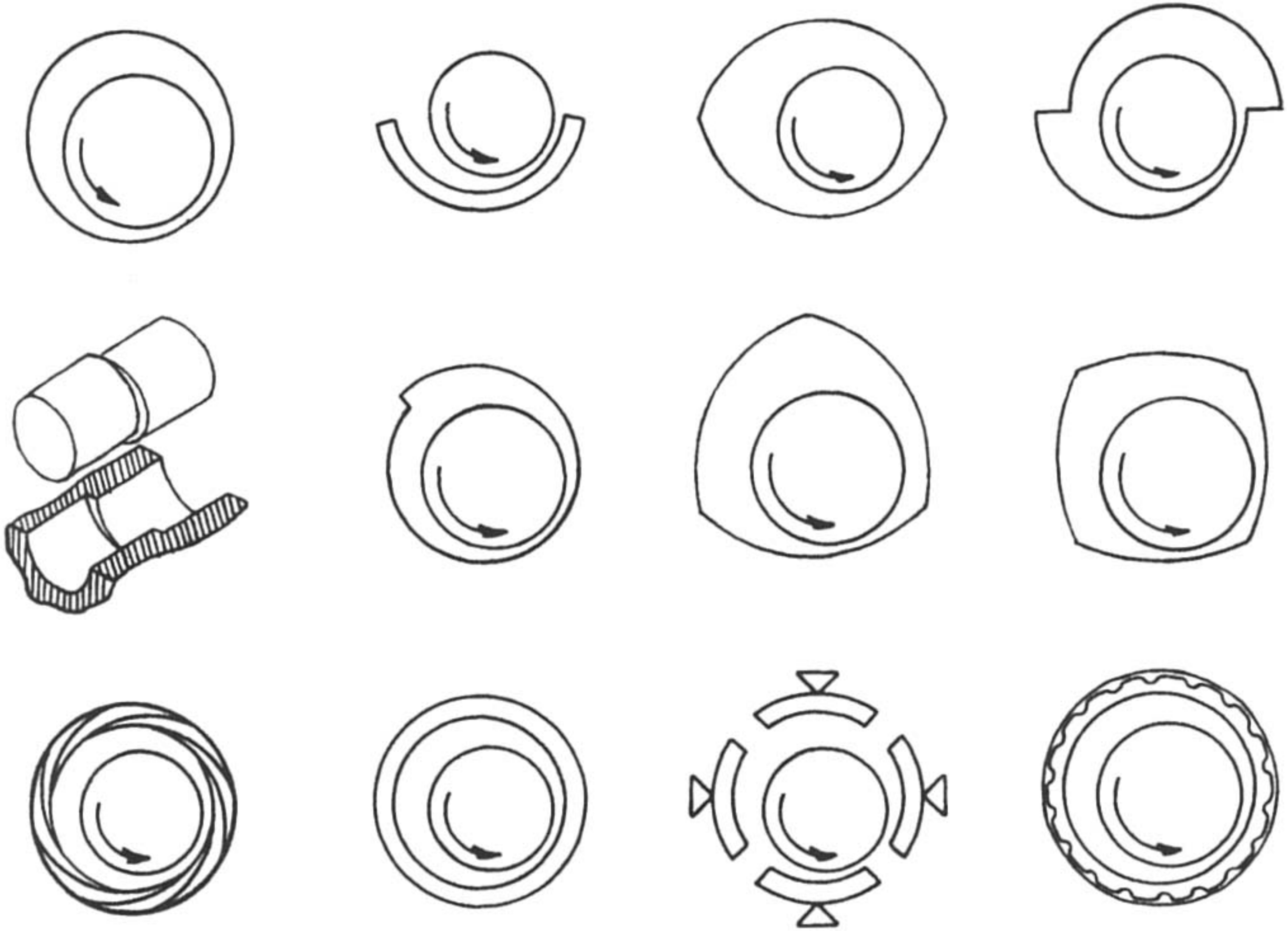

bez maziva




s mazivem



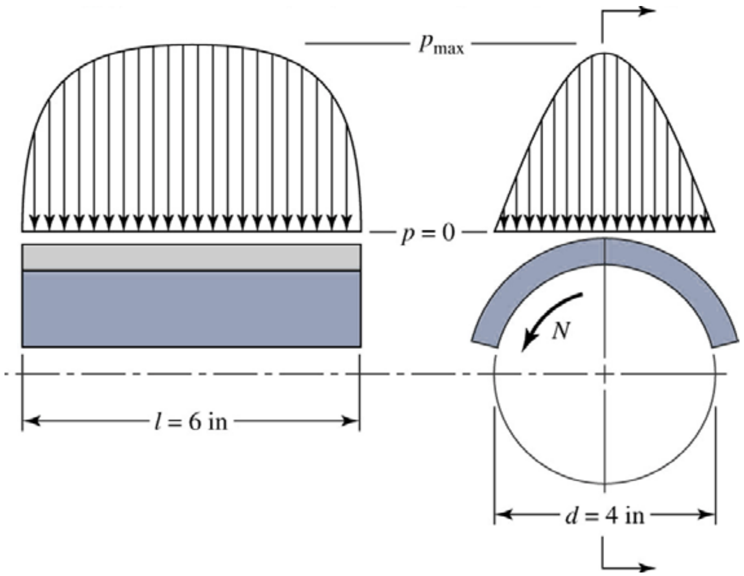
# Geometrie radiálních ložisek



# Teorie hydrodynamického mazání

Současná teorie hydrodynamického mazání má svůj původ v experimentech s parciálním radiálním ložiskem popsaných roku 1883 Beauchampem Towerem. Towerovy výsledky vedly o tři roky později Osborna Reynoldse k odvození diferenciální rovnice (**Reynoldsova rovnice**) popisující průběh tlaku v klínové mezeře.

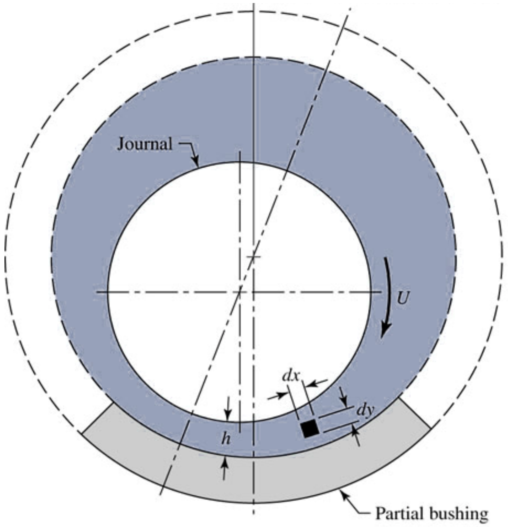
**Towerův experiment**

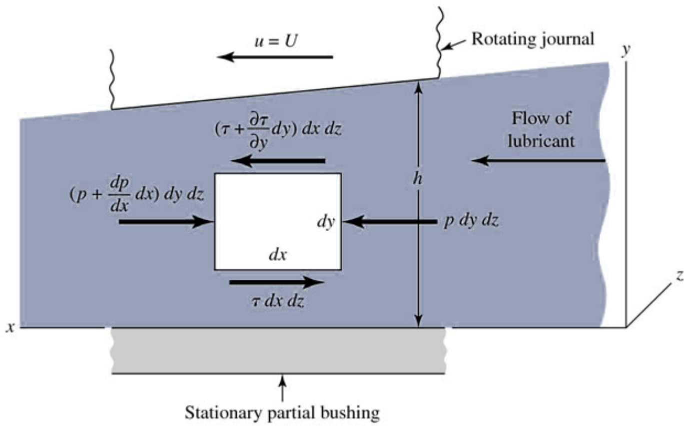



**Předpoklady při odvození Reynoldsovy rovnice**

1. Newtonské mazivo.
2. Setrvačné síly jsou zanedbatelné.
3. Mazivo je považováno za nestlačitelné.
4. Viskozita maziva je konstantní.
5. Tlak se nemění v axiálním směru.
6. Čep a pánev jsou nekonečně dlouhé, takže mazivo proudí pouze ve směru rychlosti $u$.
7. Tlak podél tloušťky mazacího filmu je konstantní.
8. Rychlost jakékoliv částice maziva závisí pouze na souřadnicích $x$ a $y$.

# Reynoldsova rovnice




Na elementární objem maziva o rozměrech d$x$, d$y$, d$z$ působí **tlakové** a **třecí** síly. Jejich rovnováha je určena rovnicí $\sum F_x = 0$.

$$\sum F_x = p\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \left( p + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \tau\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

dosazením Newtonova vztahu
pro smykové napětí

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

dvojnásobnou integrací se určí
průběh rychlosti v klínové mezeře

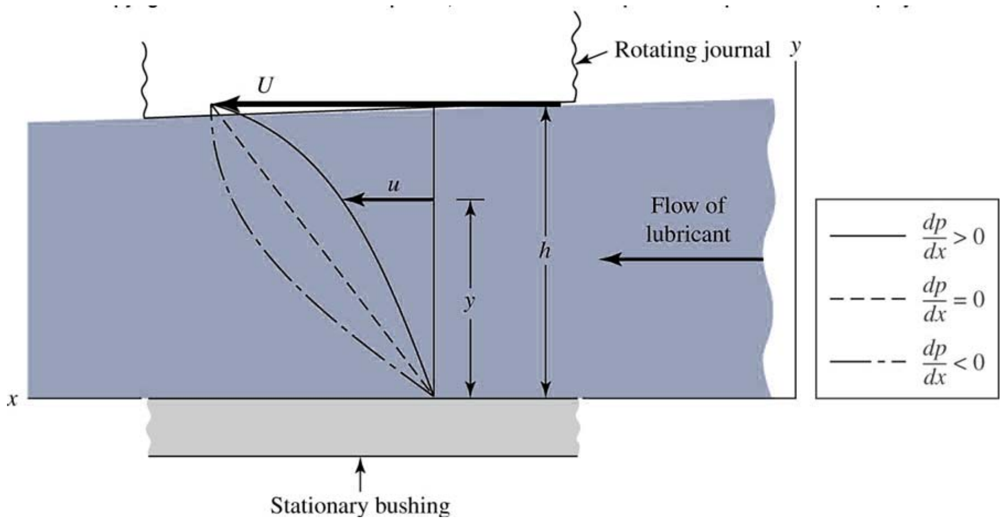
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} y^2 + C_1 y + C_2$$

# Reynoldsova rovnice – rychlost proudění

Okrajové podmínky se vyjádří pro obě plochy, které tvoří klínovou mezeru. Předpokládá se, že pánev stojí, zatímco povrch čepu se pohybuje rychlostí $u$. Pak pro $y = 0$, $u = 0$ a pro $y = h$, $u = U$.

Integrační konstanty jsou určeny vztahy $C_1 = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ $\quad C_2 = 0$

Rychlost proudění maziva v libovolném místě klínové mezery $\boxed{u = \frac{1}{2\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left(y^2 - hy\right) + \frac{U}{h}y}$




Průběh rychlosti proudění maziva v klínové mezeře závisí na souřadnici $y$ a na tlakovém gradientu d$p$/d$x$. Průběh rychlosti je dán součtem lineární a parabolické funkce. V místě maximálního tlaku, kdy d$p$/d$x$ = 0 je rychlost $u = (U/h)y$.

# Reynoldsova rovnice – objemový průtok

Objemový průtok maziva klínovou mezerou o jednotkové šířce $Q = \int_0^h u \, \mathrm{d}y$

Dosazením vztahu pro rychlost proudění maziva a následnou integrací

$$Q = \int_0^h \left[ \frac{1}{2\eta} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \left( y^2 - hy \right) + \frac{U}{h} y \right] \mathrm{d}y = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dx}$$

Protože mazivo je považováno za nestlačitelné musí být objemový průtok maziva stejný v jakémkoliv místě klínové mezery

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{U}{2} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \frac{h^3}{12\eta} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \right) = 0$$

Jednorozměrná Reynoldsova rovnice zanedbávající boční výtok

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \frac{h^3}{\eta} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \right) = 6U \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}}$$

Reynoldsova rovnice beroucí do úvahy boční výtok

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial x}}$$

# Sommerfeldovo řešení

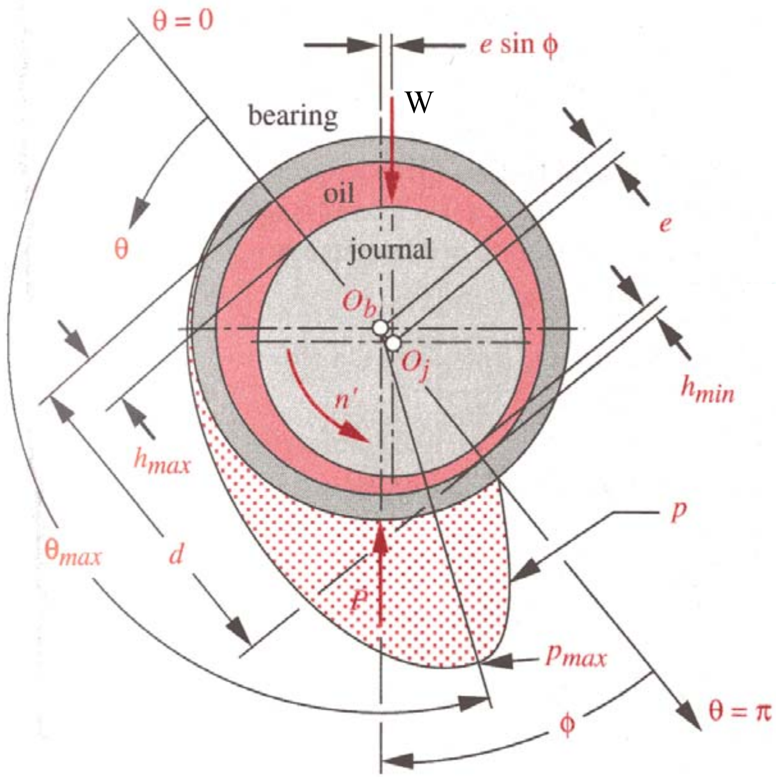
Arnold Sommerfeld odvodil roku 1904 řešení Reynoldsovy rovnice pro případ **nekonečně dlouhého** (tj. bez bočního výtoku) radiálního kluzného ložiska. Průběh tlaku $p$ v mazacím filmu je funkcí úhlu θ, průměru čepu $r$, radiální vůle $c$, excentrického poměru ε, povrchové rychlosti $U$ a viskozity maziva η.

$$\boxed{p = \frac{\eta U r}{c^2}\left[\frac{6\varepsilon\sin\theta(2+\varepsilon\cos\theta)}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right] + p_0}$$

Sommerfeldova rovnice se řeší v intervalu $0 \leq \theta \leq \pi$. Mimo tento interval je tlak v mazacím filmu roven tlaku $p_0$ pod kterým je dodáváno mazivo.

$$S = \eta\frac{Ul}{W}\left(\frac{r}{c}\right)^2 = \frac{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{12\pi\varepsilon}$$

Sommerfeldovo číslo $S$ lze vyjádřit jako funkci excentrického poměru ε.



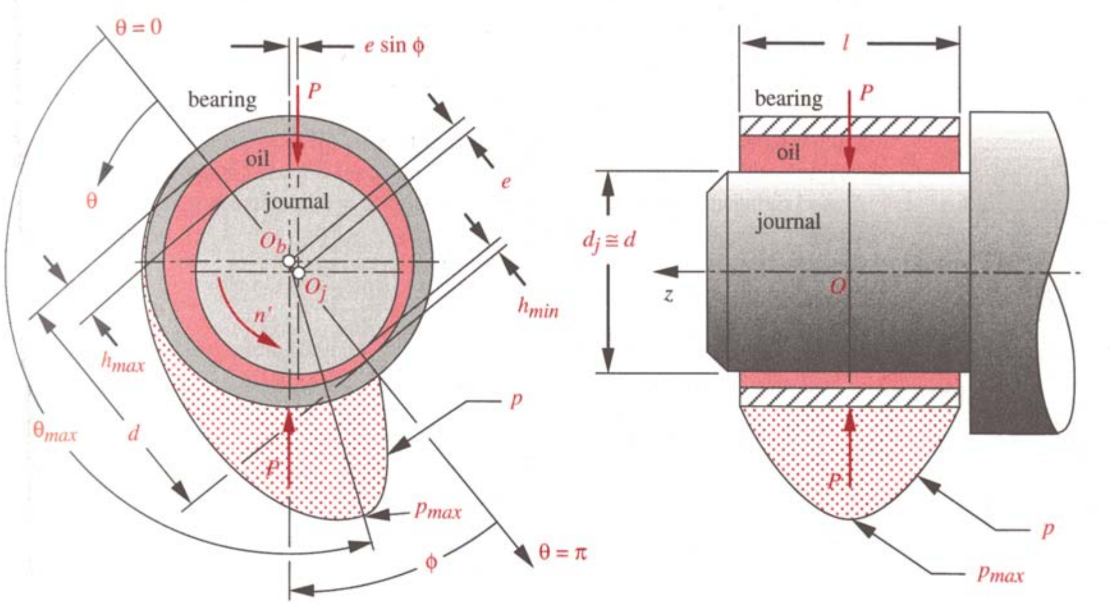
# Ocvirkovo řešení

Dlouhá radiální kluzná ložiska se v moderních strojích vyskytují výjimečně. Obvykle používaná ložiska mají poměr *l/d* v rozmezí od 1/4 do 2. V těchto případech hraje **boční výtok maziva** z ložiska podstatnou úlohu a Sommerfeldovo řešení, které jej zanedbává, nemůže být použito. Ocvirk a Dubois publikovali roku 1955 řešení Reynoldsovy rovnice, které bere do úvahy boční výtok. Přitom zanedbali první člen rovnice, který je malý v porovnání s tokem v axiálním směru.

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6U\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\boxed{p = \frac{\eta U}{rc^2}\left(\frac{l^2}{4} - z^2\right)\frac{3\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}}$$

$$\boxed{\theta_{\max} = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{1+24\varepsilon^2}}{4\varepsilon}\right)}$$



# Porovnání řešení pro nekonečné a krátké ložisko

Užití Sommerfeldova řešení pro ložiska s poměrem $l/d < 1$ vede k značné chybě v odhadu průběhu tlaku. V případě, kdy $l/d = 1$, dává Sommerfeldovo řešení přibližně stejnou hodnotu tlaku jako řešení Ocvirkovo. Provedené experimenty ukázaly, že **Ocvirkovo řešení** může být použito v intervalu $\mathbf{1/4 \leq \mathit{l/d} \leq 2}$. **Sommerfeldovo řešení** dává přesný odhad tlaku pro $\mathbf{\mathit{l/d} > 4}$.