Introducción al Método Experimental y Teoría de Errores

S. Gil y E. Rodríguez
UNSAM y UNGS

Accidente acontecido el 22 de octubre de 1895 en la estación de Montparnasse, Francia, provocó que una locomotora de vapor que hacía la ruta Granville-París, después que sus frenos fallaran, atraviese la fachada.

Unidad 1

Conceptos básicos de metrología - Incertidumbres de medición - Errores

Introducción

Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o sustancia, susceptible de ser medido. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc. A una magnitud específica de un *objeto* que estamos interesado en medir la llamamos *mesurando*. Por ejemplo, si estamos interesado en medir la longitud de una barra, esa longitud específica será el mesurando.

Para establecer el valor de un mesurando tenemos que usar *instrumentos de medición* y un *método de medición*. Asimismo es necesario definir *unidades de medición*. Por ejemplo, si deseamos medir el largo de una varilla, el instrumento de medición será una regla. Si hemos elegido el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad será el metro y la regla a usar deberá estar calibrada en esa unidad o en submúltiplos de ella. El método de medición consistirá en determinar cuantas veces la unidad y fracciones de ella contenidos en el valor del mesurando.

Nuestras mediciones están afectadas de *errores o incertidumbres* de medición que proviene de las limitaciones impuestas por:

- la precisión y exactitud de los instrumentos usados,
- la interacción del método de medición con el mesurando,
- la definición del objeto a medir,
- la influencia del observador u observadores que realizan la medición.

En ciencias e ingeniería, el concepto de *error* tiene un significado diferente del uso habitual de este término. Coloquialmente, es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a equivocación. En ciencias e ingeniería, el error de una medición está más bien asociado al concepto de *incertidumbre* en la determinación del resultado de la misma. Más precisamente, lo que procuramos en toda medición es conocer las cotas o límites probabilísticos de estas incertidumbres. Gráficamente, buscamos establecer un intervalo

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$$

como el de la Fig. 1.1, donde con cierta probabilidad, podamos decir que se encuentra el *mejor valor* de la magnitud x. Este mejor valor $\bar{x}$ es el valor más representativo de nuestra medición y al semiancho Δx lo denominamos la *incertidumbre absoluta o error absoluto* de la medición.

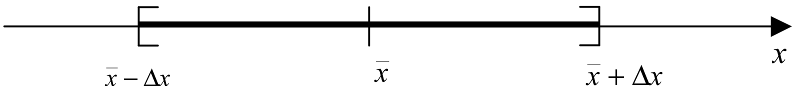


Figura 1.1. Intervalo asociado al resultado de una medición. Notamos que, en lugar de dar un único número, definimos un intervalo. Al valor representativo del centro del intervalo ($\bar{x}$) lo llamamos el mejor valor de la magnitud en cuestión. El semiancho del intervalo (Δx) se denomina la *incertidumbre absoluta o error absoluto de la medición*.

Los instrumentos de medición tienen una *precisión* finita. La precisión de un instrumento está asociada a la variación mínima de la magnitud que el mismo puede detectar. Por ejemplo, con una regla graduada en milímetros no podemos detectar variaciones menores que una fracción del milímetro. La mínima cantidad que detecta un instrumento se denomina la *apreciación nominal* del instrumento.

La *interacción* del método de medición con el mesurando también puede introducir errores. Tomemos como ejemplo una medición de temperatura. Cuando usamos un termómetro para medir la temperatura, parte del calor del objeto fluye al termómetro (o viceversa), de modo que el resultado de la medición de la temperatura es un valor modificado del original debido a la inevitable interacción que debimos realizar. Es claro que esta interacción podrá o no ser significativa. Si estamos midiendo la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero sí lo será si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro. Siempre que realizamos una medición, interactuamos con el objeto de la medición.

A su vez, las magnitudes a medir tampoco están definidas con infinita precisión. Imaginemos que queremos medir el largo de un listón de madera. Es posible que al usar instrumentos cada vez más precisos empecemos a notar las irregularidades típicas del corte de los bordes o, al ir aun más allá, finalmente detectemos la naturaleza atómica o molecular del material que la constituye. En este punto la longitud dejará de estar bien definida. En la práctica, es posible que mucho antes de estos casos límites, la falta de paralelismo en sus bordes haga que el concepto de la "longitud del listón" comience a hacerse cada vez menos definido, y a esta limitación intrínseca la denominamos *incertidumbre intrínseca* debida a la falta de definición de la magnitud en cuestión.

Otro ejemplo es el caso en que se cuenta la cantidad de partículas alfa emitidas por una fuente radioactiva en un intervalo de cinco segundos. Sucesivas mediciones arrojarán diversos resultados (similares, pero en general distintos). En este caso, de nuevo, estamos frente a una manifestación de una incertidumbre intrínseca asociada a la magnitud "número de partículas emitidas en cinco segundos" (en este caso más que a las incertidumbres que tienen como fuente el error de los instrumentos o del observador).

Todas estas limitaciones derivan en que no podamos obtener con certeza "el" valor de un mesurando, sino que solo podamos establecer un rango posible de valores donde pueda estar razonablemente contenido, lo que hacemos evaluando e informando la incertidumbre de la medición.

Una forma de expresar el resultado de una medición es con la notación

$$\bar{x} \pm \Delta x \tag{1.1}$$

e indicando a continuación la *unidad de medición*. Además de la incertidumbre absoluta Δx se definen:

- la incertidumbre relativa o error relativo: $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x}$, que expresa cuán significativa es la incertidumbre comparada con el valor medido,
- la incertidumbre relativa porcentual o error relativo porcentual: $\varepsilon\% = \varepsilon_x \cdot 100\%$.

Estas dos últimas cantidades son descriptivas de *la calidad de la medición* que el error absoluto.

Precisión y exactitud

Como vimos, la precisión de un instrumento o un método de medición está asociada a la sensibilidad o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con dicho instrumento o método. Así, decimos que un tornillo micrométrico (con una apreciación nominal de 10 μm) es más preciso que una regla graduada en milímetros; que un cronómetro con una apreciación de 10 ms es más preciso que un reloj común, etc.

Además de la *precisión*, otra fuente de error que se origina en los instrumentos es la *exactitud* de los mismos. La exactitud de un instrumento o método de medición está asociada a la calidad de la calibración del mismo.

Imaginemos que el cronómetro que usamos es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora, mientras que un reloj de pulsera común no lo hace. En este caso decimos que el cronómetro es todavía más preciso que el reloj común, pero menos exacto. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración de nuestro instrumento respecto de *patrones de medida* aceptados internacionalmente. En general los instrumentos vienen calibrados, pero dentro de ciertos límites. Es deseable que la calibración de un instrumento sea tan buena como la apreciación del mismo. La Fig. 1.2 ilustra de modo esquemático estos dos conceptos.

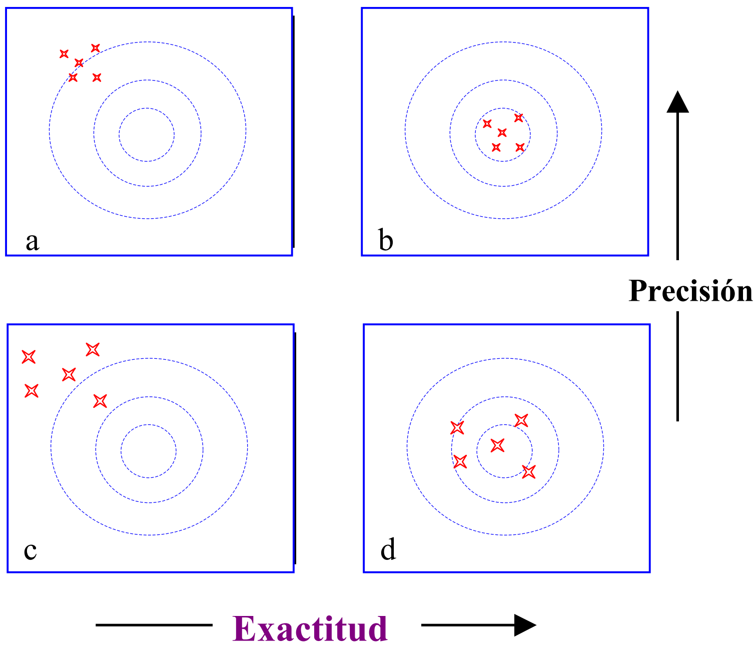


Figura 1.2. Ilustración de modo esquemático de los conceptos de precisión y exactitud. Los centros de los círculos indican la posición del "verdadero valor" del mesurando y las cruces los valores de varias determinaciones del centro. La dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud. a) Es una determinación precisa pero inexacta, mientras d) es más exacta pero imprecisa; b) es una determinación más exacta y más precisa; c) es menos precisa que a).

Fuente de errores

Las fuentes de error tienen orígenes diversos y pueden clasificarse del siguiente modo:

I. Errores introducidos por el instrumento

- ✓ **Error de apreciación, σ_{ap}:** si el instrumento está correctamente calibrado la incertidumbre que tendremos al realizar una medición estará asociada a la mínima división de su escala que podemos resolver con algún método de medición. Nótese que no decimos que el *error de apreciación* es la mínima división del instrumento, sino la mínima división que es discernible. El error de apreciación puede ser mayor o menor que la apreciación nominal (mínima variación que se puede detectar), dependiendo de la habilidad (o falta de ella) del observador. Así, es posible que un observador entrenado pueda apreciar con una regla común fracciones del milímetro mientras que otro observador, con la misma regla pero con dificultades de visión, sólo pueda apreciar 2 mm.

- ✓ **Error de exactitud, σ_{exac}:** representa el error absoluto con el que el instrumento en cuestión ha sido calibrado frente a patrones confiables.

II. **Error de interacción, σ_{int}:** proviene de la interacción del método de medición con el objeto a medir. Su determinación depende de la medición que se realiza y su valor se estima de un análisis cuidadoso del método usado.

III. **Falta de definición en el objeto sujeto a medición, σ_{def} :** proviene del hecho de que las magnitudes a medir no están definidas con infinita precisión. Con σ_{def} designamos la incertidumbre asociada con la falta de definición del objeto a medir y representa su incertidumbre intrínseca.

En general, en una dada medición, todas estas fuentes de error estarán presentes, de modo que resulta útil definir la *incertidumbre o error nominal de una medición* σ_{nom}, como:

$$\sigma_{nom}^2 = \sigma_{ap}^2 + \sigma_{def}^2 + \sigma_{\text{int}}^2 + \sigma_{exac}^2 + \ldots \tag{1.2}$$

Este procedimiento de sumar los cuadrados es un resultado de la estadística y proviene de suponer que las distintas fuentes de error son todas independientes unas de otras[1]. Los puntos suspensivos indican los aportes de otras fuentes. Por ejemplo, una medición de tiempo con un cronómetro manual se ve afectada por el *tiempo de reacción* del operador cuando define los límites de los intervalos. En este caso debe incluirse en la Ec. (1.1) un término que tenga en cuenta esta nueva contribución.

🕮 Se desea determinar el diámetro del tronco de un árbol, d, y el área de su sección transversal, A. ¿Cómo procederíamos y cuáles son las fuentes principales de incertidumbre en esta determinación? Un método podría consistir en medir el perímetro, P, con una cinta métrica y luego determinar el diámetro a partir de la relación $P=\pi.d$, usando este valor calculamos el área. En este caso, la mayor contribución a la incertidumbre proviene de la definición del diámetro. Una forma de estimar la incertidumbre sería determinar los valores máximos y mínimos del diámetro usando una serie de mediciones y tomar como $\sigma_{diámetro}$ la semidiferencia de estos valores, $\sigma_{def} = \sigma_{diámetro} \cong \frac{1}{2}(D_{max} - D_{min})$.

Clasificación de los errores

Según su carácter los errores pueden clasificarse en sistemáticos, estadísticos e ilegítimos o espurios.

a) **Errores sistemáticos:** Se originan por las imperfecciones de los métodos de medición. Por ejemplo, pensemos en un reloj que atrasa o adelanta, en una regla dilatada, en el error de paralaje, etc.

Los errores introducidos por estos instrumentos o métodos imperfectos afectarán nuestros resultados siempre en un mismo sentido. Los errores de exactitud constituyen una fuente de error sistemático, aunque no son los únicos ni lo mismo. Imaginemos el caso de una balanza bien calibrada (exacta) que se usa para conocer el peso de las personas en los centros comerciales u otros negocios. Como es usual que en público todas las personas nos pesamos vestidas, los valores registrados con estas balanzas tendrán un error sistemático debido al peso de la vestimenta.

La única manera de detectar y corregir errores sistemáticos es comparando nuestras mediciones con otros métodos alternativos y realizando un análisis crítico y cuidadoso de los instrumentos y procedimientos empleados. Por esto es aconsejable intercalar en el proceso de medición patrones confiables que permitan calibrar el instrumento durante la medición.

b) **Errores estadísticos:** Son los que se producen al azar. En general son debidos a causas múltiples y fortuitas. Ocurren cuando, por ejemplo, nos equivocamos eventualmente en contar el número de divisiones de una regla, o si estamos mal ubicados frente al fiel de una balanza. Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad tanto por defecto como por exceso. Por tanto, midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducirlos considerablemente. Es a este tipo de errores a los que comúnmente hace referencia la teoría estadística de errores de medición que formularemos sucintamente en lo que sigue. A estos errores lo designaremos con σ_{est}.

c) **Errores ilegítimos o espurios:** Son los que cometemos por equivocación o descuido. Supongamos que deseamos calcular el volumen de un objeto esférico y para ello determinamos su diámetro. Si al introducir el valor del diámetro en la fórmula nos equivocamos en el número introducido, o lo hacemos usando unidades incorrectas, o bien usando una expresión equivocada del volumen, claramente habremos cometido “un error.” Esta vez este error es producto de una equivocación. A este tipo de errores los designamos como ilegítimos o espurios. Para este tipo de errores no hay tratamiento teórico posible y el modo de evitarlos consiste en poner mucha atención en la ejecución y análisis de los procedimientos involucrados en las mediciones.

Un error de este tipo puede dar lugar a situaciones incorrectibles y hasta dramáticas. Al respecto pensemos que la misión espacial Mars Climate Orbiter de la NASA fracasó en setiembre de 1999 debido a un error cometido en el cambio de unidades inglesas a unidades métricas en las fórmulas usadas para dirigir su sistema de navegación.

La expresión final de la incertidumbre Δx de una medición tiene que tener en cuenta todas las distintas contribuciones, de diferente origen y tipo. La prescripción usual es combinarlas de la siguiente manera:

$$\Delta x = \sigma_{def} = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{nom}^2} = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{ap}^2 + \sigma_{def}^2 + \sigma_{\text{int}}^2 + \sigma_{exac}^2 + \ldots} \tag{1.3}$$

A Δx llamamos la *incertidumbre combinada o error efectivo* de la medición.

Cifras significativas

El resultado de una medición, expresado en la forma

$$\bar{x} \pm \Delta x\,,$$

tiene que ser consistente en cuanto al número de cifras que se informen para $\bar{x}$ y Δx. Esto tiene que ver con el número de *cifras significativas* que incluyamos en cada una de ellas.

Pensemos en una medición con una regla graduada en milímetros. Está claro que, si somos cuidadosos, podremos asegurar nuestro resultado hasta la cifra de los milímetros o, en el mejor de los casos, con una fracción del milímetro, pero no más. De este modo nuestro resultado podría ser

$$L = (95.2 \pm 0.5)\ \text{mm},$$

o bien

$$L = (95 \pm 1)\ \text{mm}.$$

En el primer caso decimos que nuestra medición tiene tres *cifras significativas* y en el segundo caso sólo dos. El número de cifras significativas es igual al número de dígitos contenidos en el resultado de la medición que están a la izquierda del primer dígito afectado por el error, incluyendo este dígito. El primer dígito, o sea el que está más a la izquierda, es el más significativo (9 en nuestro caso), y el último, el menos significativo. Nótese que carece de sentido incluir en nuestro resultado de L más cifras que aquellas en donde tenemos incertidumbre. De modo que no es correcto expresar el resultado como, por ejemplo,

$$L = (95.\underline{321} \pm 1)\ \text{mm},$$

ya que si tenemos una incertidumbre del orden de 1 mm, mal podemos asegurar el valor de centésimas y milésimas del milímetro. Operativamente, lo que hacemos es: una vez que calculamos la incertidumbre de la medición redondeamos el valor del mesurando (que puede provenir de un promedio y tener muchas cifras) y adaptamos su número de cifras significativas para que sea compatible con el valor de la incertidumbre.

Es usual expresar las incertidumbres o errores con *una sola cifra significativa*, y solo en casos excepcionales y cuando exista fundamento para ello, se pueden usar más. También es usual considerar que la incertidumbre en un resultado de medición afecta a la última cifra si es que no se la indica explícitamente. Por ejemplo, si sólo disponemos de la información que una longitud es L = 95 mm, podemos suponer que la incertidumbre es del orden del milímetro y, como dijimos antes, el resultado de L tiene dos cifras significativas.

Una posible fuente de ambigüedad se presenta con el número de cifras significativas cuando se hace un cambio de unidades. Si en el ejemplo que tratamos deseamos expresar L en µm, el resultado sería L = (95000±1000) µm. ¿Cuántas cifras significativas tenemos en este resultado? Claramente dos, igual que antes, ya que la última cifra significativa sigue siendo 5. Nótese que 95 mm $\neq$ 95000 µm en cuanto al número de cifras significativas: dos cifras y cinco, respectivamente (a propósito, es útil comparar los costos de los instrumentos para realizar estas dos clases de determinaciones.)

Para evitar estas ambigüedades se emplea la notación científica. Podemos escribir la siguiente igualdad:

$$9.5 \times 10^{1} \text{ mm} = 9.5 \times 10^{4} \ \mu\text{m}.$$

Notamos que los números en ambos miembros de la igualdad tienen igual número de cifras significativas, siendo la única diferencia las unidades usadas

Nonio, Vernier o Calibre

Pedro Nunes o Petrus Nonius (1492 -1577) fue un matemático, astrónomo y geógrafo portugués, que desarrollo un versátil y muy útil instrumento de medición de longitudes y fracciones de grado de ángulo. Este desarrollo después fue perfeccionado por Pierre Vernier (1580 - 1637), matemático francés. El dispositivo consiste en dos reglas similares contrapuestas como se muestra en la Fig. 1.3. Una descripción más completa de este dispositivo y programas de simulación para practicar su lectura y uso pueden encontrarse en Internet (ver: http://www.cenam.mx/dimensional/java/Vernier/Vernier_f.htm, http://es.wikipedia.org/wiki/Nonio). En resumen, la escala pequeña o nonio o vernier (deslizable) se tienen n divisiones, que coinciden con K divisiones de la escala mayor (regla estándar calibrada). Típicamente n es un múltiplo decimal (10, 20, 50) y K= n–1, por ejemplo si n=20, K=n-1=19 mm. De este modo la distancia entre divisiones de nonio es: $(n-1)/n$ unidades. Si la división j de nonio coincide con una división de la regla mayor, entonces al valor indicado por la línea principal o fiel, debemos agregar j.(unidad/n) y la apreciación nominal del vernier es unidad/n. En el caso del vernier de la Fig. 1.3 la apreciación del mismo es de 0.1 mm y el valor que mide en la figura corresponde a 4.3 mm.

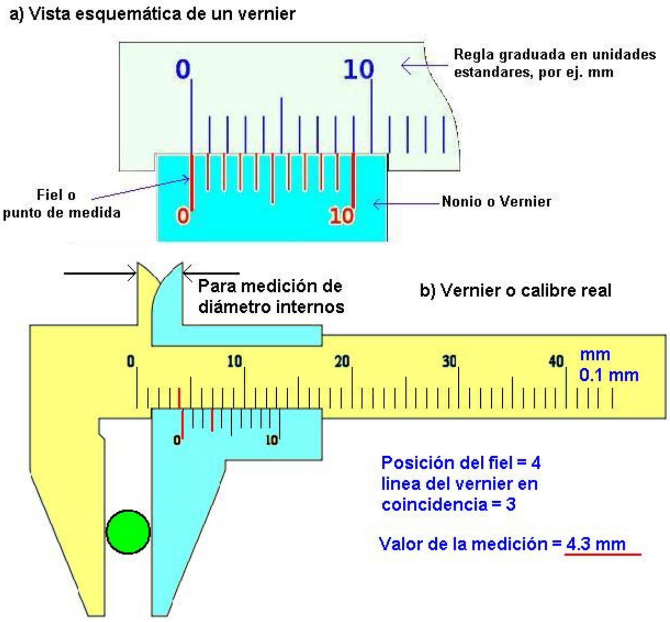


Figura 1.2. Ilustración de un nonio o vernier.

Bibliografía

1. P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).
2. D. C. Baird, *Experimentación*, 2ª ed. (Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1991).
3. *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 1st ed., International Organization of Standarization (ISO), Suiza (1993); http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html.

Actividad 1 Estudio experimental del movimiento

Objetivo

Estudio experimental del movimiento de los cuerpos. Representación gráfica de resultados experimentales e interpretación cualitativa del movimiento a partir de gráficos. Posición, velocidad y aceleración.

Introducción

Los datos de posición y velocidad en función del tiempo se aprecian e interpretan más fácilmente si empleamos un gráfico. Veremos que esta aproximación para describir el movimiento de un objeto, es a menudo más efectiva que si usamos el lenguaje común o una tabla de números. A su vez el gráfico permite obtener una visión directa y simple de la historia del movimiento. Todo esto es particularmente cierto en el caso de que el movimiento se realice en una dimensión, es decir el caso particular simple en que el movimiento se realiza a lo largo de una línea recta. Cuando un objeto sólido se desplaza sin rotar o sus dimensiones son mucho menores que las distancias que determinan su posición con respecto a un dado sistema de referencia, la posición de un punto del mismo (su centro geométrico o dentro de gravedad) es suficiente para determinar su posición. En este caso podemos considera a nuestro objeto como un "punto material", desde luego esto es solo una idealización, pero muy útil para describir los movimientos.

Para la medir y caracterizar la posición del móvil, en nuestro caso emplearemos dos dispositivos de adquisición de datos, conectados a una computadora: un sonar ("motion detector") y un fotointerruptor ("photogate"). El primero de estos dispositivos emplea el tiempo de vuelo (tiempo de ida y vuelta) de un pulso de ultra sonido, que después de ser emitido por el aparato, rebota en el objeto en cuestión y es detectada por el mismo. En tiempo de viaje (vuelo) es medido por este dispositivo y es acumulado en la computadora. Este dispositivo usa un sistema similar a la que emplean los murciélagos para volar y orientarse en la noche. También el mismo principio es usado por algunas embarcaciones para detectar submarinos, características del fondo, presencia de peses, etc. Como el sonar que disponemos en el laboratorio mide la posición del orden de 30 a 40 veces pos segundo, es posible obtener un gráfico de la posición en función del tiempo ($x(t)$). A partir de estos gráficos podemos obtener la velocidad y la aceleración en función del tiempo. El rango de medición de esta dispositivo es de 0.5 m a unos 6 m aproximadamente. El fotointerruptor consiste en una orquilla que dispone de un haz de luz infrarroja, que es emitido por un extremo de la orquilla y detectado por el otro extremo. Si un objeto interrumpe el haz, este dispositivo envía un pulso a la computadora. Por lo tanto con el mismo es posible medir intervalos de tiempos entre dos o más interrupciones de luz. Si conocemos la distancia entre las interrupciones podemos obtener tanto la posición como la velocidad en función del tiempo. La propiedad más importante de este dispositivo es su precisión. Mide tiempos con una precisión de aproximadamente 0.1 ms.

Propuesta 1.- Medición de distancias usando un sensor ultrasónico

Equipamiento recomendado: Detector de movimiento ultrasónico conectado a una computadora.

1. Usando el detector de movimiento (d.m.) conectado a la PC, apunte el mismo al suelo o la pared y estudie tanto la precisión (mínima distancia que puede detectar) y la exactitud (como se compara la medición con lo que mide una regla confiable) del mismo. Para lo primero puede marcar sobre la mesa distancias medidas con una regla desde la pared, coloque el detector de movimiento en dichas posiciones y mida dicha distancia con el d.m. De ser posible realice una calibración del mismo, es decir construya un gráfico de las distancias reales en función de las distancias medidas con el d.m. Para estudiar la sensibilidad coloque un cuaderno a una distancia conocida sobre una regla graduada. Mueve levemente el cuaderno unos pocos mm y determine la mínima variación en distancia que el d.m. puede medir confiablemente, es decir que la variación sea mayor que las fluctuaciones naturales de la distancia.

2. Defina una línea imaginaria que coincida con el eje del d.m. El d.m. emite un haz de ultrasonido en forma de cono divergente, con un ángulo de abertura de unos 15^0 aproximadamente. Usando un libro o una carpeta en el pecho como blanco y apuntando con el d.m. al libro o cuaderno colóquese a 1 m del detector. Inicie la adquisición de datos. Después de alguno segundos comience a retroceder lentamente, cuidando que el haz incidente choque siempre con el blanco en lo posible perpendicularmente. Al legar a unos 2 m de distancia deténgase un instante y regrese a su posición inicial y deténgase nuevamente al llegar allí. Realice un gráfico de la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Usando estos gráficos, describa con palabras todas las características de estos gráficos y los aspectos más sobresalientes. Discuta si los mismos son una descripción adecuada de los que aconteció durante el experimento.
3. De nuevo colóquese a un metro del d.m. con el cuaderno o libro de blanco. Esta vez mueva el blanco hacia el detecto y aléjelo nuevamente en forma regular. En otras palabras haga oscilar el objeto en frente del d.m. Grafique la posición, velocidad y aceleración en función del tiempo. Observe que tanto la posición, como la velocidad y la aceleración pasan por máximos y mínimos, sin embardo ni lo máximos ni los mínimos coinciden en el tiempo. ¿Cómo se explica estos resultados?
4. Para el ensayo anterior, grafique la velocidad en función de la posición, este tipo de representación se llama diagrama de fases, explique las características de este gráfico.

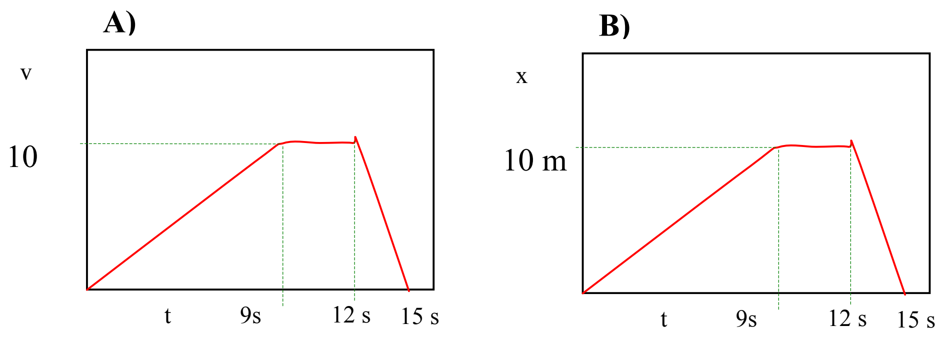


Figura 1 – Representación de la velocidad en función de tiempo A) y posición en función de tiempo, B).

Referido a los gráficos de la figura 1, para cada uno de ellos, construya los gráficos de :

- x en función de t,
- v en función de t y
- a en función de t.

Actividad 2 Órdenes de magnitud

Objetivo

Estimar el orden de magnitud de una longitud microscópica a partir de mediciones de longitudes macroscópicas. Medición de pequeñas distancias: dimensiones moleculares

Introducción

La molécula de ácido oleico consiste en una larga cadena hidrocarbonada que tiene un extremo ácido hidrófilo (polar), mientras el resto de la cadena de hidrocarbono es hidrófobo (no polar), como lo son las cadenas de hidrocarburo en general. De este modo, en contacto con agua, los extremos hidrófilos de las moléculas de ácido se asocian con el entorno acuoso y los extremos hidrófugos se alejan lo más posible del agua. Así, sobre la superficie del agua las moléculas de ácido oleico se orientan formando una película que consiste de una capa de moléculas (monocapa). Por lo tanto, midiendo el espesor de la capa se puede estimar el tamaño de la molécula.

Propuesta 2.- Estimación de las dimensiones de una molécula

Equipamiento recomendado: Ácido oleico de concentración conocida. Bandeja playa de unos 30 *cm* de diámetro aproximadamente o más grande.

Para realizar este experimento, se requiere preparar una solución de ácido oleico en alcohol etílico de 0.5% en volumen aproximadamente y disponer de una cubeta de agua con un diámetro algo mayor que 30 *cm*.

- Usando una probeta graduada y un cuentagotas, determine el volumen promedio de una gota de la solución preparada. ¿Cuál es el volumen de ácido oleico en la misma?
- Midiendo el diámetro de la mancha de aceite que deja al caer la gota sobre la cubeta de agua, donde se haya espolvoreado previamente talco, tiza o pimienta para visualizar mejor la mancha, determine el espesor de la capa de aceite.
- Verifique que la capa de ácido oleico tiene aproximadamente siempre el mismo espesor. Para ello vierta distintos volúmenes V de ácido oleico al agua y mida el diámetro D de la mancha resultante. Si el espesor e de la mancha se mantuviera constante, independientemente del volumen vertido, esperaríamos que el área $A = V / e$ de la mancha fuese proporcional al volumen V, o lo que es lo mismo, D^2 sería proporcional a V. Represente, por ejemplo, D^2 versus V. ¿Qué concluye de sus observaciones respecto de la constancia o no del espesor? Estime el orden de magnitud de la longitud de la molécula de ácido oleico. Estime los errores involucrados en estas mediciones.

Bibliografía

1. *Guía del laboratorio de física,* Physical Science Study Committee (PSSC), Reverté, Madrid (1972).

Actividad 3 - Tiempo de reacción

Objetivo

Determinación del tiempo de reacción de personas ante estímulos visuales y auditivos.

Introducción

Cuando una persona tiene que realizar alguna acción en respuesta a un dado estímulo (visual, auditivo, táctil), transcurre un cierto tiempo entre la recepción del estímulo y la ejecución de la acción. Este intervalo de tiempo se conoce como tiempo de reacción de una persona. Esto sucede, por ejemplo, cuando una persona que conduce un vehículo tiene que frenarlo luego de visualizar un obstáculo en el camino, o cuando un atleta en la línea de partida debe decidir que empieza la carrera después de que escucha la señal de largada dada por el juez de la competencia. Estas demoras en la reacción están reguladas por dos efectos. El primero es el tiempo de tránsito del estímulo en los órganos sensible correspondientes (ojo, oído, etc.). El segundo tiene que ver con el tiempo que pasa entre los impulsos nerviosos y el movimiento de los músculos.

Actividad

Equipamiento recomendado: regla de unos 30 *cm* o más larga.

El propósito de esta actividad es medir el tiempo de reacción de por lo menos tres personas: Ud. y algunos de sus compañeros. Para ello puede realizar el siguiente experimento. Sujete una regla de por lo menos 50 *cm* de longitud ente sus dedos y pida a la persona a la que le desea medir el tiempo de reacción que coloque una mano unos 10 cm más debajo de la suya y en la posición de un punto bien definido de la regla, con los dedos índice y pulgar abiertos alrededor de la regla. Por ejemplo, los dedos podrían estar en la marca de los 10 *cm*, cuidando de que no toquen la regla. Esta persona deberá asir la regla apenas vea que Ud. la soltó. Desde luego, no debe haber ningún aviso previo, solo debe tratar de agarrar la regla con los dedos cuando se dé cuenta que la misma ha sido soltada por Ud.

- Mida en cada prueba la distancia que la regla cayó desde la marca de referencia (los 10 *cm*). Suponiendo que la regla cae con movimiento uniformemente acelerado y que *g*, la aceleración debida a la gravedad es aproximadamente 9.8 m/s^2, calcule para cada prueba el tiempo de reacción.

- De ser posible trate de realizar un histograma de los distintos tiempos de reacción. ¿Cuál es el valor medio de este tiempo para cada uno de los participantes y cuál es la desviación estándar de la misma?

- El tiempo de reacción obtenido es en respuesta a un estímulo visual. Diseñe un experimento con el que pueda medir el tiempo de reacción ante un estímulo auditivo. Compare los tiempos de reacción en respuesta a los distintos estímulos.

- En lo posible consulte la Ref.[1] y compare sus datos con los de otras fuentes.

Observaciones

En mediciones de tiempos usando un instrumento activado manualmente, como por ejemplo cuando se emplea un cronómetro (analógico o digital), el operador introduce una incertidumbre en la definición de los intervalos que está asociada a su tiempo de reacción. Esta incertidumbre debe considerarse en el momento de estimar la incertidumbre total de la medición de tiempos.

Bibliografía

1. *The time delay in human vision*, D. A. Wardle, Phys. Teach. **36**, 442 (1998).

2. Ver, por ejemplo, el artículo de Romi Nijhawan, Nature **370**, 256 (1995).

Unidad 2

Tratamiento estadístico de datos

Histogramas y distribución estadística

Consideremos una población de personas de una ciudad. Queremos analizar cómo se distribuyen las estaturas de la población. Para llevar adelante este estudio podemos medir la altura de todos los individuos de la *población*, o bien tomar una *muestra representativa* de la misma a partir de la cual inferiríamos las características de la población.

Esta clase de estudio es un típico problema de estadística. Si tomamos una muestra de tamaño N y para la misma medimos la altura de cada individuo, este experimento dará N resultados: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$. Todos estos datos estarán comprendidos en un intervalo de alturas (x_{min}, x_{max}) entre la menor y mayor altura medidas.

Una manera útil de visualizar las características de este conjunto de datos consiste en dividir el intervalo (x_{min}, x_{max}) en m subintervalos delimitados por los puntos $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_m)$; a estos subintervalos los llamaremos el *rango de clases*. Seguidamente, contamos el número n_1 de individuos de la muestra cuyas alturas están en el primer intervalo $[y_1, y_2)$, el número n_j de los individuos de la muestra que están en el j-ésimo intervalo $[y_{j-1}, y_j)$, etc., hasta el m-ésimo subintervalo. Aquí hemos usado la notación usual de corchetes, […], para indicar un intervalo cerrado (incluye al extremo) y paréntesis comunes, (…), para denotar un intervalo abierto (excluye el extremo).

Con estos valores definimos la función de distribución f_j que se define para cada subintervalo como:

$$f_j = \frac{n_j}{\sum_j n_j} \tag{2.1}$$

Esta función de distribución está normalizada, es decir:

$$\sum_{j=1}^{m} f_j = 1 \tag{2.2}$$

El gráfico de f_j en función de x_j $[x_j = (y_{j-1} + y_j)/2]$ nos da una clara idea de cómo se distribuyen las alturas de los individuos de la muestra en estudio. Este tipo de gráfico se llama un *histograma* y la mayoría de las hojas de cálculo de programas comerciales (Excel, Origin, etc.) tienen herramientas para realizar las operaciones descriptas y el gráfico resultante. En la Fig. 2.1 ilustramos dos histogramas típicos.

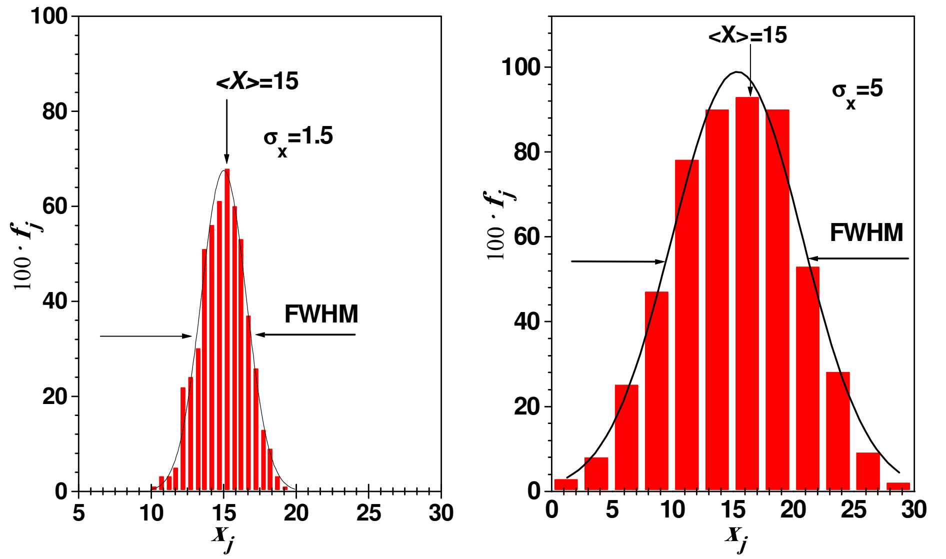


Figura 2.1. Histograma de dos muestras con igual valor medio pero con distintos grados de dispersión. En este ejemplo, los datos tienen una distribución gaussiana o normal, descripta por la curva de trazo continuo.

Tres parámetros importantes de una distribución son:

- El valor medio: $\bar{x} = \langle x \rangle = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot f_j = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$ (2.3)

- La varianza: $Var(x) = \sigma_x{}^2 = \sum_{j=1}^{m} (x_j - \bar{x})^2 \cdot f_j$

  (2.4)

- La desviación estándar: $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$ (2.5)

El valor medio (también llamado media y promedio) **<x>** da una idea de la localización del centro de masa (centroide) de la distribución. La desviación estándar σ_x es una medida de la dispersión de los datos alrededor del promedio. Cuando más concentrada esté la distribución de valores alrededor de **<x>,** menor será σ_x, y viceversa.

Una distribución de probabilidad muy común en diversos campos es la *distribución gaussiana o normal*, que tiene la forma de una campana como se ilustra en trazo continuo en la Fig. 2.1. La expresión matemática de esta distribución es:

$$f(x) = N(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.6}$$

La "campana de Gauss" está centrada en m y su ancho está determinado por la desviación estándar σ. Los puntos de inflexión de la curva están en $x-\sigma$ y $x+\sigma$. El área de esta curva entre estos dos puntos constituye el 68.3% del área total. El área entre $x-2\sigma$ y $x+2\sigma$ es del 96% del total. Es útil caracterizar para esta función el ancho a mitad de su altura, que está relacionado con σ a través de la expresión: FWHM = 2.35σ (FWHM, de "full width half maximum").

Cuando se desea comparar un histograma no normalizado con una curva normal, es necesario contar el número total de datos N_t, el valor medio de los mismos, $\bar{x}$, y la desviación estándar de los datos, σ_x. Para comparar el histograma con la curva normal debemos multiplicar la distribución dada por la Ec. (2.6) por un factor $N_t.\Delta x$, donde Δx es el ancho del rango de clases que suponemos idéntico para cada intervalo.

Aunque la distribución gaussiana ocurre naturalmente en muchos procesos, desde luego no es única y existen muchos tipos de distribuciones de ocurrencia común en la naturaleza.

🕮 Los parámetros más usuales con los que puede caracterizarse la localización de una distribución asociada a un conjunto de N datos son:

a) la media
b) la mediana
c) la moda

La *media* o *promedio* de la distribución se define, según ya vimos, como $\bar{x} = \sum_i^N x_i / N$, y es la media aritmética de los valores observados.

La *moda* corresponde al valor de la variable donde está la máxima frecuencia, o sea, que en un histograma la moda corresponde al valor de la variable donde hay un pico o máximo. Si una distribución tiene dos máximos la denominamos distribución bimodal, si tiene tres máximos trimodal y así sucesivamente.

La *mediana* es el valor de la variable que separa los datos entre aquellos que definen el primer 50% de los valores de los de la segunda mitad. O sea que la mitad de los datos de la población o muestra están a derecha de la mediana y la otra mitad están a la izquierda de la misma.

Mientras que a la media la calculamos usando una fórmula, a la moda la evaluamos directamente del histograma.

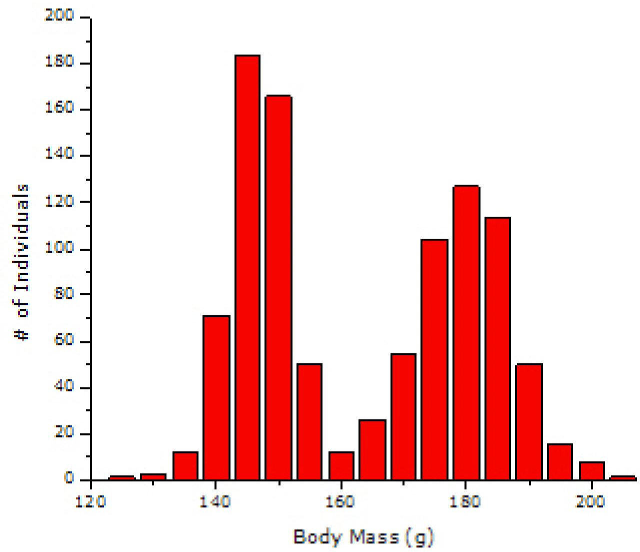


Figura 2.2. Histograma que muestra la distribución de masa una población de animales. Este es un ejemplo de distribución bimodal. Claramente se observan dos picos o máximos (modas) en esta distribución.

Para estimar la mediana tenemos que observar la lista de datos ordenados de menor a mayor, y ubicar el valor central de la lista. Si el número de datos es impar, la mediana corresponde precisamente al valor central. Si el número N de datos es par, la mediana se estima como ½ ($X_{N/2} + X_{N/2+1}$). En una distribución dada, una línea vertical trazada desde la mediana divide a la distribución en dos partes de área equivalentes.

Media, moda y mediana no tienen, en general, porqué coincidir. Estos tres parámetros sí son iguales en el caso de distribuciones unimodales simétricas respecto del valor medio. Este es el caso de una distribución gaussiana. En el caso de una distribución asimétrica, las diferencias entre moda, media y mediana pueden ser sustanciales.

Es importante saber cuál parámetro de localización es más apropiado de usar o más representativo en una dada situación. Consideremos, para fijar ideas, la distribución del ingreso familiar en un país dado. La presencia de millonarios, aunque sean relativamente pocos, tiene un efecto sobre la media que contrarresta a muchos miembros de la población en el extremo inferior de la escala de salarios. De esta manera, la moda y la media difieren sustancialmente. En este caso tal vez la moda es un parámetro más representativo que la media. A menudo los datos estadísticos pueden ser interpretados de diversas maneras. El siguiente ejemplo ilustra las distintas interpretaciones que pueden extraerse de un conjunto de datos estadísticos.

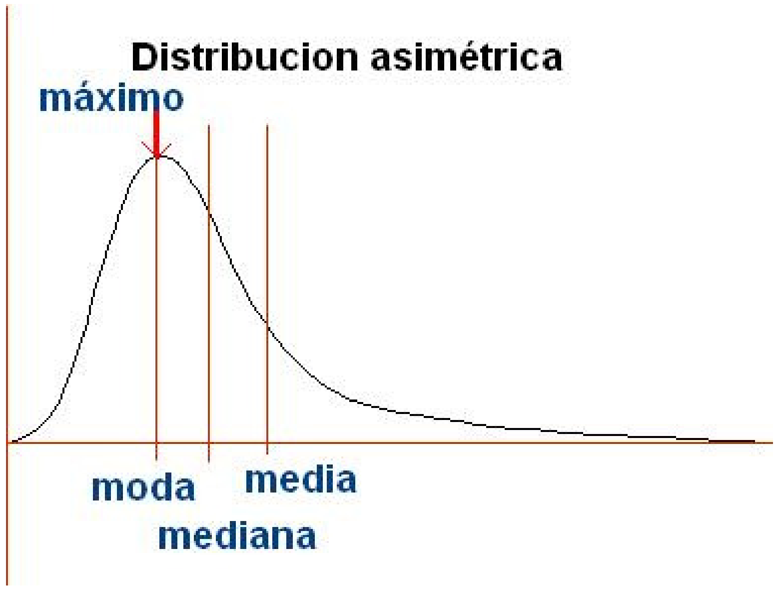


Figura 2.3. Ejemplo de distribución asimétrica unimodal. Nótese que aquí la moda, la mediana y la media (promedio) no coinciden a diferencia de lo que ocurre en una distribución simétrica como las de la figura 2.1

✍ Una empresa analiza la necesidad de discutir los salarios. El cuadro de sueldos es el siguiente:

Director	\$9000
Sub-director	\$5000
1 Asesores	\$2500
2 Encargados	\$ 1350 c/u
Jefe de sección	\$ 1200
6 Obreros	\$600 c/u

La empresa argumenta que el salario medio es \$2000. El delegado gremial sostiene que el sueldo representativo es de \$600. Un político consultado asegura que el salario más representativo es \$900. ¿Qué parámetros tuvo en cuenta para argumentar cada persona participante de la reunión? Calcule la moda, la mediana y la media de los ingresos para esta empresa. Para lograr un aumento que mitigue las diferencias salariales, si fuese dirigente obrero ¿pariría un aumento de porcentaje fijo o un aumento de un monto fijo para todo el personal? Justifique su respuesta.

Magnitud que se mide N veces

Cuando medimos una magnitud una única vez (N = 1), el mejor valor es simplemente el valor medido y su incertidumbre está dada por la incertidumbre nominal, σ_{nom}, que tiene en cuenta los errores del instrumento, del método y de las operaciones. Esto es consistente con la Ec. (1.3), que arroja como resultado $\Delta x = \sigma_{nom}$ cuando no disponemos del término estadístico σ_{est}.

En muchos casos prácticos estamos interesados en el estudio estadístico de la variación de las mediciones y realizamos N mediciones de la magnitud de interés. Por ejemplo podemos estar interesados en analizar la *repetibilidad* de un procedimiento, o en ver el efecto que tienen las *fluctuaciones* de un instrumento sobre las mediciones. Por otra parte, la realización de varias mediciones del mesurando minimiza la incidencia de los errores estadísticos. Dado el carácter aleatorio de estos tipos de errores es claro que, al promediar los resultados, el promedio estará menos afectado de las desviaciones estadísticas que lo que están los valores individuales. En todos estos casos es aplicable el tratamiento estadístico de datos que discutimos seguidamente. El procedimiento que se describe a continuación es un método para analizar estadísticamente las N mediciones y determinar las incertidumbres asociadas al promedio de las mismas. El procedimiento de repetición de mediciones no es aplicable para reducir los errores de carácter sistemático y mucho menos los espurios.

Supongamos que hemos hecho N mediciones de una misma magnitud con resultados $x_1, x_2, ..., x_j, ...x_N$. Estas N determinaciones pueden ser consideradas una *muestra* de todas las posibles mediciones que se podrían realizar (*población*). Bajo condiciones muy generales puede demostrarse que el *mejor estimador* de la magnitud x viene dado por el promedio de los valores:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N} . \tag{2.7}$$

Este resultado es llamado también el *mejor valor*, el *estimador* o el *valor más probable del mesurando*. Llamaremos a

$$\Delta x_j = x_j - \bar{x} \qquad j = 1, 2, ..., N$$

la desviación de cada medición respecto de $\bar{x}$. También definimos la desviación estándar o desviación cuadrática media de cada medición, S_x:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2}{N-1}} , \tag{2.8}$$

que es un *estimador muestral* de la desviación estándar poblacional y da una idea global acerca de la dispersión de los puntos x_j alrededor del promedio $\bar{x}$. Si la distribución es ancha, S_x será grande, mientras que si está afinada alrededor del promedio $\bar{x}$, su valor será pequeño (ver Fig. 2.1). S_x tiene las mismas dimensiones físicas que $\bar{x}$, lo que hace posible compararla directamente con ésta a través del cociente $S_x / \bar{x}$. La calidad del proceso de medición será mayor cuanto menor sea $S_x / \bar{x}$, que en general es una constante del proceso de medición y no depende de N.

Si suponemos ahora que realizamos varias series de mediciones de x, y para cada una de estas series calculamos el valor medio $\bar{x}$, es de esperar que estos valores también se presenten distribuidos (puesto que variarán entre sí) pero con una menor dispersión que las mediciones individuales. Se puede probar que a medida que el número N de mediciones aumenta, la distribución de $\bar{x}$ será normal con una desviación estándar dada por[1,2,4,5]:

$$\sigma_{est} = \sigma_{x} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2}{N.(N-1)}} = \frac{Sx}{\sqrt{N}} . \qquad (2.9)$$

σ_x se llama la *desviación estándar del promedio* y en un experimento es una medida de la *incertidumbre estadística* asociada a $\bar{x}$ en el proceso de medir la magnitud N veces.

📖 Cuando el resultado de una medición se expresa como $(\bar{x} \pm \sigma_{est})$, esto es equivalente a decir que el valor de x está contenido en el intervalo ($\bar{x} - \Delta x$, $\bar{x} + \Delta x$) con probabilidad $p_0 = 0.68$. Esto es equivalente a expresar:

$$P(\bar{x} - \Delta x \ < \ x \ < \ \bar{x} + \Delta x) = p_0 ,$$

que se interpreta como "la probabilidad de que el *mejor estimador* de x esté comprendido entre $\bar{x} - \Delta x$ y $\bar{x} + \Delta x$ es igual a p_0." El valor de p_0 se conoce con el nombre de *coeficiente de confianza* y el intervalo $(\bar{x} - \Delta x , \bar{x} + \Delta x)$ determina un *intervalo de confianza* para x.

Número óptimo de mediciones

Recordemos que S_x mide la dispersión de cada medición y que no depende de N sino de la calidad de las mediciones, mientras que σ_x sí depende de N y es menor cuanto más grande es N [Ec.(2.9)]. En principio parece tentador pensar que si medimos una magnitud un gran número de veces, podremos despreciar la contribución de la incertidumbre estadística en la Ec.(1.3). Ciertamente σ_{est} disminuye al aumentar N, pero desde un punto de vista físico, solo tiene sentido que disminuya hasta hacerse igual o del orden que σ_{nom}, que está determinado por el instrumental y el método de medición. Pensemos que si, por ejemplo, estamos midiendo una longitud con una regla graduada en milímetros, un aumento en el número de mediciones llevará a disminuir la incertidumbre de carácter estadístico, pero *nunca* con este instrumento podremos obtener con certeza cifras del orden de los micrones –por más que realicemos más y más mediciones.

La Ec. (1.3) indica que no es razonable esforzarse en disminuir σ_{est} mucho más que σ_{nom}. El balance óptimo se logra cuando $\sigma_{est} \approx \sigma_{nom}$. Esto nos da un criterio para decidir cual es el número óptimo de mediciones a realizar. Como suponemos que S_X es independiente de N, la idea es hacer un número pequeño de mediciones preliminares N_{prel} –digamos entre 5 y 10– y luego calcular S_X. Puesto que de un análisis previo de las características del instrumento y de los procedimientos ya conocemos σ_{nom}, podemos estimar el número óptimo de mediciones, N_{op}, como

$$N_{op} \approx 1 + \left(\frac{S_x}{\sigma_{nom}} \right)^2 , \tag{2.10}$$

que resulta de imponer la condición $\sigma_x \approx \sigma_{nom}$ y usar la Ec.(2.9); el término unidad del segundo miembro nos asegura que siempre es necesario realizar al menos una medición. Si $N_{op} > N_{\text{prel}}$, se completan las mediciones para lograr N_{op} valores y se recalcula σ_x. Si $N_{op} < N_{\text{prel}}$, no se realizan más mediciones que las preliminares y se usan todas ellas. Finalmente, en todos los casos la incertidumbre absoluta combinada Δx vendrá dada por la Ec. (1.3):

$$\Delta x = \sqrt{\sigma_{nom}^2 + \sigma_x^2} \; . \tag{2.11}$$

Para la mayoría de los casos de interés práctico, si medimos 100 veces una magnitud x, aproximadamente 68 de ellas caerán en el intervalo $(\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x)$, 96 de ellas en el intervalo $(\bar{x} - 2\sigma_x, \bar{x} + 2\sigma_x)$ y 99 de ellas en el intervalo $(\bar{x} - 3\sigma_x, \bar{x} + 3\sigma_x)$. Estos resultados valen estrictamente para el caso en que los errores se distribuyan "normalmente", es decir, si el histograma formado con los resultados de las mediciones adopta la forma de una campana de Gauss.

Decálogo práctico

En resumen, los pasos a seguir para medir una magnitud física X son:

1. Se analizan posibles fuentes de errores sistemáticos y se trata de minimizarlos.
2. Se estima la incertidumbre nominal σ_{nom}
3. Se realizan unas 5 a 10 mediciones preliminares y se determina la desviación estándar de cada medición S_X (2.8).
4. Se determina el número óptimo de mediciones N_{op} (2.10).
5. Se completan las N_{op} mediciones de X.
6. Se calcula el promedio $\overline{X}$ y la incertidumbre estadística σ_x.

7. Se evalúa la incertidumbre absoluta de la medición combinando todas las incertidumbres involucradas (error efectivo (1.3)),
   $\Delta X = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_{nom}^2}$.
8. Se expresa el resultado en la forma $X = \overline{X} \pm \Delta X$ con la *unidad correspondiente*, cuidando que el número de cifras significativas sea el correcto.
9. Es útil calcular e indicar la incertidumbre porcentual relativa de la medición $\varepsilon_X = 100 * \Delta X / \overline{X}$, lo que puede servir en comparaciones con resultados de otras experimentadores o por otros métodos.
10. Si se desea estudiar la distribución estadística de los resultados (por ejemplo si es normal o no), se compara el histograma de la distribución de los datos experimentales con la curva normal correspondiente, es decir con una distribución normal de media $\overline{X}$ y desviación estándar S_X.

Combinación de mediciones independientes

Una situación frecuente en ciencia es la determinación del mejor valor de una dada magnitud usando varios valores provenientes de mediciones independientes (obtenidos por diferentes autores, con diferentes técnicas e instrumentos, etc.). Cada una de estas mediciones independientes puede tener asociada distintas incertidumbres. Es decir, tenemos un conjunto de N mediciones, cada una caracterizada por un par (x_k, σ_k), con k = 1, 2, ..., N. Nuestro objetivo es obtener el mejor valor para la magnitud en discusión. Es claro que al combinar los distintos resultados para obtener el mejor valor, $<x>$, es preciso tener en cuenta las respectivas incertidumbres, de tal modo que aquellas mediciones más precisas contribuyan más ("que pesen más") en el resultado final. Es posible demostrar en este caso que el mejor valor $<x>$ viene dado por[1]:

$$< x > = \frac{\sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{\sigma_k^2}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2}}, \tag{2.12}$$

con una incertidumbre absoluta $\Delta x \equiv \sigma_{<x>}$ dada por[1]

$$\frac{1}{\sigma_{<x>}^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2}. \tag{2.13}$$

🕮 Un caso especial de interés, es cuando tenemos N determinaciones del mesurando, todas ellas con al misma incertidumbre σ. Como puede deducirse fácilmente de la Ec. (2.12) el promedio será:

$$< x >= \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N} ,$$

que, como es de esperar, coincide con la expresión (2.7). La incertidumbre asociada a este valor será, según la Ec. (2.13):

$$\sigma_{<x>} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} ,$$

que coincide con la Ec. (2.9). Además queda ilustrado el significado de σ como una medida de la dispersión asociada a cada medición individual y $\sigma_{<x>}$ como la dispersión asociada al mejor valor.

Discrepancia

Si una magnitud física se mide con dos o más métodos, o por distintos observadores, es posible –y muy probable– que los resultados no coincidan. Decimos entonces que existe una *discrepancia* en los resultados. El término *repetibilidad* se usa para describir la concordancia o no entre varias mediciones realizadas por el mismo observador con el mismo método. En cambio la *reproducibilidad* está asociada a la concordancia o no de mediciones realizadas por distintos observadores o distintos métodos.

Lo importante es saber si la discrepancia es significativa o no. Un criterio que se aplica frecuentemente es el siguiente. Si los resultados de las dos observaciones que se comparan son independientes (caso usual) y tienen como resultados:

$$Medición\ 1: \qquad X_1 = \overline{X}_1 \pm \Delta X_1$$

$$Medición\ 2: \qquad X_2 = \overline{X}_2 \pm \Delta X_2$$

definimos:

$$\Delta X^2 = \Delta X_1^2 + \Delta X_2^2$$

Decimos que con un límite de confianza del *p0* (=68% si los datos tiene distribución normal) las mediciones son distintas si:

$$\left| \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \right| \geq \Delta X ,$$

y que con un límite de confianza del 96% las mediciones son distintas si:

$$\left| \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \right| \geq 2 \cdot \Delta X$$

Estos criterios pueden generalizarse para intervalos de confianza mayores en forma similar. También se aplican cuando se comparan valores obtenidos en el laboratorio con valores tabulados o publicados. Nótese la diferencia entre discrepancia e incertidumbre. La *discrepancia* está asociada a la falta de superposición de dos intervalos (incertidumbres) de dos resultados distintos.

Bibliografía

1. P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).
2. Stuardt L. Meyer, *Data analysis for scientists and engineers* (John Willey & Sons, Inc., New York, 1975).
3. *Statistics: Vocabulary and symbols,* International Organization of Standarization (ISO), Suiza; http://www.iso.ch/infoe/sitemap.htm.
4. Spiegel y Murray, *Estadística*, 2da ed. (McGraw Hill, Schaum, Madrid, 1995).
5. H. Cramér, *Teoría de probabilidades y aplicaciones* (Aguilar, Madrid, 1968); H. Cramér, *Mathematical method of statistics* (Princeton University Press, New Jersey, 1958).
6. D. C. Baird, *Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*,: Pearson Educación, México 1991.

Actividad 3 Histogramas

Objetivo

El objetivo de estos experimentos es analizar una serie de mediciones de una magnitud usando conceptos básicos de estadística y mediante la construcción de un histograma.

Introducción

Cuando se realizan N mediciones de una misma magnitud X en condiciones de repetibilidad (es decir, cuando se realizan las mediciones independientes bajo las mismas condiciones, igual método y observador), un estudio interesante y recomendado es efectuar un análisis estadístico de los datos y expresar el resultado de la medición en términos de los estimadores estadísticos *valor medio* $<x>$, *desviación estándar de la muestra* S_x y *desviación estándar del valor medio* σ_x. Los datos obtenidos pueden representarse en un histograma del cual puede apreciarse cómo es la distribución de valores. El mismo tipo de análisis puede emplearse en un proceso de control de calidad cuando se estudia un *lote* de un producto a controlar y se analiza el grado de dispersión de alguna de sus propiedades alrededor de un valor medio.

Propuesta 1.- Histograma obtenido artesanalmente

Usando una regla que no exceda 20 cm, realice del orden de 100 mediciones de la longitud de la mesa que ocupa o la altura de una puerta. Realice las mediciones lo más rápido que pueda. Divida el trabajo entre los miembros de su equipo.

- Con los datos obtenidos por cada observador, realice un histograma que muestre la frecuencia de ocurrencia de cada medición.
- Para cada conjunto de mediciones, determine el mejor valor de la longitud $<x>$, la desviación estándar de la muestra (o la desviación estándar cada medición) S_x, y la desviación estándar del promedio σ_x. Si usa Excel ®, la función *Desvest* calcula directamente la desviación estándar de la muestra, o sea S_x.
- Reúna también todas las mediciones en un solo histograma y determine el valor medio de todos los valores obtenidos, la desviación estándar y la desviación estándar del promedio.

- Usando los valores medios y los de las desviaciones estándares para cada conjunto de datos, represente sobre cada uno de los histogramas las curvas de Gauss correspondientes a estos parámetros. **NOTA:** Cuando se desea comparar un histograma no normalizado (es decir un histograma cuya área no sea la unidad) con una curva normal, es necesario calcular el número total de datos N_t en el conjunto, el valor medio de los mismos, $\bar{x}$ y la desviación estándar de dichos datos, σ_x. Si supondremos que el rango de clases está equiespaciado con una separación $\Delta x(= x_i - x_{i-1})$. Para comparar el histograma con la curva normal debemos multiplicar la distribución (1) por el factor N_t. Δx. Curva de Gauss de valor medio <x> y desviación estándar σ_x .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-<x>}{\sigma}\right]^2} \quad , \; -\infty < x < +\infty \qquad (1)$$

- ¿Qué puede decir acerca del carácter de la distribución de los resultados obtenidos en sus mediciones? ¿Están los valores distribuidos normalmente?

- Compare el valor de la desviación estándar del promedio con el error nominal del instrumento usado. ¿Cómo expresa sus resultados finales y sus errores? ¿Cuál debería haber sido el número óptimo de mediciones a realizar para determinar el valor del mesurando?

- A partir de sus datos, indique cuántos datos caen dentro del intervalo ($<x> \pm \sigma_x$).

- ¿Qué porcentaje de los datos caen fuera del intervalo ($<x> \pm 2\sigma_x$)?

Propuesta 2.- Histogramas de mediciones usando fotointerruptores

Equipamiento básico recomendado: Fotointerruptor conectado a una PC para medir tiempos con apreciación nominal de orden de 0.1 *ms*.

Estos dispositivos consisten en un par formado por un emisor de luz infrarroja (led) y un detector de esta radiación (fototransistor). Cuando se interrumpe la luz infrarroja que llega al detector, el fotointerruptor (***F.I.***) genera un pulso cuya duración en tiempo es igual al tiempo de interrupción de la luz. En general estos dispositivos se conectan al puerto serie de una computadora, otros puertos de la misma o través de una interfase. Usando un programa especial es posible usar el fotointerruptor para medir tiempos o intervalos de tiempo. La mayoría de los fotointerruptores comerciales miden tiempos con una precisión nominal del orden del 0.1 ms. Desde luego existen varias firmas comerciales que producen estos dispositivos y también pueden ser construidos artesanalmente. Con un F.I. podemos también medir frecuencias, períodos de oscilación, longitudes (si la velocidad de un objeto es conocida), etc. La clave para lograr un histograma que ilustre la distribución de los errores en una serie de mediciones, es que el conjunto de mediciones se realice con una precisión menor que las desviación estándar de las mismas (o sea que $\sigma_{ap} < S_x$). Una forma de obtener fácilmente un histograma con un ***F.I.*** Consiste en usar un motor pequeño de baja velocidad (del orden de 100 revoluciones por minuto o menos) con una hélice o ventilador de una aspa. El ***F.I.*** permite realizar muchas mediciones del tiempo transcurrido entre dos de bloqueos sucesivos del haz luminoso.

- Implemente esta idea usando un *F.I.* y construya al menos dos histogramas de los períodos de revolución.
- Realice un análisis similar al indicado en la sección anterior.

Bibliografía

1. *Experimentación*, D. C. Baird, Prentice Hall (1995).

Unidad 3

Mediciones indirectas

Propagación de incertidumbres

Hay magnitudes que no se miden directamente, sino que se derivan de otras que sí son medidas en forma directa. Por ejemplo, para conocer el área de un rectángulo se miden las longitudes de sus lados; para determinar la velocidad de un vehículo se miden independientemente distancias e intervalos de tiempo. La pregunta que queremos responder aquí es cómo las incertidumbres en las magnitudes que se miden directamente *se propagarán* para contribuir a la incertidumbre de la *magnitud derivada* que se calcula usando una expresión. Sólo daremos los resultados, para mayor detalle se recomienda consultar la bibliografía citada. La Fig. 3.1 ejemplifica el concepto de propagación cuando una magnitud y y su incertidumbre Δy se calculan a partir de otra x a la cual conocemos su mejor valor x_0 y su incertidumbre Δx.

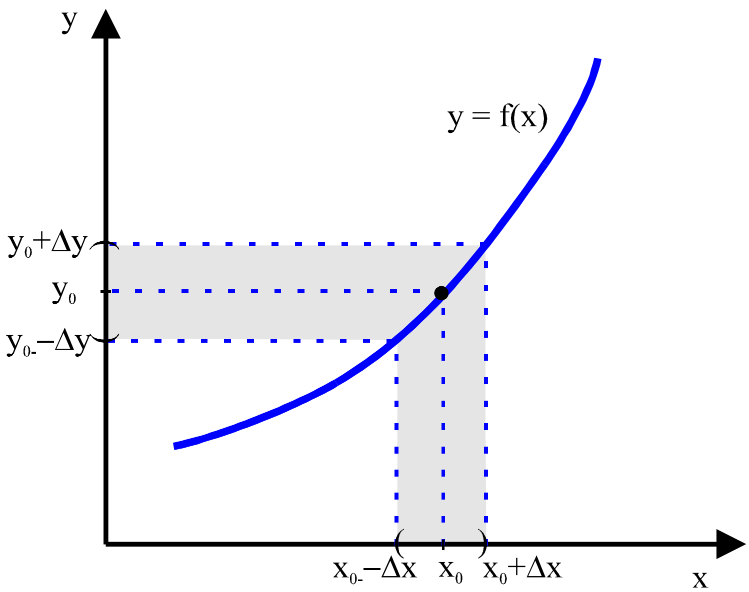


Fig. 3.1 Influencia de la incertidumbre de una magnitud x en la determinación de la incertidumbre de una magnitud derivada.

Tomemos un caso general en el que una magnitud V sea una función de varias magnitudes $x, y, z, \ldots$:

$$V = V(x,y,z,...), \tag{3.1}$$

y que x, y, z, …, todas independientes entre sí, se midieron directamente y que conocemos sus valores $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$, $\langle z\rangle$, … e incertidumbres Δx, Δy, Δz, … Se puede demostrar que la incertidumbre de V , ΔV, está dada por[1]:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \cdot \Delta x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \cdot \Delta y^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \cdot \Delta z^2 + \cdots} \tag{3.2}$$

Esta ecuación es la *fórmula de propagación de incertidumbre*. La notación $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, … indica derivación parcial de la función V respecto de las variables independientes x, y, z,… y la fórmula se evalúa para los valores $\langle x\rangle$,$\langle y\rangle$,$\langle z\rangle$, …

En el caso especial en que la función $V(x,y,z,..)$ sea factorizable$^{\Psi}$ en potencias de x, y, z,…, la expresión anterior puede ponerse en un modo muy simple. Supongamos que la función en cuestión sea:

$$V(x,y,z) = a.\frac{x^n \cdot y^m}{z^l} \tag{3.3}$$

donde a es una constante. La aplicación de la fórmula de propagación da:

$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{n^2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2 \cdot \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + l^2 \cdot \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2} \quad . \tag{3.4}$$

Para cálculos preliminares, esta expresión puede aproximarse por:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx n \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + m \cdot \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + l \cdot \left|\frac{\Delta z}{z}\right| . \tag{3.5}$$

Otro caso particular de interés es

$$Z = x \pm y.$$

Usando la Ec. (3.2) obtenemos:

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 . \tag{3.6}$$

$^{\Psi}$ Por factorizable queremos significar, que la expresión de $V(x,y,z,..)$ contiene las variables independiente en términos que están multiplicados, como por ejemplo la expresión (3.3) .

En muchas ocasiones no disponemos de una función analítica que represente a la magnitud de interés en función de las variables de las que sabemos que depende y, por lo tanto, no podemos aplicar la Ec. (3.2) para propagar la incertidumbre.

Tomemos el caso de un experimento que requiera como dato la densidad del agua a la temperatura ambiente. Supongamos que decidimos no medir la densidad del agua sino que vamos a obtenerla de una tabla de densidades, frecuentemente incluidas en manuales de física y química.

Si la temperatura medida es $T = (23.0 \pm 0.5)$ ºC, ¿cómo obtenemos de la tabla el dato de la densidad y cómo le asignamos su incertidumbre?

Lo que hacemos es ingresar a la tabla[*] y obtener la densidad $\langle\rho\rangle$ a la temperatura $\langle T\rangle = 23.0$ ºC. De la tabla extraemos:

$$\text{a } \langle T\rangle = 23\ \text{ºC} \quad \rightarrow \quad \langle\rho\rangle = 0.997538\ \text{g/cm}^3.$$

También extraemos de la tabla la densidad para los valores extremos del intervalo de temperatura:

$$\text{a } \langle T\rangle - \Delta T = 22.5\ \text{ºC} \rightarrow \quad \rho_1 = 0.997655\ \text{g/cm}^3$$
$$\text{a } \langle T\rangle + \Delta T = 23.5\ \text{ºC} \quad \rightarrow \quad \rho_2 = 0.997418\ \text{g/cm}^3.$$

Estos valores ρ_1 y ρ_2 dan un margen de incertidumbre al dato de la densidad del agua debido a la incertidumbre de la medición de la temperatura. También vemos que el valor $\langle\rho\rangle$ no está en el centro del intervalo que definen los valores extremos ρ_1 y ρ_2 (intervalo de incertidumbre asimétrico debido a la variación no–lineal de la densidad del agua con la temperatura). Podemos proponer $\Delta\rho$ como

$$\Delta\rho \approx (\rho_1 - \rho_2)/2 \approx 0.0001\ \text{g /cm}^3,$$

con lo que resulta

$$\rho = (0.9975 \pm 0.0001)\ \text{g/cm}^3,$$

cuyo valor e incertidumbre usaríamos en los cálculos sucesivos que involucren a la densidad del agua en los experimentos.

Truncación de números: Se desea determinar la densidad de un cuerpo y para ello se procede a medir su volumen, que da como resultado $V = (3.5 \pm 0.2)$ cm^3 ($\varepsilon_V\% = 6\%$) y su masa $m = (22.7 \pm 0.1)$ g ($\varepsilon_m\%=0.4\%$). A la densidad la calculamos por su definición operacional: $\rho = m / V$. Si realizamos este cociente con una calculadora que presenta resultados con 10 cifras, obtenemos:

[*] Ver, por ejemplo, Handbook of Chemistry and Physics (The Chemical Rubber Co.).

$$\rho = 22.7 / 3.5 = 6.485714286 \ \ g / cm^3.$$

La mayoría de estas cifras no son significativas y debemos truncar el resultado. Para saber dónde hacerlo, debemos propagar la fórmula de la densidad, encontrar su incertidumbre y luego ver qué cifra del resultado afecta. Usando la Ec. (3.5) obtenemos

$$\Delta\rho/\rho \approx 0.06.$$

Por lo tanto,

$$\Delta\rho \approx 0.4 \text{ g/cm}^3,$$

que indica que el valor de la densidad debe incluir una sola cifra decimal como cifra significativa. Sin embargo, al truncar el número 6.4857… debemos tener en cuenta que el número más cercano a él y con una sola cifra decimal es 6.5 y no 6.4, siendo éste último lo que resultaría de un corte automático de dígitos. Finalmente, el valor que obtenemos para ρ es:

$$\rho = (6.5 \pm 0.4) \text{ g/cm}^3 \quad \text{y} \quad \varepsilon_\rho\% = 6\%.$$

Es importante tener en cuenta este criterio de truncación toda vez que realizamos una operación usando una calculadora o computadora.

☺ **Midiendo π:** Sabemos que el perímetro (p) de un círculo está relacionado con su diámetro (d) por la expresión $p = \pi.d$, por lo tanto a través de mediciones de diámetro y perímetro es posible "medir π". Diseñe un experimento que le permita realizar esta medición. Obtenga π con este método y dé la incertidumbre del resultado, $\Delta\pi$. Compare con el valor tabulado de esta constante. Consulte sobre otros métodos para obtener π experimentalmente. En particular discuta si con el experimento de Buffon se puede obtener mayor precisión.

Puede encontrarse información adicional en las páginas de Internet:

http://www.angelfire.com/wa/hurben/buff.html y
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/1719/

Elección de los instrumentos

Un aspecto importante a tener en cuenta antes de proceder a realizar una medición, es la elección de los instrumentos más apropiados para medir con la tolerancia o error requerido. Ignorar este paso puede acarrear importantes pérdidas de tiempo y dinero. Si se excede la tolerancia requerida, seguramente se dilapidó esfuerzo y recursos innecesariamente; por el contrario, si se realizó la medición con menos precisión que lo requerido, la medición podría ser inútil para los fines perseguidos.

Para ver cómo operar frente a esta elección de instrumental supongamos que nuestro problema es determinar con una precisión del 1% el volumen de un alambre, cuyo diámetro es $d \approx 3$ mm y su longitud $L \approx 50$ cm. ¿Qué instrumentos debemos usar para lograr nuestro objetivo con el menor costo?

Lo que debemos lograr es $\Delta V/V \approx 0.01$. Como $V = \pi d^2 L/4$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &\approx \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2\cdot\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L} \\ 0.01 &\approx 0.001 + 0.006 + 0.002 \end{aligned}$$

La primera expresión es una aplicación de la Ec.(3.5), siendo esta aproximación útil y suficiente para este análisis preliminar. La asignación de valores de la segunda línea es en cierto modo arbitraria, pero hemos respetado que la incertidumbre relativa no supere el 1% requerido. Al número π le asignamos una incertidumbre relativa pequeña, y con esto determinaremos con cuántas cifras usaremos π sin que el error de truncación de π afecte significativamente nuestra medición. Nótese que la calidad de la medición del diámetro tiene mayor incidencia (su incertidumbre relativa está multiplicada por 2) que la de la longitud L y esto es porque el volumen es proporcional a d^2 y solo proporcional a L a la primera potencia. Por esta razón hemos asignado mayor tolerancia (mayor precisión) a la medición de d que a la medición de L. Con esta asignación preliminar decidimos cuáles instrumentos son los más adecuados para realizar el experimento (en general, los más adecuados son los que hacen la medición más fácil, en menor tiempo, con el menor costo y que cumplan los requisitos exigidos).

Como

$$\frac{\Delta d}{d} \approx 0.003 \Rightarrow \quad \Delta d \approx 0.003 \cdot d = 0.003 \cdot 3\text{mm} \approx 0.009\text{mm} \approx 0.01\text{mm},$$

debemos usar, cuanto menos, un tornillo micrométrico para medir d.

De manera similar tenemos para la medición de L:

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 0.002 \Rightarrow \quad \Delta L \approx 0.002 \cdot L = 0.002 \cdot 50\text{cm} \approx 1\text{mm},$$

por lo tanto una regla común graduada en milímetros será suficiente para medir L.

Para π tenemos:

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} \approx 0.001 \Rightarrow \quad \Delta \pi \approx 0.001 \cdot \pi = 0.001 \cdot 3 \approx 0.003,$$

que indica que debemos usar π con 3 o más cifras decimales para que el error de truncamiento tenga una incidencia despreciable. Por lo tanto, la elección $\pi = 3.1416$ sería adecuada en el presente caso.

Nótese que hasta ahora todo es preliminar y solo hemos elegido los instrumentos a medir. Luego de esta elección, llevamos a cabo las mediciones usando estos instrumentos y procedemos para la medición de d y L. Nótese también que para elegir los instrumentos a usar debemos conocer el valor aproximado de los valores a medir, lo que parecería una paradoja. No obstante, para este análisis preliminar sólo es necesario tener una idea de los órdenes de magnitud y no un valor muy exacto. Este orden de magnitud se puede obtener por una inspección visual o una medición rápida. Finalmente, una vez que realicemos las mediciones de d y L debemos usar la fórmula correcta de propagación de la Ec.(3.2) para calcular la incertidumbre combinada ΔV.

Bibliografía

1. P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).
2. *Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 1st ed., International Organization of Standarization (ISO), Suiza (1993); http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html.

Ejercicios y problemas

1) Se realizaron mediciones del Radio de la Tierra (R_T), su distancia al Sol (d_{ST}) y la distancia Sol Marte (d_{SM}). Los resultados fueron *i*) $R_T = (6.38 \pm 0.02)\mathrm{x}10^6$ m , *ii*) $d_{ST} = (1.50 \pm 0.02)\mathrm{x}10^{11}$ m y *iii*) $d_{SM} = (2.28 \pm 0.02)\mathrm{x}10^{11}$ m
   a) Compare los errores absolutos y relativos de estas mediciones. ¿Cuál medición tiene el menor error absoluto? , ¿Cuál medición tiene el menor error relativo?
   b) ¿Cuál de todas estas mediciones tiene mejor calidad?, es decir que conocemos su valor con mayor certeza.
2) El diámetro de una esfera resultó: d=(99.1±0.8) cm. Calcule el error relativo y absoluto del diámetro, de su volumen y de su superficie. i) ¿Cuales de todas estas mediciones tiene mejor calidad? ii) Explique porqué la calidad de todas estas determinaciones no es la misma, si al fin de cuantas todas parten de una misma y única determinación, su diámetro. iii) Exprese correctamente el valor del volumen y el área de la esfera, indicando su mejor valor y su correspondientes errores absolutos y relativos.
3) Exprese correctamente los resultados de las siguientes mediciones.

Medición	25.231	41.352	0.8923	253.33	655.3	120.2
Error absoluto	0.0258	0.258	.0128	36.25	258.3	11.25

   ✓ En cada caso indique los errores relativos porcentuales e indique cual de todas estas determinaciones tiene mejor calidad.

4) Dos estudiantes realizaron las siguientes mediciones de longitudes con una regla graduada en 0.5 mm, sus resultados de estas mediciones en cm fueron:

Estudiante A	11.2	11.5	11.6	10.5	11.9	11.0
Estudiante B	11.5	11.6	11.4	11.5	11.5	11.6

   a) Indiqué como deberían expresar cada uno sus resultados finales. ¿Cual de la mediciones tiene mejor calidad y porque?
   b) Uno de los estudiantes argumenta que ambas mediciones tienen la misma calidad, ya que ambos usaron la misma regla.¿Cómo responde esta pregunta?, ¿Explique la diferencia?
   c) Los resultados encontrados por cada uno ¿son coincidentes o no? O sea ¿hay discrepancia entre ambos resultados?

5) Indique brevemente que son:
   a) los errores sistemáticos, estadísticos y espurios. De un ejemplo de cada uno de ellos.
   b) Indique concisamente los conceptos de errores de definición, de interacción, de exactitud, de apreciación. Dé un ejemplo característico de los mismos.
   c) Se midió una sola vez la longitud de un objeto con un tornillo micrométrico. La longitud medida fue L=15.10 mm. I) Indique cual es su mejor estimación del error absoluto y relativo de esta medición. II) Exprese el resultado de esta medi-

ción en mm, m y km respetando el número de cifras significativas. ¿Cuáles son las cifras significativas en este caso? Justifique su respuesta. III) Escriba el mejor valor de la longitud y su error.

6) Usando los datos de las planillas Excel "Histo1.xls " que le proveerá el instructor o que puede bajarse de Internet (http://www.fisicarecreativa.com/ajp/soft_sg.htm), para cada una de las hojas correspondientes, construya un histograma y calcule los parámetros: media, mediana, moda y desviación estándar. A)En cada unos de los casos, discutan que tipo de distribución muestran sus datos. B) Indiquen si las distribuciones son simétricas o no. C) ¿Son unimodales? D) Si la distribución es simétrica y unimodal, superponga al histograma la curva normal (o de Gauss) que mejor ajuste la distribución observada. E) Si los primeros 50 datos de cada hoja fuesen el resultado de mediciones de una dada magnitud, indique en cada caso el mejor valor de las mismas y su correspondiente error. F) Si las cifras significativas en cada hoja indica cual fue el error nominal en dichas mediciones, indique si las primeras 50 mediciones son un número apropiado o si se necesitan más o tal vez menos. Justifique sus respuestas.

7) Dispone de dos relojes, el reloj A tiene una aguja segundera (da un giro completo en un minuto) y la fase del reloj esta dividida en 60 unidades, este reloj atrasa 10 min por día. El reloj B, tiene segundero pero su fase sólo tiene 24 divisiones, se sabe que este reloj no adelante ni atrasa por más de 5 min en 10 días. A) estime los errores de apreciación y exactitud de ambos relojes. B) Si tiene que medir tiempos del orden de los 50 min con un error menor del 0.1%, cual usaría y porqué?

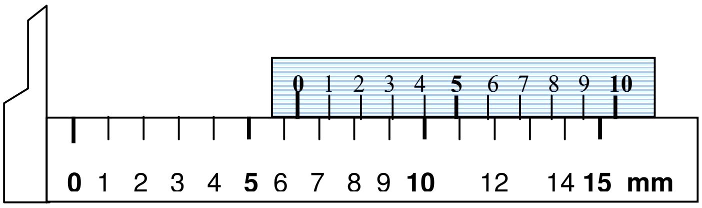
8) Indique brevemente como calificaría los errores siguientes:
   a) Un reloj que adelanta 1 min/semana.
   b) Un estudiante toma como pulgadas las medidas de una regla graduada en cm.
   c) Cuales son las fuentes de error más probable al medir el espesor de un soga blande de algodón con un calibre.
   d) Cuales son las fuentes de error más probable al medir el radio de un árbol. Indique brevemente el procedimiento que usaría para medir el diámetro promedio de un tronco y estimar su error, sin cortar el árbol.
   e) Cuales son las fuentes de error más probable al medir el ancho de su mesa con una regla metálica graduada en mm.
   f) Cuales son las fuentes de error más probable al medir el diámetro de una bolilla de rodamiento de acero de unos 2 cm de diámetro con un calibre.

9) Se midió una sola vez la longitud de un objeto con un calibre de apreciación nominal 1/20 mm. La longitud medida fue L=15.17 mm. Indique cual es su mejor estimación del error absoluto y relativo de esta medición. Escriba el mejor valor de la longitud y su error.

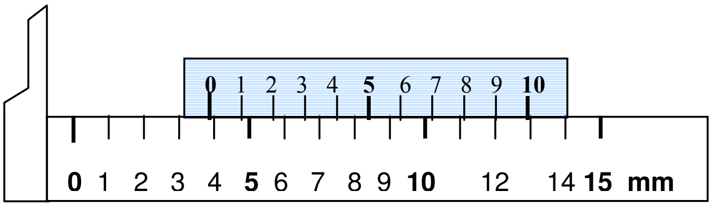
10) Usted ha realizado una serie de mediciones de las cuales debe informar. Indique como lo haría:
   a) $\langle V \rangle = 22.32323$ $\quad \Delta V = 0.002352$
   b) $\langle W \rangle = 2.233259 \times 10^{-2}$ $\quad \Delta W = 1.235 \times 10^{-3}$
   c) $\langle X \rangle = 2.269$ $\quad \Delta X = 0.022$
   d) $\langle Y \rangle = 10002{,}909$ $\quad \Delta Y = 23.230$
   e) $\langle Z \rangle = 100.00234$ $\quad \Delta Z = 0.0921$

11) Se han realizado las siguientes mediciones con un calibre, indique qué magnitud se ha medido y cual es el error nominal. Para ver simulaciones consultar (ver: http://www.cenam.mx/dimensional/java/Vernier/Vernier_f.htm, http://es.wikipedia.org/wiki/Nonio).

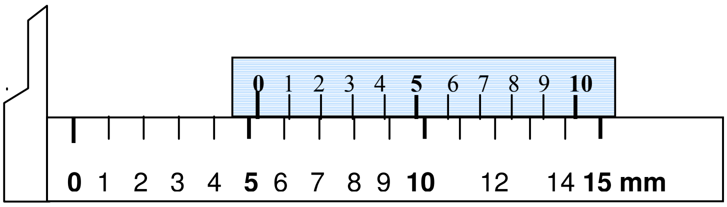
a) ..



b) ..



c) ..



12) Se desea conocer el volumen de un cilindro, las mediciones del diámetro *d* y altura *h* dieron los siguientes resultados:

							Media	**S_x**
d [mm]	61.2	62.3	61.9	61.7	61.5		**61.72**	**0.37**
h [mm][	21.3	21.4	21.5	21.2	21.6		**21.4**	**0.14**

a) ¿Cuál es el error nominal de cada una de estas mediciones? (Suponga que los instrumentos miden hasta la última cifra significativa indicada en las mediciones individuales. Como no tenemos información sobre las características del objeto u otro información, suponga que el error nominal es equivalente al error de apreciación del instrumento)

b) ¿Cuál es el mejor valor de cada una de estas magnitudes?

c) Analice si el número de mediciones de *d* y *h* son adecuado, ¿cual el número óptimo de mediciones de *d* y *h*?

d) ¿Cuáles son los errores absolutos y relativos de *d* y *h*?

e) ¿Cuantas cifras decimales debería tomar para π?

f) Determine el mejor valor del volumen y su error absoluto y relativo.

13) Imagine que desea determinar el volumen de la mina de un lápiz, imagine que tiene la mina separada del lápiz. Determine los instrumentos que necesita para medir su volumen (de la mina) con un error del 2%. ¿Cuántas cifras decimales toma para π?

14) Cuando un rayo de luz pasa de un medio a otro, por ejemplo del aire (*1*) al vidrio (*2*), el haz de luz se desvía siguiendo la ley de Snell. Esta ley establece que si α_1 es el ángulo de incidencia, es decir el ángulo que hace el haz entrante con la normal al plano de separación de los dos medios, α_{21} es el ángulo de refracción, o sea el ángulo que hace el haz saliente con la misma normal: $n_1 .sen\alpha_1 = n_2.sen\alpha_2$. Aquí n_1 y n_2 son los índices de refracción del medio incidente (entrante) y refractante (saliente) respectivamente. Se desea determinar el valor n_2 y su error relativo y absoluto, sabiendo que:

n_1=1.0003±0.0005	α_1=(22.2 ± 0.2)º	α_2=(15.2 ± 0.3)º

- ✓ Si se desea disminuir a la mitad el error relativo de n_2 ¿que sugiere hacer, determinar n_1 con la mitad de su error absoluto o mejorar las determinaciones de α_1 y/o α_2.¿cuáles serían los errores absolutos tolerables para estas cantidades ?

- ✓ ¿Cómo linealizaria la ley de Snell, es decir como definiría las seudovariables *x* e *y* de modo su dependencia sea lineal y la pendiente nos brinde como resultado n_2? La ventaja de esta linelización, es que midiendo distintos valores de (α_1, α_2) todos los valores se pueden combinar para brindar un mejor determinación de n_2.(Ver Cap. 4)

15) Se desea conocer la densidad de una esfera de goma de unos 5 cm de diámetro aproximadamente con un error menor que el 5%. Indique la precisión de los instrumentos que se necesitan usar (incluyendo la balanza). Recuerde que la goma tiene una densidad de aproximadamente 1.5 g/cm^3.

16) Se desea conocer la superficie de una esfera, las mediciones del diámetro *d* dieron los siguientes resultados:

							Media	**S_x**
d [mm]	51.1	52.1	53.2	52.4	53.2		***52.4***	***0.87***

a) ¿Indique con su mejor criterio cual es el error de apreciación del instrumento usado para medir este diámetro?¿Cuál es el error nominal de cada una de estas mediciones?
b) ¿Cual es el mejor valor de cada una de estas magnitudes?
c) Analice si el número de mediciones de *d* son adecuadas, ¿cual el número optimo de mediciones de *d*?
d) ¿Cuáles son los errores absoluto y relativo de *d*?
e) ¿Cuantas cifras decimales debería tomar para π?
f) Determine el mejor valor del área y su error absoluto y relativo.

17) Se midieron las aristas de un prisma y se obtuvieron los siguientes resultados:

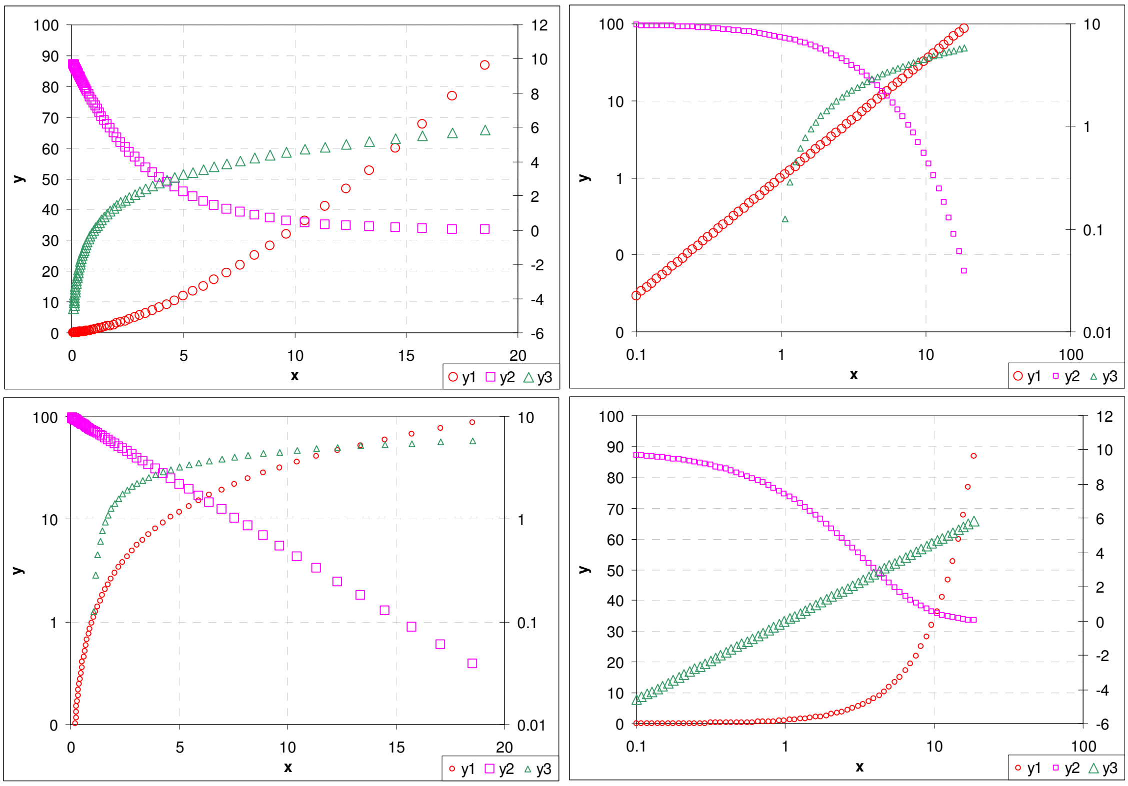
	a [cm]	b [cm]	c [cm]
	4.8	11.1	21.7
	4.4	8.2	20.6
	5.1	12.7	22.3
	5.6	15.8	23.4
	5.6	15.6	23.3
	5.9	17.2	23.9
			19.6

			21.7
			23.2
			20.8
			21.2
			20.1
			20.9
Promedio	**5.240**	**13.437**	**21.628**
Desv.Estan= S_x	**0.57**	**3.41**	**1.40**
Error _ Nominal [cm]	**0.1**	**1**	**0.10**

a) Indique en cada caso si se dispone del número adecuado de mediciones, sino indique las que serian necesarias.
b) Calcule el mejor valor del volumen y su error absoluto y relativo.

Ejercicios y problemas

18) En las siguientes figuras se esquematizan tres relaciones funcionales entre las variables x e y. Los cuatro paneles muestran las mismmas funciones en distintas escaleas. A partir de dichas figuras deduzca que expresión matemática de $y(x)$ representada en cada caso. a) Triangulo, b) circulo, c) cuadrado. En los cuatro graficos las funciones representadas son las mismas.



20) Se desea conocer la constante k de un resorte, las mediciones de pesos colgados P[g] versus estiramientos ΔX[cm] dieron los siguientes valores:

P[g]	0	20	31	39	49.5	62
ΔX[cm]	0	9	14.5	21	24.5	39.7

a) Determine los mejores valores de la pendiente y ordenada al origen de la recta que mejor ajuste sus datos. ¿Cuáles son los errores en estos parámetros? ¿El valor de la ordenada al origen es significativo o es consistente con cero?
b) estime el valor de ***k*** y su error relativo y absoluto. (Use los conceptos del Cap.5, Ec. (24) y(25))

19) Se desea conocer la **constante *k*** de un resorte, las mediciones de pesos colgados P[g] versus estiramientos ΔX[cm] dieron los siguientes valores:

P[g]	0	20	30	50	100	150
ΔX[cm]	0	0.51	0.71	1.25	2.56	3.19

a) Determine los mejores valores de la pendiente y ordenada al origen de la recta que mejor ajuste sus datos. ¿Cuáles son los errores en estos parámetros? ¿El valor de la ordenada al origen es significativo o es consistente con cero?
b) estime el valor de ***k*** y su error relativo y absoluto. (Use los conceptos del Cap.5, Ec. (24) y(25))

20) **I)** Utilizando una planilla de cálculo (como el Excel, por ejemplo) represente en ejes coordenados las funciones y(x) dadas, dentro de una rango de datos que considere representativo. II) Proponga en los casos que sea posible una linealización del gráfico, es decir una parametrización adecuada (definir una seudovariable) o bien una escala apropiada para que la representación grafica de estas funciones sea una recta. Explicite en cada caso las variables representadas y las escalas seleccionadas.

i) $y(x) = \dfrac{15}{x}$

ii) $y(x) = 7e^{-2x}$

iii) $y(x) = \ln(x) - 4$

iv) $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f}$ con: *f=0.5 m*

v) $I(x) = V_0 / \sqrt{R_0^2 + (L \cdot x)^2}$ con: V_0*=1,* R_0*=5 y L=2*