

Polítopos de Newton y el número de soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales

Martín Sombra

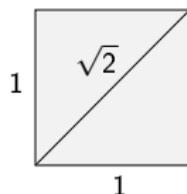
22 de noviembre de 2007

- 1 La pre-historia
- 2 Sistemas ralos
- 3 Un refinamiento de la estimación de BK
- 4 El método
- 5 Variedades tóricas sobre una curva
- 6 El polítopo de Newton de una curva racional

La pre-historia

El teorema fundamental del álgebra

$x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones en \mathbb{Q} pero sí en \mathbb{R} :

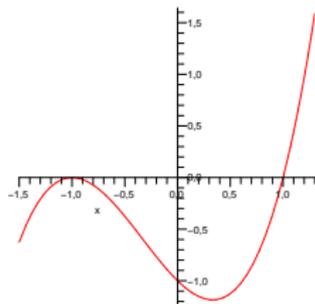


$x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones en \mathbb{R} pero sí en \mathbb{C}

Teorema (D'Alembert 1746 - Gauss 1799)

Sea $f \in \mathbb{C}[x]$, entonces $f = 0$ tiene $\deg(f)$ soluciones contadas con multiplicidad: \mathbb{C} es "algebraicamente cerrado"

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$



El teorema de Bézout I (1764)

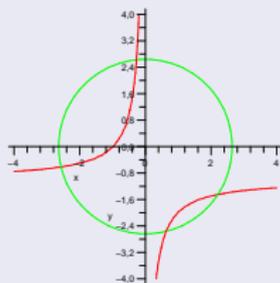
Sean $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ tq $f = g = 0$ tiene un número *finito* de soluciones en \mathbb{C}^2 , entonces este número de soluciones es $\leq \deg(f) \deg(g)$



Ejemplos

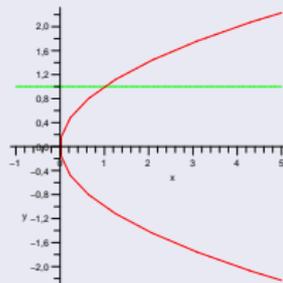
$$xy + x - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 7 = 0$$



$$x - y^2 = 0$$

$$y - 1 = 0$$



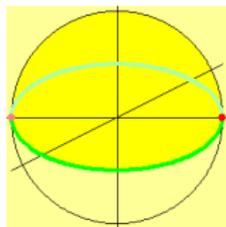
El espacio proyectivo

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{n+1}$ son *equivalentes* ($\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$)

sii $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$

El espacio proyectivo de dimensión n es

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$



Se descompone como $\mathbb{P}^n = \iota(\mathbb{C}^n) \sqcup H_\infty$ donde

- $\iota(\mathbb{C}^n) := \{(1 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n\} \cong \mathbb{C}^n$
- $H_\infty := \{(0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano del infinito

Caso particular: $\mathbb{P}^1 = \iota(\mathbb{C}) \sqcup \{\infty\}$

El teorema de Bézout II

Ntn: dados $F_1, \dots, F_n \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogéneos,

$$V_0(\mathbb{P}^n; F_1, \dots, F_n) \subset \mathbb{P}^n$$

designa los puntos *aislados* de

$$V(\mathbb{P}^n; F_1, \dots, F_n) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^n : F_1(\mathbf{x}) = \dots = F_n(\mathbf{x}) = 0\}$$

Teorema

$$\#V_0(\mathbb{P}^n; F_1, \dots, F_n) \leq \deg(F_1) \cdots \deg(F_n)$$

con = sii $V = V_0$

Para $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$:

$$\#V_0(\mathbb{C}^n; f_1, \dots, f_n) = \deg(f_1) \cdots \deg(f_n)$$

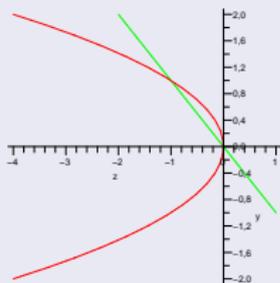
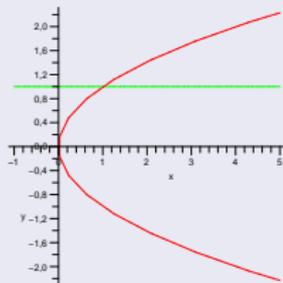
sii $f_1 = \dots = f_n = 0$ no tiene soluciones en H_∞ 

Ejemplo (cont.)

$$(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \text{ tq } xz - y^2 = y - z = 0$$

$$\text{En } z = 1: \quad \begin{aligned} x - y^2 &= 0 \\ y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{En } x = 1: \quad \begin{aligned} z - y^2 &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$



Sistemas ralos

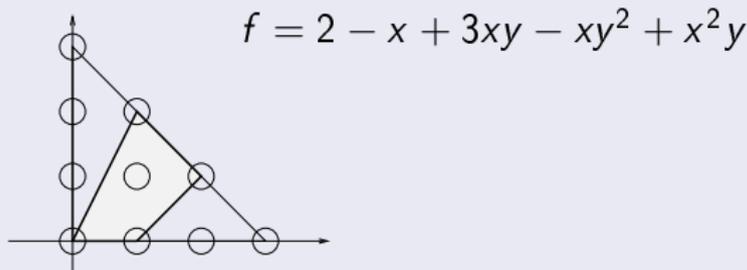
Polígono de Newton

Álgebra de *polinomios de Laurent* $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$: son las funciones regulares de $(\mathbb{C}^\times)^n$

El *polígono de Newton* de $f = \sum_{j=0}^N \alpha_j \mathbf{x}^{a_j} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es

$$\mathcal{N}(f) := \text{Conv}(a_0, \dots, a_N) \subset \mathbb{R}^n$$

Ejemplo



Es un invariante más fino que el grado: f es un polinomio de grado $\leq d$ sii $\mathcal{N}(f) \subset dS$ donde $S = \text{Conv}(\mathbf{0}, e_1, \dots, e_n)$

Volumen mixto

El *volumen mixto* de cuerpos convexos $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ es

$$MV_2(P, Q) := \text{Vol}_2(P + Q) - \text{Vol}_2(P) - \text{Vol}_2(Q)$$

donde $+$ es la “suma de Minkowski”. Caso particular:

$$MV(P, P) = 2 \text{Vol}(P)$$

Para n cualquiera:

Definición-propiedades

Q_1, \dots, Q_n cuerpos convexos de \mathbb{R}^n , el *volumen mixto*

$$MV(Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbb{R}$$

único funcional simétrico en Q_1, \dots, Q_n , multilineal cr a la suma de Minkowski y tq $MV(Q, \dots, Q) = n! \text{Vol}(Q)$

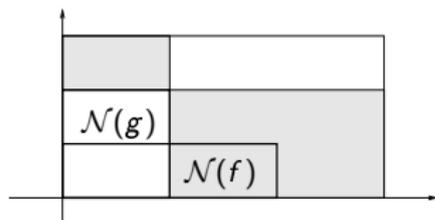
Teorema (Bernštein-Kušnirenko 1975)

Sean $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, entonces

$$\#V_0((\mathbb{C}^\times)^n; f_1, \dots, f_n) \leq \text{MV}(\mathcal{N}(f_1), \dots, \mathcal{N}(f_n))$$

- Implica Bézout: $\text{MV}(d_1 S, \dots, d_n S) = d_1 \cdots d_n$
- Implica Bézout multi-homogéneo: e.g para $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$

$$\#V_0(f, g) \leq \deg_x(f) \deg_y(g) + \deg_y(f) \deg_x(g)$$



El teorema de Bernštejn-Kušnirenko II

La *parte inicial* de $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ cr a $\tau \in \mathbb{R}^n$ es $\text{init}_\tau(f) \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \setminus \{0\}$ tq

$$f(t^{\tau_1}x_1, \dots, t^{\tau_n}x_n) = t^a(\text{init}_\tau(f) + o(1))$$

para algún $a \in \mathbb{Z}$

Teorema

Sean $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, entonces

$$\#V_0(f_1, \dots, f_n) = \text{MV}(\mathcal{N}(f_1), \dots, \mathcal{N}(f_n))$$

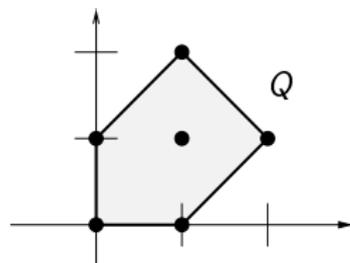
sii $\forall \tau \neq \mathbf{0}$ el sistema $\text{init}_\tau(f_1) = \dots = \text{init}_\tau(f_n) = 0$ no tiene soluciones

En otras palabras: $f_1 = \dots = f_n = 0$ no tiene soluciones en los infinitos de una cierta variedad (tórica)

Un ejemplo

$$f = (s-1) + (s-1)^2 x - 3s x^2 \quad , \quad g = -7(s-1) + (s-1)^2 x + 3s x^2$$

$f = g = 0$ tiene dos soluciones: $(4, 1)$ (simple) y $(-\frac{1}{2}, -2)$ (doble)
 $\implies \#V(f, g) = 3$



La estimación de BK es $\#V \leq 2!$ $\text{Vol}(Q) = 5$, pero

$$\text{init}_{(1,0)}(f) = s - 1 = 0 \quad , \quad \text{init}_{(1,0)}(g) = -7(s - 1) = 0$$

tiene solución en $(\mathbb{C}^\times)^2$ (i.e. $s = 1$, x cualquiera) luego $f = g = 0$
 no es genérico cr a BK!

Un refinamiento de la estimación BK

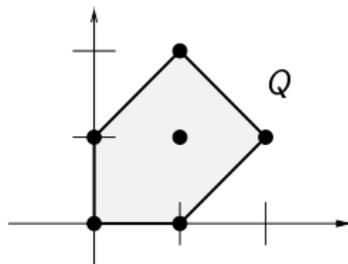
Ejemplo (cont.)

$$f = (s-1) + (s-1)^2 x - 3 s x^2 \quad , \quad g = -7(s-1) + (s-1)^2 x + 3 s x^2$$

$$\#V(f, g) = 3$$

Estimaciones:

- Bézout: $\#V \leq \deg(f) \deg(g) = 3 \cdot 3 = 9$
- B bihomogéneo:
 - $\#V \leq \deg_s(f) \deg_x(g) + \deg_x(f) \deg_s(g) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 8$
- BK: $\#V \leq 2! \text{Vol}(Q) = 5$



Polígono de Newton v -ádico

Sean $f = \sum_{j=0}^N \alpha_j(s) \mathbf{x}^{a_j} \in \mathbb{C}(s)[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ y $v \in \mathbb{P}^1$

El *polígono de Newton v -ádico* es

$$N_v(f) := \text{Conv}((a_0, -\text{ord}_v(\alpha_0)), \dots, (a_N, -\text{ord}_v(\alpha_N))) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

para $\text{ord}_v(\alpha_j) \in \mathbb{Z}$ el orden de anulación de α_j en v

Se proyecta sobre el polígono de Newton cr a las variables x

$$N(f) := \text{Conv}(a_0, \dots, a_N) \subset \mathbb{R}^n$$

La parametrización del techo de $N_v(f)$ es

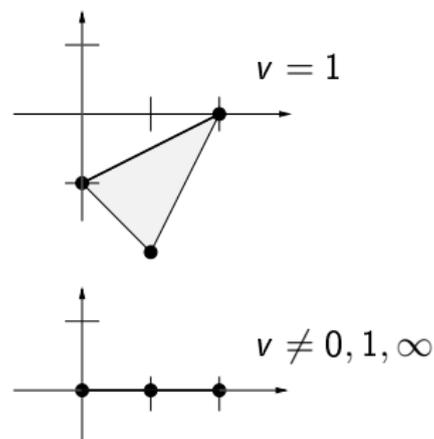
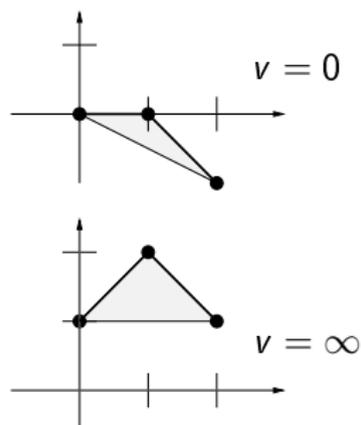
$$\vartheta_v(f) : N(f) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad u \mapsto \max\{z \in \mathbb{R} : (u, z) \in N_v(f)\}$$

Ejemplo (cont.)

$$f = (s-1) + (s-1)^2 x - 3s x^2 \quad , \quad g = -7(s-1) + (s-1)^2 x + 3s x^2$$

$$N(f) = N(g) = [0, 2]$$

$$N_v(f) = N_v(g) =$$



Integral mixta

Para $\rho : Q \rightarrow \mathbb{R}$ $\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}$ funciones cóncavas sobre convexos Q, R de \mathbb{R}^n , la *convolución* es

$$\rho \boxplus \sigma : Q+R \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \max\{\rho(v)+\sigma(w) : v \in Q, w \in R, v+w = u\}$$

Es una función cóncava sobre $Q+R$

Definición-propiedades

Sean $\rho_0 : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, \rho_n : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones cóncavas sobre cuerpos convexos de \mathbb{R}^n . La *integral mixta*

$$MI(\rho_0, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}$$

es el único funcional simétrico en ρ_0, \dots, ρ_n , multilineal cr a \boxplus y tq

$$MI(\rho, \dots, \rho) = (n+1)! \int_Q \rho(u) du_1 \cdots du_n$$



Teorema 1 (Philippon-S. 2007)

- $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{C}[s][x^{\pm 1}]$ sin factores no-triviales en $\mathbb{C}[s]$
- $V_0(f_0, \dots, f_n) \subset \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^\times)^n$ soluciones *aisladas* de $f_0 = \dots = f_n = 0$
- $\vartheta_{i,v} : N(f_i) \rightarrow \mathbb{R}$ función techo de f_i cr a $v \in \mathbb{P}^1$

entonces

$$\#V_0(f_0, \dots, f_n) \leq \sum_{v \in \mathbb{P}^1} \text{MI}(\vartheta_{0,v}, \dots, \vartheta_{n,v})$$

Corolario

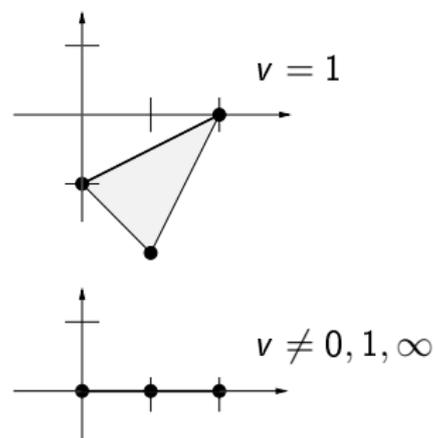
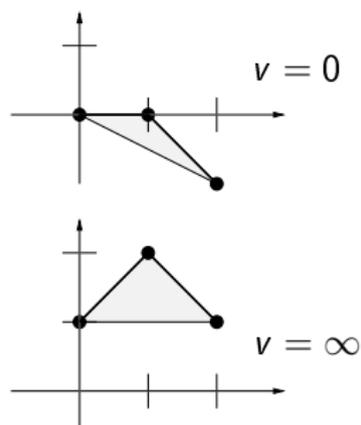
Sean $Q \subset \mathbb{R}^n$ polígono tq $N(f_i) \subset Q$ y $\vartheta_v : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ($v \in \mathbb{P}^1$) función tq $\vartheta_v \geq \vartheta_{i,v}$ para todo i, v , entonces

$$\#V_0(f_0, \dots, f_n) \leq (n+1)! \sum_{v \in \mathbb{P}^1} \int_Q \vartheta_v(u) du_1 \cdots du_n$$



Ejemplo (cont.)

$$f = (s-1) + (s-1)^2 x - 3s x^2 \quad , \quad g = -7(s-1) + (s-1)^2 x + 3s x^2$$



$$\#V(f, g) \leq 2! \left(\int_0^2 \vartheta_0 du + \int_0^2 \vartheta_1 du + \int_0^2 \vartheta_\infty du \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - 1 + 3 \right) = 3$$

- $\vartheta_{i,\infty}$ (resp. $-\vartheta_{i,0}$) parametriza el techo (resp. piso) de (polítopo de Newton $\mathcal{N}(f_i) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cr a s, x_1, \dots, x_n . Se tiene

$$\text{MI}(\vartheta_{0,0}, \dots, \vartheta_{n,0}) + \text{MI}(\vartheta_{0,\infty}, \dots, \vartheta_{n,\infty}) = \text{MV}_{n+1}(\mathcal{N}(f_0), \dots, \mathcal{N}(f_n))$$

y además $\text{MI}(\vartheta_{0,v}, \dots, \vartheta_{n,v}) \leq 0$ para $v \neq 0, \infty$

\implies el teorema 1 refina BK

- El teorema 1 se extiende a una curva completa S (en lugar de \mathbb{P}^1) con fibrados de líneas $L_i \rightarrow S$ para $0 \leq i \leq n$ y

$$f_i \in \Gamma(S; L_i) \otimes \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

El método

Grado de una variedad proyectiva

La teoría de intersección estudia el comportamiento de las variedades algebraicas por intersección. Invariante central: grado

El *grado* de $V^{(r)} \subset \mathbb{P}^N$ se define por cualquiera de las siguientes:

- $\deg(V) = \#(V \cap E)$ para $E \subset \mathbb{P}^N$ espacio lineal genérico de codim r
- $\deg(V)$ es la clase de V en $H_r(V; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$
- $\deg(V) = r! \text{Vol}_{FS}(V)$, el volumen cr a la métrica de Fubini-Study de \mathbb{P}^N
- $\deg(V) = \lim_{D \rightarrow \infty} D^{-r} \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]/I(V))_D$: el coeficiente dominante del polinomio de Hilbert

Teoría de intersección

El ppio de la demo de Bézout, BK y del teorema 1 es meter al espacio ambiente (*resp.* \mathbb{C}^n , $(\mathbb{C}^\times)^n$ y $S \times (\mathbb{C}^\times)^n$) en una variedad proyectiva *compacta* $X \subset \mathbb{P}^N$ tq

$$f_1 = \cdots = f_n = 0$$

se traduce en un sistema *lineal* $\ell_1 = \cdots = \ell_n = 0$ sobre X

$$\implies \#V(\mathbf{f}) \leq \#(X \cap V(\ell)) = \deg(X)$$

El pb es encontrar la compactificación X adecuada y determinar $\deg(X)$

Inconveniente: introduce ceros “en el infinito”

Variedades tóricas sobre una curva

Toda la teoría en un ejemplo

$$f = (s-1) + (s-1)^2 x - 3 s x^2 \quad , \quad g = -7(s-1) + (s-1)^2 x + 3 s x^2$$

Sean

$$\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \quad , \quad (s, t) \mapsto ((1 : s), (s-1 : (s-1)^2 t : st^2))$$

y $X := \overline{\text{Im}(\varphi)} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$: superficie tórica sobre \mathbb{P}^1

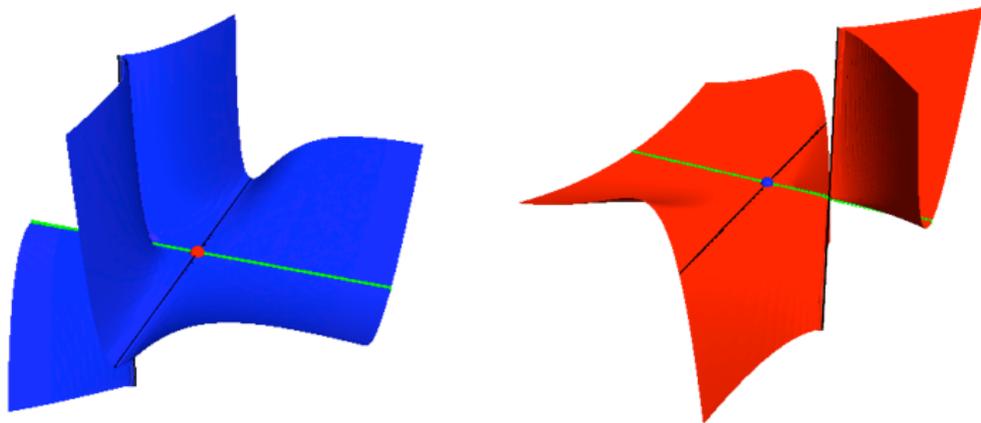
El sistema $f = g = 0$ sobre $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$ se traduce en

$$y_0 + y_1 - 3y_2 = -7y_0 + y_1 + 3y_2 = 0 \quad \text{para } ((t_0 : t_1), (y_0 : y_1 : y_2)) \in X$$

$$\deg(X) = 3 \text{ luego } \#V(f, g) \leq 3$$

Toda la teoría en un ejemplo

X en las cartas afines $\{s_1 \neq 0, x_0 \neq 0\}$ y $\{s_0 \neq 0, x_0 \neq 0\}$
 $\cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^2$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$:



Descomposición en órbitas y condiciones de igualdad

- $* : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$, $(t, (s, \mathbf{x})) \mapsto (s, (x_0 : t x_1 : t^2 x_2))$
acción de \mathbb{C}^\times sobre X
- $X_v := \pi^{-1}(v)$ fibra de la proyección canónica $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ en $v \in \mathbb{P}^1$
- $X^F \subset \text{Im}(\varphi) \subset X$ puntos de X tq $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times \rightarrow X^F$ es finita

La descomposición en órbitas de cada fibra X_v está en biyección con las caras del techo del Newton v -ádico N_v

Las órbitas en X^F corresponden a las caras *horizontales de dimensión n*

La estimación del teorema 1 es una igualdad si $f_0 = \dots = f_n = 0$ no tiene ceros en $X \setminus X^F$

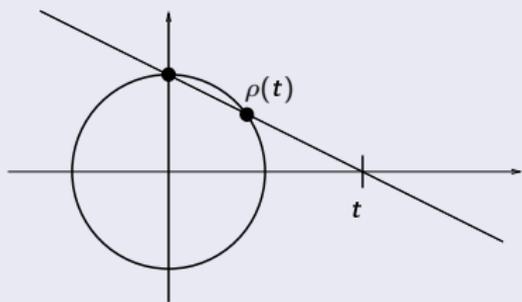
El polítopo de Newton de una curva racional

Variedades racionales

Una variedad algebraica $V(r) \subset \mathbb{C}^n$ es *uniracional* si $\exists \rho : \mathbb{C}^r \dashrightarrow V$
 mapa racional tq $\text{Im}(\rho)$ contiene un abierto denso de V
 V es *racional* si ρ es inversible sobre un abierto denso

Ejemplo

$C = V(x^2 + y^2 - 1)$ es racional: $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $t \mapsto \left(\frac{2t}{t^2-1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$
 tiene imagen $C \setminus \{(0, 1)\}$



El problema de la implícitación

$V \subset \mathbb{C}^n$ racional admite dos representaciones: paramétrica e implícita (o por ecuaciones)

Pb: calcular el *polítopo de Newton* de $V \subset \mathbb{C}^n$ hipersuperficie dada por una parametrización $\rho: \mathbb{C}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{C}^n$, i.e. calcular

$$\mathcal{N}(V) := \mathcal{N}(F_V) \subset \mathbb{R}^n$$

donde $F_V \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ecuación de definición de V

$\mathcal{N}(V)$ *no* determina V pero guarda información: e.g. dadas $C_1, C_2 \subset \mathbb{C}^2$ curvas \neq :

$$\#(C_1 \cap C_2) \leq \text{MV}(\mathcal{N}(C_1), \mathcal{N}(C_2))$$

Curvas racionales planas

Sea $C := \overline{\rho(\mathbb{C}^\times)} \subset (\mathbb{C}^\times)^2$ curva racional de dada por
 $\rho : \mathbb{C}^\times \dashrightarrow (\mathbb{C}^\times)^2, t \mapsto (\rho_1(t), \rho_2(t))$

El *grado* $\deg(\rho) \in \mathbb{N}$ es el cardinal de una fibra genérica

La *multiplicidad de ρ en $v \in \mathbb{P}^1$* es

$$\text{ord}_v(\rho) := (\text{ord}_v(\rho_1), \text{ord}_v(\rho_2)) \in \mathbb{Z}^2$$

$\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$ para casi todo v ; $\sum_{v \in \mathbb{P}^1} \text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$

**Teorema 2 (Dickenstein-Fleitchner-Sturmfels 2007,
Sturmfels-Tevelev 2007)**

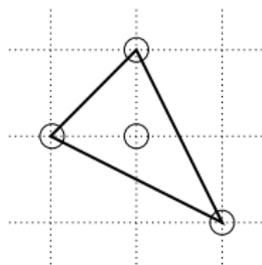
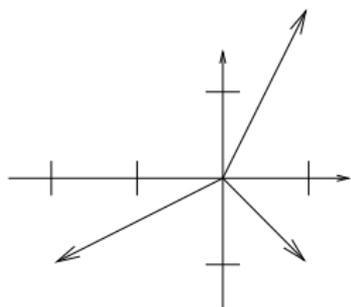
$\deg(\rho)\mathcal{N}(\overline{\rho(\mathbb{C}^\times)})$ se construye rotando -90° los vectores no-nulos en $((\text{ord}_v(\rho))_{v \in \mathbb{P}^1})$ y concatenándolos siguiendo sus direcciones en sentido antihorario

Un ejemplo

$$\rho : t \mapsto (t(t-1), \frac{t^2}{t-1})$$

■ $\text{ord}_0(\rho) = (1, 2)$, $\text{ord}_1(\rho) = (1, -1)$, $\text{ord}_\infty(\rho) = (-2, -1)$

El polígono $\text{deg}(\rho)\mathcal{N}(C)$ y sus normales interiores:

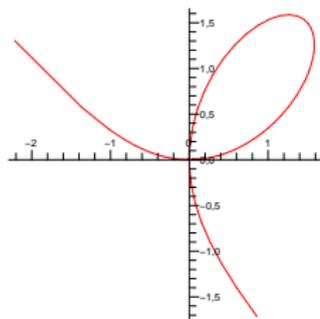


$\text{deg}(\rho)\mathcal{N}(C)$ es no-contráctil, luego $\text{deg}(\rho) = 1$

La ecuación de C : $x^2 + 3xy - xy^2 + y = 0$

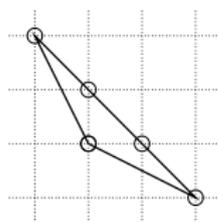
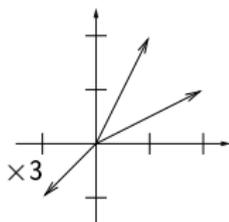
Otro ejemplo: el folio de Descartes

$$\rho : t \mapsto \left(\frac{3t^2}{t^3+1}, \frac{3t}{t^3+1} \right)$$



- $\text{ord}_0(\rho) = (2, 1)$, $\text{ord}_\infty(\rho) = (1, 2)$,
 $\text{ord}_\omega(\rho) = (-1, -1)$ ($\omega^3 = 1$)

El polígono $\text{deg}(\rho)\mathcal{N}(C)$ y sus normales interiores:



Ecuación de C : $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

Conexión con la teoría de intersección

La *función soporte* de $Q \subset \mathbb{R}^2$ es

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \tau \mapsto h_Q(\tau) = \max\{\langle \tau, (x, y) \rangle : (x, y) \in Q\}$$

Proposición (D'Andrea-S. 2007)

Dado $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{N}^2$, $\deg(\rho)h_Q(\tau)$ es igual al número de soluciones $(t, x, y) \in \mathbb{C}^3$ del sistema

$$x^{\tau_1} - \rho_1(t) = y^{\tau_2} - \rho_2(t) = \ell_0 + \ell_1 x + \ell_2 y = 0$$

para $\ell_i \in \mathbb{C}$ genérico

Este número de soluciones se calcula *exactamente* con el teorema 1
 El teorema 2 se demuestra alternativamente probando que $\deg(\rho)\mathcal{N}(C)$ y la concatenación de las $\text{ord}_v(\rho)_v$'s tienen la misma función soporte

Fin

Gracias: C. D'Andrea, T. Krick