4 - Raies spectrales

Coefficients et relations d'Einstein

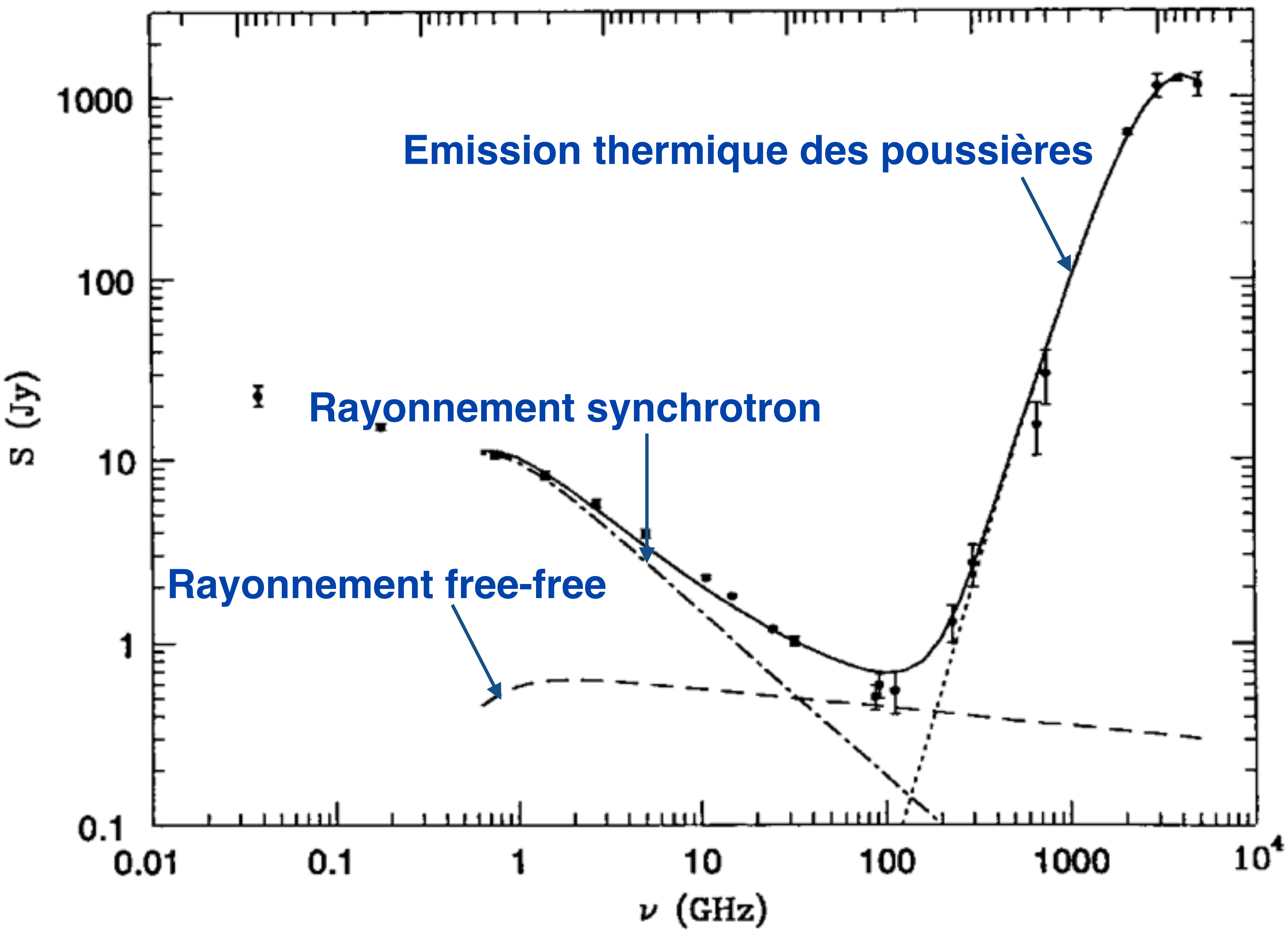
Profils d'élargissement

Courbes de croissance

La raie HI à 21 cm

Raies d'absorption dans les spectres de QSOs

Exemples de spectres continus



http://www.cv.nrao.edu/course/astr534/

Observation des raies spectrales

Observation du doublet d'émission du sodium par T. Melvill (1752)

Galaxies

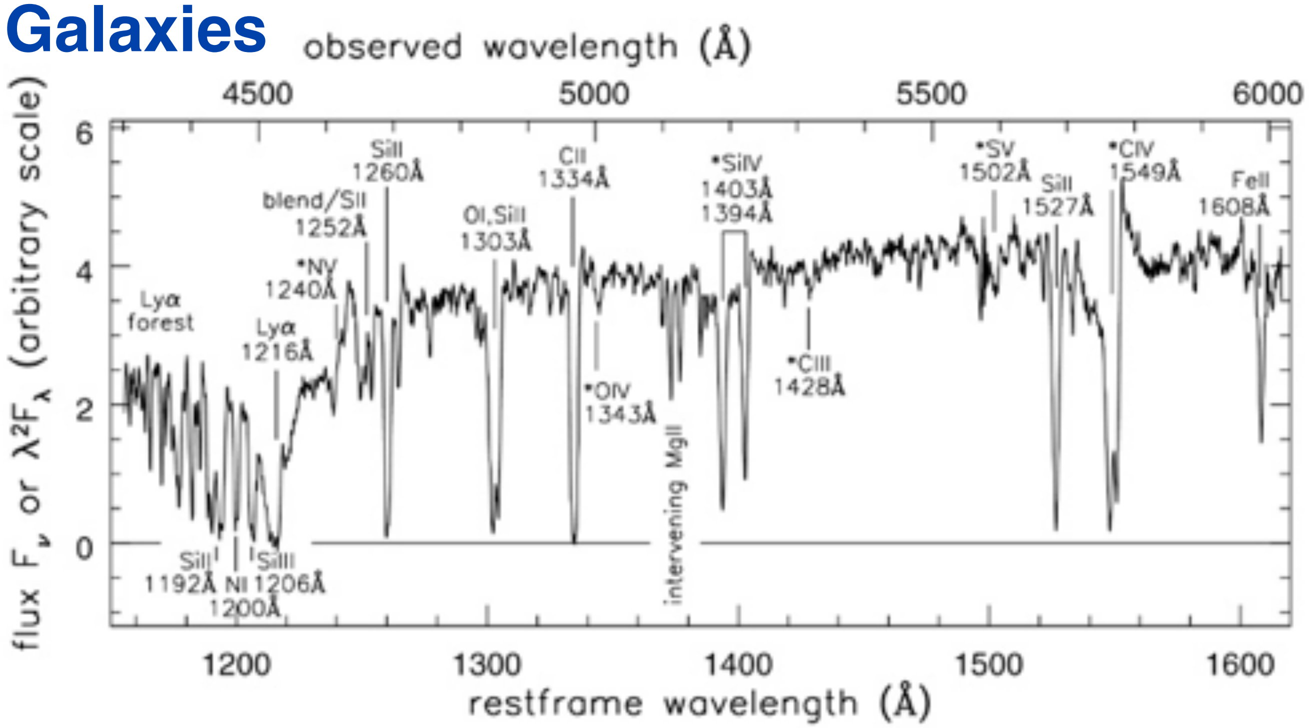
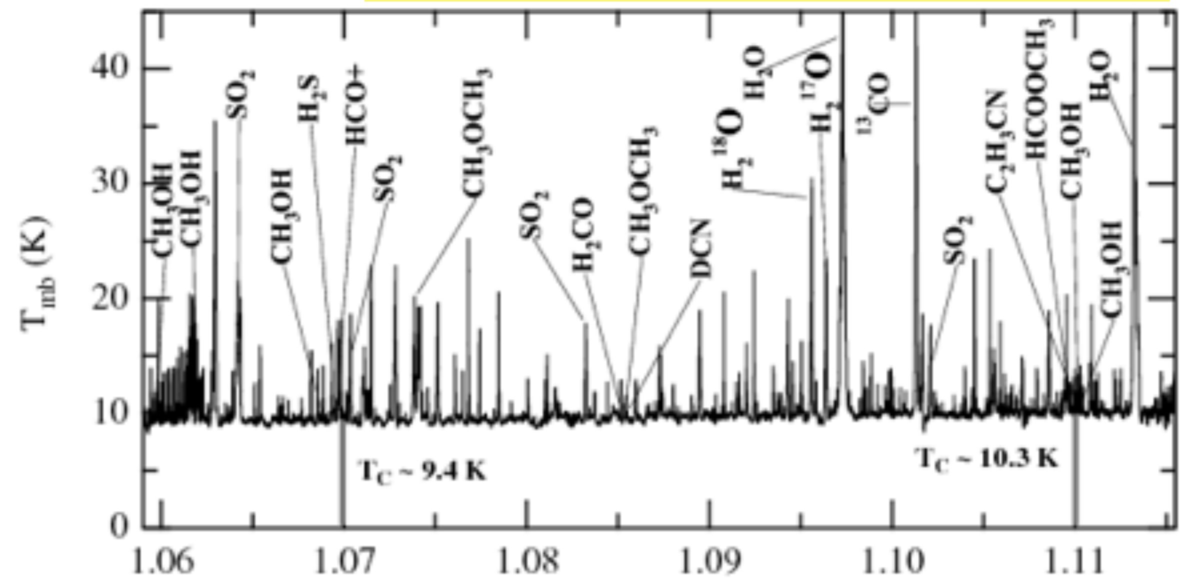
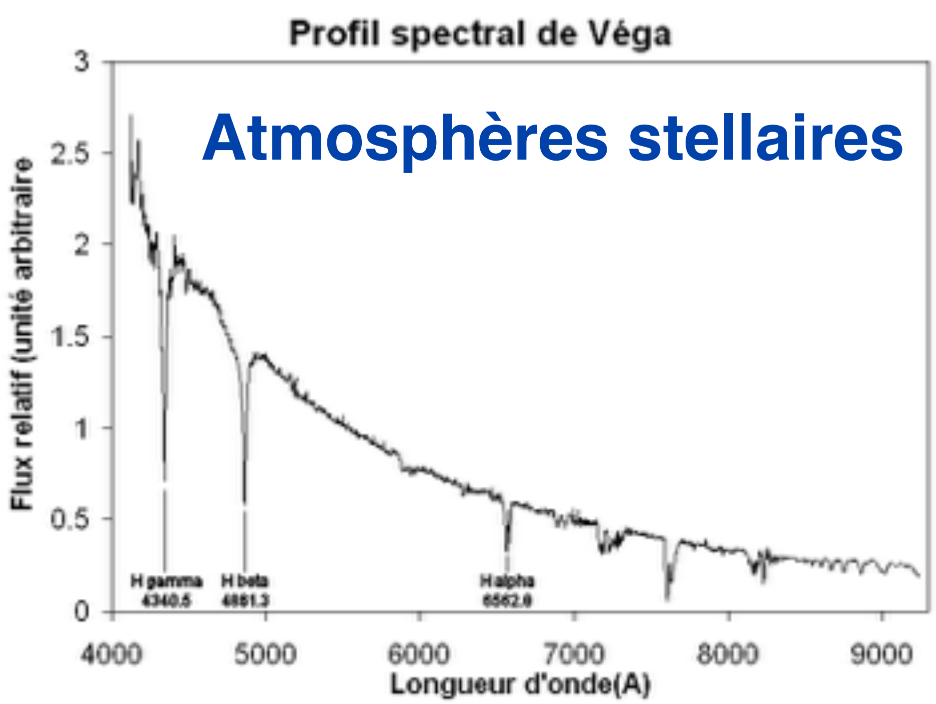


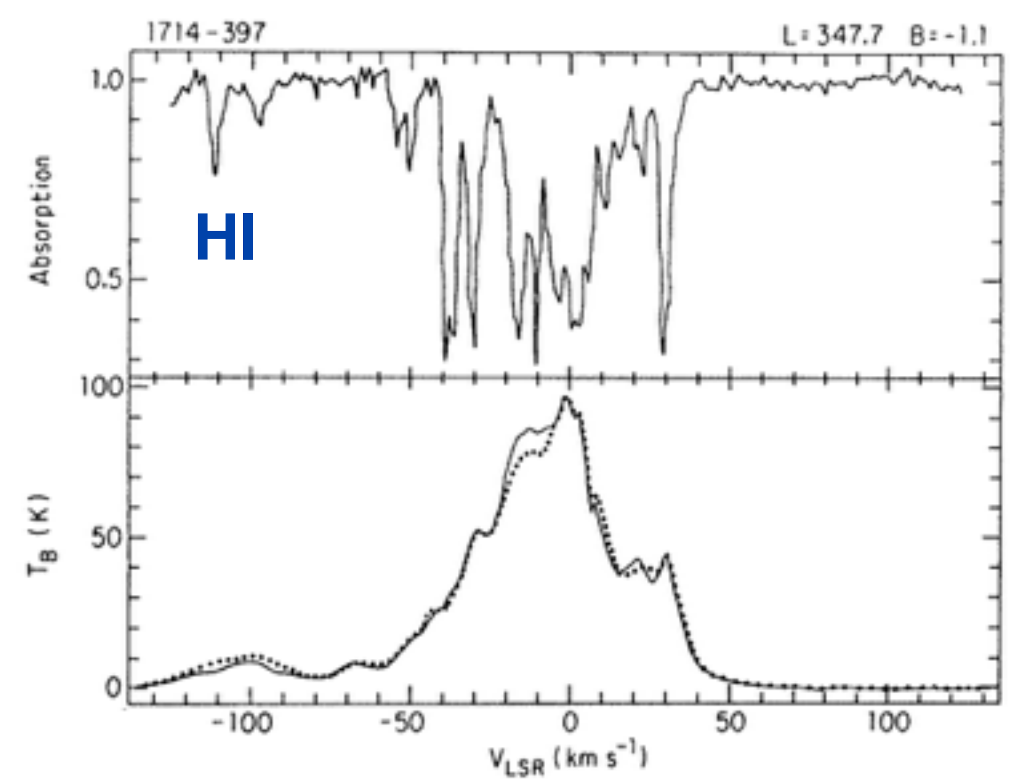
Fig 9.16 (C. Steidel) 'Galaxies in the Universe' Sparke/Gallagher CUP 2007

MIS

Bergin, E. et al. 2010, A&A, 521, L20



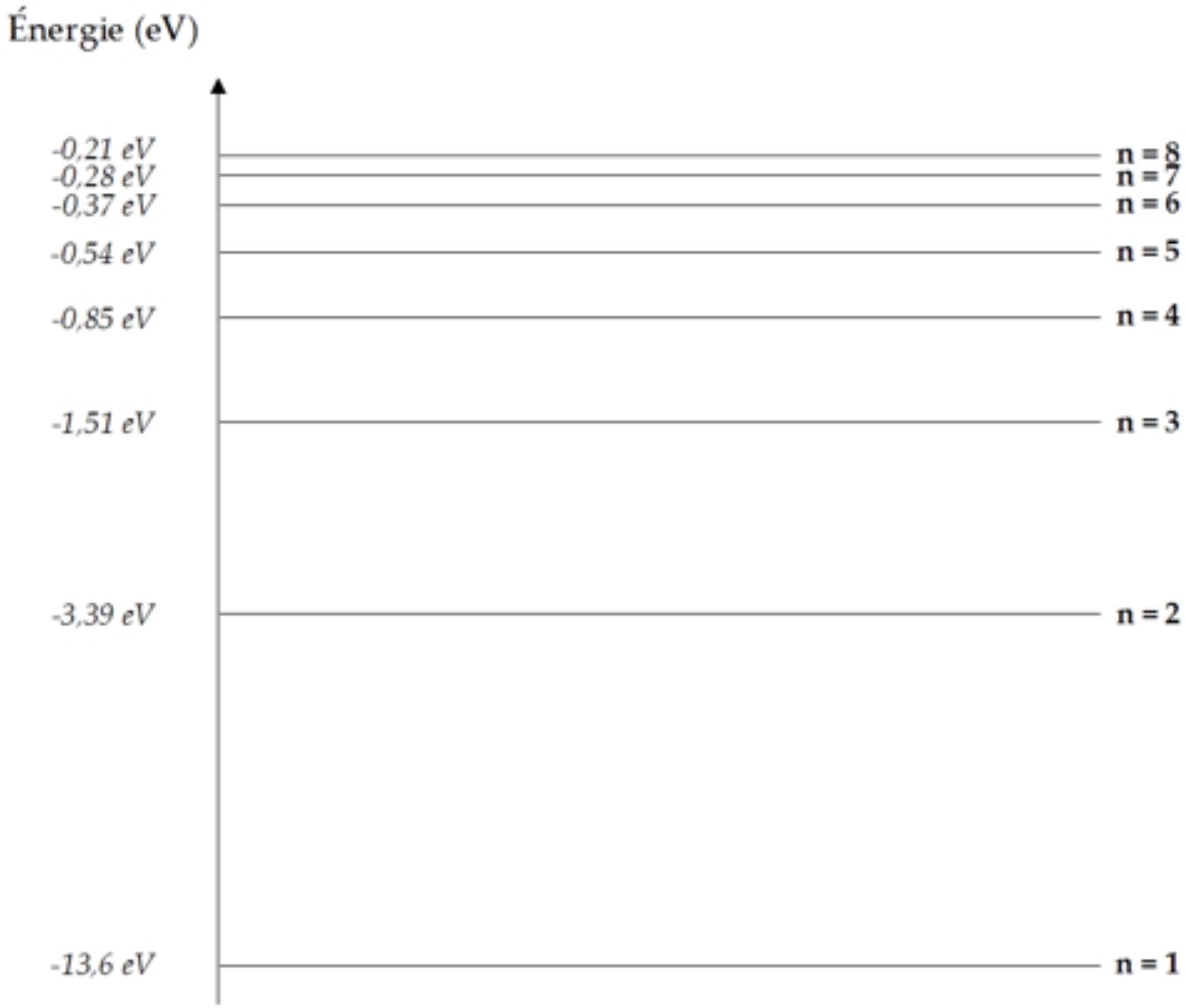




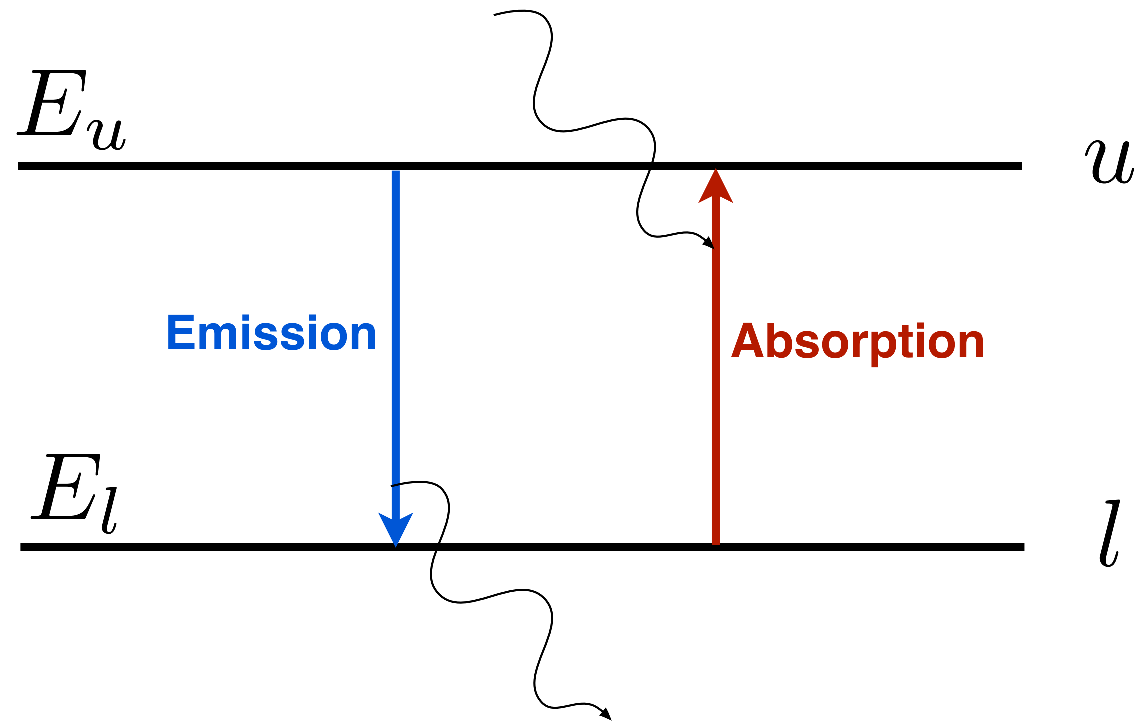
Dickey, J. M. et al. 1983, ApJS, 53, 591

Origine des raies spectrales

Quantification des niveaux d'énergie :
Niveaux électroniques de l'atome d'hydrogène

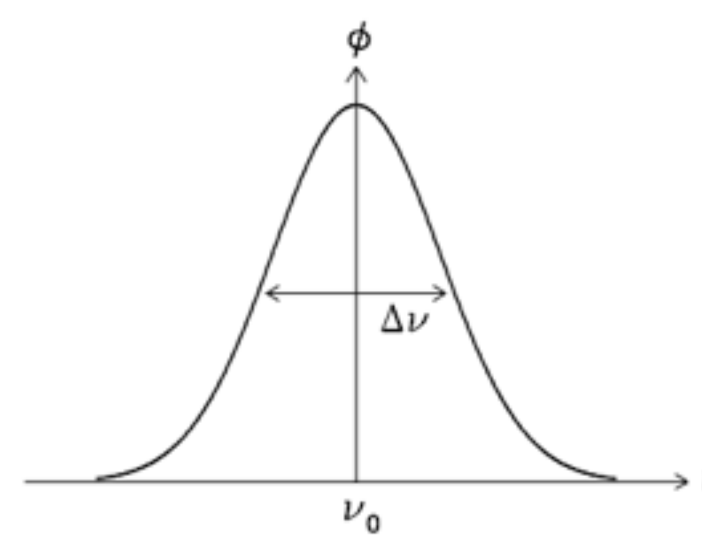


Transitions entre niveaux d'énergie



$$h\nu_{ul} = E_u - E_l$$

Raies non infiniment fines : divers processus d'élargissement



Système à deux niveaux

u **Energie** E_u **Poids statistique** g_u **Population** n_u

$$h\nu_{ul} = E_u - E_l$$

l **Energie** E_l **Poids statistique** g_l **Population** n_l

Rappel : Loi de Kirchhoff pour une émission thermique

$$\boxed{S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{K_\nu} = B_\nu(T)}$$

Lien au niveau microscopique entre émission et absorption ?

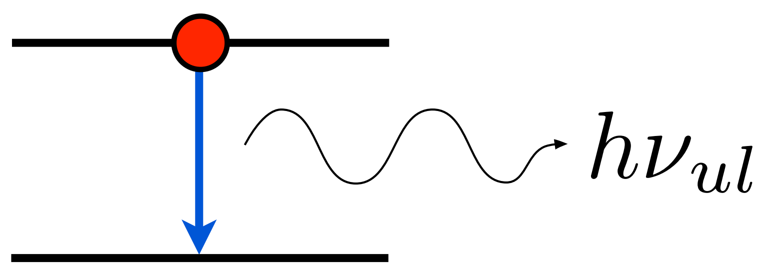
Einstein : Trois processus de transition

- **Absorption**
- **Emission spontanée**
- **Emission stimulée**

Emission spontanée, stimulée, absorption

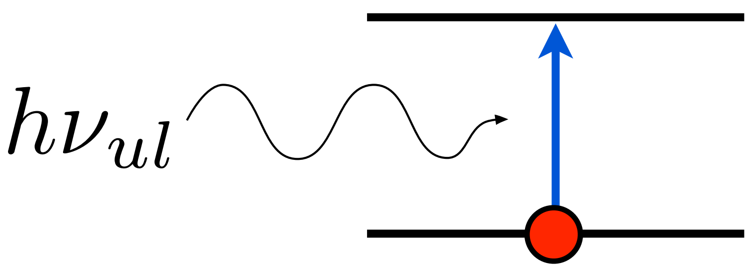
Probabilités de transition par unité de temps

Emission spontanée



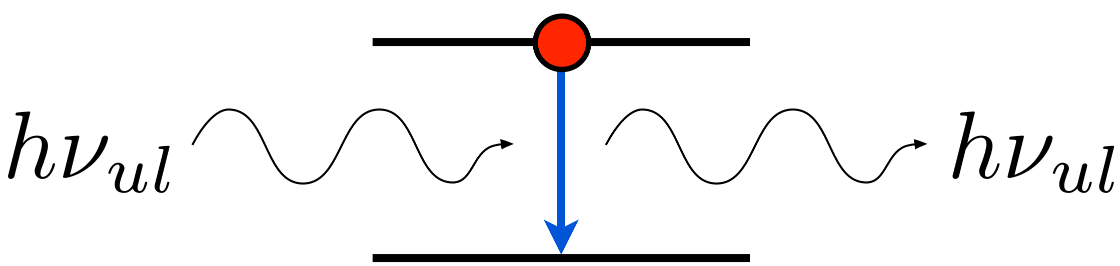
A_{ul}

Absorption



$B_{lu} J_{\nu_{ul}}$

Emission stimulée



$B_{ul} J_{\nu_{ul}}$

$A_{ul} \quad B_{ul} \quad B_{lu}$ **COEFFICIENTS D'EINSTEIN**

Intensité moyenne du rayonnement à la fréquence de transition $J_{\nu_{ul}} = \dfrac{1}{4\pi} \int I_{\nu_{ul}} \mathrm{d}\Omega$

Cas particulier de l'ET

On se place dans le cas de l'équilibre thermique $\# u \rightarrow l$ = $\# l \rightarrow u$

Bilan détaillé : $$n_u B_{ul} J_{\nu_{ul}} + n_u A_{ul} = n_l B_{lu} J_{\nu_{ul}}$$

$$\longrightarrow \quad J_{\nu_{ul}} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{\dfrac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\dfrac{n_l}{n_u}\dfrac{B_{lu}}{B_{ul}} - 1}$$

Loi de Boltzmann : $$\longrightarrow \quad J_{\nu_{ul}} = \frac{\dfrac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\dfrac{B_{lu}}{B_{ul}}\dfrac{g_l}{g_u}\exp\left(\dfrac{h\nu_{ul}}{kT}\right) - 1}$$

Relations d'Einstein

Isotropie et loi de Planck

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{1}{4\pi}\int I_{\nu_{ul}}\mathrm{d}\Omega = I_{\nu_{ul}} = B_{\nu_{ul}}(T) = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right)-1}$$

Identification des deux écritures → **RELATIONS D'EINSTEIN, VALABLES HORS ETL**

$$\boxed{\begin{gathered} g_l B_{lu} = g_u B_{ul} \\ \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \end{gathered}}$$

Transitions permises $A_{ul} \sim 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$

Transitions interdites $A_{ul} \ll 1$

Il suffit de connaître l'un des coefficients pour connaître les deux autres

Tables spectroscopiques

Transitions rotationnelles de $^{12}C^{16}O$

```
!MOLECULE
CO
!MOLECULAR WEIGHT
28.0
!NUMBER OF ENERGY LEVELS
41
!LEVEL + ENERGIES(cm^-1) + WEIGHT + J
    1      0.000000000       1.0        0
    2      3.845033413       3.0        1
    3     11.534919938       5.0        2
    4     23.069512649       7.0        3
    5     38.448164669       9.0       4
    6     57.670329083      11.0       5
[..........]
!NUMBER OF RADIATIVE TRANSITIONS
40
!TRANS + UP + LOW + EINSTEINA(s^-1) + FREQ(GHz) + E_u(K)
    1      2      1    7.203e-08      115.2712018       5.53
    2      3      2    6.910e-07      230.5380000      16.60
    3      4      3    2.497e-06      345.7959899      33.19
    4      5      4    6.126e-06      461.0407682      55.32
    5      6      5    1.221e-05      576.2679305      82.97
    6      7      6    2.137e-05      691.4730763     116.16
    7      8      7    3.422e-05      806.6518060     154.87
```

LAMDA : http://home.strw.leidenuniv.nl/~moldata/

Nécessité de l'émission stimulée

Imaginons qu'il n'y ait pas d'émission stimulée :

$$J_{\nu_{ul}} = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu}} = \frac{A_{ul}}{B_{lu}} \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right) = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT}\right)$$

Loi de Wien

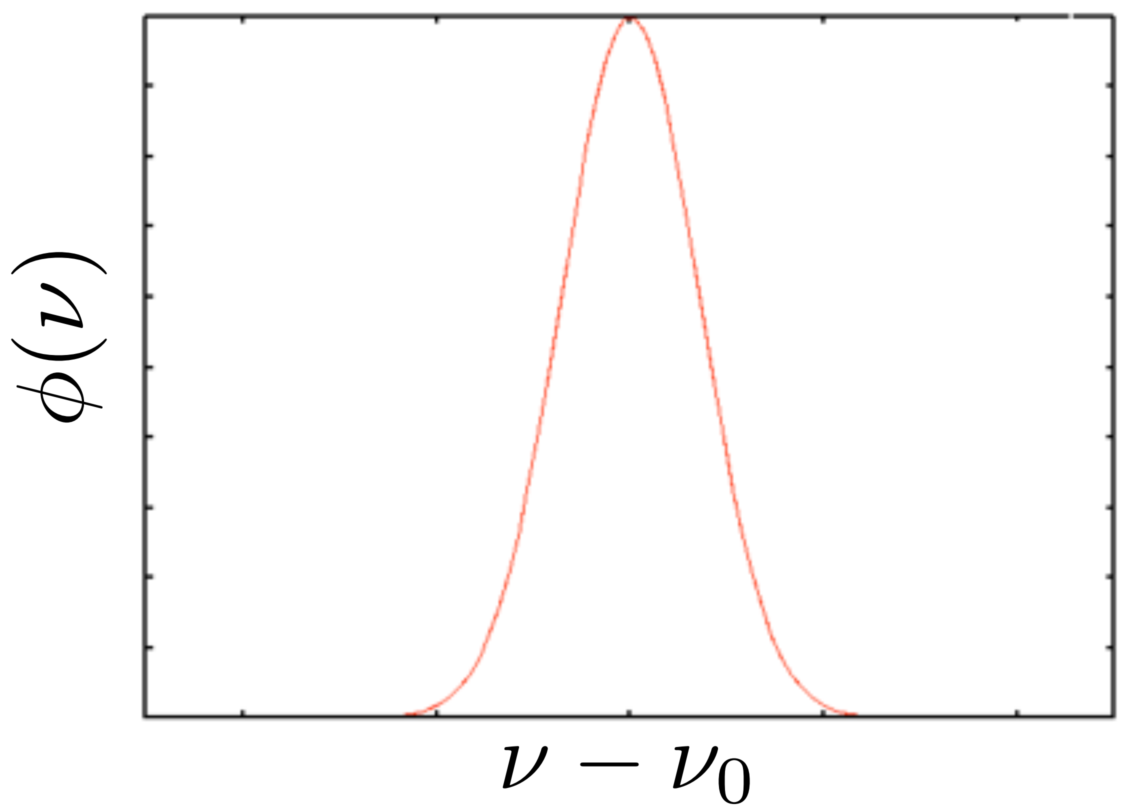
Domaine de validité : $h\nu_{ul} \gg kT \longleftrightarrow n_u \ll n_l$

Emission stimulée effectivement négligeable devant l'absorption

En effet, comme $g_u \sim g_l$, on a $B_{ul} \sim B_{lu}$ et donc $n_u B_{ul} \ll n_l B_{lu}$

Définitions alternatives des coefficients

Prise en compte du profil de la raie



Profil normalisé $\displaystyle\int_0^\infty \phi(\nu)\mathrm{d}\nu = 1$

$$B_{lu}\bar{J} = B_{lu}\int_0^\infty J_\nu \phi(\nu)\mathrm{d}\nu$$

$$B_{ul}\bar{J} = B_{ul}\int_0^\infty J_\nu \phi(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Si l'intensité moyenne varie peu sur le profil de la raie:

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu)\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty J_\nu \delta(\nu - \nu_{ul})\mathrm{d}\nu = J_{\nu_{ul}}$$

Définitions alternatives des coefficients

Définition via la densité d'énergie

$$B_{lu}\overline{u} = B_{lu}\int_0^\infty u_\nu \phi(\nu)\mathrm{d}\nu$$

$$B_{ul}\overline{u} = B_{ul}\int_0^\infty u_\nu \phi(\nu)\mathrm{d}\nu$$

Rappel : $$u_\nu = \frac{4\pi}{c}J_\nu$$ **(valable même hors isotropie)**

$$\boxed{\begin{aligned} g_u B_{ul} &= g_l B_{lu} \\ \frac{A_{ul}}{B_{ul}} &= \frac{8\pi h \nu_{ul}^3}{c^3} \end{aligned}}$$

Quelle convention est utilisée ?

Bilans pour la matière et le rayonnement

Population du niveau inférieur

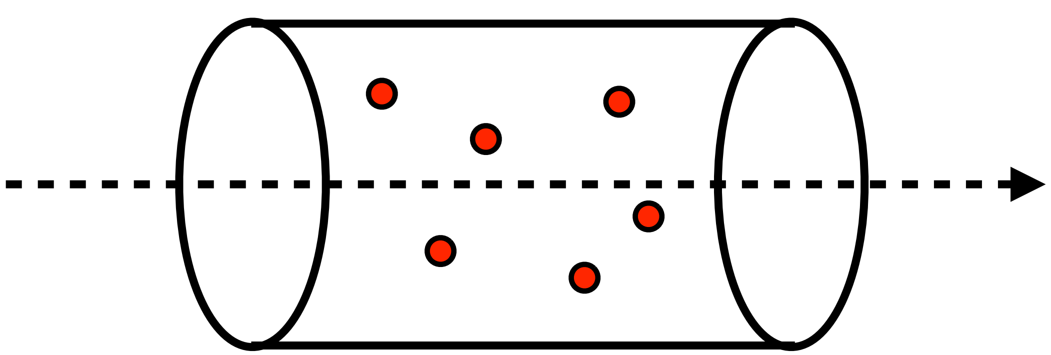
$$\frac{\mathrm{d}n_l}{\mathrm{d}t} = A_{ul}n_u + B_{ul}n_u\bar{J} - B_{lu}n_l\bar{J}$$

Champ de rayonnement

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = A + S + E$$

A : Absorption
S : Emission stimulée
E : Emission spontanée

Que valent les trois termes E, A, S ?



$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t$$

On fait une hypothèse d'isotropie locale pour simplifier

$$I_\nu = \frac{h\nu c \boxed{n_\nu}}{4\pi}$$

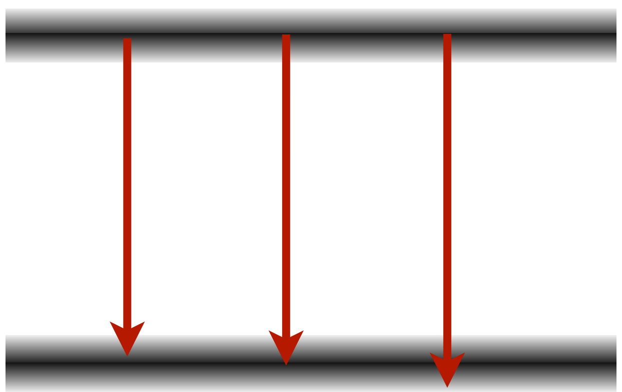
Nombre de photons par unité de volume par intervalle de fréquence

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{h\nu c}{4\pi}\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{h\nu}{4\pi}\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}t} = E + A + S$$

Calcul pour l'émission spontanée

$$\frac{\mathrm{d}n_l}{\mathrm{d}t}|_E = A_{ul} n_u$$

<u>**Mais cette équation est intégrée sur les fréquences « internes » à la raie**</u>



$$\int \mathrm{d}\nu \frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}t}|_E = \frac{\mathrm{d}n_l}{\mathrm{d}t}|_E = A_{ul} n_u = A_{ul} n_u \int \phi(\nu)\mathrm{d}\nu = \int A_{ul}\phi(\nu) n_u \mathrm{d}\nu$$

$$\longrightarrow \quad \int \mathrm{d}\nu \left[\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}t}|_E - A_{ul}\phi(\nu) n_u\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}t}|_E = A_{ul}\phi(\nu) n_u} = \frac{4\pi}{h\nu} E$$

En définitive, le coefficient d'Einstein A_{ul} est donc "pondéré" par ϕ sur le profil de la raie.

Bilan détaillé pour le rayonnement

Emission spontanée

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s}|_E = \frac{h\nu}{4\pi}\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}t}|_E = \frac{h\nu}{4\pi}A_{ul}\phi(\nu)n_u$$

Emission stimulée

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s}|_S = \frac{h\nu}{4\pi}\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}t}|_S = \frac{h\nu}{4\pi}B_{ul}\phi(\nu)J_\nu n_u$$

Absorption

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s}|_A = \frac{h\nu}{4\pi}\frac{\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}t}|_A = -\frac{h\nu}{4\pi}B_{lu}\phi(\nu)J_\nu n_l$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = A_{ul}n_u\frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu) + B_{ul}n_u\frac{h\nu}{4\pi}J_\nu\phi(\nu) - B_{lu}n_l\frac{h\nu}{4\pi}J_\nu\phi(\nu)$$

Isotropie locale :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = A_{ul}n_u\frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu) + B_{ul}n_u\frac{h\nu}{4\pi}I_\nu\phi(\nu) - B_{lu}n_l\frac{h\nu}{4\pi}I_\nu\phi(\nu)}$$

Rapprochement avec l’équation du transfert

Emissivité et coefficient d’absorption

- $$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = \boxed{\epsilon_\nu}\boxed{- \kappa_\nu I_\nu}$$

L’émission stimulée apparaît comme une absorption négative

- $$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = \boxed{A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)}\boxed{+ B_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi} I_\nu \phi(\nu) - B_{lu} n_l \frac{h\nu}{4\pi} I_\nu \phi(\nu)}$$

$$\boxed{\epsilon_\nu = A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)} \quad \boxed{\kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)\left(B_{lu} n_l - B_{ul} n_u\right)}$$

Il faut néanmoins remarquer qu’on a fait une hypothèse implicite dans le calcul, à savoir que le profil d’émission (apparaissant avec A_{ul}) est le même que le profil d’absorption (apparaissant avec B_{ul} et B_{lu}), ce qui n’est pas toujours le cas, notamment s’il y a un changement de fréquence entre les processus d’absorption et d’émission (exemple de la fluorescence). Dans le cas le plus général, on aura un profil ψ pour l’émission spontanée, ϕ pour l’absorption, et χ pour l’émission stimulée, auquel cas

$$\epsilon_\nu = A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi}\psi(\nu) \quad \text{et} \quad \kappa_\nu = \frac{h\nu}{4\pi}\left[B_{lu} n_l \phi(\nu) - B_{ul} n_u \chi(\nu)\right].$$

Rapprochement avec l'équation du transfert

Fonction source

$$S_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{\kappa_\nu} = \frac{A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)}{\frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu)\left(B_{lu} n_l - B_{ul} n_u\right)} = \frac{A_{ul} n_u}{\left(B_{lu} n_l - B_{ul} n_u\right)} = \frac{\frac{A_{ul}}{B_{ul}}}{\left(\frac{B_{lu} n_l}{B_{ul} n_u} - 1\right)}$$

Relations d'Einstein →

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - 1\right)}$$

Température d'excitation →

$$S_\nu = \frac{2h\nu_{ul}^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1} = B_{\nu_{ul}}(T_x)$$

Température d'excitation

Remarque : Le fait que la fonction source soit constante sur le profil de la raie est lié à l'hypothèse implicite faite ici de l'identité des profils en émission et en absorption

Coefficient d'absorption dans la raie

$$\kappa_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{S_\nu} = \frac{c^2}{2h\nu_{ul}^3}\left[\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1\right] A_{ul} n_u \frac{h\nu}{4\pi}\phi(\nu) = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_u \left[\exp\left(\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) - 1\right]\phi(\nu)$$

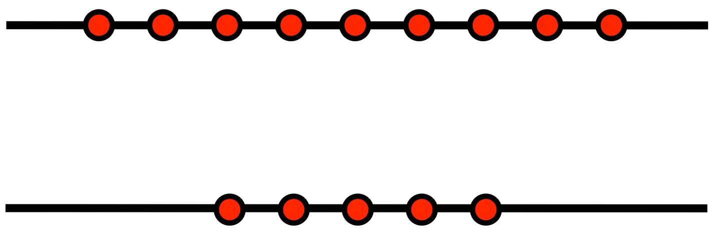
$$\boxed{\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right)\right]\phi(\nu)}$$

Pour des raies assez fines, on a approximativement :

$$\kappa_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right)\right]\phi(\nu)$$

MASERS

Si : $n_u > n_l$

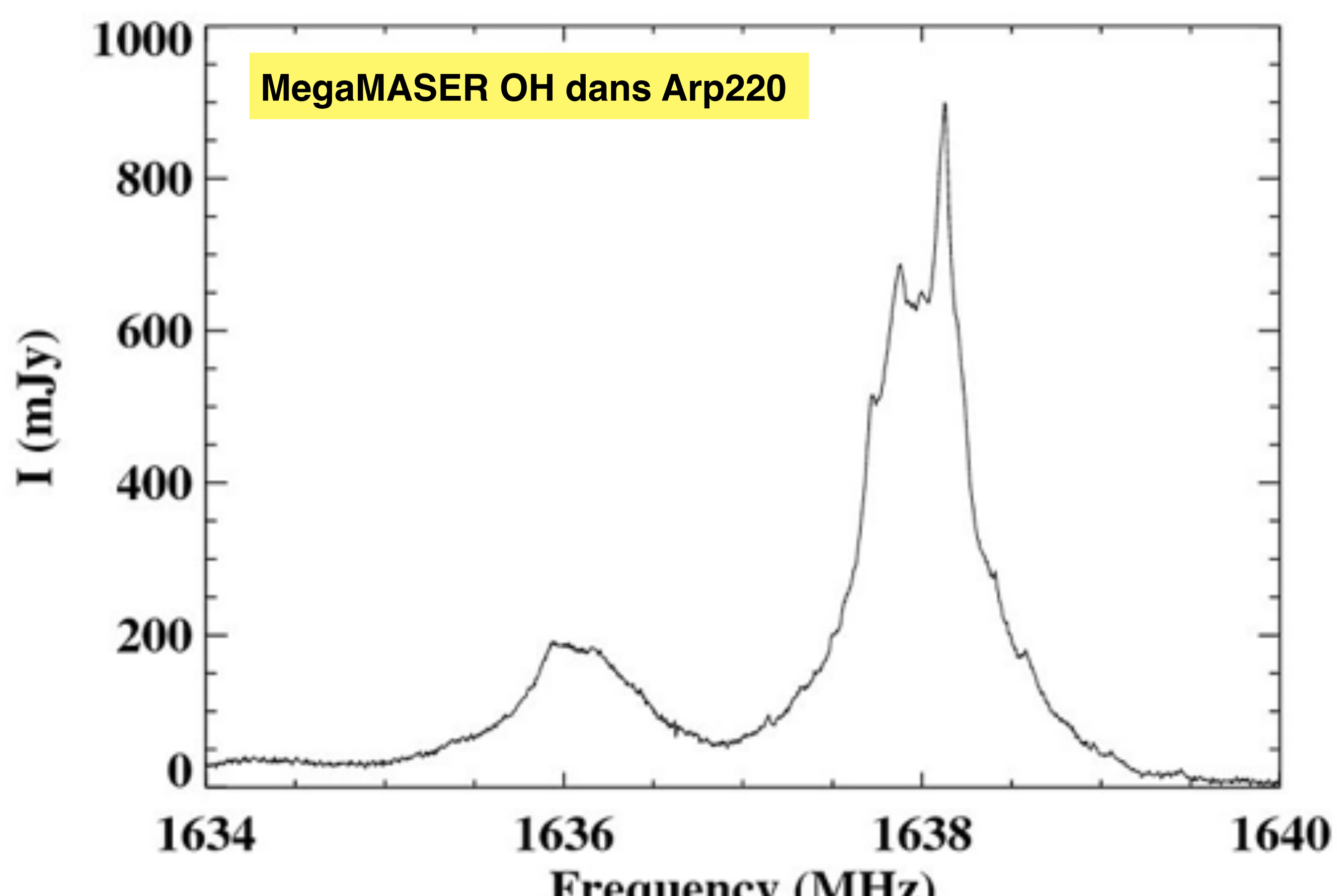


Dans l'hypothèse simplificatrice $g_u = g_l$

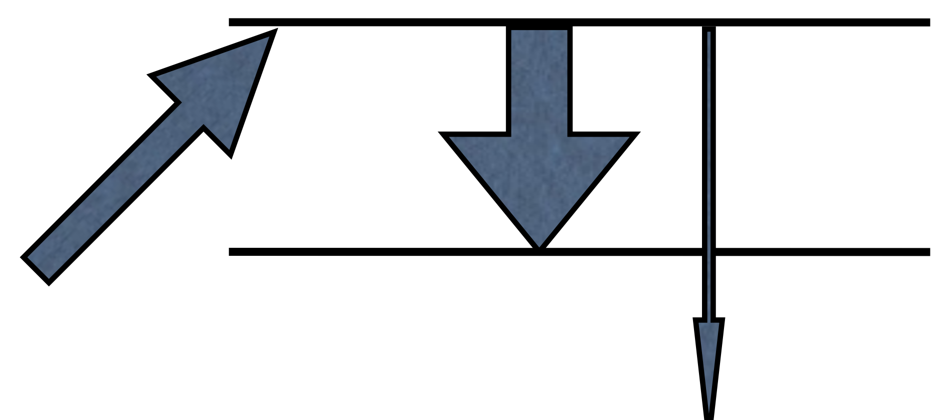
$$\exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right) > 1 \qquad T_x < 0$$

$\kappa_\nu < 0$ **Amplification parfois très grande du rayonnement : Températures de brillance jusqu'à 10^9, voire 10^{14} K**

MASERs dans les raies de OH (découverte initiale, 1965), H_2O, SiO

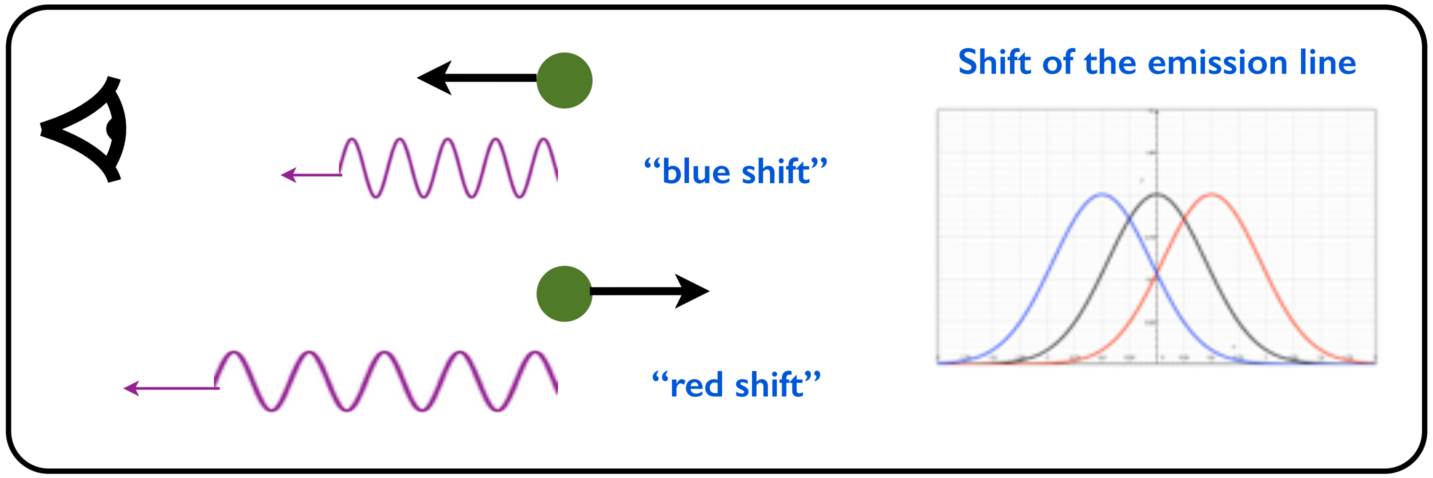


Mécanisme possible d'inversion des populations



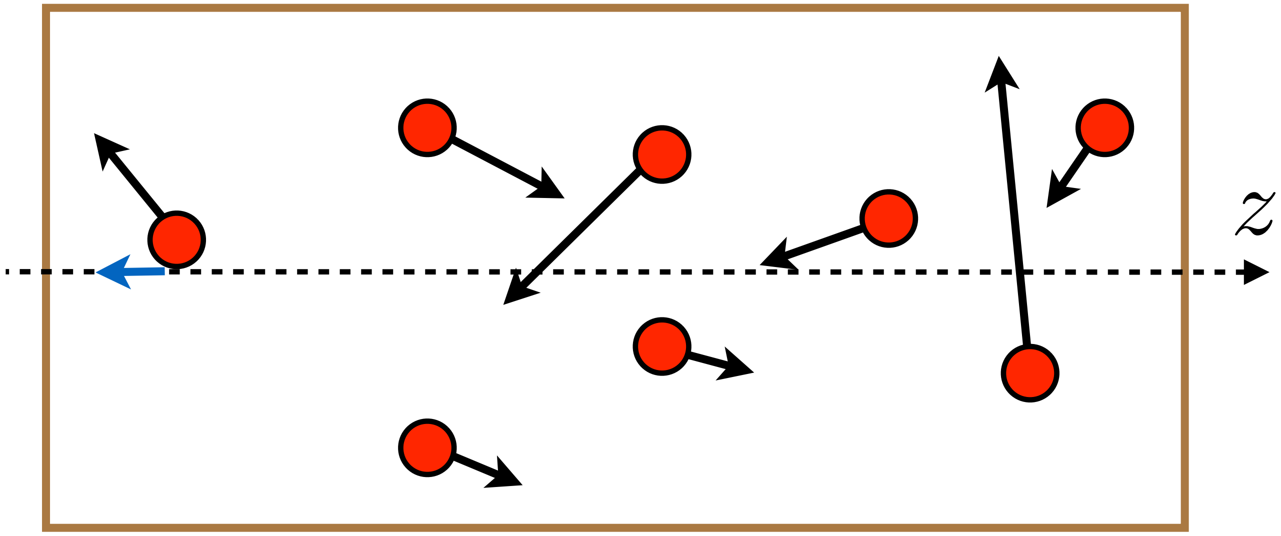
Elargissement Doppler thermique

Doppler-Fizeau shift



$$\frac{\nu}{\nu_{\rm e}} = \sqrt{\frac{c - v_z}{c + v_z}}$$

$$\frac{\nu}{\nu_{\rm e}} \simeq 1 - \frac{v_z}{c}$$



Distribution des vitesses projetées sur la ligne de visée

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)$$

$$\phi(\nu)|{\rm d}\nu| = f_{v_z}(v_z)|{\rm d}v_z|$$

Elargissement Doppler thermique

Profil

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2\right]$$

Largeur Doppler thermique

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\boxed{\Delta\nu_D \propto \frac{1}{\sqrt{m}}}$$

Fréquence centrale

$$\nu_0 = \nu_{ul}\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)$$

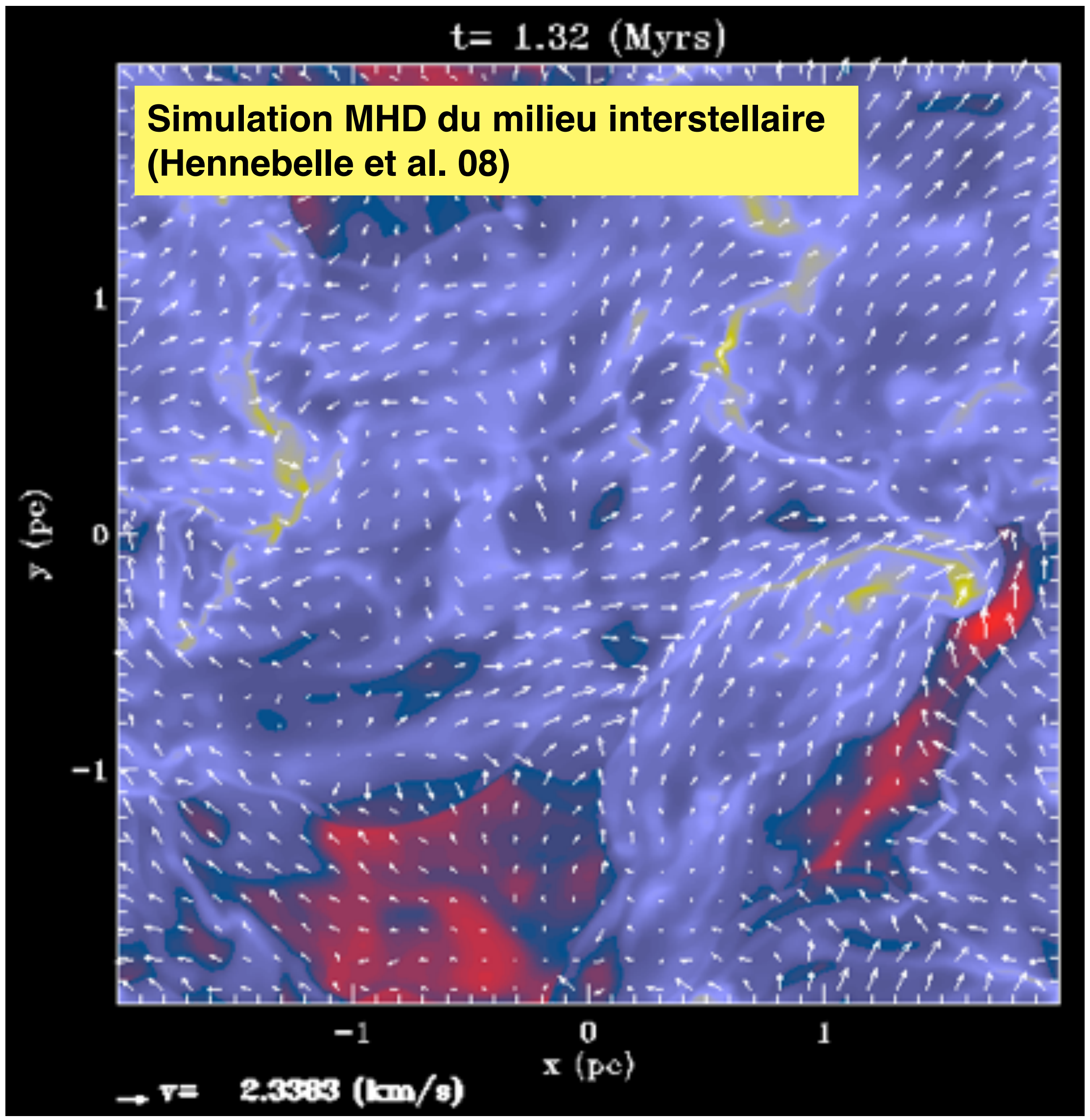
$$\sigma_v = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

Coefficient d'absorption au centre de la raie

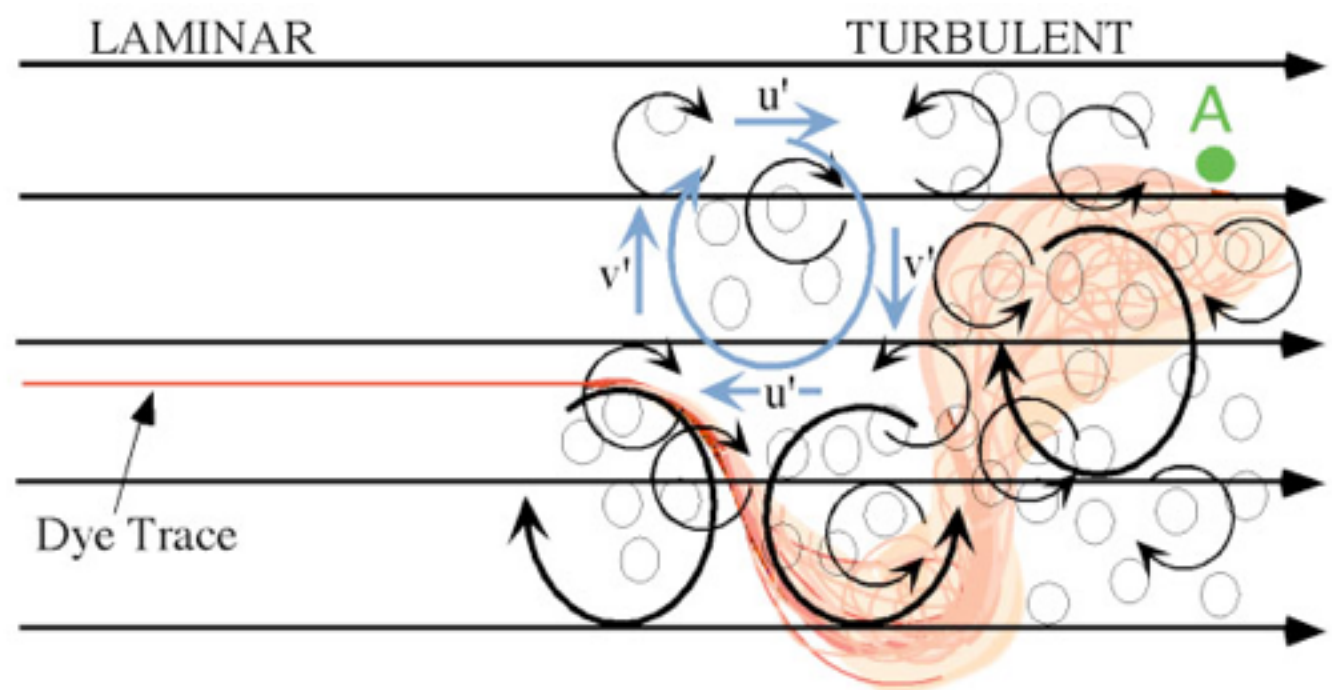
$$\kappa_{\nu_0} = \frac{c^2}{8\pi\nu_0^2} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_x}\right)\right] \times \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D}$$

Il varie en $\Delta\nu_D^{-1}$. Toutes choses étant égales par ailleurs, une raie est donc d'autant plus intense en émission, ou profonde en absorption, que la distribution est étroite (ce qui correspond à un milieu froid).

Elargissement Doppler turbulent

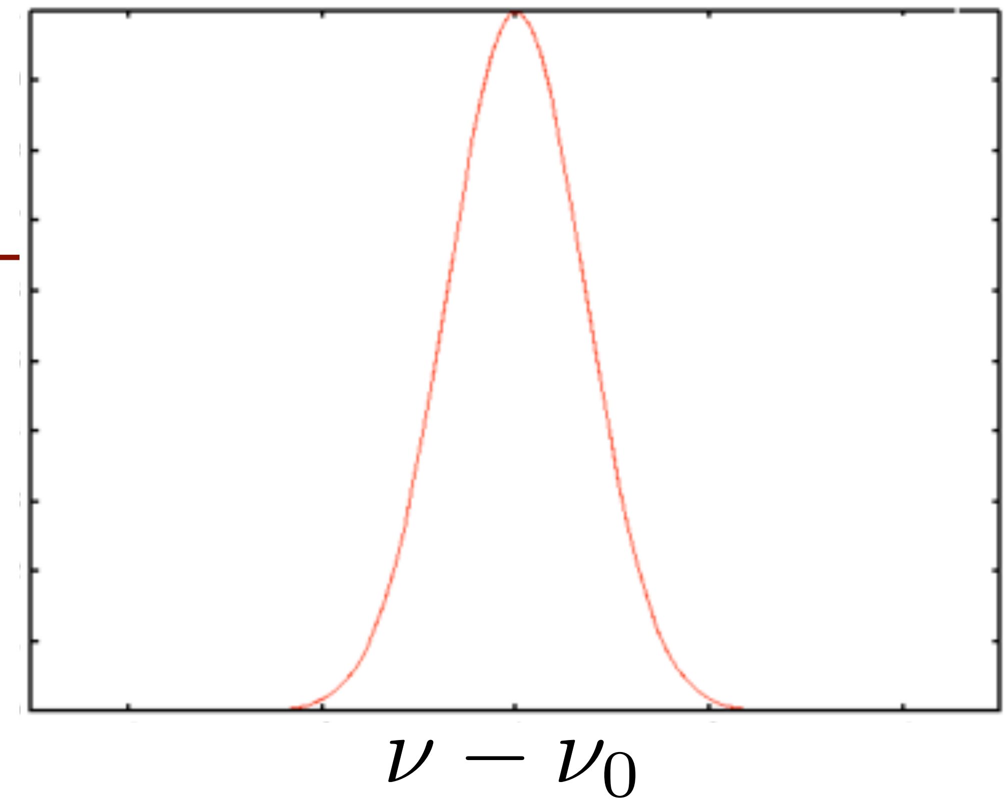


Mouvements mésoscopiques désordonnés



Elargissement Doppler turbulent

$$v_0(s) = \langle v_z(s) \rangle$$



Central frequency at s

Thermal Doppler profile at s

$$\nu_0(s) = \nu_{ul} \left[1 - \frac{v_0(s)}{c} \right]$$

$$\phi_t[\nu - \nu_0(s)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left\{ - \left[\frac{\nu - \nu_0(s)}{\Delta\nu_D} \right]^2 \right\}$$

Full profile

$$\boxed{\phi = \phi_t * f}$$

f: PDF of central frequencies

Elargissement Doppler turbulent

Hypothèse : PDF des vitesses Gaussienne

$$g(v_t) = \frac{1}{\sqrt{\pi} b_t} \exp\left[-\left(\frac{v_t - v_0}{b_t}\right)^2\right]$$

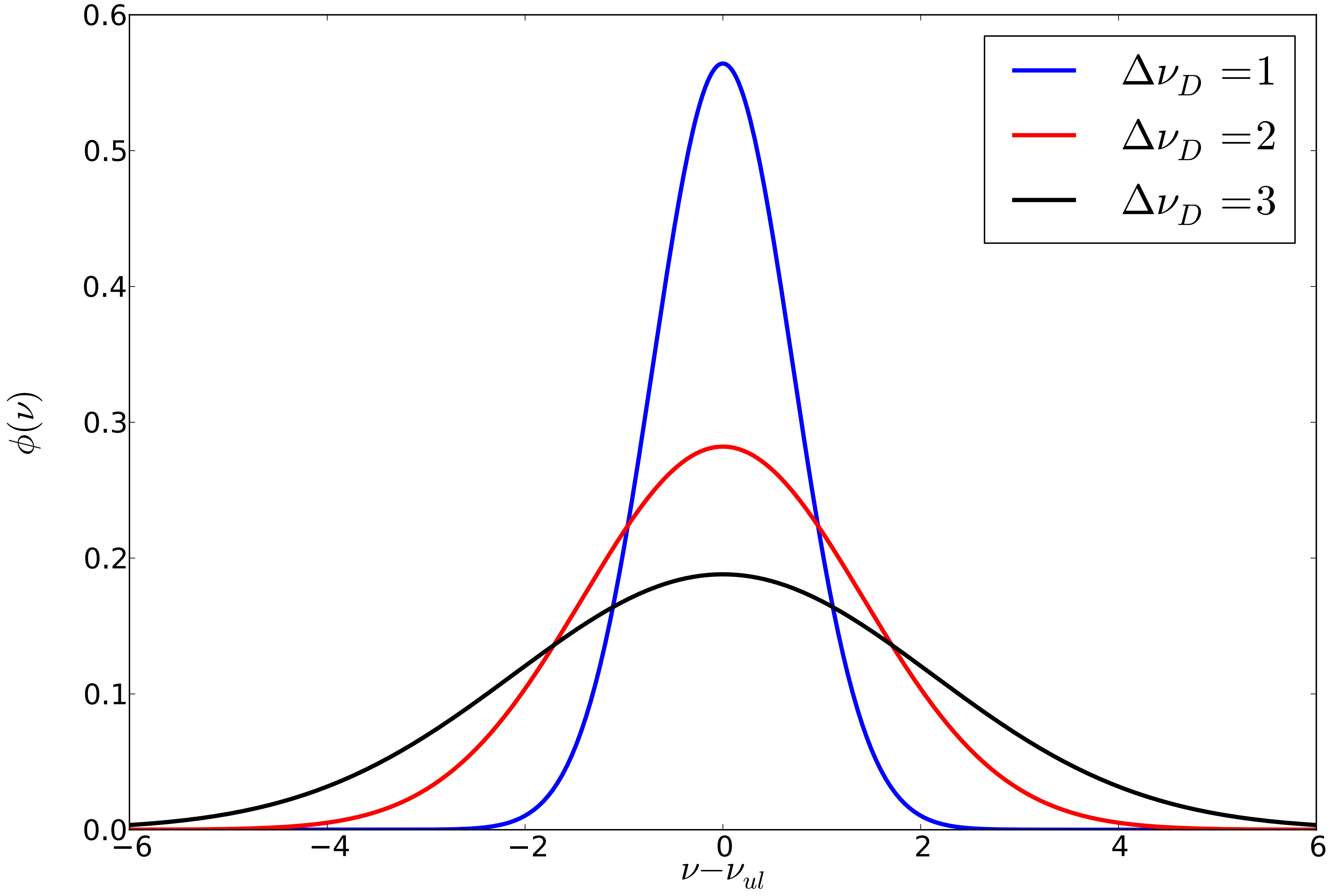
Dans ce cas, le profil ϕ est également une Gaussienne, de largeur

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ul}}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m} + b_t^2}$$

Généralement $b_t > \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

Elargissement turbulent prépondérant : largeur indépendante de l'espèce

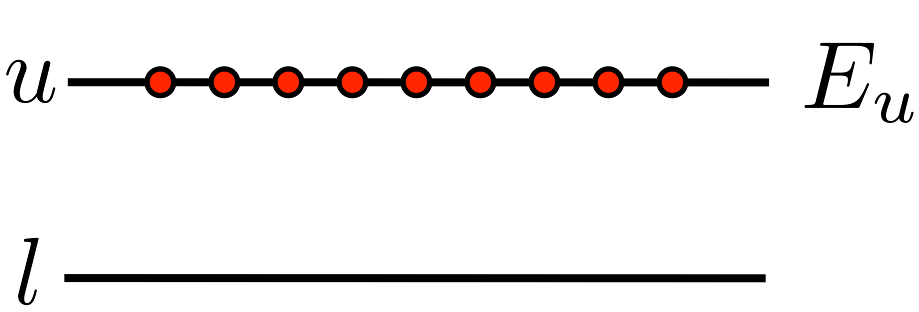
Profils Gaussiens



Largeur totale à mi-hauteur

$$\mathrm{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2}\Delta\nu_D \simeq 1.66\Delta\nu_D = \sqrt{8\ln 2}\sigma_v \simeq 2.35\sigma_v$$

Temps de vie sur un niveau excité



$$\boxed{\delta E_u \tau_u \simeq \hbar}$$

Dépeuplement par désexcitations spontanées $$\frac{\mathrm{d}n_u}{\mathrm{d}t} = -\sum_{l<u} A_{ul} n_u$$

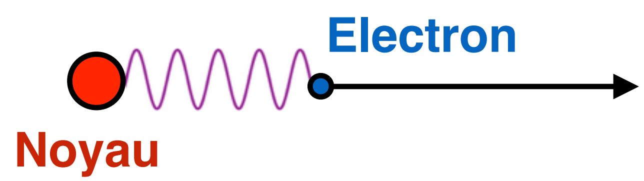
Décroissance exponentielle $$n_u(t) = n_u(0) e^{-t/\tau_u}$$

Temps de vie sur le niveau supérieur $$\tau_u = \frac{1}{\sum_{l<u} A_{ul}}$$

Pour les transitions permises, A_{ul} est très grand (de l'ordre de $10^8\ \mathrm{s}^{-1}$), de sorte que le temps de vie des niveaux supérieurs impliqués dans ces transitions sont très courts, et leur élargissement très important, de l'ordre de 10 MHz. Inversement, pour les transitions interdites, l'élargissement des niveaux supérieurs est très faible. On parle à leur propos de *niveaux métastables*.

Elargissement naturel

Modèle de Thomson (électron élastiquement lié)



$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$$

Section efficace d'interaction photon-électron $$\sigma_\omega = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_{ul}^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$

Coefficient d'amortissement $$\gamma = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3}$$

Au voisinage de la résonance : $\nu \simeq \nu_{ul}$

$$\boxed{\sigma_\nu = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2}}$$

avec $\delta = \gamma / (4\pi)$

Coefficient d'absorption

$$\kappa_\nu = n_l \sigma_\nu \longrightarrow \kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2} = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \phi(\nu)$$

Profil de Lorentz $$\boxed{\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2}}$$ **avec** $$\int_0^\infty \phi(\nu) \mathrm{d}\nu = 1$$

On rapproche cette expression de la précédente

$$\kappa_\nu = \frac{c^2 \nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \boxed{\cancel{\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right)\right]}} \phi(\nu)$$

Le calcul classique ignore l'émission stimulée

$$\longrightarrow \kappa_\nu = \frac{c^2 \nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l} \phi(\nu) = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} \phi(\nu)$$

$$\longrightarrow n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} = \frac{c^2 \nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}$$

Forces d'oscillateur

Calcul classique des coefficients d'Einstein

$$B_{lu} = \frac{g_u}{g_l} B_{ul} = \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \frac{c^2}{2h\nu_{ul}^3} = \frac{\pi}{h\nu} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c}$$

Le calcul quantique donne un résultat presque identique

$$B_{lu} = \frac{\pi}{h\nu} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c} f_{ul}$$

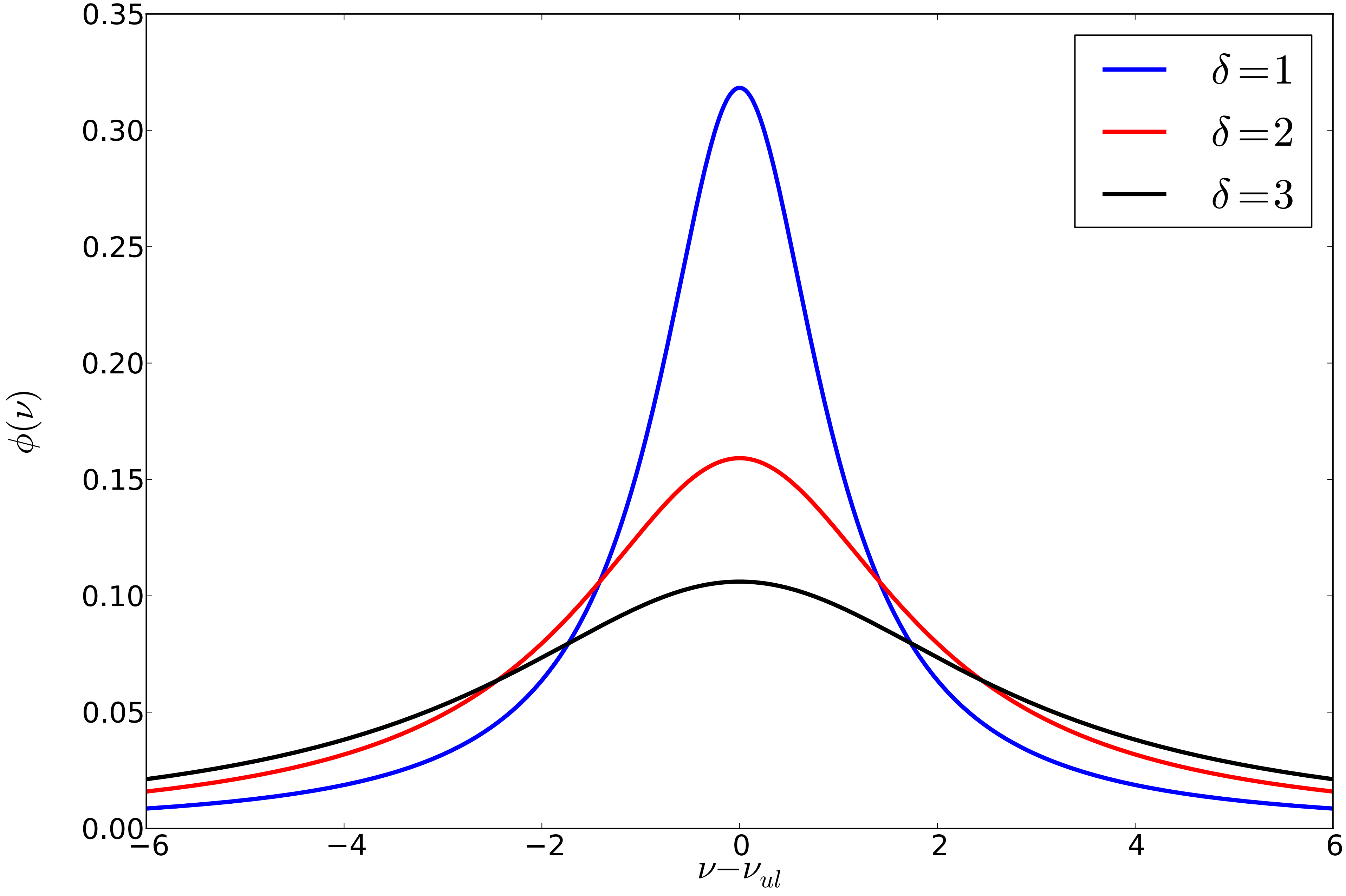
Force d'oscillateur de la transition

Les forces d'oscillateurs sont $f_{ul} < 1$ et représentent le nombre d'oscillateurs classiques auquel on peut associer la transition considérée.

Profil d'élargissement naturel

Profil de Lorentz $$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_{ul})^2}$$

Paramètre $$\delta = \frac{1}{4\pi\tau_u} = \frac{\gamma_u}{4\pi}$$



Largeur à mi hauteur 2δ

Remarque : tend vers un Dirac lorsque $\delta \rightarrow 0$

Lien du profil avec l'émission spontanée

Profil en pulsation $$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma_u}{2}}{\left(\frac{\gamma_u}{2}\right)^2 + (\omega - \omega_{ul})^2}$$

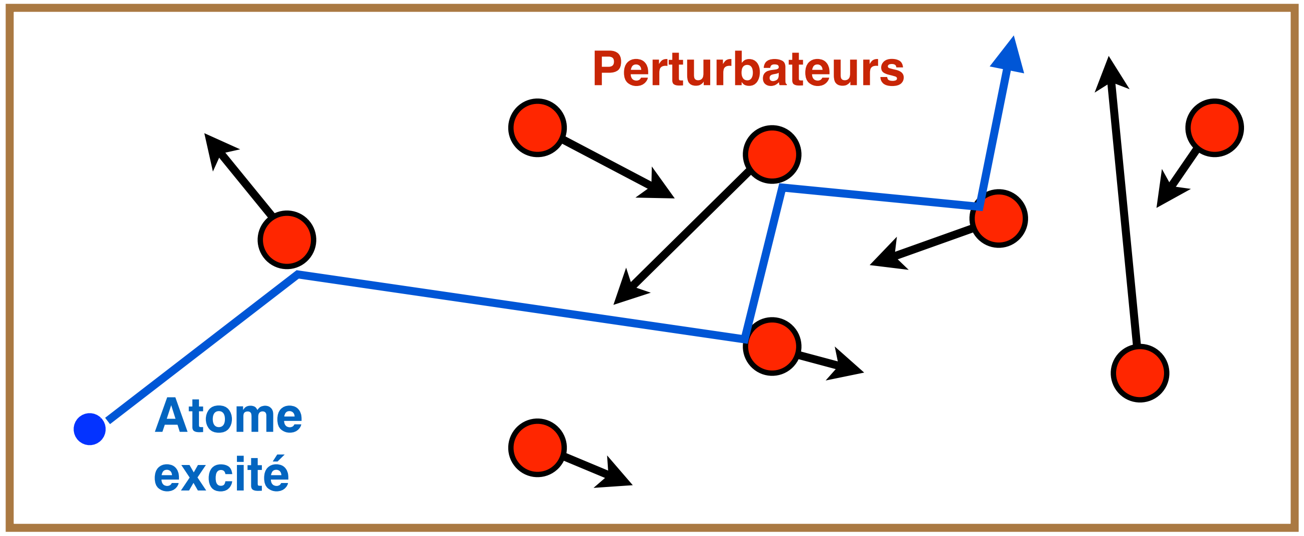
Champ électrique par la transformée de Fourier $e^{-\gamma_u t/2}$

Décroissance de l'énergie rayonnée $e^{-\gamma_u t}$

$$\Updownarrow$$

Décroissance du niveau supérieur $n_u(t) = n_u(0)e^{-t/\tau_u}$

Elargissement par collisions



Les interactions et collisions d'un atome excité avec d'autres particules peuvent accélérer sa désexcitation

Rayon d'interaction : dépend de la nature des particules perturbatrices

Densité des particules

Constante d'amortissement par collision

$$\gamma_{\rm coll} \sim \frac{1}{\tau_{\rm coll}} \sim n_p \pi r_p^2 v$$

Vitesse relative

$$v \sim \sqrt{kT\left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_a}\right)}$$

Masse des particules perturbatrices **Masse de la particule rayonnante**

Conditions physiques

Il est essentiel de noter que, contrairement à l'élargissement naturel, l'élargissement par collisions dépend donc de la densité des particules, de la température et du taux d'ionisation du milieu. On pourra donc utiliser la largeur des raies pour contraindre ces paramètres.

Exemple

Raies du calcium ionisé (393,3 nm) dans les spectres des étoles F, G, K, en présence de HI : potentiel de VdW

$$T = 5700\ \mathrm{K} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} v \simeq 10^6\ \mathrm{cm.s}^{-1} \\ n_p \sim 10^{17}\ \mathrm{cm}^{-3} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\gamma_{\mathrm{coll}} \sim 10^9\ \mathrm{s}^{-1}} \longleftarrow \boxed{r_p \simeq 5\ 10^{-8}\ \mathrm{cm}}$$

Transitions permises et transitions interdites

On peut maintenant expliquer pourquoi certaines transitions sont dites *permises* et d'autres *interdites*, en remarquant que dans les conditions terrestres, on a un taux de collisions γ_{coll} de l'ordre de $10^9\ \mathrm{s}^{-1}$. Comme le taux de désexcitations radiatives est donné par A_{ul}, il y en aura une fraction non négligeable uniquement si $A_{ul} \sim \gamma_{\mathrm{coll}}$. On pourra alors observer ces raies dans ces conditions. Inversement, on n'observera pas de transitions interdites, car elles sont beaucoup moins probables qu'une désexcitation collisionnelle dans les conditions terrestres.

Conditions typiques dans l'atmosphère terrestre

$$v \sim 0.1\sqrt{\frac{300}{14}} \simeq 0.46\,\mathrm{km\,s}^{-1} = 460\,\mathrm{m\,s}^{-1} \qquad r_p \sim 10^{-10}\,\mathrm{m} \qquad n_p \sim 3 \times 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$$

Combinaison des profils

Deux processus d'élargissement : $\phi_i(\nu)$ **et** $\phi_j(\nu)$

Profil résultant

$$\Psi(\nu) = \int \phi_i(\nu')\phi_j(\nu - \nu')\mathrm{d}\nu'$$

Deux Gaussiennes

$$G_i \otimes G_j = G$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} \longrightarrow \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Deux Lorentziennes

$$L_i \otimes L_j = L$$

$$\left.\begin{matrix}\delta_1 \\ \\ \delta_2\end{matrix}\right\} \longrightarrow \delta_1 + \delta_2$$

NB : Démonstration par Transformée de Fourier

Combinaison Gauss et Lorentz

Convolution d'une Gaussienne (thermique+turbulent) par une Lorentzienne (naturel+collisionnel)

$$\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu')^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu'}{\Delta\nu_D}\right)^2\right] \mathrm{d}\nu'$$

On pose : $a = \frac{\delta}{\Delta\nu_D}$ $\quad u = \frac{\nu}{\Delta\nu_D}$ $\quad y = \frac{\nu'}{\Delta\nu_D}$

$$\longrightarrow \boxed{\kappa_\nu = n_l \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{ul} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} H(a, u) = \kappa_0 H(a, u)}$$

Profil de Voigt

Fonction de Voigt

$$\boxed{H(a,u) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{a^2+(u-y)^2}\mathrm{d}y}$$

Largeur Lorentzienne

C'est une fonction de $u = \dfrac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$ **dont l'allure est paramétrée par** $a = \dfrac{\delta}{\Delta\nu_D}$

Largeur Gaussienne

$$\boxed{a \approx 10^{-3} \text{ pour les raies permises, et } a \ll 1 \text{ pour les raies interdites}}$$

Comportements asymptotiques

- **Centre du profil** $u \ll 1$ **Coeur Doppler**

Développement de Taylor $H(a,u) = H_0(u) + aH_1(u) + a^2H_2(u) + \ldots = \sum_{n \geqslant 0} a^n H_n(u)$

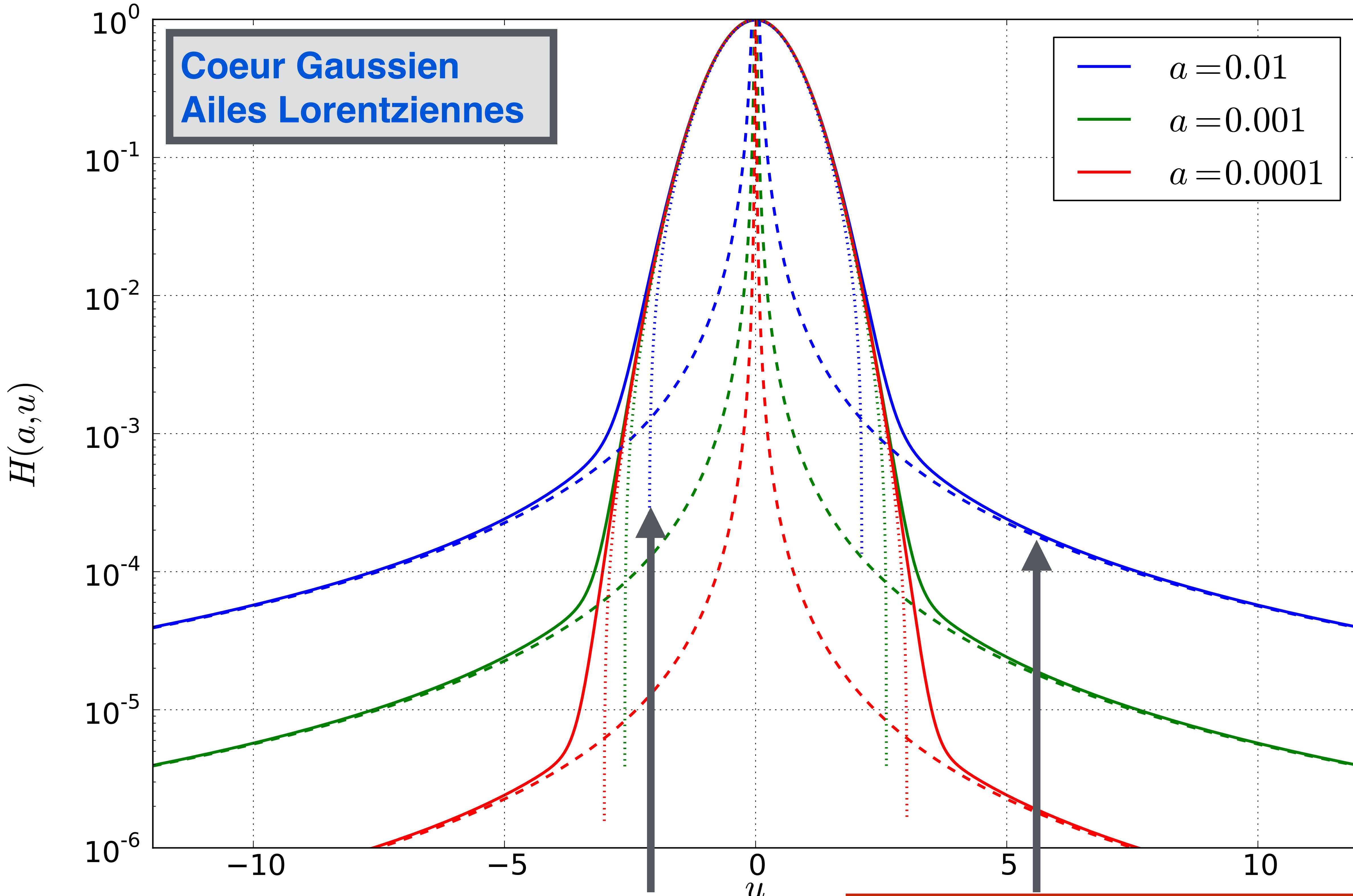
avec $\begin{cases} H_0(u) = e^{-u^2} \\ H_1(u) = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1 - 2uF(u)\right] \end{cases}$ **et** $F(u) = e^{-u^2}\int_0^u e^{t^2}\mathrm{d}t$

$\longrightarrow$ $\boxed{H(u) \simeq e^{-u^2}}$ terme dominant pour $a \ll 1$ et $u \to 0$

- **Ailes du profil** $u \gg 1$ $a \ll 1$ **Ailes Lorentziennes**

$$\frac{1}{a^2 + (u-y)^2} \simeq \frac{1}{u^2} \longrightarrow \boxed{H(a,u) \simeq \frac{1}{u^2}\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{a}{\sqrt{\pi}u^2}}$$

Profil de Voigt



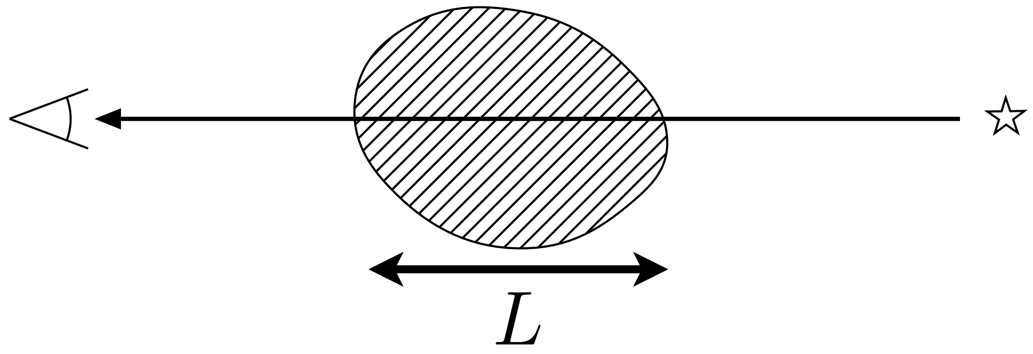
$$u \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad H(a,u) \simeq e^{-u^2}$$

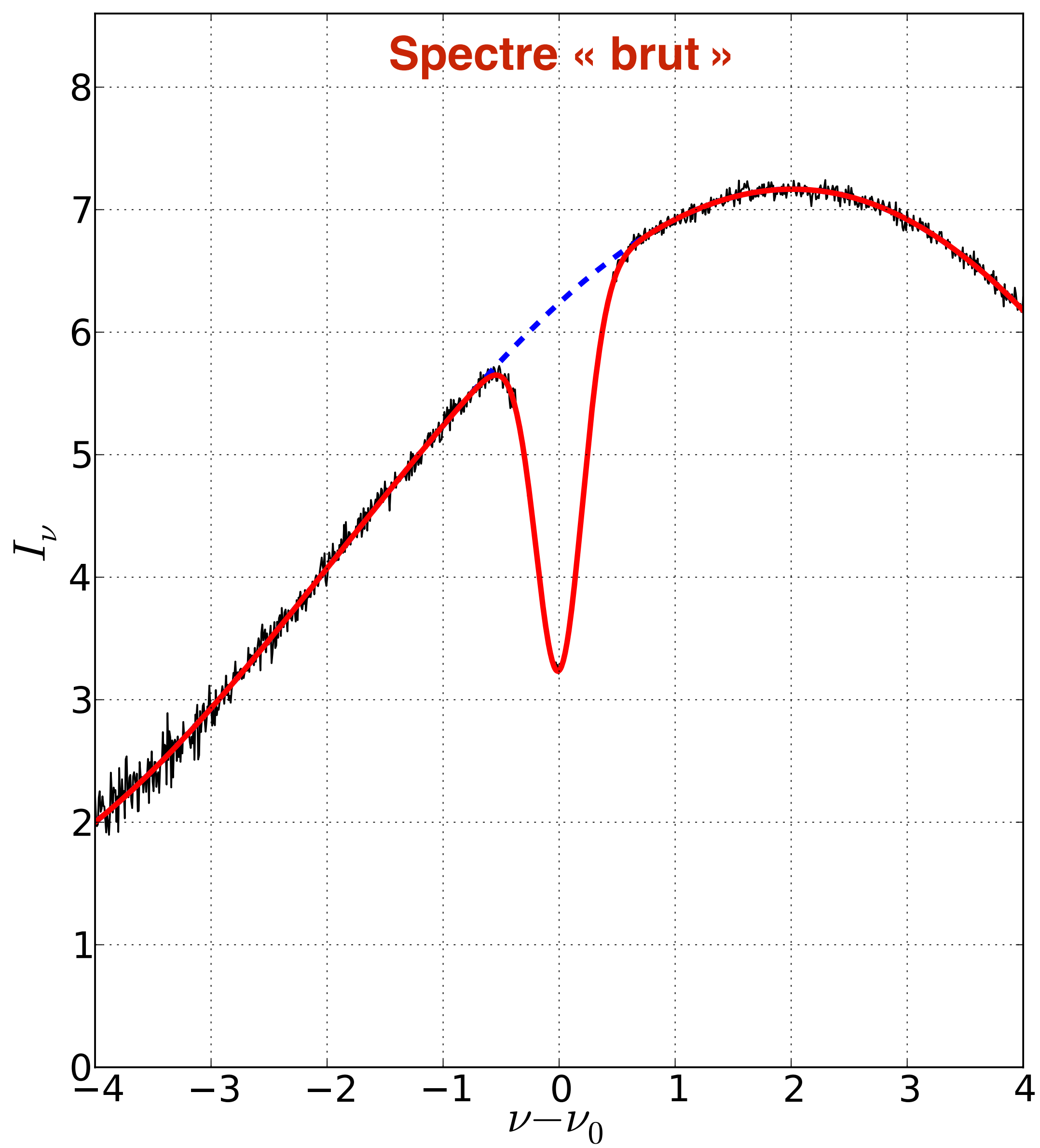
$$u \gg 1 \quad \Longrightarrow \quad H(a,u) \simeq \frac{a}{\sqrt{\pi}u^2}$$

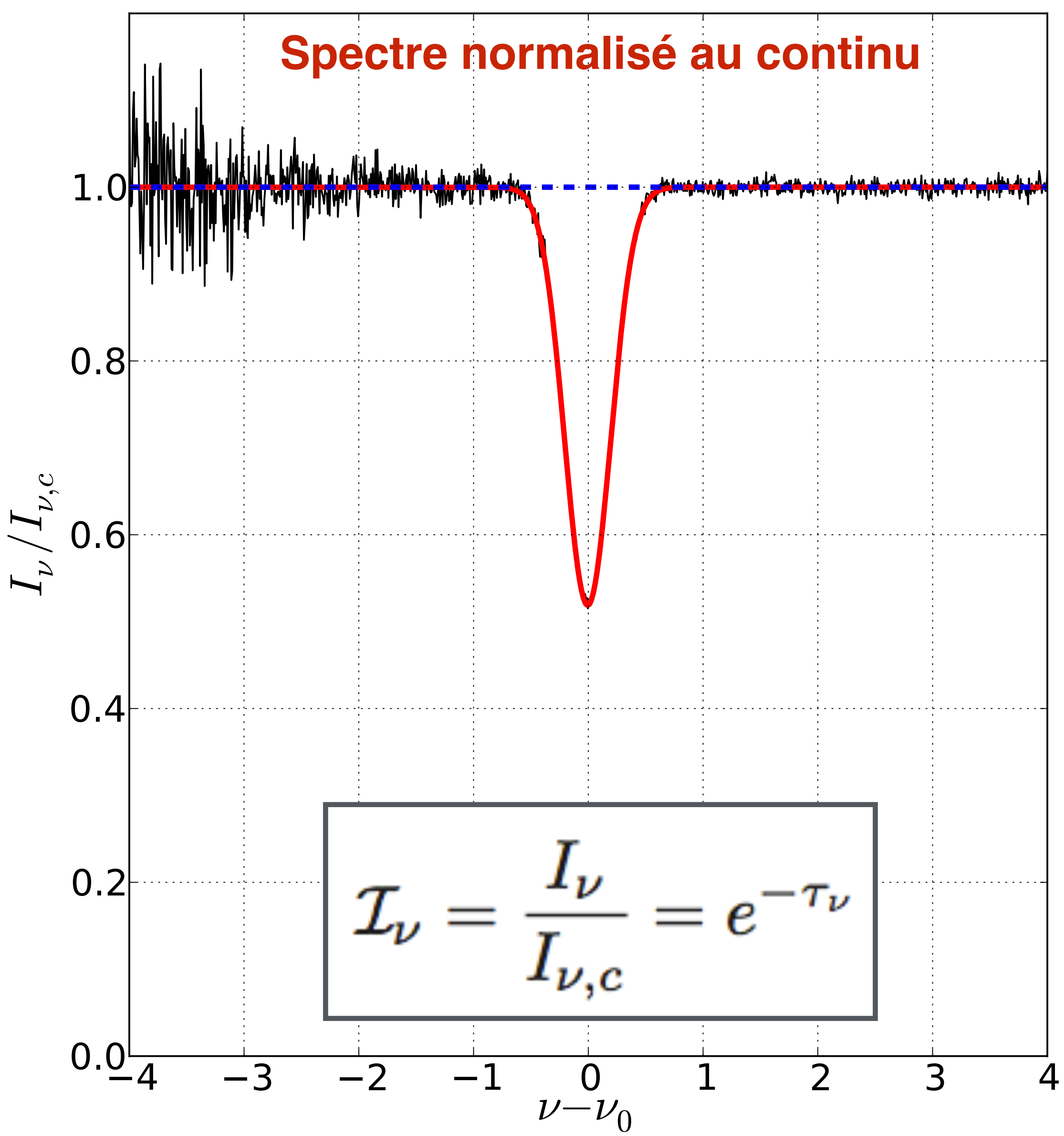
Modèle de spectre d'absorption

Modèle de la couche absorbante

Couche purement absorbante dans une raie, en avant-plan d'une source ponctuelle continue







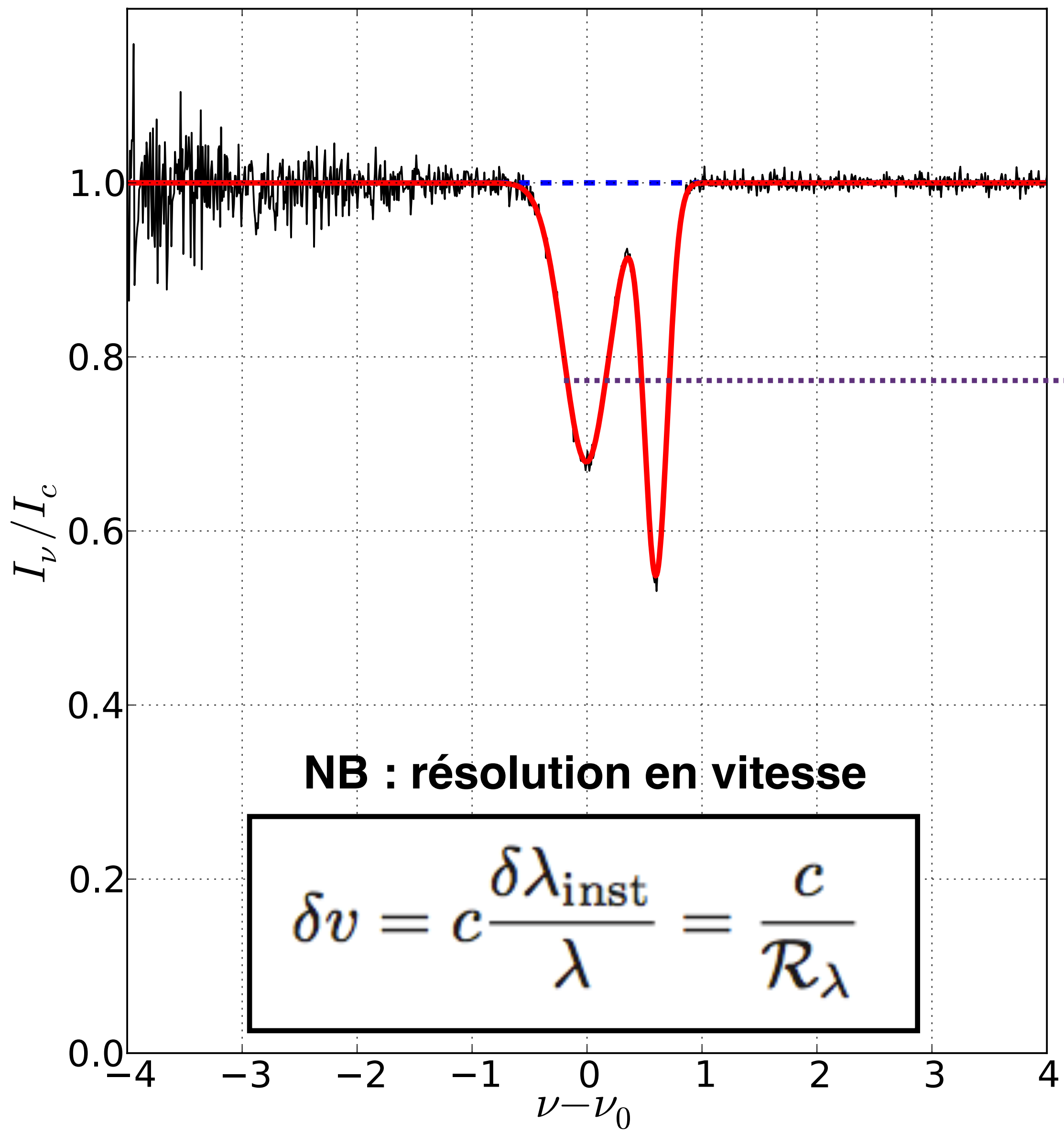
$$\mathcal{I}_\nu = \frac{I_\nu}{I_{\nu,c}} = e^{-\tau_\nu}$$

Observation des raies

Pouvoir de résolution d'un spectroscope

$$\mathcal{R}_\lambda = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\text{inst}}} \sim 10^3 \ - \ 10^6 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta\lambda_{\text{inst}} & \textbf{(instrumental)} \\ \delta\lambda_0 & \textbf{(intrinsèque)} \end{array} \right. \longrightarrow \boxed{\delta\lambda_{\text{obs}} = \sqrt{\delta\lambda_0^2 + \delta\lambda_{\text{inst}}^2}}$$

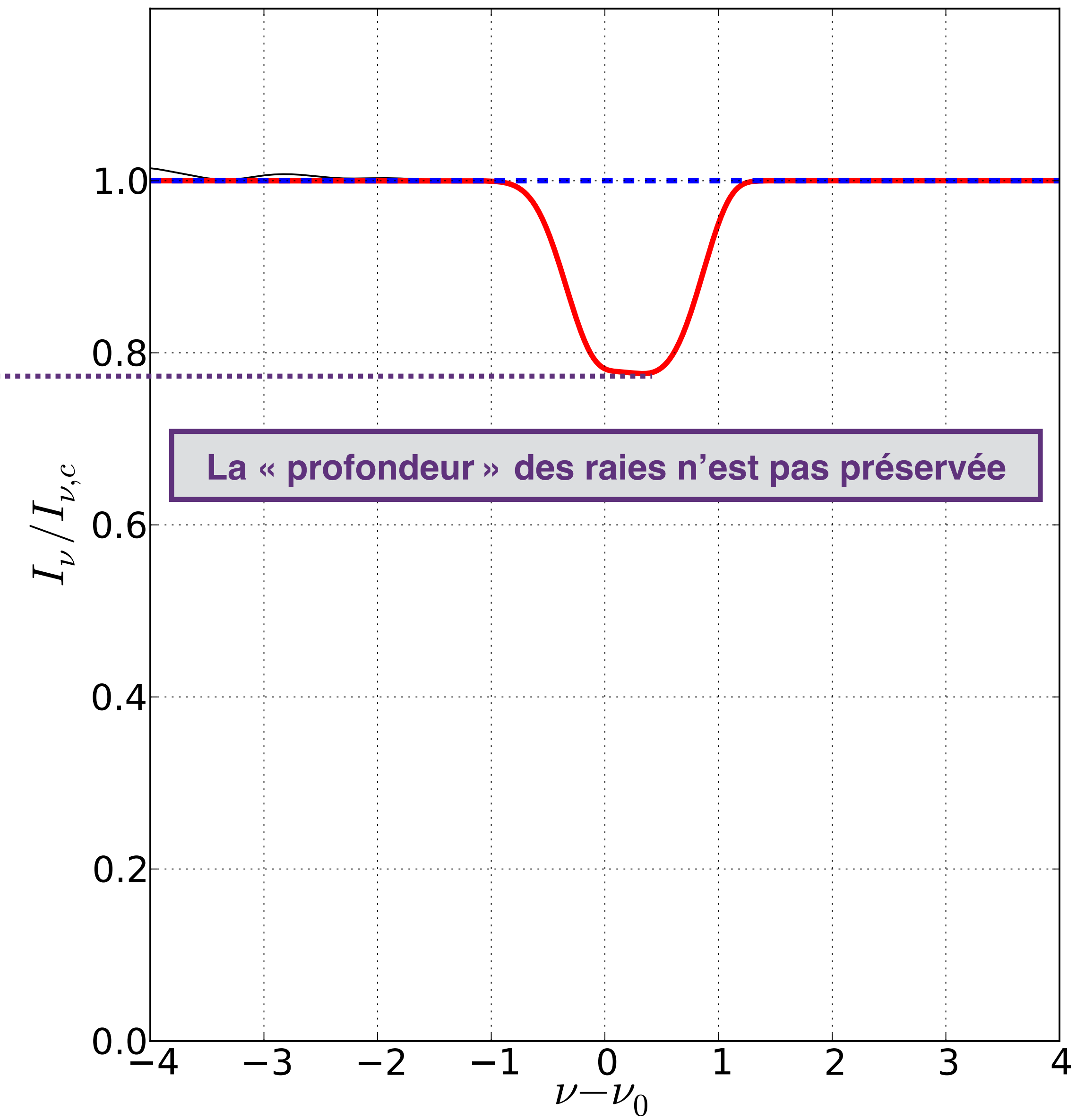
Raies résolues



NB : résolution en vitesse

$$\boxed{\delta v = c\frac{\delta\lambda_{\text{inst}}}{\lambda} = \frac{c}{\mathcal{R}_\lambda}}$$

Raies non résolues



La « profondeur » des raies n'est pas préservée

Largeur équivalente

C'est l'aire de la raie rapportée à l'intensité du continu, elle est préservée par la convolution instrumentale

Différentes définitions

A partir de l'intensité spécifique

$$W_\lambda = \int_0^\infty \frac{I_{\lambda,c} - I_\lambda}{I_{\lambda,c}} \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty (1 - \mathcal{I}_\lambda) \mathrm{d}\lambda \quad \text{ou} \quad W_\nu = \int_0^\infty \frac{I_{\nu,c} - I_\nu}{I_{\nu,c}} \mathrm{d}\nu = \int_0^\infty (1 - \mathcal{I}_\nu) \mathrm{d}\nu$$

A partir de la densité spectrale de flux

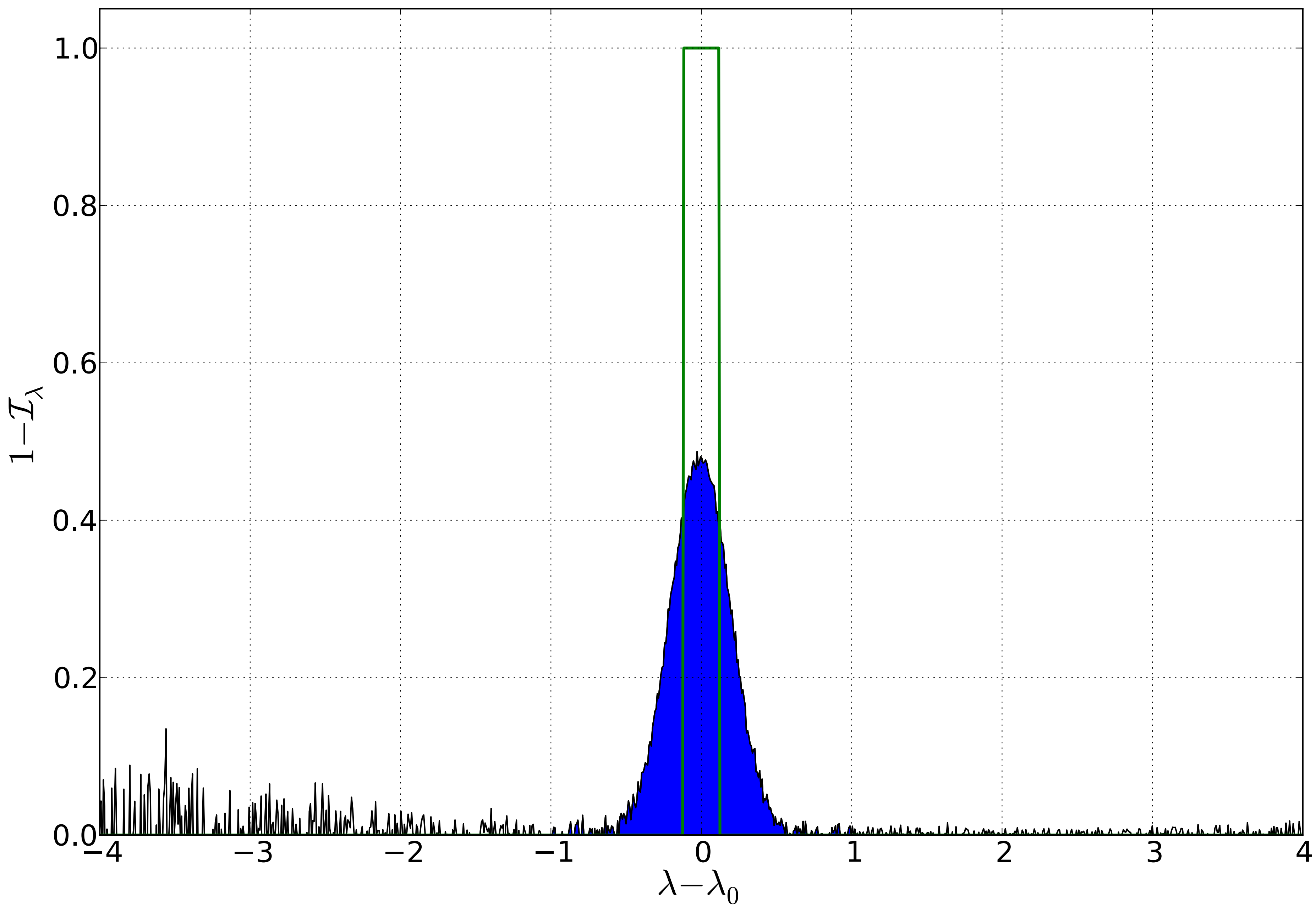
$$W_\lambda = \int_0^\infty \frac{F_{\lambda,c} - F_\lambda}{F_{\lambda,c}} \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty (1 - \mathcal{F}_\lambda) \mathrm{d}\lambda \quad \text{ou} \quad W_\nu = \int_0^\infty \frac{F_{\nu,c} - F_\nu}{F_{\nu,c}} \mathrm{d}\nu = \int_0^\infty (1 - \mathcal{F}_\nu) \mathrm{d}\nu$$

Lien entre les largeurs équivalentes en fréquence et en longueur d'onde

$$\boxed{W_\lambda = (\lambda_0^2/c) W_\nu}$$

D'autre part, l'intégration se limite en pratique à l'étendue de la raie.

Largeur équivalente



La largeur équivalente W_λ, qui a la dimension d'une longueur d'onde et est typiquement exprimée en Å, correspond à l'aire de la raie rapportée à l'intensité du continu. C'est la largeur d'une raie rectangulaire bloquant entièrement le spectre émergent, comme indiqué sur la Fig. 4.8. L'idée sous-jacente est que cette aire est une mesure directe du nombre d'atomes absorbant sur la ligne de visée. Comme on va le voir, cette idée est correcte dans la limite optiquement mince, mais fausse dès que la raie sature.

Cas du profil de Voigt

Largeur équivalente

$$W_\lambda = \int \left[1 - e^{-\tau_{\nu,0} H(a,u)}\right] \mathrm{d}\lambda$$

Opacité au centre de la raie

$$\tau_{\nu,0} = \kappa_{\nu,0} L = N_l \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}\epsilon_0 m_e c \Delta\nu_D} f_{ul} = 1.5\,10^{-6} f_{ul} \left(\frac{N_l}{\mathrm{m}^{-2}}\right) \left(\frac{\Delta\nu_D}{1\,\mathrm{Hz}}\right)^{-1}$$

Ecriture en fonction de la largeur en longueur d'onde

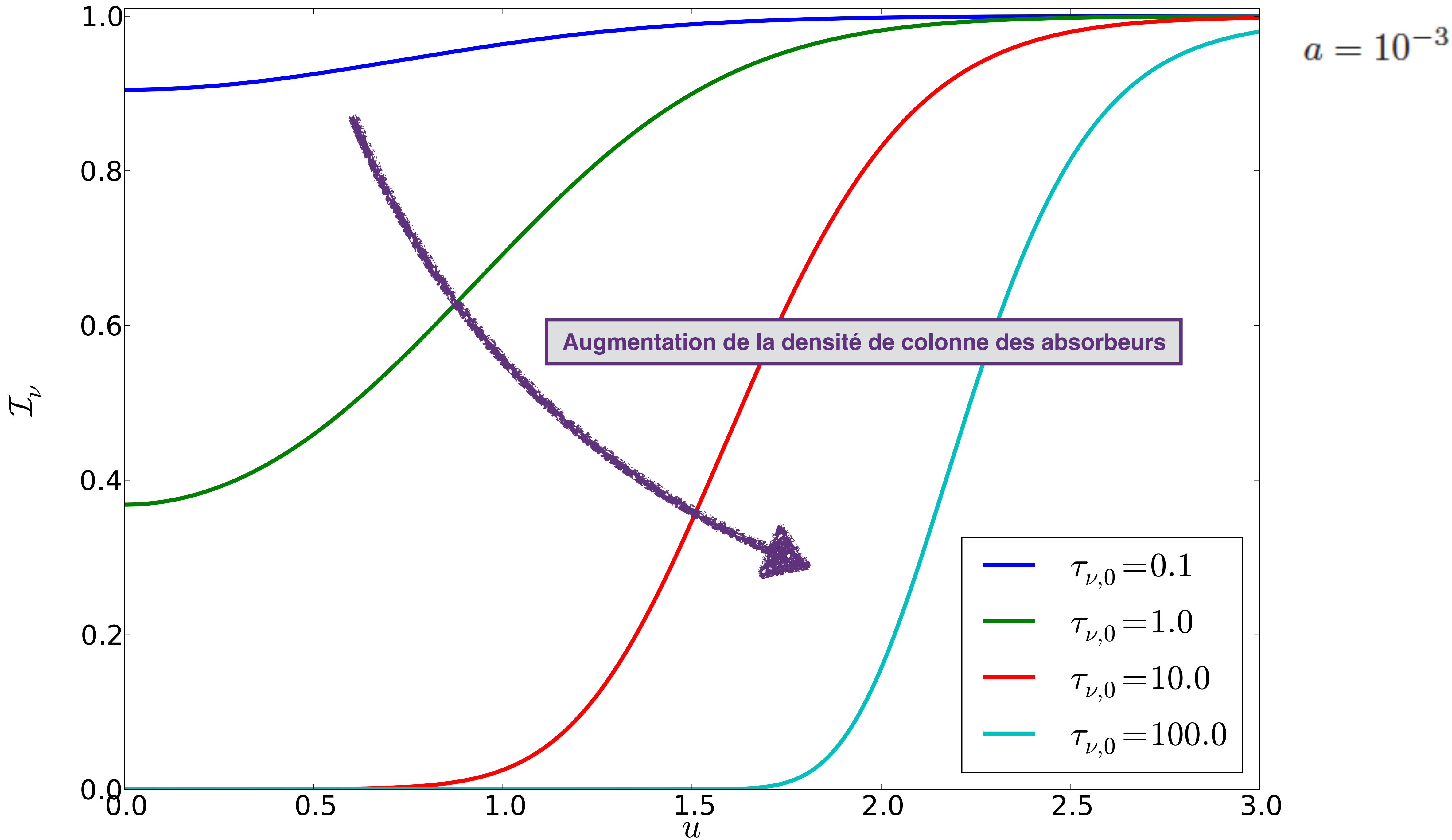
$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0^2 f_{ul}}{4\sqrt{\pi}\epsilon_0 m_e c^2 \Delta\lambda_D} = 5\,10^{-15} f_{ul} \left(\frac{N_l}{\mathrm{m}^{-2}}\right) \left(\frac{\Delta\lambda_D}{1\,\mathrm{m}}\right)^{-1} \left(\frac{\lambda_0}{1\,\mathrm{m}}\right)^2$$

Ecriture en fonction de la largeur en vitesse

$$\tau_{\nu,0} = N_l \frac{e^2 \lambda_0 f_{ul}}{4\sqrt{2\pi}\epsilon_0 m_e c \sigma_v} = 1.1\,10^{-6} f_{ul} \left(\frac{N_l}{\mathrm{m}^{-2}}\right) \left(\frac{\lambda_0}{1\,\mathrm{m}}\right) \left(\frac{\sigma_v}{1\,\mathrm{km\,s^{-1}}}\right)^{-1}$$

La valeur de l'épaisseur optique $\tau_{\nu,0}$ au centre de la raie n'est en général pas mesurable directement sur le spectre, sauf si la raie est parfaitement résolue. Pour une transition donnée (donc f_{ul} et λ_0 donnés), la largeur équivalente dépend à la fois de la densité de colonne N_l et de la dispersion de vitesse σ_v. Il faudra donc deux valeurs de W_λ pour deux transitions distinctes de la même espèce (par exemple, les deux raies d'un doublet de structure fine) pour obtenir à la fois N et σ_v.

Evolution du profil de la raie avec l'opacité



$\tau_0 \ll 1$ **Le coeur Gaussien domine le profil**

$\tau_0 \gg \dfrac{1}{a}$ **Les ailes Lorentziennes dominent le profil**

Limite optiquement mince

- Lorsque l'épaisseur optique est faible $\tau_{\nu,0} \ll 1$, seules les plages de u pour lesquelles $H(a,u)$ n'est pas trop petit vont avoir une contribution à $1-\mathcal{I}_\nu$ et donc à la largeur équivalente W_λ. C'est donc le cœur Doppler du profil qui fixe la largeur équivalente. On a alors

$$W_\lambda \simeq \int \tau_{\nu,0} e^{-u^2} \mathrm{d}\lambda = \int \tau_{\nu,0} \exp\left[-\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\Delta\lambda_D}\right)^2\right] \mathrm{d}\lambda = \sqrt{\pi}\tau_{\nu,0}\Delta\lambda_D$$

$$\longrightarrow \quad \frac{W_\lambda}{\lambda_0} = \left(\frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c^2}\right) N_l \lambda_0 f_{ul}$$

$$\boxed{\frac{W_\lambda}{\lambda_0} \propto N_l f_{ul} \lambda_0}$$

Ne dépend que de N, pas de la largeur Doppler, ni de l'amortissement

$\longrightarrow$ **Détermination possible de la densité de colonne**

$$\boxed{N_l = 1.13\, 10^{20} \frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}}}$$

N_l en cm^{-2}, et W_λ et λ_0 exprimées en Å.

Limite optiquement épaisse

- Lorsque l'épaisseur optique est très grande $\tau_{\nu,0} \gg 1/a$, la raie est saturée jusqu'aux ailes Lorentziennes : aux faibles valeurs de u, l'argument de l'exponentielle est très grand en valeur absolue et négatif, la quantité sous l'intégrale vaut donc sensiblement 1 jusqu'à une valeur "critique" u_c de u telle que

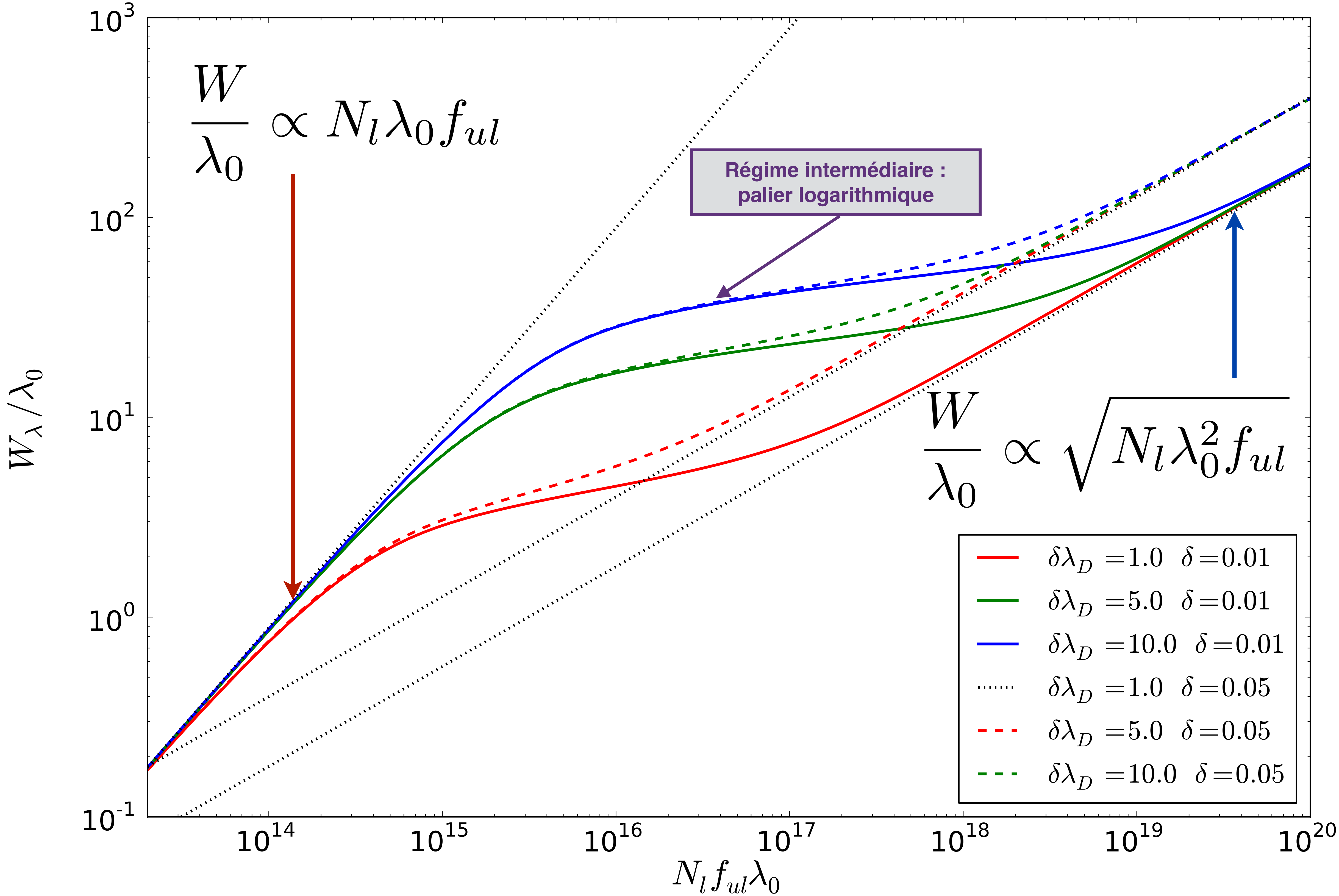
$$\tau_{\nu,0} H(a,u) \simeq \tau_{\nu,0} \frac{a}{\sqrt{\pi} u_c^2} \simeq 1 \quad \text{soit} \quad u_c \simeq \frac{\sqrt{a\tau_{\nu,0}}}{\pi^{1/4}}$$

$$\longrightarrow \quad W_\lambda \simeq \int_{-u_c}^{u_c} \mathrm{d}\lambda = 2u_c \Delta\lambda_D = \frac{2\sqrt{a\tau_{\nu,0}}\Delta\lambda_D}{\pi^{1/4}}$$

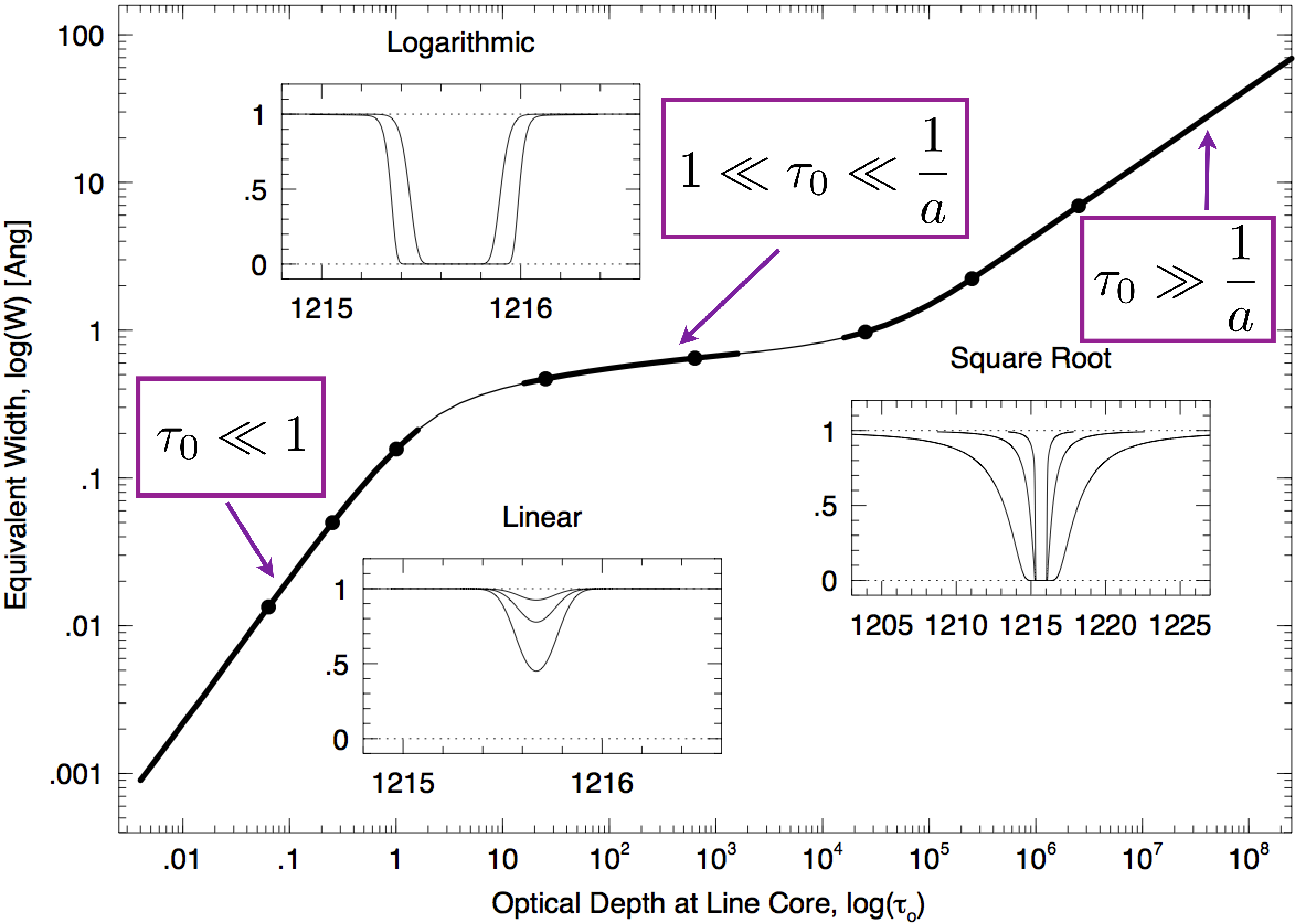
$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{W_\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m_e c^3}\delta N_l f_{ul} \lambda_0^2}}$$

Dépend de N et de l'amortissement, mais pas de la largeur Doppler

Courbe de croissance



Profils de raies et courbe de croissance



Ajustement direct des profils

Cas des raies résolues

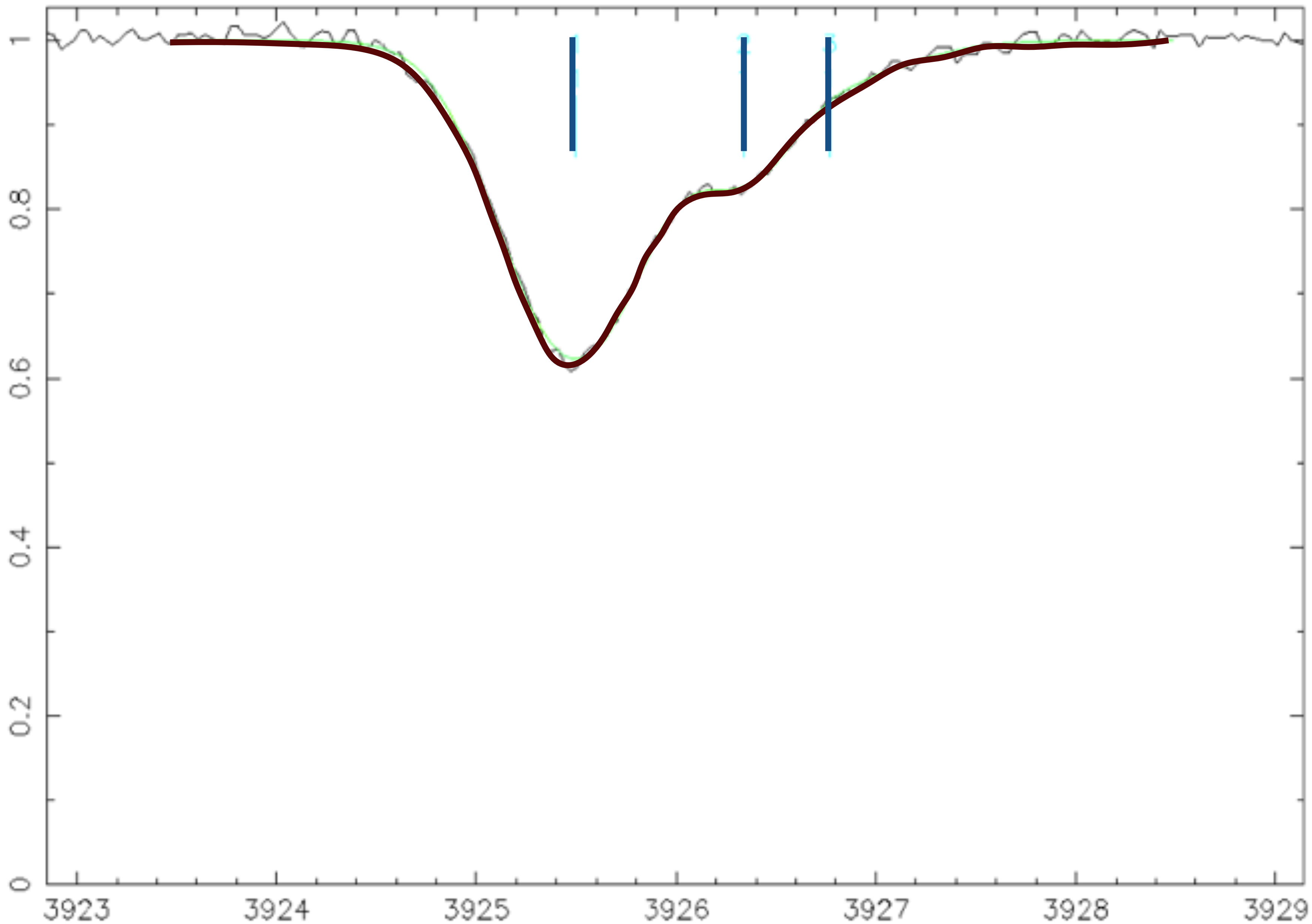
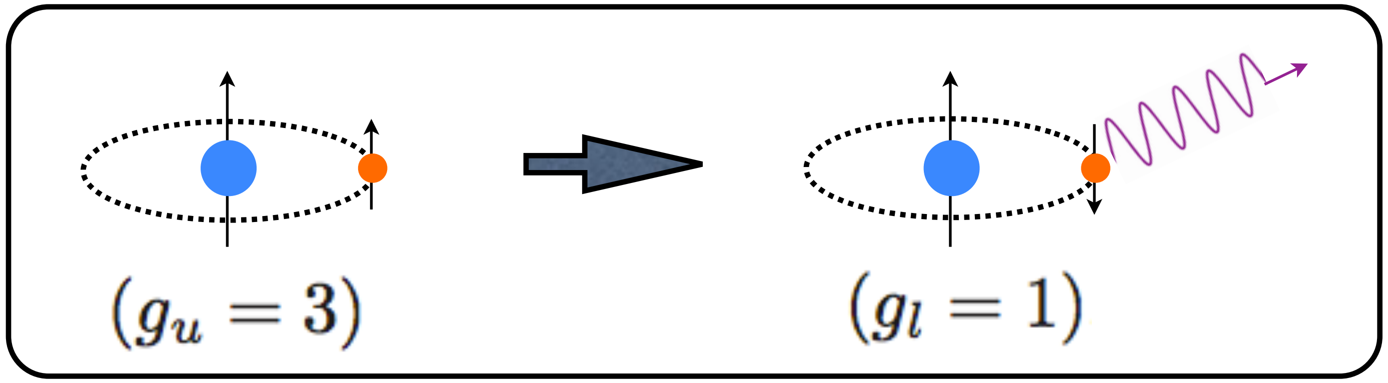


Figure 2: A three component Lyα fit to a region of the sample spectrum, obtained using the methods described in the text.

http://www.ast.cam.ac.uk/~rfc/vpfit.html

Une raie essentielle : la raie à 21 cm

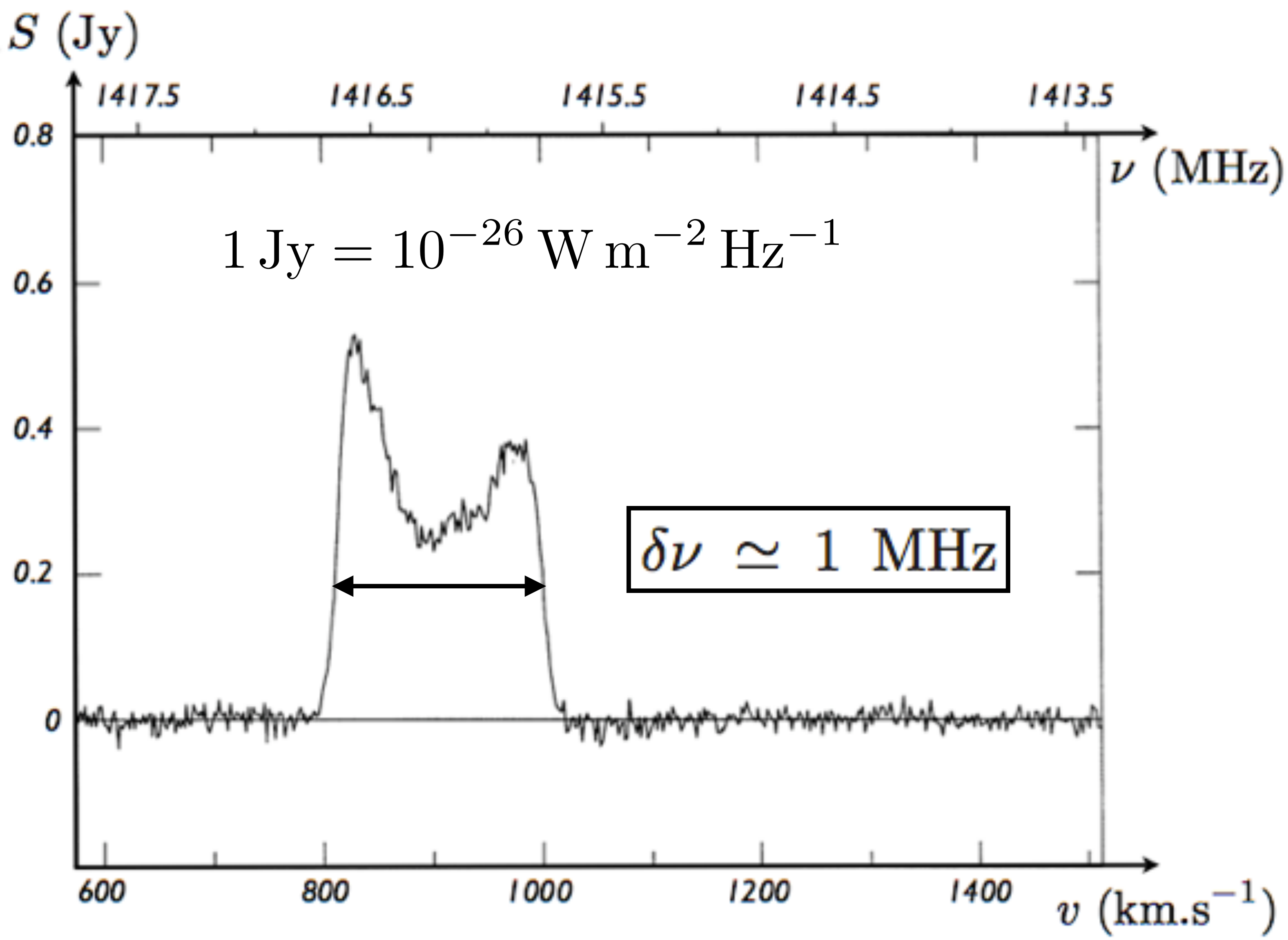
Transition hyperfine de l'hydrogène atomique neutre à 21 cm (1420 MHz)



$(A_{ul} = 2.85\ 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1})$

NB : Temps de vie très long, donc élargissement naturel négligeable

Signal HI observé en direction de UGC11707 (non résolue par le radiotélescope)



Régime de Rayleigh-Jeans

Dans le milieu atomique neutre, la température d'excitation T_x de la transition hyperfine, qu'on nomme dans ce cas précis *température de spin* et qu'on note T_s, est de l'ordre de 50 à 10000 K, donc si on calcule le rapport $x = h\nu_0/kT_s$, avec $\nu_0 = 1420$ MHz (raie radio centimétrique), on trouve

$$x = \frac{h\nu_0}{kT_s} = \frac{6.63\ 10^{-34} \times 1.42\ 10^{9}}{1.38\ 10^{-23} \times T_s} = \frac{6.82\ 10^{-2}}{T_s}$$

soit $x = 1.36\ 10^{-3}$ à $T = 50$ K et $x = 6.82\ 10^{-6}$ à $T = 10000$ K. On est donc toujours dans le domaine $x \ll 1$ où l'on peut appliquer l'approximation de Rayleigh-Jeans à T_s dans la formule donnant le coefficient d'absorption monochromatique

$$\boxed{\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_0^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_s}\right)\right]\phi(\nu) \simeq \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_0^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}\frac{h\nu_0}{kT_s}\phi(\nu)}$$

Coefficient d'absorption et épaisseur optique

Poids statistiques

$$g_u = 3 \text{ et } g_l = 1 \longrightarrow \kappa_\nu = \frac{3c^2 h\nu}{8\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} n_l \phi(\nu)$$

Rapport des populations

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{kT_s}\right) \simeq \frac{g_u}{g_l} = 3$$

Introduction de la densité totale d'hydrogène neutre

$$n_{\mathrm{H}} = n_u + n_l = 4n_l \longrightarrow \kappa_\nu = \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} n_{\mathrm{H}} \phi(\nu)$$

Epaisseur optique

Hypothèse : milieu homogène $\longrightarrow$ T_s et ϕ ne dépendent pas de la position s

$$\boxed{\tau_\nu = \int \kappa_\nu \mathrm{d}s = \int \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} n_{\mathrm{H}} \phi(\nu) \mathrm{d}s = \frac{3c^2 h\nu}{32\pi\nu_0^2 kT_s} A_{ul} N_{\mathrm{H}} \phi(\nu)}$$

Equation du transfert (I)

Résolution formelle

$$I_\nu = I_\nu^0 e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'} \mathrm{d}\tau' \xrightarrow{\text{Pas de radiation de fond}} I_\nu = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{-\tau'} \mathrm{d}\tau' \xrightarrow{\text{Milieu homogène}} I_\nu = S_\nu \left(1 - e^{-\tau_\nu}\right)$$

Pas de radiation de fond

Milieu homogène

Introduction de la température de brillance $I_\nu = B_\nu[T_b(\nu)]$

$$\longrightarrow \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left[\dfrac{h\nu}{kT_b(\nu)}\right] - 1} = B_{\nu_0}(T_s)\left(1 - e^{-\tau_\nu}\right) \simeq \frac{2kT_s\nu_0^2}{c^2}\left(1 - e^{-\tau_\nu}\right) \simeq \frac{2kT_s\nu_0^2\tau_\nu}{c^2}$$

$$\boxed{S_\nu = B_{\nu_0}(T_s)}$$

Equation du transfert (II)

Régime de Rayleigh-Jeans pour la température de brillance

Typiquement $N_{\mathrm{H}} = 10^{21}\ \mathrm{cm}^{-2}$ **Largeur du profil** $\delta\nu \simeq 1\ \mathrm{MHz} \longrightarrow \phi(\nu) \simeq 10^{-6}\ \mathrm{Hz}^{-1}$

$$y = \frac{3c^2}{32\pi\nu^2} A_{ul} N_{\mathrm{H}} \phi(\nu) \simeq \frac{3 \times (3\ 10^8)^2}{32 \times 3.14 \times (1.42\ 10^9)^2} \times 2.85\ 10^{-15} \times 10^{25} \times 10^{-6} \simeq 38$$

$$\longrightarrow \quad T_b(\nu) = \frac{h\nu}{k} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)} \simeq \frac{h\nu y}{k} = \frac{3hc^2}{32\pi k \nu} A_{ul} N_{\mathrm{H}} \phi(\nu)$$

Largeur de raie très faible

$$\frac{\delta\nu}{\nu} \simeq \frac{1\ \mathrm{MHz}}{1420\ \mathrm{MHz}} \simeq 7.10^{-4}$$

les fréquences ν pour lesquelles ϕ n'est pas négligeable sont toutes sensiblement égales à ν_0.

Intégration sur la fréquence

$$\int T_b(\nu) \mathrm{d}\nu = \frac{3c^2 h}{32\pi k} A_{ul} N_{\mathrm{H}} \int \frac{\phi(\nu)}{\nu} \mathrm{d}\nu \simeq \frac{3c^2 h}{32\pi k} A_{ul} N_{\mathrm{H}} \int \frac{\delta(\nu - \nu_0)}{\nu} \mathrm{d}\nu = \frac{3c^2 h}{32\pi \nu_0 k} A_{ul} N_{\mathrm{H}}$$

Détermination de la densité de colonne

$$\boxed{N_{\mathrm{H}} = \frac{32\pi\nu_0 k}{3c^2 h A_{ul}} \int T_b(\nu)\mathrm{d}\nu}$$

ou, en variable vitesse,

$$\boxed{N_{\mathrm{H}} = \frac{32\pi\nu_0^2 k}{3c^3 h A_{ul}} \int T_b(v_z)\mathrm{d}v_z}$$

Formules numériques

$$\boxed{\frac{N_{\mathrm{H}}}{\mathrm{cm}^{-2}} \simeq 1.82\ 10^{18} \int \frac{T_b(v_z)\mathrm{d}v_z}{\mathrm{K.km.s}^{-1}}}$$

Masse de gaz HI

Distance

Densité spectrale de flux

$$\boxed{\frac{M_{\mathrm{H}}}{\mathrm{M}_\odot} \simeq 2.36\ 10^5 \left(\frac{D}{\mathrm{Mpc}}\right)^2 \int \frac{F\mathrm{d}v}{\mathrm{Jy.km.s}^{-1}}.}$$

Le cas de UGC11707

Redshift $z = 0.003$

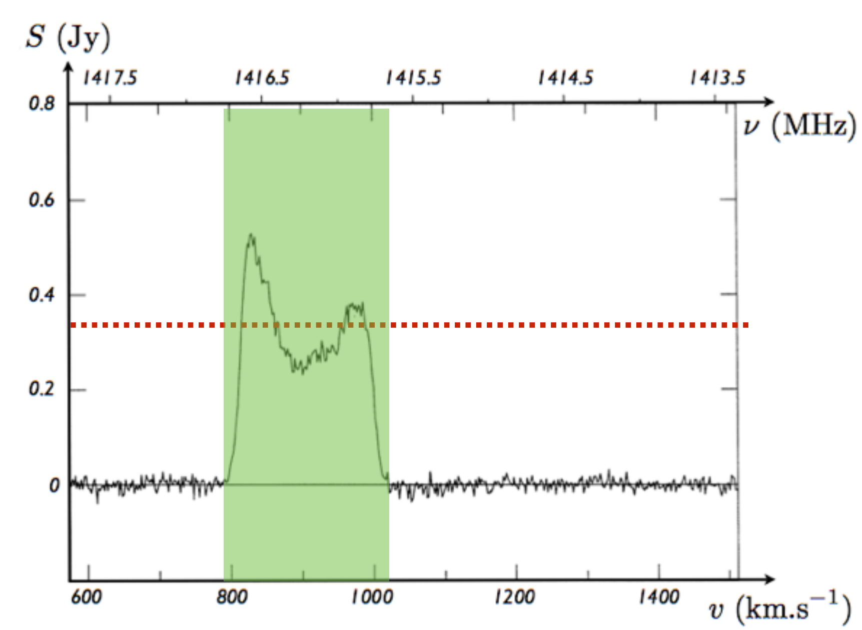
Vitesse systémique $v \simeq 890\ \mathrm{km.s}^{-1}$

Distance $D = \frac{v}{H_0} = \frac{890}{67} \simeq 13.3\ \mathrm{Mpc}$

Planck 2013

Densité de flux $\langle F \rangle \simeq 0.35\ \mathrm{Jy}$

Largeur en vitesse $\Delta v \simeq 200\ \mathrm{km.s}^{-1}$



$$\boxed{M_H \simeq 2.5\ 10^9\ M_\odot}$$

Cause de l'élargissement

Elargissement naturel ? NON

$$A_{ul} = 2.85\ 10^{-15}\ \mathrm{s}^{-1} \longrightarrow$$ *Temps de vie très long, donc élargissement naturel négligeable*

Elargissement thermique ? NON

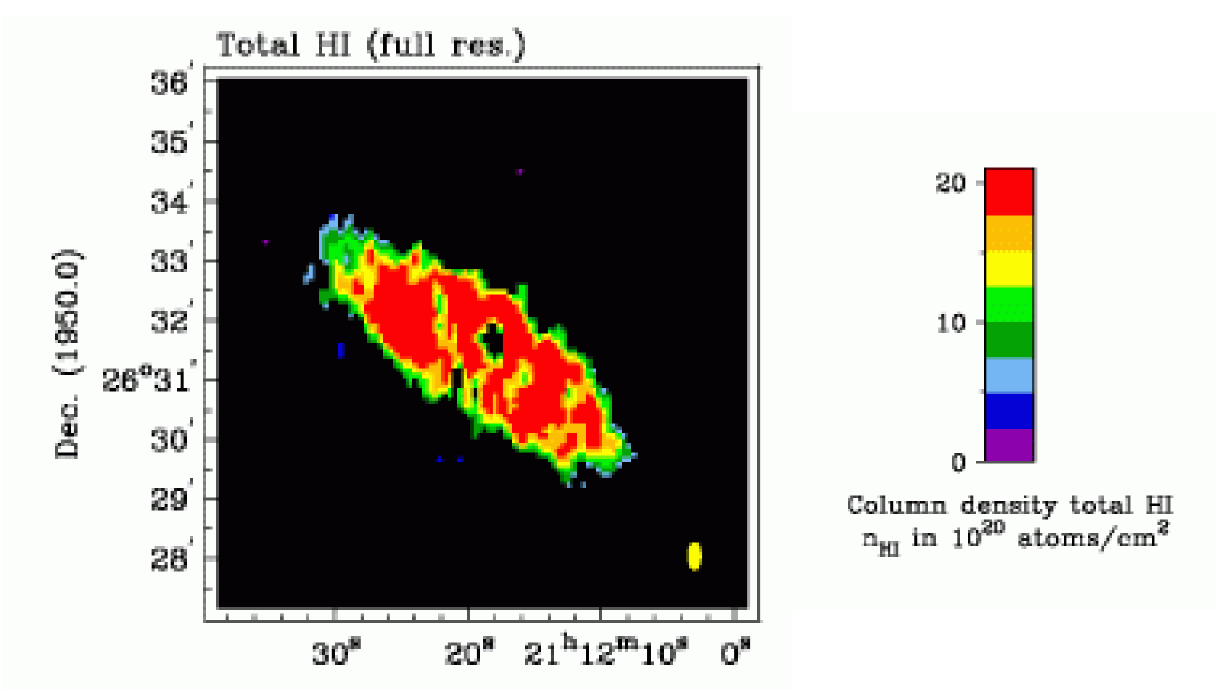
Dispersion des vitesses thermique

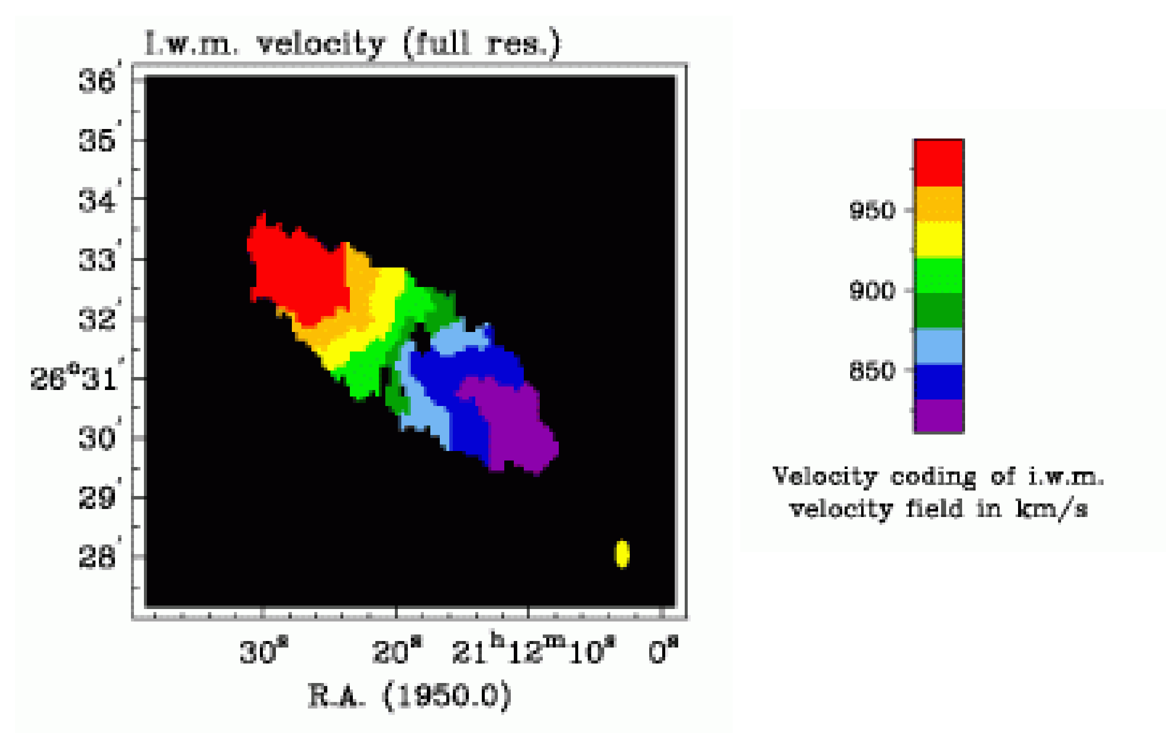
$$\sigma_{v_z} \simeq 90\sqrt{T_c}\ \mathrm{m.s}^{-1} \longrightarrow \sigma_{v_z} \simeq 630\ \mathrm{m.s}^{-1} \text{ à } 50\text{ K et } \sigma_{v_z} \simeq 9\ \mathrm{km.s}^{-1} \text{ à } 10000\text{ K.}$$

Elargissement turbulent ? NON

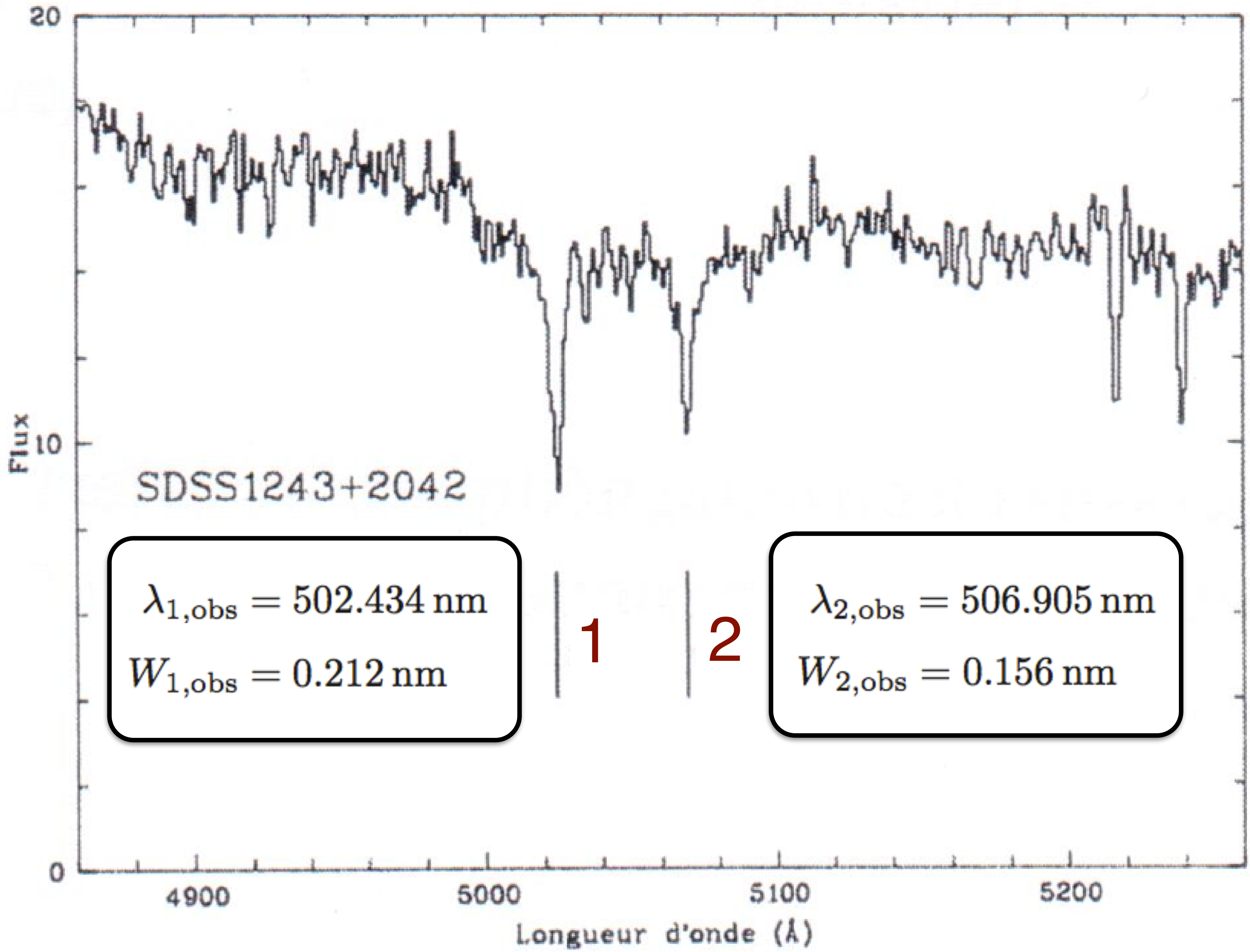
Dépend de l'échelle, mais pour des nuages typiques : $\sigma_{\mathrm{turb}} \sim 30\ \mathrm{km.s}^{-1}$

Mouvements d'ensemble du gaz ? OUI





Raies d'absorption dans les spectres de QSOs



Identification et détermination du redshift

$$\lambda_{\rm obs} = (1+z)\lambda \qquad\qquad W_{\rm obs} = (1+z)W$$

Le rapport des longueurs d'onde n'est pas affecté par le redshift

$$\frac{\lambda_{1,\rm obs}}{\lambda_{2,\rm obs}} = 0.991180 \longrightarrow \text{doublet du calcium ionisé Ca}\textsc{ii}$$

$$\lambda_1 = 393.478\,\text{nm} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = 396.959\,\text{nm} \quad \text{donc} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0.991230$$

Détermination du redshift

$$z_1 = \frac{\lambda_{1,\rm obs}}{\lambda_1} - 1 = 0.27690 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\lambda_{2,\rm obs}}{\lambda_2} - 1 = 0.27697$$

$$\longrightarrow \boxed{z = 0.27694 \pm 0.00004.}$$

Détermination des largeurs équivalentes dans le référentiel de l'absorbeur

$$W_1 = \frac{W_{1,\rm obs}}{1+z} = 0.166\,\text{nm} \quad \text{et} \quad W_2 = \frac{W_{2,\rm obs}}{1+z} = 0.122\,\text{nm}$$

Raies optiquement minces ?

Si les raies sont optiquement minces :

$$\boxed{N_l = 1.13\,10^{20}\,\frac{W_\lambda}{\lambda_0^2 f_{ul}}} \longrightarrow \boxed{\frac{W_1}{\lambda_1^2 f_1} = \frac{W_2}{\lambda_2^2 f_2}}$$

$$f_1 = 0.650 \text{ et } f_2 = 0.322 \longrightarrow \boxed{\frac{W_1}{\lambda_1^2 f_1} = 1.65\,10^{-6}\,\mathrm{nm}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{W_2}{\lambda_2^2 f_2} = 2.41\,10^{-6}\,\mathrm{nm}^{-1}}$$

ce qui montre qu'au moins une des deux raies n'est pas optiquement mince. On peut d'ailleurs utiliser ces formes pour donner des limites inférieures à la densité de colonne de CaII

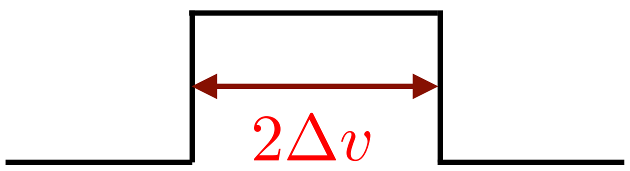
$$N(\mathrm{Ca}^+) > 1.86\,10^{13}\,\mathrm{cm}^{-2} \quad \text{pour la raie 1,}$$

$$N(\mathrm{Ca}^+) > 2.72\,10^{13}\,\mathrm{cm}^{-2} \quad \text{pour la raie 2.}$$

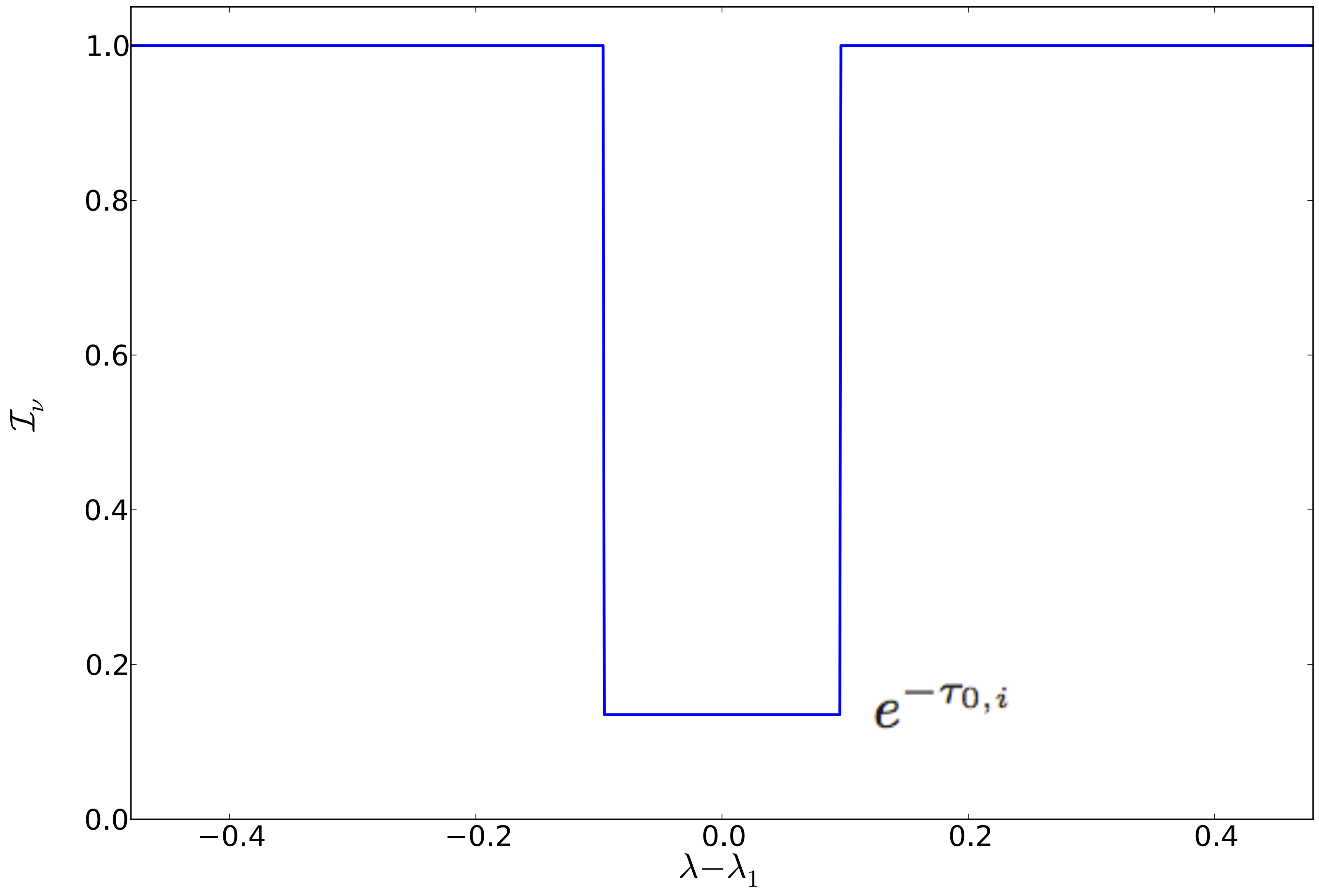
Un modèle simpliste

Pas d'élargissement naturel

Distribution des vitesses non Gaussienne, mais rectangulaire



→ **Profil d'absorption pour chaque raie**



Largeur équivalente et opacité

Largeur équivalente

Analytiquement :

$$\boxed{W_i = \int (1 - e^{-\tau}) \mathrm{d}\lambda = 2\Delta\lambda_i \left(1 - e^{-\tau_{0,i}}\right)}$$

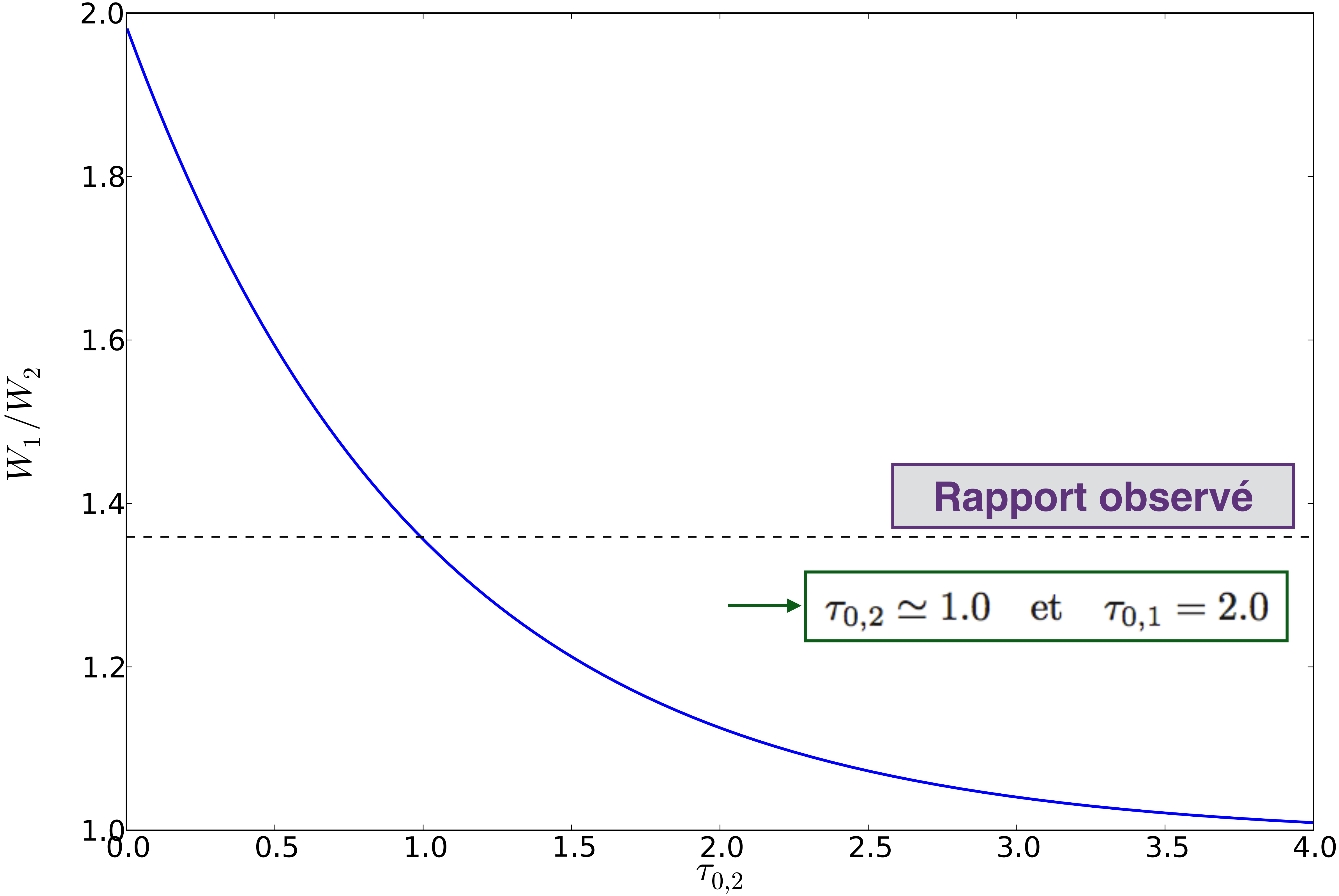
$$\longrightarrow \quad r_{12} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{\Delta\lambda_1 \left(1 - e^{-\tau_{0,1}}\right)}{\Delta\lambda_2 \left(1 - e^{-\tau_{0,2}}\right)} = \frac{\lambda_1 \left(1 - e^{-\tau_{0,1}}\right)}{\lambda_2 \left(1 - e^{-\tau_{0,2}}\right)}$$

Opacité au centre de la raie

$$\tau_{0,i} = 1.33\,10^{-14} f_i \left(\frac{N}{\mathrm{cm}^{-2}}\right) \left(\frac{\lambda_i}{\mathrm{nm}}\right) \left(\frac{\Delta v}{\mathrm{km\,s}^{-1}}\right)^{-1} \longrightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\tau_{0,1}}{\tau_{0,2}} = \frac{f_1\lambda_1}{f_2\lambda_2} = 2.00}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{r_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\left(1 - e^{-2\tau_{0,2}}\right)}{\left(1 - e^{-\tau_{0,2}}\right)} = 0.99123 \times \frac{\left(1 - e^{-2\tau_{0,2}}\right)}{\left(1 - e^{-\tau_{0,2}}\right)}}$$

Rapport des largeurs équivalentes



Détermination de la densité de colonne

Largeurs en longueur d'onde

$$\Delta\lambda_1 = \frac{W_1}{2\left(1 - e^{-\tau_{0,1}}\right)} = 0.0960\,\mathrm{nm} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda_2 = \frac{W_2}{2\left(1 - e^{-\tau_{0,2}}\right)} = 0.0966\,\mathrm{nm}$$

Largeur en vitesse

$$\Delta v \simeq c\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda 1} \simeq c\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda 2} \simeq 73\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

Densité de colonne du calcium ionisé

$$\tau_{0,i} = 1.33\,10^{-14} f_i \left(\frac{N}{\mathrm{cm^{-2}}}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\mathrm{nm}}\right)\left(\frac{\Delta v}{\mathrm{km\,s^{-1}}}\right)^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$N(\mathrm{Ca}^+) = 1.127\,10^{19}\frac{1}{f_2(1 - e^{-\tau_{0,2}})}\left(\frac{W_2}{\mathrm{nm}}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\mathrm{nm}}\right)^{-2}$$

$$\downarrow$$

$$N(\mathrm{Ca}^+) \simeq 4.29\,10^{13}\,\mathrm{cm^{-2}}$$

COMPLEMENTS

Transitions libre-lié

Relations d'Einstein-Milne

Généralisation des relations d'Einstein au cas des transitions libre-lié : photoionisation et recombinaison

$$A + h\nu \rightarrow A^+ + e^-$$

Notations

n_0 **Densité des neutres**

n_1 **Densité des ions**

n_e **Densité des électrons libres**

$$f(v) = \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$ **Distribution des vitesses des électrons libres**

π_ν **Probabilité de photoionisation par un photon de fréquence** ν **à** $\mathrm{d}\nu$ **près**

$F(v)$ **Probabilité de recombinaison spontanée avec un électron de vitesse** v **à** $\mathrm{d}v$ **près**

$G(v)$ **Probabilité de recombinaison induite avec un électron de vitesse** v **à** $\mathrm{d}v$ **près**

Taux de photoionisation et de recombinaison

Coefficient d'absorption de l'énergie radiative $\alpha_\nu = h\nu\pi_\nu$

Taux de photoionisations $n_0\pi_\nu I_\nu \mathrm{d}\nu$

Taux de recombinaisons (induites et spontanées) $n_1 n_e f(v)\left[F(v)+G(v)I_\nu\right] v\mathrm{d}v.$

Cas particulier de l'équilibre thermodynamique

Egalité des taux

$$n_0\pi_\nu I_\nu \mathrm{d}\nu = n_1 n_e f(v)\left[F(v)+G(v)I_\nu\right] v\mathrm{d}v$$

Lien entre les intervalles en fréquence et en vitesse

$$h\nu = \chi + \frac{1}{2}m_e v^2 \longrightarrow h\mathrm{d}\nu = m_e v\mathrm{d}v$$

Intensité spécifique $I_\nu = B_\nu(T)$

Populations à l'ETL n_0^{E}, n_1^{E} et n_e^{E}

Relations d'Einstein-Milne

Cas particulier de l'équilibre thermodynamique

$$n_0^{\mathrm{E}} \pi_\nu B_\nu(T) \mathrm{d}\nu = \frac{h}{m_e} n_1^{\mathrm{E}} n_e^{\mathrm{E}} f(v) \left[F(v) + G(v) B_\nu(T) \right] \mathrm{d}\nu$$

$$\longrightarrow \quad B_\nu(T) = \frac{\dfrac{F(v)}{G(v)}}{\dfrac{m_e n_0^{\mathrm{E}} \pi_\nu}{h n_1^{\mathrm{E}} n_e^{\mathrm{E}} f(v) G(v)} - 1}$$

qu'on identifie avec la forme connue

$$\boxed{\frac{F(v)}{G(v)} = \frac{2h\nu^3}{c^2}}$$

et

$$\frac{m_e n_0^{\mathrm{E}} \pi_\nu}{h n_1^{\mathrm{E}} n_e^{\mathrm{E}} f(v) G(v)} = \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

$$\frac{n_1^{\mathrm{E}} n_e^{\mathrm{E}}}{n_0^{\mathrm{E}}} = \frac{2 Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e k T)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right)$$

$$f(v) = \left(\frac{m_e}{2\pi k T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$

- **Loi de Saha**
- **Distribution de Maxwell**

Simplification de la 2ème relation

$$\pi_\nu = \frac{h n_1^{\mathrm{E}} n_e^{\mathrm{E}} f(v) G(v)}{m_e n_0^{\mathrm{E}}} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

$$\pi_\nu = \frac{hG(v)}{m_e} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \times \boxed{\frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right)} \times \boxed{\left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2}$$

$$\boxed{\pi_\nu = \frac{8\pi m_e^2 v^2}{h^2} \frac{Z_1(T)}{Z_0(T)} G(v) = \frac{4\pi m_e^2 v^2 c^2}{h^3 \nu^3} \frac{Z_1(T)}{Z_0(T)} F(v)}$$

Relations d'Einstein-Milne, valables hors ETL

Coefficient d'absorption continue

Rappel : cas d'une raie spectrale

$$\kappa_\nu = \frac{c^2\nu}{8\pi\nu_{ul}^3} A_{ul} n_l \frac{g_u}{g_l}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{ul}}{kT_x}\right)\right]\phi(\nu)$$

Expression générale pour l'absorption continue

$$\kappa_\nu = h\nu\left[n_0\pi_\nu - \frac{h}{m_e} n_1 n_e f(v) G(v)\right] \longleftarrow$$

Recombinaison stimulée
=
absorption négative

Insertion de $\alpha_\nu = h\nu\pi_\nu$

$$\kappa_\nu = \alpha_\nu\left[n_0 - \frac{h}{m_e\pi_\nu} n_1 n_e f(v) G(v)\right]$$

Insertion de la seconde relation de Milne

$$\kappa_\nu = \alpha_\nu\left[n_0 - \frac{h}{m_e} n_1 n_e f(v) G(v) \frac{m_e n_0^{\mathrm{E}}}{h n_1^{\mathrm{E}} n_e^{\mathrm{E}} f(v) G(v)} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]$$

Simplification

$$\kappa_\nu = \alpha_\nu\left[n_0 - n_0^{\mathrm{E}} \frac{n_1 n_e}{n_1^{\mathrm{E}} n_e^{\mathrm{E}}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]$$

Coefficient d'absorption continue : interprétation

On peut le mettre sous la forme
$$\boxed{\kappa_\nu = \alpha_\nu \left[n_0 - n_0^* \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]}$$

avec n_0^* la densité des atomes neutres qu'on obtient en utilisant l'équation de Saha avec les vraies populations des ions et des électrons en lieu et place des valeurs à l'ETL, soit

$$n_0^* = n_1 n_e \frac{Z_0(T)}{2Z_1(T)} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right)$$

Il faut noter que pour cette absorption continuum, le terme stimulé est toujours calculé comme à l'ETL, ce qui n'est pas surprenant, car la recombinaison, qu'elle soit spontanée ou induite, est fondamentalement liée aux collisions entre particules, constitutives de la condition d'ETL. La seule différence est qu'il faut faire ce calcul avec les vraies populations n_1 et n_e, qui peuvent être hors-ETL.

Bien sûr, à l'ETL :
$$\kappa_\nu^{\mathrm{E}} = \alpha_\nu n_0^{\mathrm{E}} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]$$

Emissivité continuum

Expression générale $$\epsilon_\nu = h\nu \times n_1 n_e f(v) F(v) \frac{h}{m_e}$$

Insertion de $\alpha_\nu = h\nu\pi_\nu$ **et de l'expression de** π_ν

$$\longrightarrow \epsilon_\nu = \frac{h}{m_e \pi_\nu} n_1 n_e f(v) F(v) \alpha_\nu = \frac{h}{m_e} n_1 n_e f(v) F(v) \alpha_\nu \frac{h^3\nu^3}{4\pi m_e^2 v^2 c^2} \frac{Z_0(T)}{Z_1(T) F(v)}$$

Insertion de la distribution de Maxwell et de n_0^*

$$\epsilon_\nu = n_0^* \frac{2Z_1(T)}{Z_0(T)} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right) \alpha_\nu \frac{h^4\nu^3}{4\pi m_e^3 v^2 c^2} \frac{Z_0(T)}{Z_1(T)} \left(\frac{m_e}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2$$

Simplification……………..

$$\epsilon_\nu = n_0^* \alpha_\nu \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Emissivité continuum : interprétation

On peut la mettre sous la forme

$$\boxed{\epsilon_\nu = n_0^* \alpha_\nu B_\nu(T) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]}$$

On retrouve une « loi de Kirchhoff » $\epsilon_\nu = \kappa_\nu^* B_\nu(T)$ en définissant le coefficient d'absorption suivant :

$$\kappa_\nu^* = n_0^* \alpha_\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right]$$

qui est la forme trouvée à l'ETL dans laquelle la population des atomes neutres est celle calculée avec la loi de Saha (ETL) mais avec les vraies populations (hors ETL *a priori*) des ions et des électrons libres. Le fait qu'on trouve cette forme pour l'émissivité est lié au caractère collisionnel de l'émission continuum libre-lié.