Polígonos, Poliedros e Polítopos

Teorema de Yannakakis

João Gouveia

CMUC - Universidade de Coimbra

17 de Março de 2012 - *Oráculo Delfos* - Coimbra

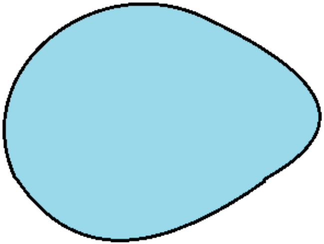
1. Geometria Convexa

Convexidade

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se dados quaisquer dois pontos de S o segmento que os une estiver contido em S.

Convexidade

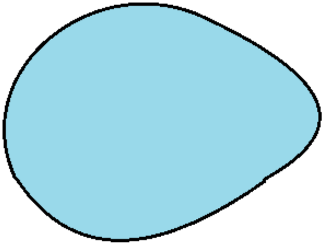
Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se dados quaisquer dois pontos de S o segmento que os une estiver contido em S.



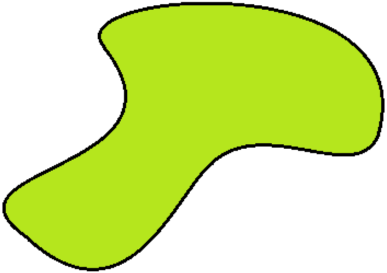
Conjunto Convexo

Convexidade

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se dados quaisquer dois pontos de S o segmento que os une estiver contido em S.

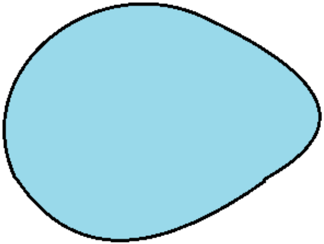


Conjunto Convexo

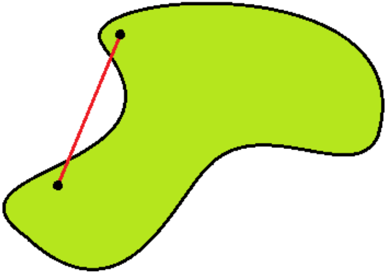


Convexidade

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se dados quaisquer dois pontos de S o segmento que os une estiver contido em S.



Conjunto Convexo



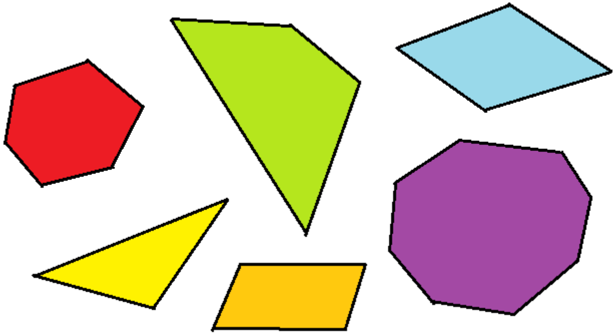
Conjunto Não Convexo

Polígonos Convexos

Como definir Polígono Convexo?

Polígonos Convexos

Como definir Polígono Convexo?

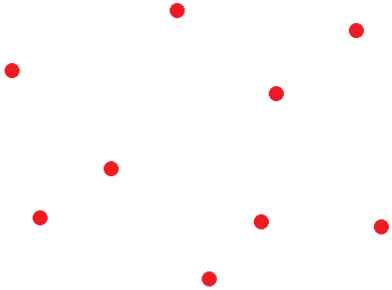


Definição por Vértices

Dado um número finito de pontos S no plano, um polígono convexo é o mais pequeno conjunto convexo que os contém.

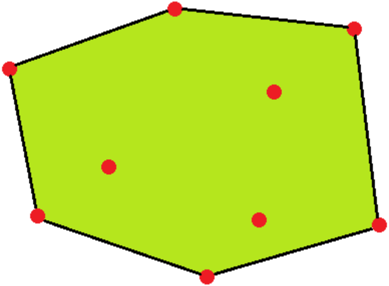
Definição por Vértices

Dado um número finito de pontos S no plano, um polígono convexo é o mais pequeno conjunto convexo que os contém.



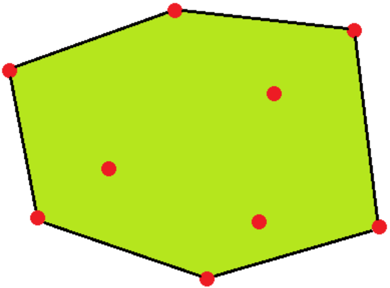
Definição por Vértices

Dado um número finito de pontos S no plano, um polígono convexo é o mais pequeno conjunto convexo que os contém.



Definição por Vértices

Dado um número finito de pontos S no plano, um polígono convexo é o mais pequeno conjunto convexo que os contém.



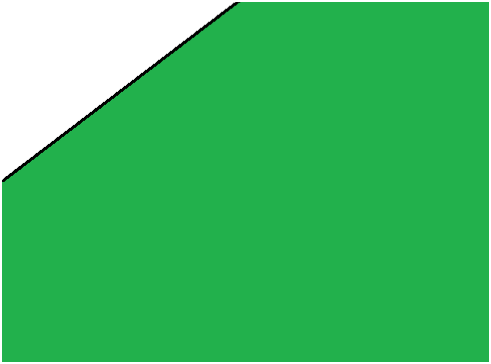
O polígono designa-se por invólucro convexo de S, conv(S).

Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.

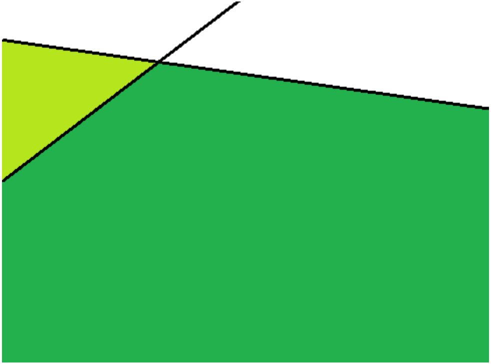
Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



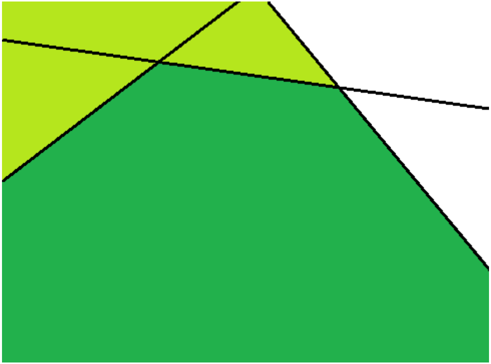
Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



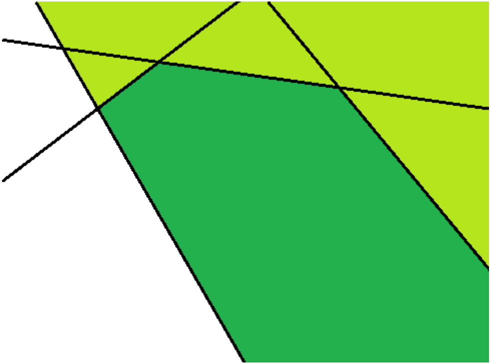
Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



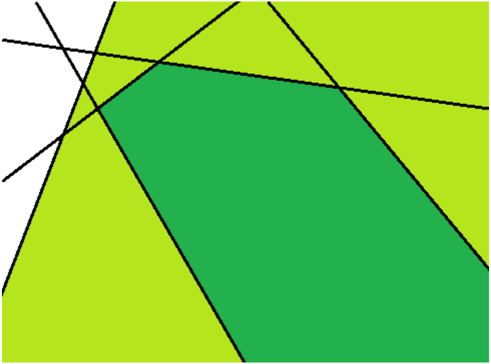
Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



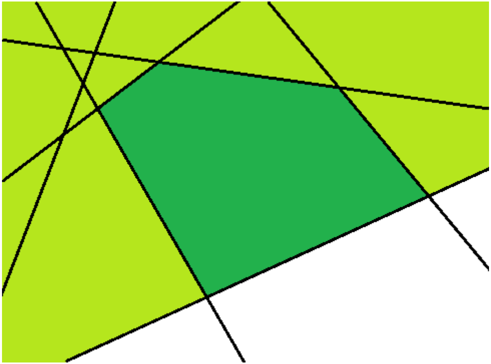
Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



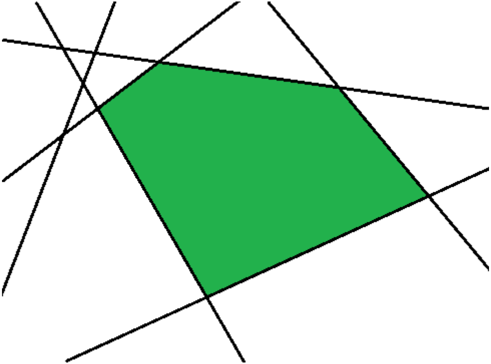
Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



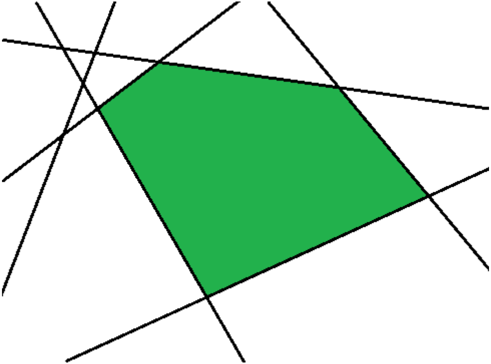
Definição por Semiplanos

Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



Definição por Semiplanos

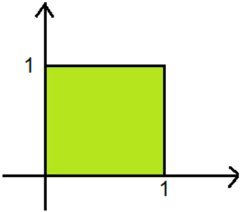
Um polígono convexo é um conjunto limitado obtido por intersecção de semiplanos.



As duas definições são equivalentes.

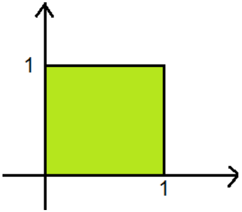
Exemplo: Quadrado

Consideremos o quadrado unitário.



Exemplo: Quadrado

Consideremos o quadrado unitário.

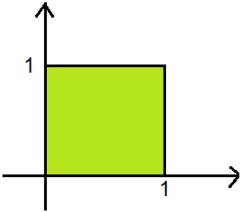


Vértices:

É o invólucro convexo dos pontos
$(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.

Exemplo: Quadrado

Consideremos o quadrado unitário.



Vértices:

É o invólucro convexo dos pontos $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$.

Semiplanos:

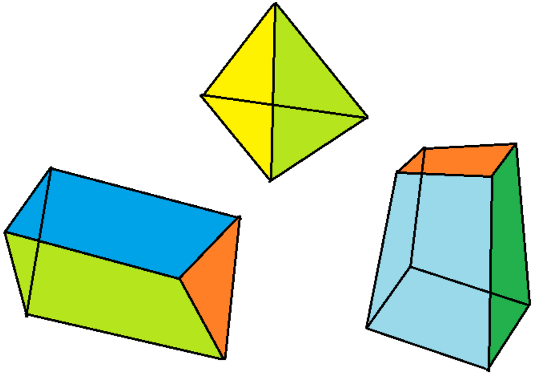
É a intersecção dos semiplanos dados por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 - x \geq 0$ e $1 - y \geq 0$.

Poliedros Convexos

E para definir Poliedros Convexos?

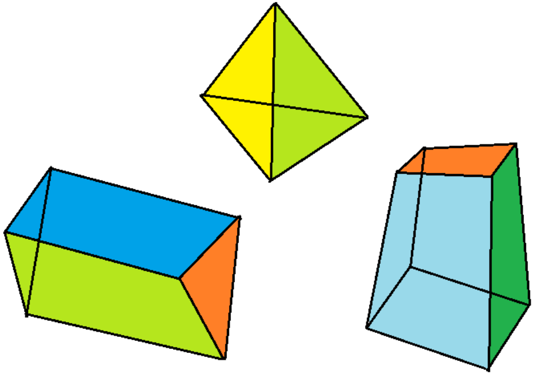
Poliedros Convexos

E para definir Poliedros Convexos?



Poliedros Convexos

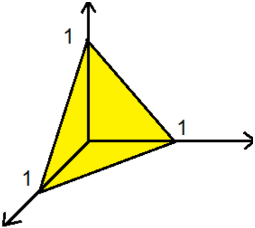
E para definir Poliedros Convexos?



As mesmas ideias funcionam, trocando pontos no plano por pontos no espaço e semiplanos por semi-espaços.

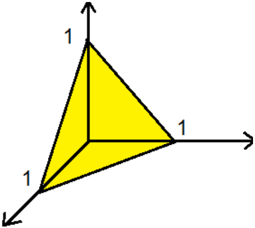
Exemplo: Tetraedro

Consideremos o tetraedro unitário.



Exemplo: Tetraedro

Consideremos o tetraedro unitário.

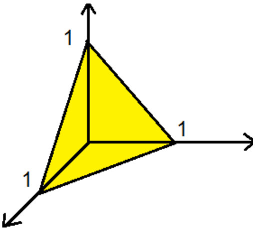


Vértices:

É o invólucro convexo dos pontos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Exemplo: Tetraedro

Consideremos o tetraedro unitário.



Vértices:

É o invólucro convexo dos pontos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Semiplanos:

É a intersecção dos semiplanos dados por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ e $1 - x - y - z \geq 0$.

E em $\mathbb{R}^n$?

Tudo o que dissemos funciona em qualquer dimensão. Assim podemos definir polítopo convexo:

E em $\mathbb{R}^n$?

Tudo o que dissemos funciona em qualquer dimensão. Assim podemos definir politopo convexo:

Definição por vértices

Um polítopo convexo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é o invólucro convexo de um número finito de pontos em $\mathbb{R}^n$.

E em $\mathbb{R}^n$?

Tudo o que dissemos funciona em qualquer dimensão. Assim podemos definir polítopo convexo:

Definição por vértices

Um polítopo convexo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é o invólucro convexo de um número finito de pontos em $\mathbb{R}^n$.

Ou equivalentemente,

Definição por semi-espaços

Um polítopo convexo $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado obtido pela intersecção de semi-espaços, isto é, o conjunto de pontos $(x_1, \cdots, x_n)$ verificando um número finito de desigualdades do tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leq a_0.$$

Exemplos de polítopos

Dois exemplos de famílias simples de polítopos convexos.

Exemplos de politopos

Dois exemplos de famílias simples de politopos convexos.

n-cubo unitário

É o invólucro convexo de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são zero ou um.

Exemplos de polítopos

Dois exemplos de famílias simples de polítopos convexos.

n-cubo unitário

É o invólucro convexo de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são zero ou um.

É o espaço cortado pelas desigualdades
$x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ e
$1 - x_1 \geq 0, \cdots, 1 - x_n \geq 0$.

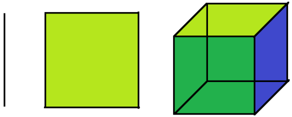
Exemplos de polítopos

Dois exemplos de famílias simples de polítopos convexos.

n-cubo unitário

É o invólucro convexo de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são zero ou um.

É o espaço cortado pelas desigualdades
$x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ e
$1 - x_1 \geq 0, \cdots, 1 - x_n \geq 0$.



Exemplos de polítopos

Dois exemplos de famílias simples de polítopos convexos.

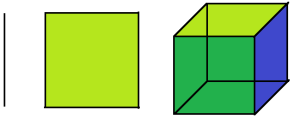
n-cubo unitário

É o invólucro convexo de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são zero ou um.

É o espaço cortado pelas desigualdades $x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ e $1 - x_1 \geq 0, \cdots, 1 - x_n \geq 0$.

n-símplice unitário

É o invólucro convexo da origem e dos n vectores unitários canónicos em $\mathbb{R}^n$.



Exemplos de polítopos

Dois exemplos de famílias simples de polítopos convexos.

n-cubo unitário

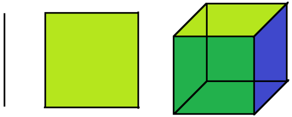
É o invólucro convexo de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são zero ou um.

É o espaço cortado pelas desigualdades
$x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ e
$1 - x_1 \geq 0, \cdots, 1 - x_n \geq 0$.

n-símplice unitário

É o invólucro convexo da origem e dos n vectores unitários canónicos em $\mathbb{R}^n$.

É o espaço cortado pelas desigualdades
$x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ e
$1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n \geq 0$.



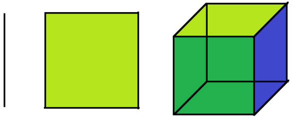
Exemplos de polítopos

Dois exemplos de famílias simples de polítopos convexos.

n-cubo unitário

É o invólucro convexo de todos os pontos em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são zero ou um.

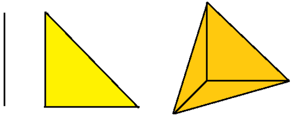
É o espaço cortado pelas desigualdades
$x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ e
$1 - x_1 \geq 0, \cdots, 1 - x_n \geq 0$.



n-símplice unitário

É o invólucro convexo da origem e dos n vectores unitários canónicos em $\mathbb{R}^n$.

É o espaço cortado pelas desigualdades
$x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ e
$1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n \geq 0$.

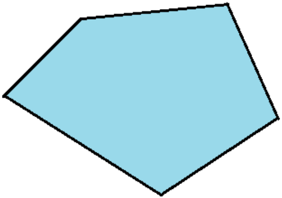


Faces e Facetas de Polígonos Convexos

Dado um polígono P um subconjunto $\emptyset \subsetneq F \subsetneq P$ é uma face própria de P, se existir uma recta L tal que $L \cap P = F$ e P está todo do mesmo lado da recta.

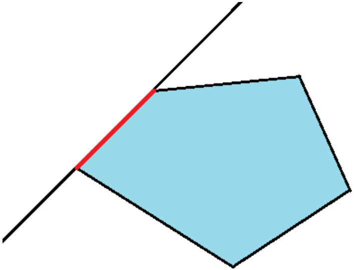
Faces e Facetas de Polígonos Convexos

Dado um polígono P um subconjunto $\emptyset \subsetneq F \subsetneq P$ é uma face própria de P, se existir uma recta L tal que $L \cap P = F$ e P está todo do mesmo lado da recta.



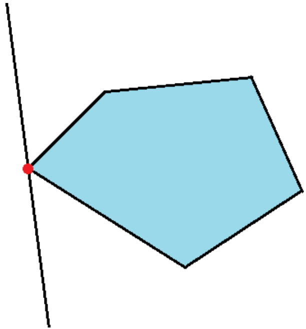
Faces e Facetas de Polígonos Convexos

Dado um polígono P um subconjunto $\emptyset \subsetneq F \subsetneq P$ é uma face própria de P, se existir uma recta L tal que $L \cap P = F$ e P está todo do mesmo lado da recta.



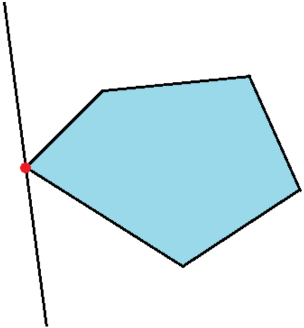
Faces e Facetas de Polígonos Convexos

Dado um polígono P um subconjunto $\emptyset \subsetneq F \subsetneq P$ é uma face própria de P, se existir uma recta L tal que $L \cap P = F$ e P está todo do mesmo lado da recta.



Faces e Facetas de Polígonos Convexos

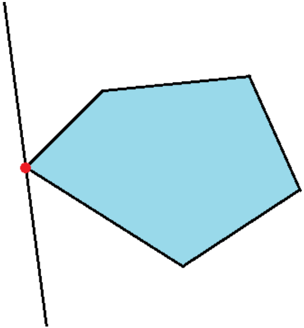
Dado um polígono P um subconjunto $\emptyset \subsetneq F \subsetneq P$ é uma face própria de P, se existir uma recta L tal que $L \cap P = F$ e P está todo do mesmo lado da recta.



Tudo se pode generalizar para $\mathbb{R}^n$ substituindo rectas por hiperplanos.

Faces e Facetas de Polígonos Convexos

Dado um polígono P um subconjunto $\emptyset \subsetneq F \subsetneq P$ é uma face própria de P, se existir uma recta L tal que $L \cap P = F$ e P está todo do mesmo lado da recta.



Tudo se pode generalizar para $\mathbb{R}^n$ substituindo rectas por hiperplanos. Faces próprias de dimensão máxima dizem-se facetas.

2. Programação Linear

Exemplo

Um criador de porcos pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal por forma a conseguir uma certa qualidade nutritiva a um custo mínimo.

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

Exemplo

Um criador de porcos pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas diariamente a cada animal por forma a conseguir uma certa qualidade nutritiva a um custo mínimo.

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

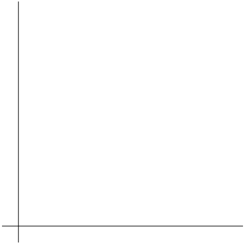
Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

$x \rightarrow$ Quantidade de Ração A $\quad y \rightarrow$ Quantidade de Ração B.

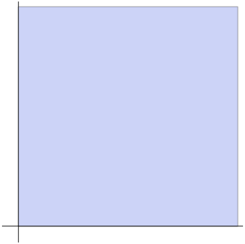


Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

$x \rightarrow$ Quantidade de Ração A $\quad y \rightarrow$ Quantidade de Ração B.

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

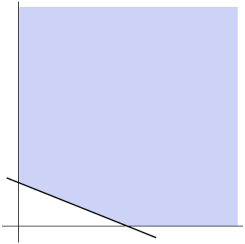


Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

$x \rightarrow$ Quantidade de Ração A $\quad y \rightarrow$ Quantidade de Ração B.

$$20x + 50y \geq 200$$

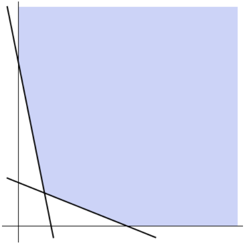


Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

$x \rightarrow$ Quantidade de Ração A $\quad y \rightarrow$ Quantidade de Ração B.

$$50x + 10y \geq 150$$

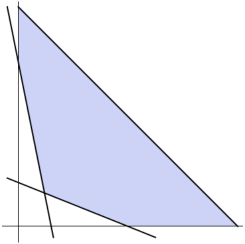


Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

$x \rightarrow$ Quantidade de Ração A $\quad$ $y \rightarrow$ Quantidade de Ração B.

$$30x + 30y \leq 600$$

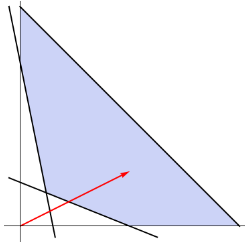


Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

$x \rightarrow$ Quantidade de Ração A $\quad$ $y \rightarrow$ Quantidade de Ração B.

Minimizar $10x + 5y$

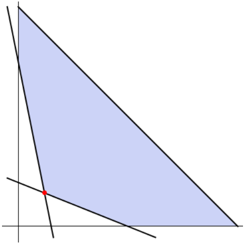


Exemplo - Interpretação Geométrica

	Ração A	Ração B	Quantidade Requerida
Proteína	20	50	≥ 200
Vitamina	50	10	≥ 150
Hid. Carbono	30	30	≤ 600
Custo	10	5	

$x\rightarrow$ Quantidade de Ração A $\quad y\rightarrow$ Quantidade de Ração B.

$$x = 55/23, \qquad y = 70/23$$



Programa Linear - Definição

Programa Linear

Um Programa Linear (PL) é um problema do tipo

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_n x_n$$

sujeito a

$$\begin{gathered} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n \geq b_1, \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n \geq b_2. \end{gathered}$$

Programa Linear - Definição

Programa Linear

Um Programa Linear (PL) é um problema do tipo

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_n x_n$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n &\geq b_1, \\ &\vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n &\geq b_2. \end{aligned}$$

Ou de outra forma:

Programa Linear (versão 2)

Um Programa Linear (PL) é um problema do tipo

$$\min c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots c_n x_n$$

sujeito a x pertencer a um polítopo P.

Programação Linear - Complexidade

Quão difícil é resolver um programa linear?

Programação Linear - Complexidade

Quão difícil é resolver um programa linear?

Complexidade

O tempo que demora a optimizar sobre um polítopo P, cresce polinomialmente com o mínimo entre o número de facetas e o número de vértices de P.

Programação Linear - Complexidade

Quão difícil é resolver um programa linear?

Complexidade

O tempo que demora a optimizar sobre um polítopo P, cresce polinomialmente com o mínimo entre o número de facetas e o número de vértices de P.

Mas o que fazer quando P tem muitos vértices e facetas?

3. De Volta aos Polítopos

Projecções de Polítopos

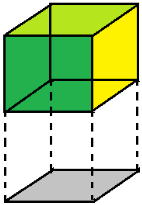
A projecção de um polítopo $P \in \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$, com $m \leq n$ é o conjunto

$$\pi_m(P) = \{(x_1, \cdots, x_m) \ : \ \exists (x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \in P\}.$$

Projecções de Polítopos

A projecção de um polítopo $P \in \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$, com $m \leq n$ é o conjunto

$$\pi_m(P) = \{(x_1, \cdots, x_m) \ : \ \exists (x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \in P\}.$$

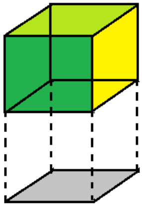


Projecção do Cubo em $\mathbb{R}^2$:
Quadrado

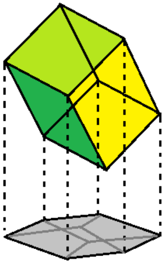
Projecções de Polítopos

A projecção de um polítopo $P \in \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$, com $m \leq n$ é o conjunto

$$\pi_m(P) = \{(x_1, \cdots, x_m) \ : \ \exists (x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \in P\}.$$



Projecção do Cubo em $\mathbb{R}^2$: Quadrado



Projecção do Cubo em $\mathbb{R}^2$: Hexágono

Facetas e Projecções

A projecção de um polítopo pode ter muito mais facetas que o politopo original.

Facetas e Projecções

A projecção de um polítopo pode ter muito mais facetas que o politopo original.

Polítopo de Paridade

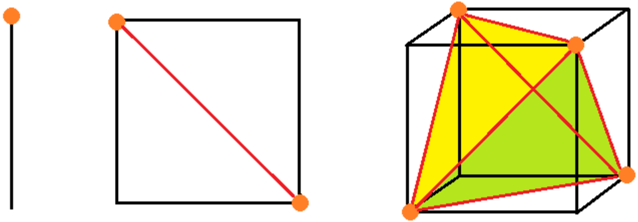
O polítopo de paridade em $\mathbb{R}^n$ é o invólucro convexo P_n de todos os vectores de zeros e uns em $\mathbb{R}^n$ com um número ímpar de uns.

Facetas e Projecções

A projecção de um polítopo pode ter muito mais facetas que o politopo original.

Polítopo de Paridade

O polítopo de paridade em $\mathbb{R}^n$ é o invólucro convexo P_n de todos os vectores de zeros e uns em $\mathbb{R}^n$ com um número ímpar de uns.

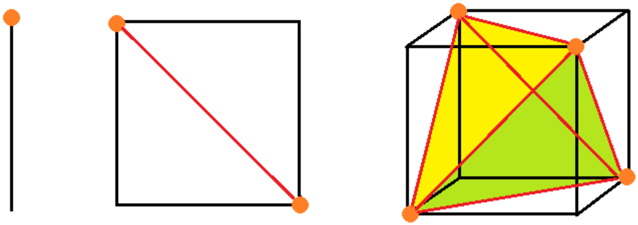


Facetas e Projecções

A projecção de um polítopo pode ter muito mais facetas que o politopo original.

Polítopo de Paridade

O polítopo de paridade em $\mathbb{R}^n$ é o invólucro convexo P_n de todos os vectores de zeros e uns em $\mathbb{R}^n$ com um número ímpar de uns.



Tem 2^{n-1} vértices e 2^{n-1} facetas.

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.Temos portanto $(n+1)\lceil n/2 \rceil + n$ variáveis.

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.Temos portanto $(n+1)\lceil n/2 \rceil + n$ variáveis. Consideremos as relações:

- $(z_1)_i + (z_3)_i + \cdots + (z_n)_i = x_i$, para $i = 1, \cdots, n$;

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.Temos portanto $(n+1)\lceil n/2 \rceil + n$ variáveis. Consideremos as relações:

- $(z_1)_i + (z_3)_i + \cdots + (z_n)_i = x_i$, para $i = 1, \cdots, n$;
- $\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = 1$;

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.Temos portanto $(n+1)\lceil n/2 \rceil + n$ variáveis. Consideremos as relações:

- $(z_1)_i + (z_3)_i + \cdots + (z_n)_i = x_i$, para $i = 1, \cdots, n$;
- $\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = 1$;
- $(z_k)_1 + (z_k)_2 + \cdots (z_k)_n = k\ \alpha_k$ para todo o k ímpar;

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.Temos portanto $(n+1)\lceil n/2 \rceil + n$ variáveis. Consideremos as relações:

- $(z_1)_i + (z_3)_i + \cdots + (z_n)_i = x_i$, para $i = 1, \cdots, n$;
- $\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = 1$;
- $(z_k)_1 + (z_k)_2 + \cdots (z_k)_n = k\ \alpha_k$ para todo o k ímpar;
- $0 \leq (z_k)_i \leq \alpha_k$, para todo o i e k.

Facetas e Projecções - Continuação

P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.Temos portanto $(n+1)\lceil n/2 \rceil + n$ variáveis. Consideremos as relações:

- $(z_1)_i + (z_3)_i + \cdots + (z_n)_i = x_i$, para $i = 1, \cdots, n$;
- $\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = 1$;
- $(z_k)_1 + (z_k)_2 + \cdots (z_k)_n = k\ \alpha_k$ para todo o k ímpar;
- $0 \leq (z_k)_i \leq \alpha_k$, para todo o i e k.

A projecção sobre as variáveis x dá o polítopo de paridade P_n.
Este só tem n^2 facetas.

Facetas e Projecções - Continuação

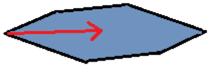
P_n tem uma descrição mais pequena.

Consideremos x, e z_k com k ímpar e $1 \leq k \leq n$ todos em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}$ para os mesmos valores de k.Temos portanto $(n+1)\lceil n/2 \rceil + n$ variáveis. Consideremos as relações:

- $(z_1)_i + (z_3)_i + \cdots + (z_n)_i = x_i$, para $i = 1, \cdots, n$;
- $\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = 1$;
- $(z_k)_1 + (z_k)_2 + \cdots (z_k)_n = k\ \alpha_k$ para todo o k ímpar;
- $0 \leq (z_k)_i \leq \alpha_k$, para todo o i e k.

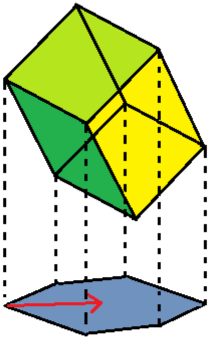
A projecção sobre as variáveis x dá o polítopo de paridade P_n. Este só tem n^2 facetas. Podíamos optimizar no polítopo com mais variáveis em vez de optimizar na sua projecção.

Exemplo - Optimização em Projecções



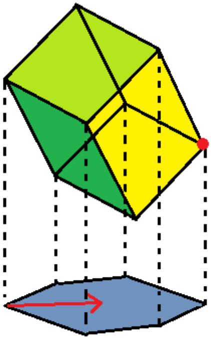
Queremos optimizar sobre um polítopo H

Exemplo - Optimização em Projecções



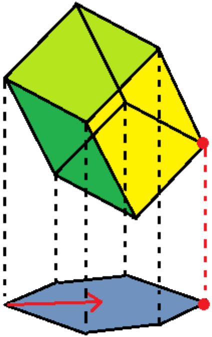
Queremos optimizar sobre um polítopo H
Consideramos o polítopo C cuja projecção é H.

Exemplo - Optimização em Projecções



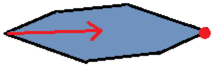
Queremos optimizar sobre um polítopo H
Consideramos o polítopo C cuja projecção é H.
Optimizamos sobre C.

Exemplo - Optimização em Projecções



Queremos optimizar sobre um polítopo H
Consideramos o polítopo C cuja projecção é H.
Optimizamos sobre C.
Projectamos a solução.

Exemplo - Optimização em Projecções



Queremos optimizar sobre um polítopo H
Consideramos o polítopo C cuja projecção é H.
Optimizamos sobre C.
Projectamos a solução.

Problema

O nosso problema é então dado um polítopo P, encontrar um polítopo Q com o mínimo possível de facetas cuja projecção seja P.

Problema

O nosso problema é então dado um polítopo P, encontrar um polítopo Q com o mínimo possível de facetas cuja projecção seja P.

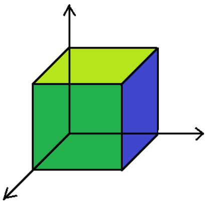
Precisamos de uma definição.

Matriz de Folga

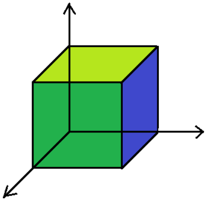
Se P é um polítopo com vértices $p_1 \cdots p_n$ e facetas dadas por $l_1(x) \geq 0, \cdots, l_f(x) \geq 0$, então a matriz de folga de P é

$$\begin{bmatrix} l_1(p_1) & l_1(p_2) & l_1(p_3) & \cdots & l_1(p_v) \\ l_2(p_1) & l_2(p_2) & l_2(p_3) & \cdots & l_2(p_v) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_f(p_1) & l_f(p_2) & l_f(p_3) & \cdots & l_f(p_v) \end{bmatrix}$$

Exemplo - Cubo



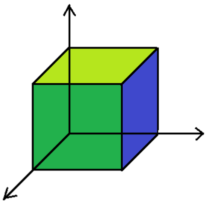
Exemplo - Cubo



0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	1

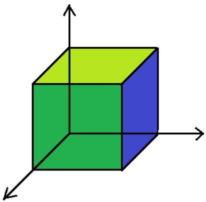
$$\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccccccc} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

Exemplo - Cubo



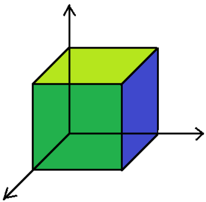
$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{bmatrix}
\end{array}$$

Exemplo - Cubo



$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 1 - y \geq 0 \\ 1 - z \geq 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array} \right]
\end{array}$$

Exemplo - Cubo



$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccccccc} \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix} \end{array} \\
\begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-y \geq 0 \\ 1-z \geq 0 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n, não negativa.

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n, não negativa. M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n, não negativa. M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Ou seja, se existirem A, m por k, e B, k por n, não negativas com

$$M = A \times B.$$

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n, não negativa. M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Ou seja, se existirem A, m por k, e B, k por n, não negativas com

$$M = A \times B.$$

Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n, não negativa. M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Ou seja, se existirem A, m por k, e B, k por n, não negativas com

$$M = A \times B.$$

Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

Factorizações não negativas

Seja M uma matriz m por n, não negativa. M tem uma factorização não negativa de ordem k, se existirem vectores não negativos $a_1, \cdots, a_m$ e $b_1, \cdots b_n$ em $\mathbb{R}^k$ tais que $M_{i,j} = \langle a_i, b_j \rangle$.

Ou seja, se existirem A, m por k, e B, k por n, não negativas com

$$M = A \times B.$$

Exemplo

$$M = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

Logo M tem uma factorização não negativa de ordem 2.

Teorema de Yannakakis

Teorema de Yannakakis-1991

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folga. Então os dois seguintes números são iguais.

Teorema de Yannakakis

Teorema de Yannakakis-1991

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folga. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.

Teorema de Yannakakis

Teorema de Yannakakis-1991

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folga. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.
- O menor número k tal que S tenha uma factorização não negativa de ordem k.

Teorema de Yannakakis

Teorema de Yannakakis-1991

Seja P um polítopo e S a sua matriz de folga. Então os dois seguintes números são iguais.

- O menor número de facetas possível de um polítopo Q cuja projecção seja P.
- O menor número k tal que S tenha uma factorização não negativa de ordem k.

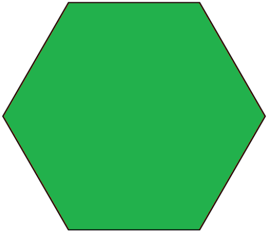
Mais ainda, é possível encontrar o polítopo Q a partir da factorização de S.

O Hexágono

Considere o hexágono regular.

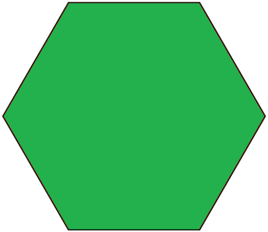
O Hexágono

Considere o hexágono regular.



O Hexágono

Considere o hexágono regular.

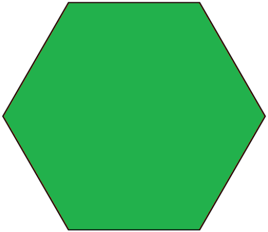


Tem uma matriz de folga 6×6.

O Hexágono

Considere o hexágono regular.

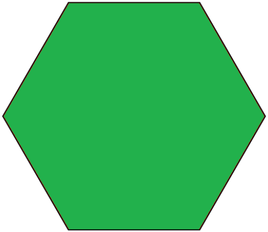
Tem uma matriz de folga 6×6.



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O Hexágono

Considere o hexágono regular.



Tem uma matriz de folga 6×6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hexágono - continuação.

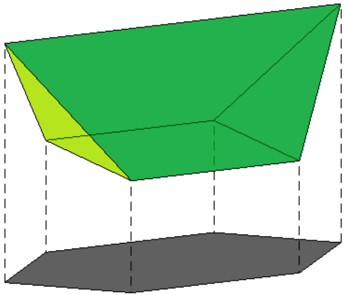
É a projecção da fatia de $\mathbb{R}^5_+$ cortada por

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 2, \quad y_3 + y_4 + y_5 = 1.$$

Hexágono - continuação.

É a projecção da fatia de $\mathbb{R}^5_+$ cortada por

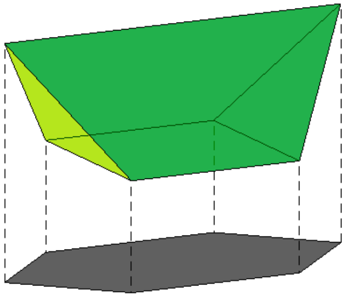
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 2, \quad y_3 + y_4 + y_5 = 1.$$

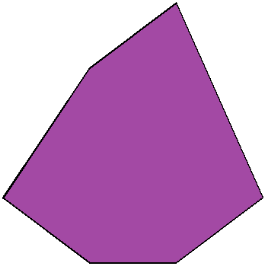


Hexágono - continuação.

É a projecção da fatia de $\mathbb{R}^5_+$ cortada por

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 2, \quad y_3 + y_4 + y_5 = 1.$$





Hexágonos Irregulares não são projecções de polítopos de 5 faces.

Fim da Apresentação

Fim da Apresentação

Mas muitos problemas por resolver