¶4. Anwendungen des Satzes von BAIRE.

Wir kommen nun zu den fundamentalen Resultaten, die aus dem Satz von Baire abgeleitet werden:

—Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit (uniform boundedness principle),
—Satz von Banach-Steinhaus,
—Satz von der offenen Abbildung,
—Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Das erste bedeutende Resultat in diesem Paragraphen ist der *Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit*, das "Uniform Boundedness Principle":

4.1. Theorem. *Es seien X, Y Banachräume, und es sei $(T_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ eine Folge beschränkter Operatoren. Gilt*

$$\sup_n \|T_n x\|_Y < \infty, \qquad \forall x \in X,$$

so folgt bereits

$$\sup_n \|T_n\| < \infty.$$

Interpretation: Aus der punktweisen Beschränktheit folgt schon die gleichmäßige Beschränktheit auf der Einheitskugel in X.

Beweis.
(1) Für $j \in \mathbf{N}$ definieren wir

$$A_j := \{x \in X; \sup_n \|T_n x\|_Y \leq j\},$$

sodaß, nach Voraussetzung, $X = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$.
(2) Beh.: Die A_j sind abgeschlossen.
Bew. der Beh.: Jedes A_j können wir schreiben als

$$A_j = \cap_{n=1}^{\infty} A_{j,n}$$

mit

$$A_{j,n} := \{x \in X; \|T_n x\|_Y \leq j\}, \qquad n, j \in \mathbf{N}.$$

Wegen $\|.\|_Y : Y \to \mathbf{R}$ und $T_n : X \to Y$ stetig sind die Abbildungen

$$\|.\|_Y \circ T_n : X \to \mathbf{R}, \qquad x \mapsto \|T_n x\|_Y\,,$$

für alle $n \in \mathbf{N}$ stetig. Daher ist $A_{j,n}$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0,j] \subset \mathbf{R}$ bezgl. der stetigen Abb. $\|.\|_Y \circ T_n$ abgeschlossen. Folglich ist A_j als Schnitt abgeschlossener Mengen auch selbst abgeschlossen.

(3) Nach dem Satz von BAIRE (Theorem 2.5) gibt es ein $j_0 \in \mathbf{N}$, ein $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset A_{j_0}.$$

$\Longrightarrow$ Für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X < \varepsilon_0$ und alle $n \in \mathbf{N}$ ist

$$\|T_n x\|_Y = \|T_n(x + x_0 - x_0)\|_Y \leq \|T_n(x + x_0)\|_Y + \|-T_n x_0\|_Y \leq 2j_0,$$

also

$$\|T_n\| \leq 2j_0/\varepsilon_0, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

∎

Bem.: Direkter Beweis (ohne Baire) mit der Methode des *"gleitenden Buckels"*; vgl. [Schr].

Bem.: Der Satz gilt analog für Familien $(T_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{B}(X,Y)$, A bel. Indexmenge. Nur geringe Änderungen im Beweis.

Der punktweise Limes einer Folge stetiger Funktionen ist i.a. nicht stetig (die Menge der Unstetigkeitsstellen ist allerdings von 1. Kategorie; vgl. [Y; p. 12]). Im Falle von *linearen* Abbildungen zwischen Banachräumen sieht das freilich besser aus:

4.2. Korollar. *Seien X, Y Banachräume und sei $(T_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Weiter existiere für alle $x \in X$*

$$Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x.$$

Dann ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und es gilt

$$\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \leq \sup \|T_n\| < \infty.$$

Beweis. T linear: klar.
Wegen $\sup \|T_n x\|_Y < \infty$ für alle $x \in X$, folgt aus Theorem 4.1, daß

$$\sup \|T_n\| < \infty,$$

also auch $\limsup \|T_n\| \leq \sup \|T_n\| < \infty$. Es folgt

$$\|Tx\|_Y = \lim \|T_n x\|_Y \leq \limsup \|T_n\| \; \|x\|_X\,, \quad x \in X.$$

Insbesondere ist also T ein beschränkter Operator.
Es gibt eine Teilfolge $(T_{n_j})_{j \in \mathbf{N}} \subset (T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ mit $\lim_{j \to \infty} \left\|T_{n_j}\right\| = \liminf_{n \to \infty} \|T_n\|$. Wenn wir die obige Abschätzung auf diese Teilfolge anwenden, so folgt die Behauptung (d.h., mit "lim inf" anstelle von "lim sup"). ∎

Ende der Vorl. vom 21. 11. 2017.

Bemerkung. Wir kennen jetzt zwei verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen von Operatoren $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$:

(a) die Konvergenz im Banachraum $\mathcal{B}(X,Y)$, oder auch *Norm-Konvergenz* oder *gleichmäßige* Konvergenz, bei der

$$\|T_n - T\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

d.h.,

$$\sup\{\|T_n x - Tx\|_Y \ ; \ x \in X, \ \|x\|_X \leq 1\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

(b) die *punktweise* oder *starke* Konvergenz, bei der

$$\forall x \in X : \|T_n x - Tx\|_Y \to 0, \quad n \to \infty.$$

Man schreibt dann auch $T_n \to_s T$. Norm-Konvergenz impliziert starke Konvergenz, aber nicht umgekehrt; Beispiel in den Übungen!

4.3. Theorem. (Banach-Steinhaus) *Es seien X, Y Banachräume und es sei $(T_n) \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Dann sind äquivalent:*
(i) Es gibt ein $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ mit

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \qquad \forall x \in X.$$

(ii) Es gibt ein $M \geq 0$ mit $\|T_n\| \leq M$, $n \in \mathbf{N}$ und $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existiert für alle x aus einer dichten Teilmenge $D \subset X$.

Bew.: ÜA.

Wenn X, Y Bananchräume sind, dann ist auch $X \times Y$, versehen mit der Norm

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} := \|x\| + \|y\|, \qquad x \in X \quad y \in Y, \qquad (4.1))$$

ein Banachraum (ÜA 20).

4.4. Korollar. *Es seien X, Y Banachräume und*

$$B(.,.) : X \times Y \to \mathbf{C}$$

sei bilinear und separat stetig in beiden Variablen, d.h.,

$$B(x,.) \in \mathcal{B}(Y, \mathbf{C}) = Y', \quad \forall x \in X,$$
$$B(.,y) \in \mathcal{B}(X, \mathbf{C}) = X', \quad \forall y \in X.$$

Dann ist $B(.,.)$ bereits in beiden Variablen zugleich stetig, d.h., es ist $B \in \mathcal{B}(X \times Y, \mathbf{C}) = (X \times Y)'$, wenn wir auf $X \times Y$ die kanonische Norm (Gl. (4.1)) verwenden.

Bem.: Die Stetigkeit von $B(.,.)$ in beiden Variablen gemeinsam bedeutet

$$(x_n \to 0 \text{ in } X, \quad y_n \to 0 \text{ in } Y) \quad \Longrightarrow \quad B(x_n, y_n) \to 0.$$

Beweis von Kor. 4.4: ÜA.

Bemerkung. Die Linearität ist eine entscheidende Voraussetzung. Im $\mathbf{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

separat stetig, aber nicht stetig. (In Polarkoordinaten ist $f = f(r,\vartheta) = \sin\vartheta\,\cos\vartheta$, für $r > 0$.)

4.5. Definition. Sei X ein BR mit Dualraum X'.
(a) Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt *schwach konvergent*, wenn die Folgen $(\ell(x_n))_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$ für alle $\ell \in X'$ konvergieren.
(b) Wir sagen, die Folge (x_n) *konvergiert schwach gegen* $x \in X$, wenn für alle $\ell \in X'$

$$\ell(x_n) \to \ell(x), \qquad n \to \infty.$$

Man schreibt $x_n \to_w x$ oder $x_n \to x$ (schwach).

Bemerkungen.
(a) $(x_n) \subset X$ Cauchyfolge $\implies$ (x_n) schwach konvergent.
(b) Aus der (starken) Konvergenz $x_n \to x$ (d.h., $\|x_n - x\| \to 0$) folgt die schwache Konvergenz $x_n \to_w x$.
(c) Reflexive BRe sind schwach Folgen-kompakt, d.h., in einem reflexiven BR X besitzt jede beschränkte Folge eine Teilfolge, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert; vgl. Thm. 4.7.
(d) Schwach konvergente Folgen sind stets beschränkt; vgl. Korollar 4.6.
(e) Schwache Konvergenz = “Koordinatenweise Konvergenz.”
(f) Der schwache Limes, sofern existent, ist eindeutig (denn nach Hahn-Banach trennt X' die Punkte von X, d.h., zu $x \neq x'$ gibt es ein $\ell \in X'$ mit $\ell(x) \neq \ell(x')$).
(g) Anwendungen in der Variationsrechnung etc.

4.6. Korollar. *Sei X BR und $(x_n) \subset X$ eine schwach konvergente Folge. Dann gibt es ein $C \geq 0$ mit $\|x_n\|_X \leq C$ für alle $n \in \mathbf{N}$.*

Beweis. Sei $(x_n) \subset X$ schwach konvergent, d.h., für alle $\ell \in X'$ ist $(\ell(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Konvergente Folgen in $\mathbf{C}$ sind aber beschränkt, d.h., es gilt

$$\forall \ell \in X',\ \exists c_\ell \geq 0,\ \forall n \in \mathbf{N}\colon |\ell(x_n)| \leq c_\ell. \tag{4.2}$$

Wir verwenden die kanonische Einbettung $J_X\colon X \hookrightarrow X''$ (vgl. Satz 3.21) und definieren

$$\xi_n := J_X(x_n) \in X'', \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Dann gilt

$$\|\xi_n\|_{X''} = \|x_n\|_X, \qquad \forall n \in \mathbf{N}, \tag{4.3}$$

und

$$|\xi_n(\ell)| = |\ell(x_n)| \le c_\ell, \qquad \forall \ell \in X',$$

nach (4.2). Nach dem UBP, angewendet auf die BRe X' und $\mathbf{C}$, folgt aus der punktweisen Beschränktheit die gleichmäßige Beschränktheit der Funktionale $\xi_n \in X''$, d.h., es gibt eine Konstante $C \ge 0$ mit

$$\|\xi_n\|_{X''} \le C, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Mit (4.3) folgt

$$\|x_n\|_X \le C, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

∎

Das folgende Theorem stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen Reflexivität einerseits und schwacher Konvergenz andrerseits her. Es ist, auch für die Anwendungen, von großer Bedeutung.

4.7. Theorem. (Eberlein-Shmulyan)
Ein BR X ist genau dann reflexiv, wenn es zu jeder beschränkten Folge $(x_n) \subset X$ eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbf{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und ein $x \in X$ gibt mit

$$x_{n_j} \to_w x, \qquad j \to \infty.$$

Der Satz von Eberlein-Shmulyan ("$\Longrightarrow$") ist ein gewisser "Ersatz" für Bolzano-Weierstraß. Der Beweis dieses Satzes ist nicht einfach; vgl. zB [Y]. Lediglich im Falle eines separablen, reflexiven BRs kann man relativ leicht sehen, daß es zu jeder beschränkten Folge eine Teilfolge gibt, die schwach konvergiert und einen (schwachen) Limes in X besitzt. (Aus den Voraussetzungen folgt insbesondere, daß auch X' separabel ist; daher kann man induktiv Teilfolgen auswählen und dann zur Diagonalfolge übergehen.)

Wir kommen nun zur zweiten wichtigen Anwendung des Baireschen Satzes, nämlich dem Satz von der offenen Abbildung ("Open Mapping Theorem").

4.8. Theorem. *Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ sei surjektiv. Dann bildet T offene Mengen $\subset X$ auf offene Mengen $\subset Y$ ab.*

Definition: Eine Abbildung, die offene Mengen auf offene Mengen abbildet, bezeichnet man als *offen*. (Nicht mit Stetigkeit verwechseln! Stetigkeit einer Abb. $f\colon X \to Y$ bedeutet, daß die Urbildmengen $f^{-1}(U)$ offen sind in X für alle $U \subset Y$ offen.)

Folgerung: (Vgl. auch Definition 3.15)
Wenn $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ bijektiv ist, dann ist T^{-1} stetig.

4.9. Lemma. *Sei* $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ *und es gebe ein* $r > 0$ *so, daß* $\overline{T[B_r^X(0)]}$ *nicht-leeres Inneres besitzt.*
Dann gibt es ein $\varrho > 0$ *mit* $B_\varrho^Y(0) \subset \overline{T[B_r^X(0)]}$.

Bez.: $B_r^X(x_0) := \{x \in X; \|x - x_0\|_X < r\}$, $B_r^X := B_r^X(0)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $r > 0$, $\varrho > 0$ und $y_0 \in Y$ mit

$$B_\varrho^Y(y_0) \subset \overline{T[B_r^X]}.$$

Wegen der Linearität von T gilt dann auch $B_\varrho^Y(-y_0) \subset \overline{T[B_r^X]}$.
Aus $B_{2r} \supset B_r + B_r$ (algebraische Summe) folgt aber

$$T[B_{2r}^X] \supset T[B_r^X] + T[B_r^X],$$

also auch

$$\overline{T[B_{2r}^X]} \supset \overline{T[B_r^X]} + \overline{T[B_r^X]}$$

da allgemein $\overline{T[U+V]} \supset \overline{T[U]} + \overline{T[V]}$ für alle $U, V \subset X$. Es folgt

$$\overline{T[B_{2r}^X]} \supset \overline{T[B_r^X]} + \overline{T[B_r^X]} \supset B_\varrho^Y(y_0) + B_\varrho^Y(-y_0) \supset B_\varrho^Y(0),$$

denn wir können jedes $y \in B_\varrho^Y$ schreiben in der Form $y = (y_0 + y) - y_0$, mit $y_0 + y \in B_\varrho^Y(y_0)$ und $-y_0 \in B_\varrho^Y(-y_0)$. ∎

Beweis von Theorem 4.8.
(1) Sei wieder $B_n^X := \{x \in X\ ;\ \|x\| < n\}$.
Es ist $X = \cup_{n=1}^\infty B_n^X$.
T surjektiv $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} Y = T[X] = T[\bigcup_{n=1}^\infty B_n^X] \\ = \bigcup_{n=1}^\infty T[B_n^X] \\ \subset \bigcup_{n=1}^\infty \overline{T[B_n^X]}. \end{aligned}$$

Satz von BAIRE $\Longrightarrow$ mindestens *eine* der Mengen $\overline{T[B_n^X]}$ hat nicht-leeres Inneres.
Wegen $T[B_n^X] = nT[B_1^X]$ hat dann auch $\overline{T[B_1^X]}$ nicht-leeres Inneres.
Nach Lemma 4.9 gibt es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$B_\varepsilon^Y \subset \overline{T[B_1^X]}. \tag{4.4}$$

(2) Wir zeigen als nächstes

$$\overline{T[B_1^X]} \subset T[B_2^X]. \tag{4.5}$$

Beweis von (4.5)*:* Sei $y \in \overline{T[B_1^X]}$. Wir können ein $x_1 \in B_1^X$ finden mit

$$\|Tx_1 - y\|_Y < \varepsilon/2,$$

mithin

$$y - Tx_1 \in B^Y_{\varepsilon/2} \subset \overline{T[B^X_{1/2}]},$$

nach (4.4). Analog wählen wir ein $x_2 \in B^X_{1/2}$ mit

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in B^Y_{\varepsilon/4} \subset \overline{T[B^X_{1/4}]}.$$

Induktiv finden wir so $x_n \in B^X_{2^{1-n}}$ mit

$$y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j \in B^Y_{2^{1-n}\varepsilon}.$$

Die Reihe $\sum_{j=1}^\infty x_j$ konvergiert in X und liefert ein Element aus B_2^X,

$$x := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \in B_2^X;$$

weiter gilt

$$y - Tx = y - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} Tx_j = 0,$$

d.h., $y \in T[B_2^X]$, wie verlangt.
(3) Aus (4.4) und (4.5) folgt: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^Y \subset T[B_2^X]$, also auch

$$B^Y_{t\varepsilon} \subset T[B^X_{2t}], \qquad t > 0. \tag{$*$}$$

Sei nun $U \subset X$ offen. Für $x_0 \in U$ beliebig sei $y_0 := Tx_0$. Wir zeigen, daß $T[U]$ eine Umgebung von $T(x_0)$ ist, woraus $T[U]$ offen folgt.
Wegen U offen gibt es zu x_0 ein $s > 0$ mit $B_s^X(x_0) \subset U$.
Mit $t := s/2$ folgt aus $(*)$, daß $T[B_s^X(0)] \supset B^Y_{s\varepsilon/2}(0)$.
Auf Grund der Linearität von T folgt daraus sofort, daß auch

$$T[B_s^X(x_0)] \supset B^Y_{s\varepsilon/2}(y_0),$$

da $T(x_0) = y_0$. ∎

Eine einfache, aber wichtige Anwendung ist das folgende Resultat:

4.10. Theorem. (Satz von der inversen Abbildung.)
Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist $T^{-1} : Y \to X$ stetig.

Beweis. T ist offen nach Theorem 4.8 und damit ist T^{-1} stetig. ∎

Wenn $T : X \to Y$ linear, stetig und surjektiv, aber nicht injektiv, ist, so kann man analog zeigen, daß T einen topologischen Isomorphismus zwischen $X/\ker T$ und Y liefert: Wegen T stetig, ist $M := \ker T$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von X, und nach Beispiel 3.17 ist der Quotientenraum X/M mit der kanonischen Norm ein Banachraum.

4.11. Korollar. *Sind X, Y Banachräume und ist $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ surjektiv, so induziert T einen topologischen Isomorphismus*

$$\hat{T} : X/\ker T \to Y.$$

(Bew. wie Theorem 4.10; ÜA)

Bem.: Auf die Surjektivität kann man nicht verzichten: Seien $X = Y := (C[0,1], \|.\|_\infty)$ und sei

$$Sf(t) := \int_0^t f(s)\,ds, \quad t \in [0,1].$$

Dann ist S injektiv, die Abbildung $S^{-1} : SX \to X$ ist aber unstetig. (ÜA)

4.12. Anwendung (von Theorem 4.10).
Mit $g_k \in C[a,b]$, $k = 0, \ldots, n$, $g_n \equiv 1$, sei

$$D : C^n[a,b] \to C[a,b]$$

definiert durch

$$Df := \sum_{k=0}^{n} g_k f^{(k)},$$

wobei $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f bezeichnet. Weiter sei $\xi \in \mathbf{R}^n$. Wir betrachten das

Anfangswertproblem (AWP) für die inhomogene lineare DGl. n-ter Ordnung:
Gegeben seien $h \in C[a,b]$ und $\xi \in \mathbf{R}^n$. Gesucht ist dann $f \in C^n[a,b]$ mit

$$\begin{aligned} Df &= h, \\ f^{(k)}(a) &= \xi_{k+1}, \quad k = 0, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nach Picard-Lindelöf existiert eine (eindeutig bestimmte) Lösung (man sieht leicht, daß eine Lipschitzbedingung erfüllt ist, denn die DGL. ist linear).

Behauptung. Die Lösung f des AWP's (4.6) hängt stetig von $h \in C[a,b]$ und $\xi \in \mathbf{R}^n$ ab, wenn wir für $f \in C^n[a,b]$ die Norm $\sum_{k=0}^n \left\| f^{(k)} \right\|_\infty$ verwenden.

Zum Beweis der Beh. betrachten wir den Operator

$$T : C^n[a,b] \to C[a,b] \times \mathbf{R}^n,$$

definiert durch

$$Tf := \left(Df, \left(f^{(k)}(a) \right)_{k=0,\dots,n-1} \right), \qquad f \in C^n[a,b].$$

T ist stetig und, nach Picard-Lindelöf, auch bijektiv. Nach Theorem 4.10 ist daher die Umkehrabbildung T^{-1} ebenfalls stetig, d.h., beschränkt. Dies bedeutet konkret das Folgende: Es gibt eine Konstante $C \geq 0$ so, daß für die Lösungen f des AWP's (4.6) die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^n \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leq C \left(\|h\|_\infty + |\xi| \right), \qquad \forall (h,\xi) \in C[a,b] \times \mathbf{R}^n,$$

gilt.

Bemerkung. Ein vollständiges Resultat erreicht man durch Einbeziehung der Koeffizienten $g_0, \dots, g_{n-1}$. Dazu erweitert man die Räume um $C[a,b]^n$ und definiert nun

$$T : C^n[a,b] \times C[a,b]^n \to C[a,b] \times \mathbf{R}^n \times C[a,b]^n,$$

$$T(f, g_0, \dots, g_{n-1}) := \left(Df, \left(f^{(k)}(a) \right)_{k=0,\dots,n-1}, g_0, \dots, g_{n-1} \right), \qquad f \in C^n[a,b].$$

∎

Wir kommen schließlich zum Satz vom abgeschlossenen Graphen.
Vorbemerkungen: Seien X, Y Banachräume. Bekanntlich ist

$$X \times Y := \{(x,y); x \in X, y \in Y\}$$

ein BR bezgl. der Norm

$$\|(x,y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y .$$

Die Konvergenz in $X \times Y$ ist daher äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz.
Für eine lineare Abbildung

$$T : X \to Y$$

definieren wir $\Gamma(T)$, den *Graphen von* T, durch

$$\Gamma(T) := \{(x, Tx) ; \ x \in X\} \subset X \times Y.$$

Der Graph von T ist also ein linearer Teilraum des BRs $(X \times Y, \|(.,.)\|_{X \times Y})$. Man führt dann die *Graphennorm*

$$\|(x, Tx)\|_\Gamma := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

ein.
Frage: Ist $\Gamma(T)$ abgeschlossener Teilraum von $X \times Y$?

4.13. Theorem. (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Es seien X, Y BRe, $T : X \to Y$ linear. Dann gilt:
T ist genau dann stetig, wenn $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist.

Beweis.
(*i*) "T stetig $\implies$ $\Gamma(T)$ abgeschl.":
Seien $(x_n, y_n) \in \Gamma(T)$ (d.h., $x_n \in X$ und $y_n = Tx_n$, $n \in \mathbf{N}$) mit

$$x_n \to x, \qquad y_n \to y,$$

für gewisse $x \in X$ und $y \in Y$. Zu zeigen: $(x, y) \in \Gamma(T)$, d.h., $y = Tx$.
T stetig $\implies$ $Tx = T(\lim x_n) = \lim Tx_n = \lim y_n = y$.

(*ii*) "$\Gamma(T)$ abgeschlossen $\implies$ T stetig":
$(\Gamma(T), \|(.,.)\|_\Gamma)$ ist abgeschlossener TR des BRs $X \times Y$, also selbst ein Banachraum. Die Projektion

$$\pi_1 : \Gamma(T) \to X, \qquad (x, Tx) \mapsto x,$$

ist offensichtlich linear, bijektiv und stetig. Wegen Theorem 4.10 ist daher auch

$$\pi_1^{-1} : X \to \Gamma(T)$$

stetig. Die Projektion

$$\pi_2 : \Gamma(T) \to Y, \qquad (x, Tx) \mapsto Tx,$$

ist trivialerweise stetig. $\implies$

$$T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1} \quad \text{ist stetig.}$$

∎