1. Spektrální rozklad samoadjungovaných operátorů

1.1. Motivace

Vlastní čísla a vlastní vektory symetrické matice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = \left(\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Pro tato vlastní čísla nalezneme vlastní vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

$$\left(1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) x_1 - x_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 = \left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^T \qquad \mathbf{v}_2 = \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^T$$

Tyto vektory jsou na sebe navzájem kolmé. Tedy k symetrické matici $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory.

TOTO NENÍ NÁHODA!

1.2. Adjungované zobrazení

Nechť $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou euklidovské nebo unitární prostory. Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je lineární. Adjungované zobrazení k zobrazení φ je zobrazení

$$\varphi^* : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$$

takové, že

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}} = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle_{\mathcal{U}} .$$

Věta. *Nechť α je ortonormální báze v $\mathcal{U}$, β ortonormální báze ve $\mathcal{V}$. Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a $(\varphi)_{\beta,\alpha} = \mathcal{A}$. Potom matice adjungovaného zobrazení je*

$$\begin{array}{rcl} (\varphi^*)_{\alpha,\beta} & = & \bar{\mathcal{A}}^T \text{ v unitárním případě} \\ & & \mathcal{A}^T \text{ v euklidovském případě.} \end{array}$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ jsou libovolné a $(\mathbf{u})_\alpha = x$, $(\mathbf{v})_\beta = y$. Potom platí

$$(\varphi(\mathbf{u}))_\beta^T.(\mathbf{v})_\beta = \langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{u})_\alpha^T.(\varphi^*(\mathbf{v}))_\alpha$$

$$\begin{array}{rcl} ((\varphi)_{\beta,\alpha}(\mathbf{u})_\alpha)^T.\overline{(\mathbf{v})_\beta} & = & (\mathbf{u})_\alpha^T.\overline{(\varphi^*)_{\alpha,\beta}(\mathbf{v})_\beta} \\ (\mathcal{A}x^T)\bar{y} & = & x^T\overline{(\varphi^*)_{\alpha,\beta}}\bar{y} \\ x^T\mathcal{A}\bar{y} & = & x^T\overline{(\varphi^*)_{\alpha,\beta}}\bar{y} \end{array}$$

Tedy

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^T & = & \overline{(\varphi^*)_{\alpha,\beta}} \\ (\varphi^*)_{\alpha,\beta} & = & \bar{\mathcal{A}}^T. \end{array}$$

Platí i obrácené tvrzení: Je-li $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a $[\varphi]_{\alpha,\beta} = \mathcal{A}$, $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ a $[\psi]_{\alpha,\beta} = \bar{A}^T$, pak

$$\psi = \varphi^*.$$

□

1.3. Samoadjungovaný operátor

Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je lineární operátor na euklidovském nebo unitárním prostoru. Říkáme, že φ je samoadjungovaný, jestliže $\varphi = \varphi^*$, tj.

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle$$

pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$.

Věta. *Operátor $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je samoadjungovaný, právě když pro matici v ortonormální bázi α platí*

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^T.$$

Definice. Reálná matice $\mathcal{A}$ se nazývá *symetrická*, jestliže $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$. Komplexní matice $\mathcal{A}$ se nazývá *hermitovská*, jestliže $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^T$.

1.4. Vlastní čísla a vlastní vektory samoadjungovaných operátorů

Lemma. *Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je samoadjungovaný operátor s invariantním podprostorem $\mathcal{V}$. Potom $\mathcal{V}^\perp$ je rovněž invariantní.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^\perp$. Pro všechna $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{w}), \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w}, \varphi(\mathbf{u}) \rangle = 0,$$

tedy $\varphi(\mathbf{w}) \in \mathcal{V}^\perp$. □

Věta. *Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je samoadjungovaný operátor v unitárním prostoru $\mathcal{U}$.*

(1) *Vlastní čísla zobrazení φ jsou reálná.*
(2) *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.*

Důkaz. (1) Nechť λ je vlastní číslo s vlastním vektorem $\mathbf{v}$:

$$\bar{\lambda}||\mathbf{v}||^2 = \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \varphi(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda||\mathbf{v}||^2.$$

Odtud plyne $\lambda = \bar{\lambda}$.

(2) Nechť $\varphi(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $\varphi(\mathbf{v}_2) = \lambda_2\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \neq 0$, $\mathbf{v}_2 \neq 0$. Potom

$$\lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \varphi(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \varphi(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle.$$

Protože $\lambda_1 \neq \lambda_2$, musí být $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$. □

Spektrum lineárního operátoru je množina jeho vlastních čísel.

Věta. *Pro každý samoadjungovaný operátor $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ existuje ortonormální báze α prostoru $\mathcal{U}$ tvořená vlastními vektory, v níž má φ diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

Důkaz. (1) Je-li $\mathcal{U}$ komplexní prostor, pak má charakteristický polynom φ určitě alespoň jeden kořen. Ten je vlastním číslem (je tedy reálný) s vlastním vektorem $\mathbf{v}_1$ velikosti 1. $[\mathbf{v}_1]^\perp$ je invariantní vůči φ, $\varphi/[\mathbf{v}_1]^\perp : [\mathbf{v}_1]^\perp \to [\mathbf{v}_1]^\perp$ je samoadjungovaný a pokračujeme indukcí.

(2) Je-li $\mathcal{U}$ reálný vektorový prostor, pak v nějaké ortonormální bázi má φ matici $\mathcal{A}$, která je reálná. $\mathcal{A}$ reprezentuje zobrazení

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad x \to \mathcal{A}x.$$

Toto zobrazení je samoadjungované, neboť $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T = \bar{\mathcal{A}}^T$. Tedy $\mathcal{A}$ má reálné vlastní číslo λ s vlastním vektorem

$$x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}^n \qquad \mathcal{A}x + \mathrm{i}\, \mathcal{A}y = \lambda x + \mathrm{i}\, \lambda y.$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}x &= \lambda x \\ \mathcal{A}y &= \lambda y \end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{A}$ má vlastní vektor v $\mathbb{R}^n$, proto $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ má rovněž vlastní vektor k λ (jeho souřadnice v dané ortonormální bázi jsou vlastním vektorem x matice $\mathcal{A}$). $[\mathbf{v}]^\perp$ je invariantní vůči φ a můžeme pokračovat indukcí stejně jako v (1). □

Důsledek 1.5. *Nechť $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je samoadjungovaný operátor s vlastními, navzájem kolmými vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a vlastními čísly $\lambda_1, \ldots \lambda_n$. Nechť $\mathcal{P}_k : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ je kolmá projekce na $[\mathbf{u}_k]$. Potom*

$$\varphi = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2 + \cdots + \lambda_n \mathcal{P}_n.$$

Důkaz. Pro libovolný vektor $\mathbf{u} = \sum_i x_i \mathbf{u}_i$ je

$$\varphi\left(\sum_i x_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_i x_i \varphi(\mathbf{u}_i) = \sum_i \lambda_i x_i \mathbf{u}_i.$$

Protože

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(\mathbf{u}_j) &= 0 \qquad & i \neq j \\ \mathcal{P}_i(\mathbf{u}_j) &= \mathbf{u}_i \qquad & i = j, \end{aligned}$$

je

$$\left(\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j\right)\left(\sum_i x_i \mathbf{u}_i\right) = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i(x_i \mathbf{u}_i) = \sum_i \lambda_i x_i \mathbf{u}_i = \varphi\left(\sum_i x_i \mathbf{u}_i\right).$$

□

1.6. Samoadjungované operátory a kvadratické formy

Důsledek 1.7. *Pro každou reálnou symetrickou matici $\mathcal{A}$ existuje ortogonální matice $\mathcal{P}$ tak, že*

$$\mathcal{P}^T \mathcal{A} \mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{P}$$

je diagonální.

Důkaz. Podle věty o spektrálním rozkladu existuje v $\mathbb{R}^n$ ortonormální báze tvořená vlastními vektory matice $\mathcal{A}$. V této bázi α je matice $\mathcal{D}$ zobrazení $\mathbf{x} \longmapsto \mathcal{A}\mathbf{x}$ diagonální

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}.$$

$\mathcal{P} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha}$ je matice přechodu od báze α ke standardní bázi ϵ. Tato matice je ortogonální, neboť její sloupce jsou tvořeny vektory ortonormální báze α. Tedy

$$\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^T.$$

$\square$

Důsledek pro kvadratické formy. *Každá kvadratická forma f na euklidovském prostoru $\mathcal{U}$ dimenze n má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar*

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots \lambda_n x_n^2.$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{A}$ je matice kvadratické formy f. Najdeme bázi α tvořenou vlastními ortonormálními vektory. V této bázi má kvadratická forma matici

$$\mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P}, \text{ kde } \mathcal{P} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha}.$$

Protože $\mathcal{P}^T = \mathcal{P}^{-1}$, je $\mathcal{P}^T\mathcal{A}\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ diagonální matice. $\square$

Příklad. Vyšetřujme v rovině množinu bodů, které jsou zadány rovnicí

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 = 1.$$

Úpravou na čtverce dostaneme kvadratickou formu v diagonálním tvaru

$$(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = 1.$$

Nové souřadnice jsou $x_1' = x_1 - x_2$, $x_2' = x_2$ a dávají matici přechodu $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pro původní bázi $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a novou bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

Tedy nové souřadnice jsou v bázi $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$(x_1')^2 + (x_2')^2 = 1.$$

Tato báze nám neurčuje osy elipsy (ty jsou k sobě vždy kolmé).
Najdeme diagonální tvar kvadratické formy v nějaké ortonormální bázi.
Matice kvadratické formy je $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Spočítáme její vlastní čísla.
$|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$
$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ s vlastním vektorem $\mathbf{v}_1 = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$
$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ s vlastním vektorem $\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$
V souřadnicích ortonormální báze $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ má elipsa rovnici

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1.$$

Vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ určují směr os. Více o kuželosečkách v Lineární algebře III.