

Diferenciální rovnice

Petr Hasil

Přednáška z Matematické analýzy



Obsah

- 1 Úvod
 - Diferenciální rovnice
- 2 Rovnice prvního řádu
 - Rovnice se separovatelnými proměnnými a rovnice homogenní
 - Rovnice lineární a Bernoulliho
 - Rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci
 - Clairautova rovnice
 - Lagrangeova rovnice

Obsah

- 3 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů
 - Úvod
 - Rovnice s konstantními koeficienty
 - Homogenní rovnice
 - Nehomogenní rovnice
 - Eulerova rovnice
 - Rovnice druhého řádu
 - Aplikace
 - Harmonické kmitání
 - Vlastní netlumené kmitání
 - Vynucené netlumené kmitání
 - Vlastní tlumené kmitání
 - Vynucené tlumené kmitání
- 4 Systémy
 - Systémy lineárních diferenciálních rovnic
 - Homogenní lineární rovnice s konstantní maticí A

Definice 1

Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se neznámá funkce vyskytuje spolu se svými derivacemi. *Řád diferenciální rovnice* je nejvyšší derivace neznámé funkce, která se v rovnici vyskytne.

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Poznámka

Budeme uvažovat DR n -tého řádu ve tvaru rozřešeném vzhledem k nejvyšší derivaci, tedy

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Pro precizní popis teorie diferenciálních rovnic je nutná znalost diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Definice 2

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (popř. $y = y(t)$, $y = y(x, t), \dots$), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic získáme obvykle pomocí integrování, proto budou obsahovat integrační konstanty (tolik integračních konstant, kolikrát budeme integrovat). Tedy tzv. *obecné řešení* (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami.

Řešení dané počáteční podmínkou, např. $y(x_0) = y_0$ (předem zadaná hodnota v daném bodě), se nazývá *partikulární*.

Poznámka

- Řešení diferenciálních rovnic jsou spojité funkce (existují jejich derivace).
- Rovnice $y' = f(x)$ nemá jediné řešení (primitivní funkce tvoří množinu). Pokud uvažujeme podmínku, že $F(x)$ má procházet určitým bodem, pak má rovnice jedno řešení. Podmínka $y(x_0) = y_0$ se nazývá *počáteční podmínka* a rovnice s touto podmínkou *počáteční problém* (Cauchyho úloha).
- Výpočet primitivní funkce $y = \int f(x) dx$ odpovídá řešení rovnice $y' = f(x)$.
- $y' = y$ má řešení $y = C \cdot e^x$.
- $y'' + y = 0$ slouží k popisu malých kmitů matematického kyvadla. Řešení jsou $y = \sin x$, $y = \cos x$ a každá lineární kombinace těchto dvou funkcí, tedy řešení tvoří lineární prostor.

Poznámka

- $y' = f(x, y)$ pokud $f(x, y)$ není „dostatečně pěkná“, tak se nám nepodaří explicitně vyjádřit řešení rovnice.
- Pro nelineární rovnice nemusí existovat vyjádření $y = y(x, c)$ zahrnující všechna řešení.

Příklad 1

- Rovnice $y' = y^2$ má řešení $y = \frac{1}{c-x}$, $x \in (-\infty, c)$, (c, ∞) a $y = 0$, které nelze dostat žádnou volbou c .
- Rovnice $y' = \sqrt{y+1}$ má řešení $y = \frac{(x+c)^2}{4} - 1$, $x \in (-c, \infty)$ a $y = -1$, které nelze dostat žádnou volbou c . (Pozn. každé nekonstantní řešení je rostoucí.)

Příklad 2

Diferenciální rovnice $x y' + y = 0$ má řešení $y = \frac{c}{x}$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, protože

$$y' = (cx^{-1})' = -\frac{c}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x y' + y = x \left(-\frac{c}{x^2} \right) + \frac{c}{x} = 0.$$

Tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení.

- Řešeními rovnice jsou hyperboly ($c \neq 0$) a přímka $y = 0$ ($c = 0$).
- Obecným řešením je $y = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$.
- $y = \frac{2}{x}$ je partikulární řešení ($c=2$).
- $y = \frac{2}{x}$, $x \in (0, \infty)$, je řešením počátečního problému

$$x y' + y = 0, \quad y(1) = 2.$$

Klasifikace

- Podle počtu nezávisle proměnných na obyčejné (ODR) a parciální (PDR) diferenciální rovnice.
- Podle linearity na lineární a nelineární diferenciální rovnice.
- Podle řádu (rovnice n -tého řádu).

Příklad 3

- $ms'' = F$, kde $s = s(t)$ je poloha bodu na přímce, dráha (Newtonův zákon)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, kde $u = u(x, t)$ je teplota v čase t v bodě x na přímce (vedení tepla v tyči)
- $\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}$, kde $u = u(x, t)$ je pozice vzhledem ke klidové poloze, vychýlení v čase t v bodě x na přímce (vlnová rovnice)
- $\theta'' + \alpha \sin \theta = 0$, kde $\theta = \theta(t)$ je úhel (matematické kyvadlo)
- $Q' = -kQ$, kde $Q = Q(t)$ je množství radioaktivní látky (radioaktivní rozpad)

Rovnice prvního řádu

- Obecný tvar je $F(x, y, y') = 0$, kde F je funkce tří proměnných.
- Rovnice rozřešené vzhledem k derivaci je $y' = f(x, y)$, kde f je funkce dvou proměnných.

Uvažujme počáteční problém

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Nechť je y_1 řešením tohoto problému na intervalu I_1 a y_2 na intervalu I_2 . Je-li $I_1 \subseteq I_2$, pak y_1 je zúžením y_2 a naopak y_2 je prodloužením y_1 .

Poznámka

V obecné teorii diferenciálních rovnic lze ukázat, že pokud je pravá strana rovnice $y' = f(x, y)$ spojitá a navíc tzv. lipschitzovská v proměnné y , tj.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

pro každé $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a pro nějaké univerzální $L \geq 0$, potom řešení počáteční úlohy s touto rovnicí a podmínkou $y(x_0) = y_0$ skutečně existuje a je jediné, ovšem pouze v dostatečně malém okolí bodu x_0 .

Toto řešení je spojitě (existuje derivace) a má spojitou derivaci (předpoklad spojitosti funkce $y' = f(x, y)$.)

Patologie

- Nejednoznačnost řešení.
Problém $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(1) = 0$, má řešení $y = (x - 1)^3$ a $y = 0$.
(Obě funkce procházejí bodem $[1, 0]$.)
- Malý interval, kde řešení existuje.
Problém $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1/a^2$ má řešení $y = \frac{1}{a^2 - x^2}$, $x \in (-a, a)$.
- Výběr větve řešení.
Rovnice $y' = y^3$ má implicitní řešení $y^2 = \frac{-1}{2(x+c)}$ a $y = 0$. Za počáteční podmínky $y(0) = 1/2$ dostáváme řešení
 $y = +\sqrt{\frac{-1}{2(x-2)}}$, $x < 2$.

Geometrická interpretace rovnice $y' = f(x, y)$

Bodu $[x, y]$ je přiřazena hodnota y' (směrnice tečny), tedy tzv. *lineární element* (znázorňován úsečkou) s daným sklonem. Soubor všech lineárních elementů nazýváme *směrové pole*. Křivka spojující body se stejným lineárním elementem je *izoklina*. Graf řešení (*integrální křivka*) probíhá podél lineárních elementů. Tečna k integrální křivce vždy obsahuje lineární element příslušný k danému bodu.

Příklad 4

Integrální křivky rovnice $y' = -\frac{x}{y}$ jsou půlkružnice

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, x \in (-r, r).$$

Izokliny jsou polopřímky vycházející z počátku. Pro $y' = 0$ máme $x = 0$ a pro $y' = k (\neq 0)$ máme $y = -\frac{x}{k}$.

Speciální případy

- $f(x, y) = f(x)$, tj. $y' = f(x)$
Odpovídá hledání primitivní funkce k $f(x)$, tedy $y = \int f(x) dx$.
Problém

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

má řešení

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

- $f(x, y) = g(y)$, tj. $y' = g(y)$
Lze převést na předchozí případ využitím inverzní funkce.

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0,$$

tedy máme problém (1) pro funkci $x(y)$ s řešením
 $x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt$, což implicitně udává funkci $y = y(x)$.

Věta 1

Nechť je funkce $f = f(x)$ spojitá na intervalu $I = (a, b)$ a $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Pak je funkce $y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$ jediným a úplným řešením problému (1).

Důkaz.

Řešením rovnice jsou tvaru $y(x) = F(x) + c$, kde F je nějaká primitivní funkce k f na I , např. $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$. Uvážením podmínky $y(x_0) = y_0$, tedy volbou $x = x_0$ ihned dostáváme $c = y_0$. □

Věta 2

Nechť je funkce $g = g(y)$ spojitá na intervalu $J = (c, d)$ taková, že $g(y) \neq 0, \forall y \in J$. Pak $\forall x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in J$ existuje právě jedno řešení $y(x)$ rovnice $y' = g(y)$ splňující $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je inverzní funkce k funkci $x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt$.

Důkaz.

Stačí dokázat, že inverzní funkce $v(x)$ k funkci

$$u(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt$$

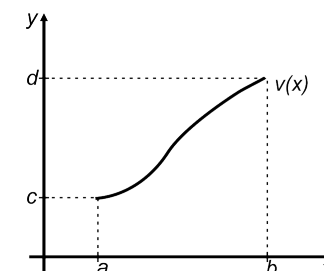
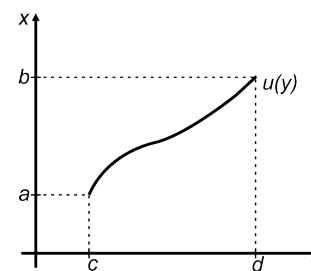
je řešením daného problému, zbytek plyne z věty 1.

Dle derivace inverze máme

$$v'(x) = \frac{d}{dx} v(x) = \frac{1}{u'(y)} \Big|_{y=v(x)} = \frac{1}{\frac{1}{g(y)}} \Big|_{y=v(x)} = g(v(x)).$$

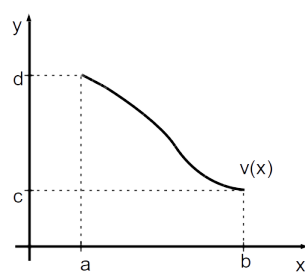
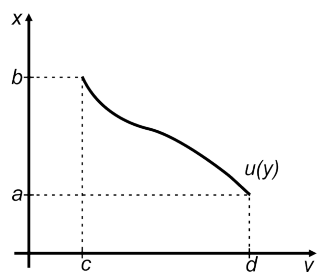
Inverze k $v(x)$ existuje, neboť $u(y)$ je ryze monotónní (rostoucí pro $g(y) > 0$, klesající pro $g(y) < 0$). Řešení $v(x)$ existuje na intervalu $I = (a, b) := \mathcal{D}(v(x)) = \mathcal{H}(u(y))$, kde pro $g(y) > 0$ je

$$a = x_0 + \int_{y_0}^c \frac{1}{g(t)} dt, \quad b = x_0 + \int_{y_0}^d \frac{1}{g(t)} dt$$



a pro $g(y) < 0$ je

$$a = x_0 + \int_{y_0}^d \frac{1}{g(t)} dt, \quad b = x_0 + \int_{y_0}^c \frac{1}{g(t)} dt.$$



□

Poznámka

Izokliny rovnice $y' = g(y)$ jsou přímky rovnoběžné s osou x .

Příklad 5

Prostudujme rovnici $y' = \sqrt{1+y}$.

Rovnici $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+y}$ upravíme na $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+y}}$, tedy

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = x_0 + [2\sqrt{1+t}]_{y_0}^y = x_0 + 2\sqrt{1+y} - 2\sqrt{1+y_0}.$$

Funkce $g(y) = \sqrt{1+y}$ je spojitá pro $y \geq -1$, tj. $J = (c, d) = (-1, \infty)$, navíc $g(y) > 0, \forall y \in J$. Odtud

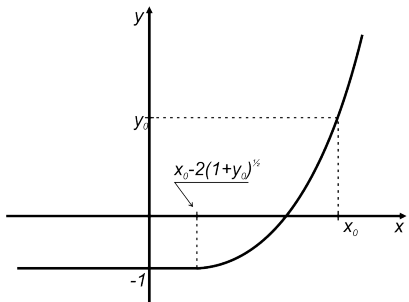
$$a = x_0 + \int_{y_0}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = x_0 - 2\sqrt{1+y_0}, \quad b = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = \infty.$$

- Jediné úplné řešení počáteční úlohy

$$y' = \sqrt{1+y}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y_0 > -1,$$

je funkce

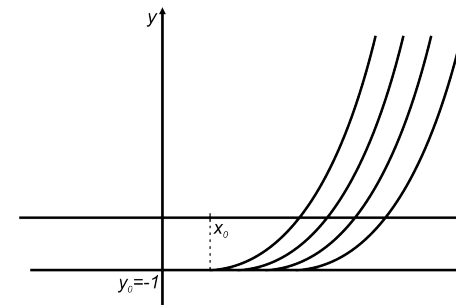
$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, x_0 - 2\sqrt{1+y_0}]; \\ \left[\frac{1}{2}(x-x_0) + \sqrt{1+y_0}\right]^2 - 1, & x \in (x_0 - 2\sqrt{1+y_0}, \infty). \end{cases}$$



- Počáteční úloha

$$y' = \sqrt{1+y}, \quad y(x_0) = -1,$$

má nekonečně mnoho řešení.



- Pro $y_0 < -1$ nemá počáteční úloha žádné řešení. ■

Rovnicí se separovatelnými proměnnými budeme nazývat rovnici $y' = f(x)g(y)$.

Věta 3

Nechť G je konvexní oblast v \mathbb{R}^2 , $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, která má spojité parciální derivace do druhého řádu včetně a $f(x, y) \neq 0$. Diferenciální rovnici

$$y' = f(x, y)$$

je možné převést na rovnici se separovanými proměnnými právě tehdy, když

$$D(x, y) := \det \begin{pmatrix} f(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pro každé } [x, y] \in G.$$

Např. parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ funkce dvou proměnných $f(x, y)$ dle proměnné y určíme tak, že předpis funkce derivujeme dle y a s x pracujeme jako s konstantou. (Podrobněji bude probráno v diferenciálním počtu funkcí více proměnných.)

Věta 4

Nechť je $f = f(x)$ spojitá na (a, b) a $g = g(y)$ spojitá na (c, d) , $g(y) \neq 0 \forall y \in (c, d)$. Potom má počáteční problém

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

kde $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$, právě jedno řešení, které je implicitně dáno vzorcem

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)} dt = \int_{x_0}^x f(s) ds.$$

Důkaz.

Máme

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad / \cdot \frac{1}{g(y)}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad / \text{integrace}$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} + c_1 = \int_{x_0}^x f(s) ds + c_2$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^x f(s) ds + c, \quad c = c_2 - c_1.$$

Volbou $y(x_0) = y_0$ dostaneme $0 = 0 + c$, tedy $c = 0$. □

Poznámka

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad / \cdot \frac{1}{g(y)}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad / \text{integrace}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} + c_1 = \int f(x) dx + c_2$$

$$G(y) = F(x) + c \quad (c = c_2 - c_1)$$

Explicitní řešení pak lze často zapsat ve tvaru $y(x) = G^{-1}[F(x) + c]$.

Příklad 6

Vyřešme $y' = \frac{y^2 - y}{x}$, tedy $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = y^2 - y$.

Máme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - y}{x}$$

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{1}{x} dx \quad \text{pro } y^2 - y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \wedge y \neq 1.$$

Vypočítáme

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} dy = \int \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} dy = -\ln|y| + \ln|y-1| + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c_2.$$

Tedy

$$-\ln|y| + \ln|y-1| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = |x| \cdot e^c$$

$$\frac{y-1}{y} = \pm e^c \cdot x = K \cdot x, \quad K \neq 0$$

$$y = \frac{1}{1 - Kx}, \quad K \neq 0.$$

Během výpočtu jsme udělali předpoklad, že $y \neq 0 \wedge y \neq 1$. Zkontrolujeme, zda nejde také o řešení rovnice:

- $y = 1$ je řešením a dostaneme jej pro $K = 0$,
- $y = 0$ je řešením, ale nijak jej nedostaneme,

tedy

$$y = \underbrace{\frac{1}{1 - Kx}}_{\text{obecné řešení}}, \quad \underbrace{y = 0}_{\text{singulární řešení}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

(Obecné řešení obsahuje tolik konstant, jako byl řád rovnice.) ■

Příklad 7

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \quad y(0) = 1$$

Počáteční problém – vypočítáme obecné řešení a pak použitím počáteční podmínky určíme (vybereme) řešení, tedy

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1 + y^2}{1 + x^2} \\ \frac{dy}{1 + y^2} &= \frac{dx}{1 + x^2} \\ \arctg y &= \arctg x + c. \end{aligned}$$

Podmínka $y(0) = 1$ dává $\arctg 1 = \arctg 0 + c \Rightarrow c = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Odtud dostáváme řešení

$$y = \operatorname{tg} \left(\arctg x + \frac{\pi}{4} \right)$$

a užitím vzorce $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ho lze upravit na

$$y = \frac{x + 1}{1 - x}.$$

■

Homogenní rovnice je rovnice ve tvaru

$$y' = f \left(\frac{y}{x} \right).$$

Definice 3

Řekneme, že funkce $f = f(x)$ je homogenní řádu n , pokud

$$f(tx) = t^n f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f), \forall t > 0.$$

Poznámka

- Dosadíme-li do pravé strany rovnice $[tx, ty]$, máme $f \left(\frac{ty}{tx} \right) = f \left(\frac{y}{x} \right)$, tedy je homogenní řádu 0.
- Pokud je funkce f identita, tj. $f(t) = t$, jedná se o rovnici se separovatelnými proměnnými.

Uvažujme rovnici $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ a použijme substituci

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = x \cdot z \Rightarrow y' = z + xz'$$

Tím dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} z + xz' &= f(z) \\ z' &= \frac{f(z) - z}{x} \end{aligned}$$

což je rovnice se separovatelnými proměnnými, kterou vyřešíme.

Příklad 8

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x} \\ z + xz' &= z + z \cdot \ln z \\ z' &= \frac{z \cdot \ln z}{x} \Rightarrow z \cdot \ln z \neq 0 \Rightarrow (z \neq 0), z \neq 1 \\ \frac{dz}{z \ln z} &= \frac{dx}{x} \\ \ln|\ln z| &= \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \\ |\ln z| &= |x| \cdot e^c \\ \ln z &= \pm x \cdot e^c \\ \ln z &= Kx, K \neq 0 \\ z &= e^{Kx} \end{aligned}$$

- $z = 0$ není řešením, ani nemůže být, protože $z = 0$ nepatří do definičního oboru logaritmu,
- $z = 1$ je řešením, získáme jej pro $K = 0$ (tedy nejde o singulární řešení).
- Celkově

$$y = x \cdot e^{Kx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} L = y' &= e^{Kx} + Kx e^{Kx}, \\ P &= e^{Kx} + e^{Kx} \cdot \ln e^{Kx} = e^{Kx} + e^{Kx} \cdot Kx, \\ \Rightarrow L &= P \end{aligned}$$

■

Na homogenní rovnici (a tedy na rovnici se separovatelnými proměnnými) lze převést i rovnice ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right).$$

Při řešení rozlišujeme několik případů:

- $c = C = 0$

$$y' = f\left(\frac{ax + by}{Ax + By}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{y}{x}}{A + B\frac{y}{x}}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

např.

$$y' = \frac{y + x}{y - x} = \frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y}{x} - 1}, \quad \frac{y}{x} = z \Rightarrow \text{homogenní rovnice}$$

$$\bullet c \neq 0 \vee C \neq 0 \text{ a } \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$$

Provedeme substituci, která odstraní absolutní členy.

Substituce $x = u + m$ a $y = v + n$, kde u je nová nezávisle proměnná a v je nová závisle proměnná. Čísla m a n volíme tak, aby nový absolutní člen byl roven nule, tj.

$$ax + by + c = a(u + m) + b(v + n) + c = au + bv + \underbrace{am + bn + c}_{=0},$$

$$Ax + By + C = A(u + m) + B(v + n) + C = Au + Bv + \underbrace{Am + Bn + C}_{=0}.$$

K určení substituce je tedy nutné vyřešit rovnice $am + bn + c = 0$, $Am + Bn + C = 0$ o neznámých m a n .

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) \Rightarrow \frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{Au + Bv}\right)$$

$$\bullet c \neq 0 \vee C \neq 0 \text{ a } \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$$

Vydělíme polynomy a zavedeme substituci.

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right) = f\left(K_1 + K_2 \cdot \frac{1}{Ax + By + C}\right)$$

$$\text{substituce } Ax + By + C = v \rightarrow A + By' = v'$$

Příklad 9

$$y' = \frac{5y - 5x - 1}{2y - 2x - 1} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2y - 2x - 1}$$

$$\text{substituce } v = 2y - 2x - 1, \quad v' = 2y' - 2, \quad y' = \frac{v' + 2}{2}$$

$$\frac{v' + 2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2v} \Rightarrow v' + 2 = 5 + \frac{3}{v} \Rightarrow \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3v + 3}\right) dv = 1 dx, v \neq -1$$

$$\Rightarrow v - \ln|v + 1| = 3x + c_1 \Rightarrow 5x - 2y + 1 + \ln|2(y - x)| = c_2$$

$$\Rightarrow 5x - 2y + \ln|y - x| = c, c \in \mathbb{R}, \text{ a } y = x$$

Lineární diferenciální rovnice je rovnice tvaru (linearita vzhledem k y)

$$y' = a(x)y + b(x). \quad (\text{LDR})$$

Definice 4

Je-li $b(x) \equiv 0$, mluvíme o *homogenní lineární rovnici*, v opačném případě o *nehomogenní lineární rovnici*.

Věta 5

Jsou-li y_1 a y_2 řešením rovnice (LDR), pak jejich rozdíl $u = y_1 - y_2$ je řešením homogenní lineární rovnice

$$u' = a(x)u. \quad (\text{hLDR})$$

Poznámka

Z věty 5 plyne, že obecné řešení rovnice (LDR) (tj. řešení závislé na jedné integrační konstantě) je tvaru $y = y_p + u$, kde y_p je nějaké řešení rovnice (LDR), tzv. *partikulární řešení*, a u je *obecné řešení* rovnice (hLDR).

Homogenní LDR

Rovnice $u' = a(x)u$ je speciálním případem rovnice se separovatelnými proměnnými, tedy za podmínky $u \neq 0$ máme

$$\frac{du}{u} = a(x) dx$$

$$\ln|u| = \int a(x) dx + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

$$|u| = e^{c_1} \cdot e^{\int a(x) dx}$$

$$u = c_2 \cdot e^{\int a(x) dx} \quad (c_2 \neq 0),$$

přičemž $u = 0$ je řešením, které dostaneme volbou $c_2 = 0$.

Obecné řešení homogenní rovnice je tedy

$$u(x) = c \cdot e^{\int a(x) dx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

K vyřešení nehomogenní LDR potřebujeme získat jedno její řešení (partikulární řešení). K tomu využijeme metodu variace konstanty, nebo metodu integračního faktoru.

1. Variace konstanty

Řešení homogenní rovnice (hLDR) příslušné k rovnici (LDR) je $u(x) = c \cdot e^{\int a(x) dx}$. Partikulární řešení rovnice (LDR) hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = c(x) \cdot e^{\int a(x) dx},$$

kde jsme konstantu c nahradili za (neznámou) funkci $c(x)$. Dosazením do rovnice (LDR) určíme podmínku, kterou musí splňovat funkce $c(x)$, aby y_p bylo řešením rovnice (LDR).

$$L = y_p' = c'(x) \cdot e^{\int a(x) dx} + c(x) \cdot e^{\int a(x) dx} \cdot a(x)$$

$$P = a(x)y + b(x) = a(x) \cdot c(x) \cdot e^{\int a(x) dx} + b(x)$$

Tedy porovnáním obou stran máme

$$c'(x) = b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

$$c(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx.$$

Tedy

$$y_p(x) = e^{\int a(x) dx} \cdot \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx$$

a obecné řešení rovnice (LDR) je

$$y = y_p + u \Rightarrow y(x) = e^{\int a(x) dx} \cdot \left(c + \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx \right), c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 10

Určete obecné řešení rovnice $y' = 2xy + 2x^3$.

Homogenní rovnice $u' = 2xu$ má řešení $u(x) = C e^{\int 2x dx} = C \cdot e^{x^2}$.

Najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice variací konstanty, tj. do původní rovnice dosadíme $y_p(x) = C(x) \cdot e^{x^2}$. Dostaneme

$$C'(x) e^{x^2} + C(x) 2x e^{x^2} = 2x C(x) e^{x^2} + 2x^3 \Rightarrow C'(x) = 2x^3 e^{-x^2}.$$

Potom

$$\begin{aligned} C(x) &= \int 2x^3 e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \int t e^{-t} dt \\ &= \left| \begin{array}{l} u = t \\ v' = e^{-t} \\ u' = 1 \\ v = -e^{-t} \end{array} \right| = -t e^{-t} + \int e^{-t} dt \\ &= -e^{-t}(t+1) = -e^{-x^2}(x^2+1), \end{aligned}$$

$$y_p(x) = -e^{-x^2}(x^2+1)e^{x^2} = -(x^2+1) \Rightarrow y(x) = -(x^2+1) + C e^{x^2}.$$

2. Integrační faktor

Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) = e^{-\int a(x) dx}.$$

Touto funkcí celou rovnici vynásobíme a následně upravujeme.

Postup

$$\begin{aligned}
 y' - a(x)y &= b(x) \\
 [y' - a(x)y] \cdot \mu(x) &= b(x) \cdot \mu(x) \\
 \underbrace{y' \cdot e^{-\int a(x) dx} - y a(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}}_{(y \cdot e^{-\int a(x) dx})'} &= b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} \\
 (y \cdot e^{-\int a(x) dx})' &= b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} \\
 y \cdot e^{-\int a(x) dx} &= \int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx + C \\
 y &= e^{\int a(x) dx} \left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx} dx + C \right], \quad C \in \mathbb{R} \quad (2)
 \end{aligned}$$

→ Vyřešte tímto způsobem příklad 10.

Dokázali jsme větu

Věta 6 (Řešitelnost lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu)

Jsou-li koeficienty $a(x)$ a $b(x)$ spojité funkce na intervalu (a, b) , potom má počáteční úloha

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je na celém intervalu (a, b) definováno vztahem (2). (Konstantu C se určíme z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.)

Poznámka

Na rozdíl od nelineárních rovnic, které mají zaručenu existenci a jednoznačnost řešení pouze na okolí bodu x_0 jsou lineární diferenciální rovnice jednoznačně řešitelné na celém intervalu spojitosti pravé strany rovnice.

Příklad 11 (Radioaktivní rozpad)

Rádium-226 má poločas rozpadu 1620 let. Najděte čas potřebný k tomu, aby se dané množství Ra-226 zmenšilo na $\frac{3}{4}$ původního množství.

Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu.

Označme-li jako $Q(t)$ množství [většinou gramů] radioaktivního materiálu v čase t [let], potom musí platit rovnice

$$Q'(t) = -r Q(t), \quad \text{kde } r > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že materiálu zřejmě ubývá, tj. $Q' < 0$.

Označme Q_0 původní množství Ra-226, tj. $Q_0 = Q(0)$, potom pro hledanou funkci $Q(t)$ splňující (homogenní) lineární diferenciální rovnici $Q' = -r Q$ máme

$$Q(t) = C e^{-rt} \Rightarrow Q(0) = C e^0 = C \Rightarrow C = Q_0 \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-rt}.$$

Nyní určíme konstantu r [let⁻¹] z informace o poločasu rozpadu:

$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{-r \cdot 1620} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -r \cdot 1620 \Rightarrow r = \frac{-\ln \frac{1}{2}}{1620} = \frac{\ln 2}{1620} \approx 0.000428.$$

A najdeme hodnotu t [let], pro kterou je $Q(t) = \frac{3}{4} Q_0$:

$$\frac{3}{4} Q_0 = Q_0 e^{-rt} \Rightarrow \ln \frac{3}{4} = -rt \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{3}{4}}{-r} = -\frac{1620 \ln \frac{3}{4}}{\ln 2} \approx 672.4.$$



Příklad 12 (Růst, učení,...)

Jistý druh roste tak, že má jistou maximální délku a rychlost růstu je přímo úměrná délce, kterou ještě mají dorůst. Sestavte rovnici modelující tuto situaci.

Označíme-li délku v čase t jako funkci $\ell(t)$ a maximální délku L , pak příslušná rovnice je

$$\ell'(t) = k[L - \ell(t)],$$

kde konstantu úměrnosti k by bylo nutné určit experimentálně (měření a výpočet pro konkrétní druh/situaci).

Příklad 13 (Výměna tepla mezi tělesem a okolím)

Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na $26.6\text{ }^{\circ}\text{C}$. O 3 hodiny později je její teplota $21.1\text{ }^{\circ}\text{C}$, přičemž teplota okolí je $18.3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Určete čas úmrtí za předpokladu, že teplota lidského těla je $37\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (Newtonův teplotní zákon).

Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [$^{\circ}\text{C}$] a teplotu okolního prostředí jako T [$^{\circ}\text{C}$]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k[\Theta(t) - T], \quad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívát. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme

$$T = 18.3, \Theta(0) = 26.6 \text{ (teplota v čase nalezení mrtvoly)}, \Theta(3) = 21.1,$$

přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k(\Theta - T) \Rightarrow \Theta' = -k\Theta + kT.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru $\mu(t) = e^{kt}$, potom

$$\Theta = T + C e^{-kt} = 18.3 + C e^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Konstanty C a k určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny], tj.

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + C e^0 = 18.3 + C \Rightarrow C = 8.3 \Rightarrow \Theta = 18.3 + 8.3 e^{-kt},$$

a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3 e^{-3k} \Rightarrow e^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337$$

$$\Rightarrow -3k = \ln 0.337 \Rightarrow k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362.$$

Tedy hledané řešení je funkce

$$\Theta(t) = 18.3 + 8.3 e^{-0.362t}.$$

Najdeme čas úmrtí, tj. určíme čas t , pro který je $\Theta(t) = 37\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tedy

$$18.3 + 8.3 e^{-0.362t} = 37 \Rightarrow e^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253$$

$$\Rightarrow -0.362t = \ln 2.253 \Rightarrow t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24.$$

Mrtvola byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti. ■

Příklad 14 (Míchání dvou látek)

Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí. Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \rightarrow \infty$.

Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase t [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{l} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Sůl do nádrže *přitéká* rychlostí

$$c \cdot v = 50 \text{ [g/l]} \cdot 20 \text{ [l/min]} = 1000 \text{ [g/min]}.$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \cdot v = \frac{Q(t)}{1000} \text{ [g/l]} \cdot 20 \text{ [l/min]} = \frac{Q(t)}{50} \text{ [g/min]}.$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L} \cdot v \quad \Rightarrow \quad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku

$$Q(t_0) = Q_0 \quad \Rightarrow \quad Q(0) = 0. \quad (3)$$

Uvedenou rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru

$$\mu(t) = e^{\int \frac{v}{L} dt} = e^{\frac{v}{L} t} \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{0.02 t}$$

a potom máme (obecně)

$$\begin{aligned} Q' + \frac{v}{L} Q &= c v \\ Q' e^{\frac{v}{L} t} + \frac{v}{L} e^{\frac{v}{L} t} Q &= c v e^{\frac{v}{L} t} \\ (Q e^{\frac{v}{L} t})' &= c v e^{\frac{v}{L} t} \\ Q e^{\frac{v}{L} t} &= \int c v e^{\frac{v}{L} t} dt = c v \frac{e^{\frac{v}{L} t}}{\frac{v}{L}} + C \\ Q &= c L + C e^{-\frac{v}{L} t}, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

a pro náš konkrétní příklad

$$\begin{aligned} Q' + 0.02 Q &= 1000, \\ Q' e^{0.02 t} + 0.02 e^{0.02 t} Q &= 1000 e^{0.02 t}, \\ (Q e^{0.02 t})' &= 1000 e^{0.02 t}, \\ Q e^{0.02 t} &= \int 1000 e^{0.02 t} dt = 1000 \frac{e^{0.02 t}}{0.02} + C, \\ Q &= 50000 + C e^{-0.02 t}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A protože je počáteční množství známo v (3), pro integrační konstantu C platí

$$Q_0 = Q(t_0) = cL + C e^{-\frac{v}{L} t_0} \Rightarrow 0 = Q(0) = 50000 + C e^0,$$

$$C = (Q_0 - cL) e^{\frac{v}{L} t_0} \Rightarrow C = -50000,$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$Q = cL + (Q_0 - cL) e^{\frac{v}{L} t_0} e^{-\frac{v}{L} t} \Rightarrow Q = 50000 - 50000 e^{-0.02 t},$$

$$Q = cL + (Q_0 - cL) e^{-\frac{v}{L} (t-t_0)} \Rightarrow Q = 50000 (1 - e^{-0.02 t}).$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > cL$ nebo $Q_0 < cL$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = cL$ zůstává stále stejné.

Pro $t \rightarrow \infty$ je potom

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ cL + (Q_0 - cL) \underbrace{e^{-\frac{v}{L} (t-t_0)}}_{\rightarrow 0} \right\}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = cL \text{ [g]},$$

tedy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 50000 (1 - \underbrace{e^{-0.02 t}}_{\rightarrow 0})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 50000 \text{ [g]}.$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{cL}{L} = c \text{ [g/l]}, \text{ neboli } Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \text{ [g/l]},$$

což je přesně koncentrace přitékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství Q_0 , tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku). ■

Příklad 15 (Míchání dvou látek II)

Jak se změní model v Příkladu 14, pokud bude roztok po řádném promíchání s vodou v nádrži vytékat rychlostí pouze $w = 19$ [litrů/min]? Předpokládáme-li, že nádrž má celkový objem 1600 litrů, jaká bude koncentrace roztoku v nádrži v okamžiku jejího naplnění?

Všimněte si, že se nyní **objem** roztoku **v nádrži mění** (roste) a to rychlostí $v - w = 1$ [litr/min]. To znamená, že nyní sůl z nádrže **vytéká** rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L + (v - w)(t - t_0)} \cdot w = \frac{Q(t)}{1000 + t} \text{ [g/l]} \cdot 19 \text{ [l/min]} = \frac{19 Q(t)}{1000 + t} \text{ [g/min]}.$$

Výsledná diferenciální rovnice má tedy tvar

$$Q'(t) = c \cdot v - \frac{Q(t)}{L + (v - w)(t - t_0)} \cdot w \Rightarrow Q' = 1000 - \frac{19 Q(t)}{1000 + t},$$

což je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu, přičemž řešení $Q(t)$ splňuje počáteční podmínku (3).

Příslušný integrační faktor je

$$\mu(t) = e^{\int \frac{19}{1000+t} dt} = e^{19 \ln(1000+t)} = e^{\ln(1000+t)^{19}} = (1000 + t)^{19}.$$

Tedy platí

$$Q' + \frac{19 Q(t)}{1000 + t} = 1000$$

$$Q'(1000 + t)^{19} + 19 Q(t) (1000 + t)^{18} = 1000 (1000 + t)^{19}$$

$$[Q(1000 + t)^{19}]' = 1000 (1000 + t)^{19}$$

$$Q(1000 + t)^{19} = 1000 \frac{(1000 + t)^{20}}{20} + C$$

$$Q = \frac{50 (1000 + t)^{20} + C}{(1000 + t)^{19}} = 50 (1000 + t) + \frac{C}{(1000 + t)^{19}}.$$

Z počáteční podmínky (3) pak určíme hodnotu C , tj.

$$0 = Q(0) = 50 \cdot 1000 + \frac{C}{1000^{19}} \Rightarrow C = -50000 \cdot 1000^{19} = -5 \cdot 10^{61}.$$

Tedy výsledné partikulární řešení je tvaru

$$Q = 50(1000 + t) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1000 + t)^{19}}.$$

Protože v nádrži bylo původně 1000 litrů vody a nádrž se nyní naplňuje rychlostí 1 litr/min, bude nádrž naplněna za 600 minut (tj. za 10 hodin). Tedy v okamžiku $t = 600$ bude v nádrži

$$Q(600) = 50(1600) - \frac{5 \cdot 10^{61}}{(1600)^{19}} \approx 79993.4 \text{ [g] soli,}$$

tj. koncentrace soli bude

$$\frac{Q(600)}{1600} \approx \frac{79993.4}{1600} \approx 49.996 \text{ [g/l],}$$

tedy tato koncentrace bude téměř stejná jako u přitékajícího roztoku. ■

Bernoulliho rovnice má tvar

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Pro $r = 0$ jde o nehomogenní a pro $r = 1$ o homogenní LDR.

Postup řešení

- Předpokládejme, že $y \neq 0$.
- Obě strany rovnice vydělíme y^r a dostaneme

$$\frac{y'}{y^r} = a(x)y^{1-r} + b(x).$$

- Substitucí $y^{1-r} = z$ zavedeme novou závisle proměnnou, kde

$$z' = (1-r)y^{-r}y', \quad \frac{y'}{y^r} = \frac{z'}{1-r}$$

a rovnice přejde na tvar

$$z' = (1-r)a(x)z + (1-r)b(x),$$

což už je nehomogenní LDR pro funkci $z(x)$.

- Je-li $r > 0$ je $y = 0$ také řešení Bernoulliho rovnice.

Příklad 16

K rovnici $y' = -2y + y^2 e^x$ určete obecné řešení a řešení procházející bodem $[0, 1]$.

$$y' = -2y + y^2 e^x \quad / : y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = \frac{-2}{y} + e^x$$

Substituce $z = \frac{1}{y}$, $z' = \frac{-y'}{y^2}$ vede na LDR $z' = 2z - e^x$ s homogenní rovnicí $u' = 2u$, tedy $u = C e^{\int 2 dx} = C e^{2x}$.

Partikulární řešení je potom $z_p(x) = C(x) e^{2x}$

$$C'(x) = -e^{-x} \Rightarrow C(x) = e^{-x} \Rightarrow z_p(x) = e^{-x} e^{2x} = e^x.$$

Tedy $z = e^x + C e^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{e^x + C e^{2x}}, y = 0$.

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{e^0 + C e^0} \Rightarrow 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0, \text{ tedy } y(x) = e^{-x}. \quad \blacksquare$$

Uvažujeme rovnici

$$F(x, y, y') = 0$$

a budeme se zabývat případem, kdy se z obecného předpisu nepodaří vyjádřit y' , ale lze vyjádřit y jako funkci x, y' .

Řešení najdeme pomocí zavedení parametru $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

Clairautova rovnice má tvar

$$y = x \cdot y' + f(y'),$$

řeší se metodou parametru a výsledkem je řešení v parametrickém tvaru

$$x = x(p), \quad y = y(p).$$

Postup řešení

- V rovnici položíme $y' = p$ (tedy p je opět funkce proměnné x).
- Dostaneme $y = xp + f(p)$.
- Derivujeme podle x a za y' dosazujeme p

$$y' = p + xp' + f'(p)p' \Rightarrow p = p + p'[x + f'(p)] \Rightarrow p'[x + f'(p)] = 0.$$

- Odtud máme dvě možnosti

(i) $x = -f'(p)$, dosadíme do první rovnice, kde se vyskytlo p

$$y = -pf'(p) + f(p) \quad \text{singulární řešení Clairautovy rovnice.}$$

(ii) $p' = 0 \Rightarrow p = C$, opět dosadíme do rovnice

$$y = Cx + f(C) \quad \text{obecné řešení Clairautovy rovnice,}$$

které tvoří jednoparametrický systém přímk.

Příklad 17

$$y = xy' + y'^2$$

$$y = xp + p^2 \quad / \quad \frac{d}{dx}$$

$$y' = p + xp' + 2pp'$$

$$p = p + xp' + 2pp'$$

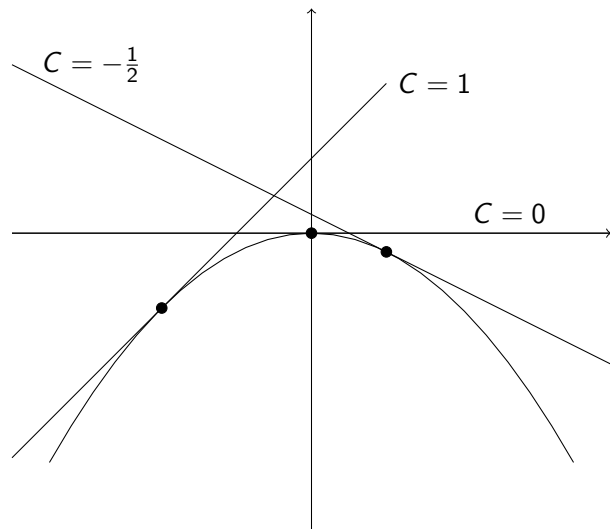
$$0 = p'(x + 2p)$$

Tedy

(i) $x = -2p \Rightarrow y = -2p \cdot p + p^2 = -p^2 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4}$ (singulární řešení)

(ii) $p' = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = Cx + C^2$ (obecné řešení)

Každá z přímek obecného řešení je tečnou křivky singulárního řešení.



Věta 7

Každá z přímek obecného řešení $y = Cx + f(C)$ je tečnou křivky singulárního řešení $x = -f'(p)$, $y = -pf'(p) + f(p)$. Naopak každým bodem křivky singulárního řešení prochází právě jedna přímka obecného řešení, která je tečnou k této křivce.

Důkaz.

Nechť $[x_0, y_0] = [-f'(p_0), -p_0f'(p_0) + f(p_0)]$ je bod na křivce singulárního řešení odpovídající hodnotě parametru $p = p_0$. Uvažujme přímku $y = p_0x + f(p_0)$, tj. přímku obecného řešení s $C = p_0$.

Položme na přímce $x = -f'(p_0) \Rightarrow y = -p_0f'(p_0) + f(p_0) = y_0$

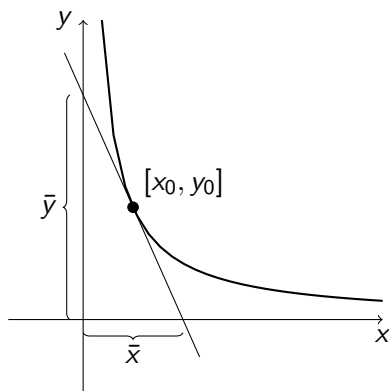
$$\Rightarrow y_0 = p_0x + f(p_0) \text{ prochází bodem } [x_0, y_0].$$

Směrnice tečny parametricky dané křivky je $\frac{y'(p)}{x'(p)} = \frac{-f'(p) - pf''(p) + f'(p)}{-f''(p)} = p$

a směrnice přímky $y = px + f(p)$ je také rovna p . Odtud plyne, že přímka $y = p_0x + f(p_0)$ je tečnou v bodě $[-f'(p_0), -p_0f'(p_0) + f(p_0)]$. \square

Příklad 18

Určete rovnici křivky ležící v prvním kvadrantu s vlastností, že trojúhelník tvořený osami a tečnou v libovolném bodě křivky má konstantní obsah $p = 1/2$.



$$t : y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Máme $\bar{x} : y = 0 \Rightarrow -y_0 = y'(x_0)(\bar{x} - x_0)$

$$\Rightarrow \bar{x} = -\frac{y_0}{y'(x_0)} + x_0 = \frac{-y_0 + x_0y'(x_0)}{y'(x_0)},$$

$\bar{y} : x = 0 \Rightarrow \bar{y} = y_0 - x_0y'(x_0)$.

Potom

$$P = \frac{1}{2}\bar{x}\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{-y_0 + x_0y'(x_0)}{y'(x_0)} (y_0 - x_0y'(x_0)) = \frac{-(y_0 - x_0y'(x_0))^2}{2y'(x_0)} = \frac{1}{2}.$$

Tedy diferenciální rovnice je

$$-(y - xy')^2 = y' \Rightarrow y - xy' = \pm\sqrt{-y'} \Rightarrow y = xy' \pm \sqrt{-y'}$$

(+ je pro první kvadrant a - pro třetí) \Rightarrow Clairautova rovnice

$$y = xy' + \sqrt{-y'}$$

- obecný systém přímek $y = Cx + \sqrt{-C}$ (pro $C \leq 0$)
- singulární řešení $y = \frac{1}{4x}$ (hyperbola)

Lagrangeova rovnice má tvar

$$y = x \cdot g(y') + f(y'), \quad g(y') \neq y', \quad f, g \in C^1(a, b)$$

V principu lze Clairautovu rovnici chápat jako speciální případ Lagrangeovy rovnice, ale řešení vypadá jinak \rightarrow řeší se zvlášť.

Řešíme metodou parametru, položíme $y' = p$ a

$$y = xg(p) + f(p)$$

$$y' = g(p) + xg'(p)p' + f'(p)p'$$

$$p = g(p) + p'(xg'(p) + f'(p))$$

$$p - g(p) = \frac{dp}{dx} [xg'(p) + f'(p)].$$

Z této rovnice chceme vypočítat x jako funkci proměnné p (při $p \neq g(p)$)

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p - g(p)} (xg'(p) + f'(p)) = \frac{g'(p)}{p - g(p)} \cdot x + \frac{f'(p)}{p - g(p)}.$$

Tím máme nehomogenní LDR pro funkci $x = x(p)$.

Nechť $x = x(p, C)$ je řešení této rovnice. Pak do první rovnice, kde se vyskytlo p , dosadíme $x = x(p, C)$. Tak vypočítáme

$$y = x(p, C) \cdot g(p) + f(p)$$

a dostaneme obecné řešení Lagrangeovy rovnice v parametrickém tvaru.

Jestliže hledáme singulární řešení použijeme podmínku $p \neq g(p)$.

Nyní tedy necht' $p_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $g(p_0) = p_0$, a uvažujeme přímku danou rovnicí $y = xg(p_0) + f(p_0)$, do první rovnice, kde se vyskytlo p , dosadíme p_0 a dostaneme singulární řešení Lagrangeovy rovnice.

Ověříme, zda je to řešení

$$L = xg(p_0) + f(p_0), \quad y' = \frac{dy}{dx} = g(p_0)$$

$$P = xg(\underbrace{g(p_0)}_{=p_0}) + f(\underbrace{g(p_0)}_{=p_0}) = xg(p_0) + f(p_0)$$

$$L = P.$$

Příklad 19

$$y = 2xy' - y'^2$$

Máme rovnici s $g(y') = 2y'$, $f(y') = -y'^2$. Zavedeme $y' = p$.

$$y = 2xp - p^2 \quad / \quad \frac{d}{dx}$$

$$p = 2p + 2xp' - 2pp'$$

$$-p = \frac{dp}{dx}(2x - 2p) \quad (p \neq 0)$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + 2$$

A řešíme tuto nehomogenní rovnici.

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2u}{p}$$

$$u = C e^{-\int \frac{2}{p} dp} = C e^{-2 \ln p} = \frac{C}{p^2}$$

$$x_0 = \frac{C(p)}{p^2} \Rightarrow \frac{C'(p)}{p^2} - \frac{2C(p)}{p^3} = -\frac{2}{p} \cdot \frac{C(p)}{p^2} + 2$$

$$C'(p) = 2p^2 \Rightarrow C(p) = \frac{2}{3}p^3$$

$$x_0(p) = \frac{2p}{3}$$

Tedy obecné řešení je

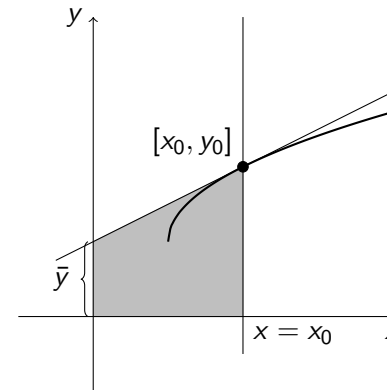
$$x(p) = \frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}$$

$$y(p) = 2p \left(\frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2} \right) - p^2 = \frac{4}{3}p^2 - p^2 + \frac{C}{p^2} = \frac{1}{3}p^2 + \frac{C}{p^2}$$

a singulární řešení je $p = 0 \Rightarrow y = 0$ (přímka singulárního řešení). ■

Příklad 20

Určete rovnici křivky, pro níž plocha lichoběžníku tvořeného tečnou v libovolném bodě $[x_0, y_0]$ křivky a osami x, y a přímkou $x = x_0 > 0$, je rovna $1/2$ kvadrátu x -ové souřadnice bodu, v němž byla tečna sestrojena.



$$t : y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$x = 0 \Rightarrow \bar{y} = y_0 - x_0 y'(x_0)$$

$$P = (y_0 + \bar{y}) \frac{x_0}{2} = \frac{1}{2} x_0^2$$

$$\Rightarrow (y_0 + y_0 - x_0 y'(x_0)) \frac{x_0}{2} = \frac{1}{2} x_0^2$$

Chceme, aby to platilo pro libovolný bod křivky.

$$2y - xy' = x$$

$$y' = \frac{2y}{x} - 1$$

$$u' = \frac{2u}{x} \Rightarrow u = Cx^2$$

$$y_0 = C(x)x^2 \Rightarrow C'(x)x^2 + 2C(x)x = \frac{2}{x}C(x)x^2 - 1$$

$$C'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = x + Cx^2$$

Pokud by vyšlo singulární řešení, museli bychom ověřit, jestli vyhovuje podmínkám zadání. ■

Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu je tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (4)$$

kde pro $f(x) = 0$ je rovnice homogenní, pro $f(x) \neq 0$ je rovnice nehomogenní.

Poznámka

- Rovnice $y'' + y = 0$ má řešení $\sin x, \cos x$ a jejich lineární kombinace

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

- Rovnice $y'' = 0$ má řešení $1, x$ a jejich lineární kombinace

$$y = c_1 + c_2 x.$$

Věta 8

Jsou-li y_1, y_2 řešení homogenní rovnice (4), pak pro každé $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) platí, že

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

je řešením homogenní rovnice (4).

Důkaz.

Přímo (derivace lineární kombinace).

Věta 9

Jsou-li y_1, y_2 řešení nehomogenní rovnice (4), pak $y = y_1 - y_2$ je řešením příslušné homogenní rovnice.

Důkaz.

Přímo.

Poznámka

Předchozí věta říká, že řešení nehomogenní rovnice (4) je $y = y_p + u$, kde y_p je jedno partikulární řešení nehomogenní rovnice a u je obecné řešení homogenní rovnice.

Poznámka

Řešení homogenní DR n -tého řádu tvoří vektorový prostor.

Budeme se zabývat rovnicemi typu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = \begin{cases} 0, \\ f(x), \end{cases}$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (popř. \mathbb{C}).

Poznámka

Pokud není koeficient $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ u $y^{(n)}$ roven jedné, rovnici tímto koeficientem vydělíme. Tím se na pravé straně objeví funkce $\frac{f(x)}{a_n}$.

U homogenní rovnice ($f(x) \equiv 0$) hledáme řešení ve tvaru $y = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (inspirace prvním řádem $y' + ay = 0 \Rightarrow y = e^{-ax}$).

Když $y = e^{\lambda x}$ dosadíme do rovnice, získáme

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad / : e^{\lambda x}$$

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

charakteristický polynom rovnice n-tého řádu.

Věta 10

Množina řešení rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

tvoří vektorový prostor (nad \mathbb{R} i \mathbb{C}), jehož dimenze je řád rovnice n .

Důkaz.

Viz dále.

Věta 11

Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice, pak funkce

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

tvoří bázi prostoru řešení, tj. obecné řešení je tvaru

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Důkaz.

Dosazení (a linearita).

Věta 12

Jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ dvojice komplexně sdružených kořenů charakteristického polynomu, pak

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

jsou řešením příslušné rovnice.

Důkaz.

Víme, že $\bar{y} = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $\tilde{y} = e^{(\alpha-\beta i)x}$ jsou řešení. Jejich lineární kombinace jsou také řešeními, tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\bar{y} + \tilde{y}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\alpha x + \beta i x} + e^{\alpha x - \beta i x} \right) \\ &= e^{\alpha x} \left(\frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} \right) \\ &= e^{\alpha x} \cos \beta x, \end{aligned}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili Eulerovu identitu, Moivreovu větu a parity funkcí sinus a kosinus. Tvzení pro $y_2 = \frac{\bar{y} - \tilde{y}}{2i}$ se dokáže analogicky. \square

Věta 13

Je-li $\lambda = \lambda_0$ m -násobným kořenem charakteristického polynomu ($m \leq n$), pak m -tice funkcí

$$y_1 = e^{\lambda_0 x}, y_2 = x e^{\lambda_0 x}, \dots, y_m = x^{m-1} e^{\lambda_0 x}$$

je řešením dané rovnice.

Poznámka

- Číslo je k -násobný kořen polynomu právě tehdy, když je kořenem polynomu a jeho derivací až do řádu $k - 1$ včetně (a není kořenem derivace řádu k).
- Vzorec pro n -tou derivaci součinu $(uv)^{(n)} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} u^{(i)} v^{(n-i)}$.

Důkaz.

Nechť $m = 2$, tj. λ_0 je dvojnásobným kořenem. (Pro $m > 2$ podobně.)

$$\begin{aligned} y &= x e^{\lambda_0 x}, \\ y' &= e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 x e^{\lambda_0 x} = (\lambda_0 x + 1) e^{\lambda_0 x}, \\ y'' &= \lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x} = e^{\lambda_0 x} (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x), \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= e^{\lambda_0 x} (n\lambda_0^{n-1} + \lambda_0^n x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_0 x} [n\lambda_0^{n-1} + \lambda_0^n x] + a_{n-1} e^{\lambda_0 x} [(n-1)\lambda_0^{n-2} + \lambda_0^{n-1} x] + \dots \\ \dots + a_1 e^{\lambda_0 x} [1 + \lambda_0 x] + a_0 x e^{\lambda_0 x} = \\ = x e^{\lambda_0 x} [\lambda_0^n + a_{n-1} \lambda_0^{n-1} + \dots + a_0] \\ + e^{\lambda_0 x} [n\lambda_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1} \lambda_0^{n-2} + \dots + a_1] = 0. \end{aligned}$$

Tedy jedná se o řešení. \square

Věta 14

Jsou-li $\alpha \pm \beta i$ dvojice m -násobných kořenů charakteristického polynomu, pak $2m$ funkcí

$$\begin{aligned} y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots \\ \dots, y_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \tilde{y}_m = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

je také řešením rovnice.

Důkaz.

Kombinace předchozího. Pro $k \in \{0, \dots, m-1\}$ máme řešení $x^k e^{(\alpha+\beta i)x}$, $x^k e^{(\alpha-\beta i)x}$, která sečteme a vydělíme dvěma, resp. odečteme a vydělíme dvěma i , čímž dostaneme funkce $x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$, resp. $x^k e^{\alpha x} \sin \beta x$. \square

Poznámka

Vždy (tj. bez ohledu na situaci s kořeny charakteristického polynomu) se nám podaří najít n -tici navzájem různých řešení homogenní rovnice n -tého řádu.

Definice 5

Determinant

$$W(f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazýváme wronskián (Wronského determinant, determinant Wronského matice).

Věta 15

Uvažujme n -tici funkcí f_1, \dots, f_n majících na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ derivace nejméně do řádu $(n-1)$. Tyto funkce jsou lineárně nezávislé, jestliže jimi určený wronskián je různý od nuly pro všechna $x \in I$.

Důkaz.

Pro libovolné $x \in I$ je

$$\begin{aligned} \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) &= 0 \\ \alpha_1 f_1'(x) + \cdots + \alpha_n f_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_1 f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

system lineárních rovnic v proměnných $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tj.

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a tato soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když je matice soustavy regulární, tj. její determinant je různý od nuly. \square

Věta 16

Uvažujme n -tici řešení y_1, \dots, y_n homogenní rovnice n -tého řádu (sestrojenou podle výše uvedených pravidel). Tato n -tice je lineárně nezávislá a tvoří bázi prostoru řešení příslušné rovnice, tj. obecné řešení dané rovnice je tvaru

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

Důkaz.

Předpokládejme, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ je n -tice navzájem různých kořenů charakteristického polynomu, tj. $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}$ je n -tice řešení diferenciální rovnice. Pak $W(y_1, \dots, y_n) =$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_n x}}_{\neq 0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vandermondův determinant

$$= e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_n x} \cdot \underbrace{\prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} \neq 0.$$

Tedy funkce y_1, \dots, y_n jsou lineárně nezávislé.

Podobným způsobem dokážeme nezávislost v ostatních případech. \square

Definice 6

Lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice nazýváme **fundamentální systém** řešení rovnice.

Příklad 21

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow \bar{y}_1 = e^{ix}, \bar{y}_2 = e^{-ix} \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{(\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x$$

$$y_2 = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Příklad 22

$$y'' = 0$$

$$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1, y_2(x) = x \cdot e^{0 \cdot x} = x$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x.$$

Příklad 23

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$$

$$\Rightarrow y_1(x) = e^x, y_2(x) = \cos x, y_3 = \sin x$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Věta 17

Nechť $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathbb{R}$ jsou libovolná, pak existuje právě jedno řešení rovnice n -tého řádu splňující tzv. počáteční podmínku $y(x_0) = A_0, y'(x_0) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1}$ pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

Nechť y_1, \dots, y_n je fundamentální systém řešení, pak každé řešení je tvaru $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$. Dosadíme x_0

$$A_0 = c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0)$$

$$A_1 = c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0)$$

$$\vdots$$

$$A_{n-1} = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0).$$

Máme soustavu rovnic s neznámými c_i jejíž determinant je wronskián, který je nenulový, tedy ať jsou pravé strany (A_1, \dots, A_n) jakékoliv, má soustava právě jedno řešení (např. důsledek Frobeniovovy věty). \square

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), \quad (5)$$

$$y(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\text{part. řeš.}} + \underbrace{c_1y_1(x) + \dots + c_ny_n(x)}_{\text{obecné řeš. hom. rovnice}}$$

K nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice použijeme

metodu variace konstant.

Řešení tedy hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x)$$

a potřebujeme určit neznámé funkce $C_i(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Funkce $C_i(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, najdeme jako řešení systému

$$C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0$$

$$C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Odtud (při označení Wronského matice \widetilde{W})

$$\widetilde{W}(y_1(x), \dots, y_n(x)) \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix},$$

tedy $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ jsou jednoznačně určeny a integrováním získáme jednotlivé funkce $C_i(x) = \int C_i'(x) dx$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Poznámka

Předchozí postup dává plné řešení nehomogenní rovnice. Aditivní integrační konstanty při určování funkcí $C_i(x)$ pak „vytvoří“ obecné řešení homogenní rovnice, zatímco primitivní funkce s volbou nulových aditivních konstant vytvoří příslušné partikulární řešení.

Věta 18

Je-li funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ v rovnici (5) spojitá, pak má počáteční problém daný rovnicí (5) a podmínkami

$$y(x_0) = A_0, y'(x_0) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1},$$

kde $x_0 \in I$ a $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathbb{R}$, jediné (úplné) řešení, které je definované na celém I .

Systém rovnic v metodě variace konstant

Uvažujme rovnici druhého řádu $y'' + ay' + by = f(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$, a necht' $y_h = cy_1(x) + dy_2(x)$, $c, d \in \mathbb{R}$ je řešením příslušné homogenní rovnice. Hledejme řešení nehomogenní rovnice ve tvaru

$$y = c(x)y_1(x) + d(x)y_2(x).$$

Potom $y' = c'y_1 + cy_1' + d'y_2 + dy_2'$ a položíme $c'y_1 + d'y_2 = 0$. Pak je $y' = cy_1' + dy_2'$ a tedy $y'' = c'y_1' + cy_1'' + d'y_2' + dy_2''$.

Dosadíme do rovnice

$$f(x) = y'' + ay' + by = c'y_1' + cy_1'' + d'y_2' + dy_2'' + a(cy_1' + dy_2') + b(cy_1 + dy_2) = c(x) \underbrace{[y_1'' + ay_1' + by_1]}_{=0} + d(x) \underbrace{[y_2'' + ay_2' + by_2]}_{=0} + [c'y_1' + d'y_2'].$$

Tím jsme dostali příslušný systém rovnic. Pro rovnice vyššího řádu podobně (rovnice s nulou vpravo „pokládáme“, poslední rovnice je vynucená, aby systém fungoval).

Příklad 24

Určete obecné řešení rovnice $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

$$y(x) = y_p(x) + c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad y_p(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo dává

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}, \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}$$

=1

tedy

$$C_1'(x) = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2'(x) = \sin x.$$

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int \frac{-\sin^2 x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{-t^2}{1-t^2} dt \\ &= \int \frac{-t^2 + 1 - 1}{1-t^2} dt = \int \frac{1-t^2}{1-t^2} dt - \int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt \\ &= t - \left(\int \frac{1/2}{1-t} dt + \int \frac{1/2}{1+t} dt \right) = t - \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \right) \\ &= t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \hat{c}_1 \end{aligned}$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + \hat{c}_2$$

$$y_p(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \right) \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \cdot \cos x$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| \cdot \cos x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Nehomogenní rovnice se speciální pravou stranou

$$f(x) = e^{\alpha x} [P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x],$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy, lze řešit metodou neurčitých koeficientů.

Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^r \cdot e^{\alpha x} [A(x) \cos \beta x + B(x) \sin \beta x],$$

kde A, B jsou polynomy (s neurčitými koeficienty) stupně rovnému $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ a r je násobnost kořene $\alpha + \beta i$ charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Neurčité koeficienty najdeme dosazením do původní nehomogenní rovnice.

Příklad 25

Určete obecné řešení rovnice $y'' + y = x \cdot \sin x$.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad P(x) = 0, \quad Q(x) = x, \quad \operatorname{st} Q = 1,$$

$\alpha + \beta i = i$ a charakteristický polynom je $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow r = 1$

Partikulární řešení proto hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^1 \cdot [(ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x] = (ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x.$$

Spočítáme derivace, které se vyskytují v zadání

$$y_p = (ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x,$$

$$y_p' = (2ax + b) \cos x - (ax^2 + bx) \sin x + (2cx + d) \sin x + (cx^2 + dx) \cos x,$$

$$y_p'' = 2a \cos x - 2(2ax + b) \sin x - (ax^2 + bx) \cos x$$

$$+ 2c \sin x + 2(2cx + d) \cos x - (cx^2 + dx) \sin x.$$

Dosadíme do rovnice

$$y_p'' + y_p = 2a \cos x - 2(2ax + b) \sin x - (ax^2 + bx) \cos x + 2c \sin x + 2(2cx + d) \cos x - (cx^2 + dx) \sin x + (ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x = x \sin x.$$

Odtud

$$\sin x : -2b + 2c = 0$$

$$\cos x : 2a + 2d = 0$$

$$x \sin x : -4a = 1$$

$$x \cos x : 4c = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{4}, \text{ a tedy}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 \cos x + \frac{1}{4}x \sin x$$

$$y = -\frac{x^2}{4} \cos x + \frac{x}{4} \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Poznámka

Je-li pravá strana nehomogenní rovnice ve tvaru lineární kombinace $f_1(x) + f_2(x)$, pak lze určit partikulární řešení samostatně k f_1 a k f_2 , dostaneme \bar{y} a \check{y} , pak $y_p = \bar{y} + \check{y}$.

To může usnadnit (zpřehlednit) výpočet zejména jde-li o součet dvou speciálních pravých stran, nebo o součet funkce a speciální pravé strany.

Eulerova rovnice má tvar

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = \begin{cases} 0 & \text{homogenní,} \\ f(x) & \text{nehomogenní,} \end{cases}$$

kde $a_i \in \mathbb{R}, i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Homogenní Eulerovu rovnici lze převést na rovnici s konstantními koeficienty. Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, tedy máme

$$\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1)x^{\lambda-n} + \frac{a_{n-1}}{x} \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+2)x^{\lambda-n+1} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \lambda x^{\lambda-1} + \frac{a_0}{x^n} x^\lambda = 0$$

a po vytknutí $x^{\lambda-n}$ dostaneme tzv. *indexovou rovnici* $P(\lambda) = 0$

$$\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1) + a_{n-1} \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+2) + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Dále postupujeme podle kořenů indexové rovnice.

- 1 Má-li navzájem různé reálné kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak n -tice řešení, která tvoří bázi prostoru řešení (fundamentální systém) je

$$y_1(x) = x^{\lambda_1}, \dots, y_n(x) = x^{\lambda_n}.$$

- ② Má-li m -násobný kořen λ_0 ($m \leq n$), pak lineárně nezávislá řešení jsou

$$y_1(x) = x^{\lambda_0}, y_2(x) = x^{\lambda_0} \ln x, \dots, y_m(x) = x^{\lambda_0} (\ln x)^{m-1}$$

(Ize ověřit dosazením do rovnice a využitím násobnosti kořene λ_0).

- ③ Má-li dvojici komplexně sdružených kořenů $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$), pak postupujeme podobně jako u LDR vyššího řádu, tj.

$$\begin{aligned} x^{\alpha \pm \beta i} &= (e^{\ln x})^{\alpha \pm \beta i} = e^{\alpha \ln x \pm i \beta \ln x} = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{\pm i \beta \ln x} \\ &= (e^{\ln x})^{\alpha} \cdot [\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)] \\ &= x^{\alpha} \cdot [\cos(\beta \ln x) \pm i \sin(\beta \ln x)], \end{aligned}$$

sečtením a vydělením dvěma, resp. odečtením a vydělením dvěma i , dostaneme

$$y_1 = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x), y_2 = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x).$$

Příklad 26

Určete obecné řešení rovnice $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0$.

Dosazením $y = x^{\lambda}$ dostaneme

$$\lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} + \frac{1}{4x^2}x^{\lambda} = 0$$

$$x^{\lambda-2} \left(\lambda(\lambda - 1) + \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = x^{1/2} = \sqrt{x}, y_2 = \sqrt{x} \ln x,$$

tedy řešení je

$$y(x) = c_1 \sqrt{x} + c_2 \sqrt{x} \ln x.$$

Nehomogenní Eulerovu rovnici řešíme stejně jako předchozí rovnice. Obecné řešení je součtem partikulárního řešení a obecného řešení (příslušné homogenní rovnice). Partikulární řešení hledáme metodou variace konstant, tj.

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x),$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Poznámka

Zavedením nové nezávisle proměnné t , která je s původní proměnnou x vázána vztahem

$$x = e^t \quad (\Leftrightarrow t = \ln x),$$

Ize převést Eulerovu rovnici na rovnici s konstantními koeficienty pro funkci $z(t) = y(e^t)$.

Značme derivace tečkou podle t a čárkou podle x , potom

$$\dot{z}(t) = y'(e^t) e^t,$$

$$\ddot{z}(t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t = y''(e^t) e^{2t} + \dot{z}(t),$$

$$y'(x) = \frac{\dot{z}(t)}{e^t} = \frac{\dot{z}(t)}{x},$$

$$y''(x) = \frac{\ddot{z}(t) - \dot{z}(t)}{e^{2t}} = \frac{\ddot{z}(t) - \dot{z}(t)}{x^2}.$$

Příklad 27

$$y'' + \frac{a_1}{x}y' + \frac{a_2}{x^2}y = 0$$

$$\frac{\ddot{z} - \dot{z}}{x^2} + \frac{\dot{z}a_1}{x^2} + \frac{a_0}{x^2}z = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$\ddot{z} - \dot{z} + \dot{z}a_1 + a_0z = 0$$

$$\ddot{z} + (a_1 - 1)\dot{z} + a_0z = 0,$$

což je rovnice s konstantními koeficienty, tedy řešení hledáme ve tvaru

$$z(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + (a_1 - 1)\lambda + a_0 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

což je indexová rovnice. (Je vidět svázání substitucí $x = e^t$.) ■

Uvažujme rovnici

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Věta 19 (Abelova)

Pro libovolná řešení y_1, y_2 rovnice (6) platí

$$W(y_1, y_2) = c e^{-ax}$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Poznámka

Pro rovnici s nekonstantními koeficienty $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ dostaneme $W(y_1, y_2) = c e^{-\int a(x) dx}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} [W(y_1, y_2)]' &= (y_1 y_2' - y_2 y_1')' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' \\ &= y_1(-ay_2' - by_2) - y_2(-ay_1' - by_1) \\ &= -a(y_1 y_2' - y_2 y_1') + b(y_1 y_2 - y_1 y_2) \\ &= -aW(y_1, y_2), \end{aligned}$$

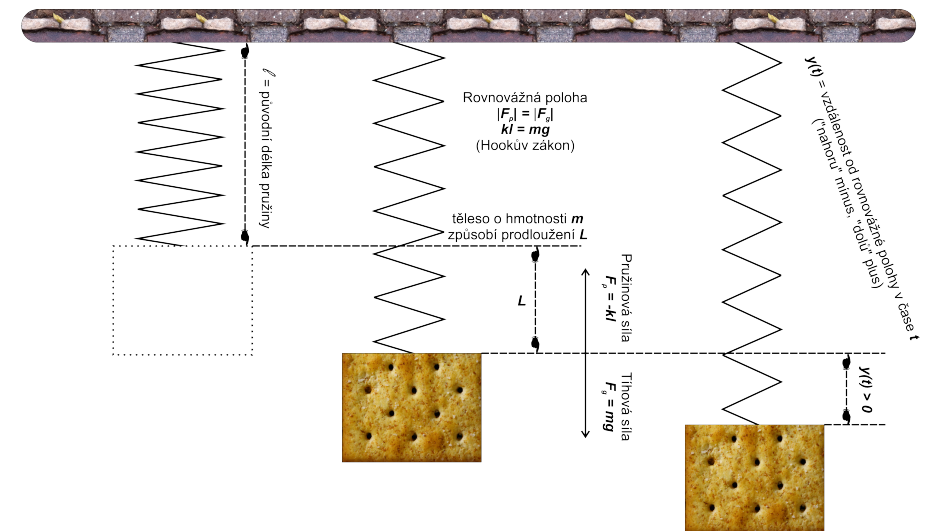
tedy $W(y_1, y_2)$ je řešením rovnice prvního řádu $W' = -aW$. Odtud $W(y_1, y_2) = c e^{-ax}$. □

Důsledek

Pro libovolná řešení y_1, y_2 rovnice (6) platí

- $W(y_1, y_2) = 0$ pro nějaké $x_0 \in I \Leftrightarrow W(y_1, y_2) = 0 \forall x_0 \in I$,
- $W(y_1, y_2) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in I \Leftrightarrow W(y_1, y_2) \neq 0 \forall x_0 \in I$.

Harmonické kmitání



Newtonův zákon

(hmotnost) · (zrychlení) = síla působící na těleso

$$m \cdot y'' = \sum_{i=1}^n F_i(t)$$

Síly působící na těleso

- 1 Tíhová síla $\vec{F}_g = m \cdot g$, dolů, $m > 0$
- 2 Pružinová síla $\vec{F}_p = -k(L + y(t))$, vždy tak, aby obnovila původní délku pružiny, $k > 0$, (je-li vychýlení $y(t)$ velké nahoru ($y(t) < -L$), pružina je stlačena, tedy $F_p > 0$ působí dolů)
- 3 Třecí síla $\vec{F}_t = -\gamma \cdot y'(t)$, vždy proti směru pohybu, pro malé vychýlení je přímo úměrná rychlosti, $\gamma > 0$
- 4 Vnější síla $\vec{F}(t)$, působí přímo na těleso

$$\begin{aligned} my'' &= F_g + F_p + F_t + F(t) \\ my'' &= mg - k(L + y) - \gamma y' + F(t) \\ my'' &= \underbrace{mg - kL}_{=0} - ky - \gamma y' + F(t) \end{aligned}$$

Lineární DR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t)$$

- $y(0) = y_0$ počáteční pozice (směr dolů znamená kladné vychýlení)
- $y'(0) = y'_0$ počáteční rychlost (ve směru počátečního vychýlení je kladná, proti směru počátečního vychýlení záporná)

- $F(t) \equiv 0$ vlastní kmitání
 - $F(t) \not\equiv 0$ vynucené kmitání
 - $\gamma = 0$ netlumené kmitání
 - $\gamma \neq 0$ ($\gamma > 0$) tlumené kmitání
- ... a kombinace předchozích.

Vlastní netlumené kmitání

$$my'' + ky = 0$$

charakteristická rovnice $m\lambda^2 + k = 0$ označíme-li $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pak

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0,$$

kde ω_0 je vlastní frekvence, potom

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

a pomocí součtových vzorců

$$y = C \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

kde C je amplituda a φ je fáze

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}, \quad C_1 = C \sin \varphi, \quad C_2 = C \cos \varphi.$$

Vynucené netlumené kmitání

$$my'' + ky = F_0 \sin \omega t,$$

$F_0 \sin \omega t$ je periodicky působící síla o frekvenci ω .

Řešení homogenní rovnice

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Odhad partikulárního řešení nehomogenní rovnice závisí na vztahu ω a ω_0 .

- $\omega_0 \neq \omega$

$$Y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t \Rightarrow A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, B = 0,$$

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

$$y = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

řešení je ohraničené

- $\omega_0 = \omega$ (rezonance)

$$Y_p = At \cos \omega_0 t + Bt \sin \omega_0 t \Rightarrow A = 0, B = -\frac{F_0}{2m\omega_0}$$

$$y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

$$y = C \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin t$$

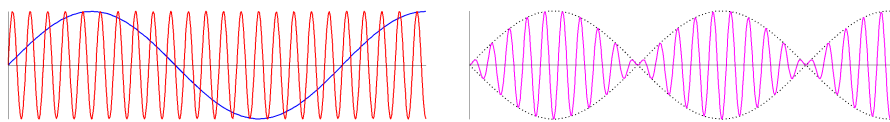
řešení uteče do $\pm\infty$

Poznámka

Jsou-li pro $\omega_0 \neq \omega$ počáteční podmínky $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$, pak

$$y = \underbrace{\left[\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right]}_{(n)} \cdot \underbrace{\sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t}_{(v)}$$

Je-li pak ω blízko ω_0 , je (n) vlna nízké frekvence a (v) vlna vysoké frekvence \Rightarrow amplitudová modulace (elektrických signálů).



Vlastní tlumené kmitání

$$my'' + \gamma y' + ky = 0$$

řešení vždy konverguje k nule exponenciálně (neosciluje/osciluje)

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \quad (m > 0, \gamma > 0, k > 0)$$

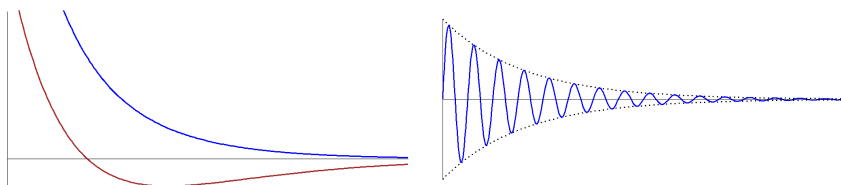
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}$$

Řešení závisí na kořenech charakteristického polynomu $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$, ale s rostoucím t jde do nuly.

(a) $\gamma^2 - 4mk > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow y = C e^{\lambda_1 t} + D e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$

(b) $\gamma^2 = 4mk \Rightarrow y = C e^{\lambda t} + D t e^{\lambda t} \rightarrow 0$

(c) $\gamma^2 < 4mk \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \alpha = -\frac{\gamma}{2m}, \beta = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - \gamma^2}, \beta$ vlastní (přirozená) frekvence; je-li $\gamma = 0$, je $\beta = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



Obr.: Modře (a), hnědě (b)

Obr.: Možnost (c)

Vynucené tlumené kmitání

$$my'' + \gamma y' + ky = F_0 \sin \omega t$$

řešení homogenní rovnice $y_h = e^{\alpha t} (C \cos \beta t + D \sin \beta t)$

partikulární řešení $y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ (žádný člen není řešením homogenní rovnice)

$$\Rightarrow y = e^{\alpha t} (C \cos \beta t + D \sin \beta t) + y_p$$

obecné řešení je ohraničené.

Pokud by byla vynucující síla tvaru $F_0 e^{\alpha t} \sin \omega t$, kde $\alpha = -\frac{\gamma}{2m}$, pak by partikulární řešení záviselo na vztahu ω a β

- $\omega \neq \beta \Rightarrow y_p = e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$
- $\omega = \beta \Rightarrow y_p = t e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

V obou případech je ale $y_p \rightarrow 0$, neboť $\alpha < 0$, a tedy i $y \rightarrow 0$.

Příklad 28

Těleso o hmotnosti 0,5 kg natáhne pružinu o 10 cm. Jestliže potáhneme těleso dolů další 2 cm a pak pustíme (a pokud zanedbáme odpor vzduchu), jaká bude jeho poloha v čase t ?

$$m = 0,5 \text{ kg}, \quad \gamma = 0, \quad g = 10 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ cm/s}^2,$$

$$mg = kL \Rightarrow k = \frac{mg}{L} = \frac{0,5 \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}}{10 \text{ cm}} = 50 \text{ kg/s}^2$$

$$0,5y'' + 50y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0 \text{ bez počátečního impulzu}$$

$$0,5\lambda^2 + 50 = 0$$

$$\lambda^2 + 100 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 10i$$

$$y = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t$$

$$y(0) = C_1 = -2$$

$$y' = -10C_1 \sin 10t + 10C_2 \cos 10t$$

$$y'(0) = 10C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y = -2 \cos 10t$$

$$y = \underbrace{2}_C \sin \left(10t - \underbrace{\frac{\pi}{2}}_\varphi \right)$$

■

Příklad 29

Je-li systém z předchozího příkladu v (viskózním) prostředí, které způsobuje odpor 0,16 N, když má těleso rychlost 2 cm/s. Určete jeho pozici v čase t .

$$\text{Třecí síla } |\vec{F}_t| = \gamma \cdot y' \Rightarrow 16 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = \gamma \cdot 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \Rightarrow \gamma = 8 \text{ kg/s}$$

$$0,5y'' + 8y' + 50y = 0$$

$$0,5\lambda^2 + 8\lambda + 50 = 0$$

$$\lambda^2 + 16\lambda + 100 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 400}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{-144}}{2} = \frac{-16 \pm 12i}{2} = -8 \pm 6i$$

$$y = C_1 e^{-8t} \cos 6t + C_2 e^{-8t} \sin 6t$$

$$y(0) = C_1 = -2$$

$$y' = C_1 (-8e^{-8t} \cos 6t - 6e^{-8t} \sin 6t) + C_2 (-8e^{-8t} \sin 6t + 6e^{-8t} \cos 6t)$$

$$y'(0) = C_1 \cdot (-8) + C_2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{8}{3}$$

$$y = -2e^{-8t} \cos 6t - \frac{8}{3}e^{-8t} \sin 6t$$

$$y = \frac{10}{3}e^{-8t} \sin \left(6t + \arctg \frac{3}{4} \right) \approx \frac{10}{3}e^{-8t} \sin (6t + 3,785)$$

Systémem lineárních diferenciálních rovnic rozumíme systém tvaru

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t),$$

$$x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t),$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),$$

kde a_{ij} a b_i ($i, j = 1, \dots, n$) jsou buď reálné nebo komplexní funkce definované na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Zavedeme-li maticovou funkci

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$$

a vektorovou funkci

$$b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t)),$$

lze lineární systém psát ve vektorovém tvaru

$$x' = A(t)x + b(t). \quad (7)$$

kde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Při tomto způsobu zápisu je vhodné chápat vektor x jako matici $(x_1, \dots, x_n)^T$ typu $n \times 1$ a vektorovou funkci $b(t)$ jako maticovou funkci $(b_1(t), \dots, b_n(t))^T$. Součin maticové funkce $A(t)$ a vektoru x lze pak chápat jako součin dvou matic a systém máme v tzv. maticovém tvaru (7).

Je-li speciálně $b(t) \equiv 0$, nazývá se rovnice (7) *homogenní*. V opačném případě *nehomogenní* a rovnice $x' = A(t)x$ se nazývá homogenní rovnice *přidružená* k rovnici $x' = A(t)x + b(t)$. Počáteční podmínka pro rovnici (7) je tvaru

$$x(t_0) = \xi, \quad (8)$$

kde ξ je konstantní matice typu $n \times 1$.

Věta 20

Jsou-li $A(t), b(t)$ spojité na intervalu I , pak maticová funkce $\varphi(t)$ typu $n \times 1$ je řešením počáteční úlohy (7),(8) právě tehdy, když je řešením integrální rovnice

$$\varphi(t) = \xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds$$

Důkaz.

Viz skriptá. □

Lemma 1 (Gronwall)

Nechť $u(t), v(t)$ jsou spojité nezáporné funkce na intervalu J , nechť $C \geq 0$ je konstanta a nechť $t_0 \in J$. Jestliže pro všechna $t \in J$ platí

$$u(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^t v(s)u(s) ds \right|,$$

pak pro všechna $t \in J$ platí

$$u(t) \leq C \cdot e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}.$$

Důkaz.

Provedeme pro $t \geq t_0$ (tedy vše bez absolutních hodnot):

$$u(t) \leq C + \underbrace{\int_{t_0}^t v(s)u(s) ds}_{w(t)}$$

$$w'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)w(t)$$

$$w'(t) - v(t)w(t) \leq 0 \quad / \cdot \exp \left\{ - \int_{t_0}^t v(s) ds \right\}$$

$$w'(t) e^{-\int_{t_0}^t v(s) ds} - v(t)w(t) e^{-\int_{t_0}^t v(s) ds} \leq 0$$

$$\left[w(t) e^{-\int_{t_0}^t v(s) ds} \right]' \leq 0$$

$$w(t) e^{-\int_{t_0}^t v(s) ds} - \underbrace{w(t_0)}_{=C} \leq 0$$

Odtud dostaneme

$$w(t) \leq C e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}$$

a užitím nerovnosti $u(t) \leq w(t)$ máme

$$u(t) \leq C e^{\int_{t_0}^t v(s) ds}.$$

□

Věta 21 (O existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť maticové funkce $A(t), b(t)$ jsou spojité na intervalu I . Pak počáteční úloha (7),(8) ($t_0 \in I$) má jediné úplné řešení. Toto řešení je definováno na celém intervalu I a lze ho získat jako limitu tzv. Picardovy posloupnosti postupných aproximací $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$, kde

$$\varphi_0(t) \equiv 0, \quad \varphi_{k+1}(t) = \xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] ds \quad (9)$$

pro $k = 0, \dots, \infty$.

Důkaz.

Funkce posloupnosti $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^\infty$ jsou definované na celém intervalu I . Ukážeme-li, že existuje maticová funkce $\varphi(t)$ typu $n \times 1$ taková, že $\varphi_k(t) \rightarrow \varphi(t)$ na intervalu I a

$$\int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] ds \rightarrow \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds \quad (10)$$

na intervalu I pro $k \rightarrow \infty$, bude existence řešení počáteční úlohy (7),(8) na I dokázána, neboť z (9) plyne $\varphi(t) = \xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds$, což je integrální tvar rovnice ekvivalentní počáteční úloze (7),(8).

Zaveďme nejprve následující označení $\alpha(t) = \left| \int_{t_0}^t |A(s)| ds \right|$,
 $\beta(t) = \max_{\tau \in [\min(t_0, t), \max(t_0, t)]} \left| \xi + \int_{t_0}^\tau b(s) ds \right|$, $\Delta_k(t) = \varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)$.
 Funkce $\alpha(t), \beta(t)$ jsou spojité na intervalu I , funkce $\beta(t)$ je pro $t \geq t_0$ neklesající.

Dokážeme nejprve, že platí

$$|\Delta_k(t)| \leq \beta(t) \cdot \frac{\alpha^k(t)}{k!} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Úplnou indukcí: Pro

$$k = 0: |\Delta_0(t)| = |\varphi_1(t) - \underbrace{\varphi_0(t)}_{=0}| = |\varphi_1(t)| = \left| \xi + \int_{t_0}^t b(s) ds \right| \leq \beta(t).$$

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k = j$ a dokažme platnost pro $k = j + 1$:

$$\begin{aligned} |\Delta_{j+1}(t)| &= |\varphi_{j+2}(t) - \varphi_{j+1}(t)| \\ &= \left| \xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_{j+1}(s) + b(s)] ds - \left(\xi + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_j(s) + b(s)] ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t A(s)\varphi_{j+1}(s) ds - \int_{t_0}^t A(s)\varphi_j(s) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_{t_0}^t A(s)[\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)] ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)[\varphi_{j+1}(t) - \varphi_j(t)]| ds \right| \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)|\beta(s) \frac{\alpha^j(s)}{j!} ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)|\beta(t) \frac{\alpha^j(s)}{j!} ds \right| \\
 &= \beta(t) \left| \int_{t_0}^t |A(s)| \frac{\alpha^j(s)}{j!} ds \right| \\
 &= \beta(t) \operatorname{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^t \underbrace{|A(s)| \operatorname{sgn}(s - t_0)}_{|A(s)|} \frac{\alpha^j(s)}{j!} ds \\
 &= \beta(t) \int_{t_0}^t \frac{\alpha^j(s)}{j!} \alpha'(s) ds = \beta(t) \left[\frac{\alpha^{j+1}(s)}{(j+1)!} \right]_{t_0}^t = \beta(t) \frac{\alpha^{j+1}(t)}{(j+1)!}
 \end{aligned}$$

Z (11) plyne, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(t)|$ konverguje a platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta(t) \frac{\alpha^k(t)}{k!} = \beta(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k(t)}{k!} = \beta(t) e^{\alpha(t)}$$

pro $t \in I$.

Platí $\sum_{k=0}^{m-1} \Delta_k(t) =$

$\varphi_1(t) - \varphi_0(t) + \varphi_2(t) - \varphi_1(t) + \dots + \varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t) = \varphi_m(t)$. Pro $p > m$ přirozená tedy máme

$|\varphi_p(t) - \varphi_m(t)| = \left| \sum_{k=0}^{p-1} \Delta_k(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_k(t) \right| = \left| \sum_{k=m}^{p-1} \Delta_k(t) \right| \leq \sum_{k=m}^{p-1} |\Delta_k(t)| \leq \sum_{k=m}^p |\Delta_k(t)|$. Odtud plyne, že posloupnost $\{\varphi_k(t)\}$ je cauchyovská v každém $t \in I$. Protože \mathbb{R}^n je úplný metrický prostor, je posloupnost $\{\varphi_k(t)\}$ konvergentní v každém $t \in I$.

Položme $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t)$, $t \in I$. Platí

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t) - \varphi_m(t)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_k(t) \right| = \left| \sum_{k=m}^{\infty} \Delta_k(t) \right| \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta(t) \frac{\alpha^k(t)}{k!} = \beta(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k(t)}{k!} \\
 &= \beta(t) \frac{\alpha^m(t)}{m!} \left(1 + \frac{\alpha(t)}{m+1} + \frac{\alpha^2(t)}{(m+2)(m+1)} + \dots \right) \\
 &\leq \beta(t) \frac{\alpha^m(t)}{m!} \left(1 + \frac{\alpha(t)}{1} + \frac{\alpha^2(t)}{2 \cdot 1} + \dots \right) \\
 &= \beta(t) \frac{\alpha^m(t)}{m!} e^{\alpha(t)}, t \in I.
 \end{aligned}$$

Máme dokázat, že $\int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] ds \rightarrow \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds$ na intervalu I . Důkaz stačí provést na libovolném kompaktním intervalu $J \subseteq I$. Protože funkce $\alpha(t), \beta(t)$ jsou spojité na J , nabývají na něm své největší a nejmenší hodnoty, řekněme $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$.

Pak $|\varphi_m(t) - \varphi(t)| \leq \tilde{\beta} e^{\tilde{\alpha}} \frac{\tilde{\alpha}^m}{m!} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ (nutná podm. konvergence $a_n \rightarrow 0$) na J . Odtud $\varphi_m(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ na J pro $m \rightarrow \infty$. Na J nyní máme

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_k(s) + b(s)] ds - \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\varphi_k(s) - \varphi(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)(\varphi_k(s) - \varphi(s))| ds \right| \\
 &\leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)| \cdot |\varphi_k(s) - \varphi(s)| ds \right| \leq \max_{s \in J} |\varphi_k(s) - \varphi(s)| \cdot \left| \int_{t_0}^t |A(s)| ds \right| \\
 &\leq \tilde{\alpha} \cdot \max_{s \in J} |\varphi_k(s) - \varphi(s)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,
 \end{aligned}$$

neboť $\varphi_m(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ na J .

Tím je dokázáno (10), tedy existence řešení na I . Zbývá dokázat jednoznačnost.

Předpokládejme, že $x(t), y(t)$ jsou řešením (7),(8). Položme $u(t) = |x(t) - y(t)|$ na libovolném intervalu, kde jsou obě řešení $x(t), y(t)$ definována. Pak platí

$$\begin{aligned} u(t) &= |x(t) - y(t)| \\ &= \left| \xi + \int_{t_0}^t [A(s)x(s) + b(s)] ds - \left(\xi + \int_{t_0}^t [A(s)y(s) + b(s)] ds \right) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(x(s) - y(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)(x(s) - y(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)| \cdot \underbrace{|x(s) - y(s)|}_{u(s)} ds \right| = \left| \int_{t_0}^t |A(s)| u(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Podle Gronwallova lemmatu je $u(t) \leq 0 \cdot e^{\int_{t_0}^t |A(s)| ds} = 0$. Poněvadž $u(t) \geq 0$, máme $u(t) \equiv 0$, tedy $x(t) = y(t)$ na každém intervalu, kde jsou řešení $x(t), y(t)$ definována. \square

Poznámka

Picardova metoda postupných aproximací použitá v důkazu předchozí věty umožňuje hledat řešení jako limitu posloupnosti $\{\varphi_k(t)\}$. Použijeme-li funkcí $\Delta_k(t)$, zavedených v důkazu, lze řešení $\varphi(t)$ vyjádřit ve tvaru nekonečné řady $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t)$. Přitom lze vektorové funkce $\Delta_k(t)$ definovat následujícím způsobem

$$\Delta_0(t) = \xi + \int_{t_0}^t b(s) ds, \quad \Delta_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t A(s)\Delta_k(s) ds.$$

Poznámka

Je-li speciálně $A(t) = A$ nezávislá na t a $b(t) = 0$, máme počáteční problém ve tvaru

$$x' = Ax, \quad x(t_0) = \xi$$

a jeho řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \xi + A\xi \cdot (t - t_0) + A^2\xi \frac{(t - t_0)^2}{2} + A^3\xi \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots \\ &= \left(I + \frac{1}{1!}A(t - t_0) + \frac{1}{2!}[A(t - t_0)]^2 + \dots + \frac{1}{k!}[A(t - t_0)]^k + \dots \right) \xi. \end{aligned}$$

Definujeme-li maticovou exponenciální funkci e^A vztahem

$$e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k,$$

kde $A^0 = I$, pak řešení $\varphi(t)$ lze psát ve tvaru $\varphi(t) = e^{A(t-t_0)} \xi$. Snadno se ověří, že pro maticovou exponenciální funkci platí $[e^{A(t-t_0)}]^\prime = A \cdot e^{A(t-t_0)}$, $|e^A| \leq e^{|A|}$ a pro zaměnitelné (tj. $A \cdot B = B \cdot A$) matice typu $n \times n$ platí $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Příklad 30

Řešte počáteční problém $x' = Ax$, $x(0) = (0, 1)^T$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{4k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{4k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{4k+2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{4k+3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3!} \\ \frac{t^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^4}{4!} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{4!} \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = e^{At}(0, 1)^T = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

■

Věta 22 (Princip superpozice)

Jsou-li $x_1(t), x_2(t)$ řešením rovnice $x' = A(t)x + b_1(t)$, resp. $x' = A(t)x + b_2(t)$, pak lineární kombinace $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ je řešením rovnice $x' = A(t)x + c_1b_1(t) + c_2b_2(t)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
 [c_1x_1(t) + c_2x_2(t)]' &= c_1x_1'(t) + c_2x_2'(t) \\
 &= c_1(A(t)x_1(t) + b_1(t)) + c_2(A(t)x_2(t) + b_2(t)) \\
 &= A(t)(c_1x_1(t) + c_2x_2(t)) + c_1b_1(t) + c_2b_2(t).
 \end{aligned}$$

□

Důsledek

- ① Jsou-li $y_1(t), y_2(t)$ řešení homogenní lineární rovnice

$$y' = A(t) \cdot y, \quad (12)$$

pak také jejich lineární kombinace $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ je řešením rovnice (12). Množina všech řešení rovnice (12) tedy tvoří vektorový prostor. Později ukážeme, že tento prostor je dimenze n (= řád matice A).

- ② Je-li $x(t)$ řešením rovnice (7), pak $z(t)$ je řešením rovnice (7) právě tehdy, když $x(t) - z(t)$ je řešením rovnice (12). Všechna řešení rovnice (7) jsou tedy tvaru $x(t) + y(t)$, kde $y(t)$ je řešením rovnice (12) a $x(t)$ je jedno řešení rovnice (7).

Poznámka

Ve zbytku tohoto odstavce budeme předpokládat, že $A(t), b(t)$ jsou spojité na intervalu I .

Z věty o existenci a jednoznačnosti řešení plyne, že počáteční problém $y' = A(t)y, y(t_0) = 0$ má jediné řešení $y(t) \equiv 0$.

Definice 7

Řekneme, že řešení $y_1(t), \dots, y_k(t), t \in I$ jsou *lineárně závislá*, jestliže existují konstanty c_1, \dots, c_k , z nichž aspoň jedna je různá od nuly, takové, že $c_1y_1(t) + \dots + c_ky_k(t) \equiv 0$ na I . V opačném případě říkáme, že řešení $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou *lineárně nezávislá*.

Jsou-li řešení $y_1(t), \dots, y_k(t)$ lineárně závislá a je-li $t_0 \in I$, pak také vektory $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0)$ jsou lineárně závislé. Ukažme, že toto tvrzení platí i naopak.

Nechť vektory $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0)$ jsou při $t_0 \in I$ lineárně závislé, tj. existují konstanty c_1, \dots, c_k ne všechny rovny nule tak, že $c_1 y_1(t_0) + \dots + c_k y_k(t_0) = 0$. Protože $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou řešení, je i jejich lineární kombinace $y(t) = c_1 y_1(t) + \dots + c_k y_k(t)$ řešením rovnice (12). Přitom platí, že $y(t_0) = 0$. Podle poslední poznámky je $y(t) \equiv 0$, takže $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou lineárně závislá. Platí také, že řešení $y_1(t), \dots, y_k(t)$ jsou lineárně nezávislá právě tehdy, když vektory $y_1(t_0), \dots, y_k(t_0)$ jsou lineárně nezávislé. Odtud plyne, že dimenze vektorového prostoru všech řešení rovnice (12) je rovna n .

Libovolnou bázi prostoru všech řešení rovnice (12) nazýváme **fundamentální systém řešení** rovnice (12).

Zároveň s rovnicí (12) budeme uvažovat rovnici

$$Y' = A(t) \cdot Y, \quad (13)$$

kde Y je čtvercová matice řádu n . Označíme-li sloupce matice Y jako $y^{[1]}, \dots, y^{[n]}$, lze systém (13) psát jako systém n lineárních rovnic $(y^{[j]})' = A(t) \cdot y^{[j]}, j = 1, \dots, n$, nebo ve tvaru jedné vektorové rovnice

$$\begin{pmatrix} y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ \vdots \\ y^{[n]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A(t) & O & \dots & O \\ O & A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^{[1]} \\ y^{[2]} \\ \vdots \\ y^{[n]} \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že počáteční úloha

$$Y' = A(t) \cdot Y, \quad Y(t_0) = Y_0, \quad (14)$$

kde $t_0 \in I$, Y_0 je konstantní čtvercová matice řádu n , má jediné úplné řešení $Y(t)$ definované na celém intervalu I . Maticová funkce $Y(t)$ je řešením rovnice (13) právě tehdy, když každý sloupec $y^{[j]}$ maticové funkce $Y(t)$ je řešením rovnice (12). Je-li ξ konstantní n -rozměrný sloupcový vektor, pak $Y(t) \cdot \xi$ je řešením rovnice (12). Jestliže každé řešení (12) lze získat ve tvaru $Y(t) \cdot \xi$, nazývá se maticová funkce $Y(t)$ **fundamentální maticí** rovnice (12).

Zřejmě $Y(t)$ je fundamentální maticí rovnice (12) právě tehdy, když sloupce $y^{[1]}(t), \dots, y^{[n]}(t)$ maticové funkce $Y(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (12).

- $\Leftrightarrow y^{[1]}(t), \dots, y^{[n]}(t)$ jsou řešení (12) a $\det(y^{[1]}(t), \dots, y^{[n]}(t)) \neq 0$ pro $t \in I$
- $\Leftrightarrow y^{[1]}(t_0), \dots, y^{[n]}(t_0)$ jsou řešení (12) a $\det(y^{[1]}(t_0), \dots, y^{[n]}(t_0)) \neq 0$ pro $t \in I$
- $\Leftrightarrow Y(t)$ je řešením (13) a $\det Y(t) \neq 0$ na I
- $\Leftrightarrow Y(t)$ je řešením (13) a $\det Y(t_0) \neq 0$ na I

Je-li C čtvercová konstantní matice řádu n a je-li $Y(t)$ řešením (13), pak $Y(t) \cdot C$ je rovněž řešením (13).

$$(Y(t) \cdot C)' = Y'(t) \cdot C = (A(t) \cdot Y(t)) \cdot C = A(t) \cdot (Y(t) \cdot C)$$

Je-li C regulární čtvercová konstantní matice řádu n a je-li $Y(t)$ fundamentální matice rovnice (12), pak $Y(t) \cdot C$ je opět fundamentální matice rovnice (12). Je-li $\tilde{Y}(t)$ fundamentální matice rovnice (12), pak libovolná fundamentální matice $Y(t)$ rovnice (12) je tvaru $Y(t) = \tilde{Y}(t) \cdot C$, kde C je vhodná regulární čtvercová konstantní matice řádu n . Je-li $\tilde{Y}(t)$ fundamentální matice rovnice (12), pak počáteční úloha (14) má řešení $Y(t) = \tilde{Y}(t) \cdot C$, kde $C = \tilde{Y}^{-1}(t_0) \cdot Y_0$.

Věta 23 (Jacobiho formule)

Bud' $Y(t)$ řešením rovnice (13), $t_0 \in I$. Pak platí

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}.$$

Důkaz.

Označme $y_{ij}(t)$, $(i, j = 1, \dots, n)$ prvky maticové funkce $Y(t)$ a položme $u(t) = \det Y(t)$. Protože $Y'(t) = A(t) \cdot Y(t)$, platí

$y_{ij}(t)' = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)y_{kj}(t)$, kde $a_{ij}(t)$ jsou prvky maticové funkce $A(t)$.

$$u'(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y'_{i1}(t) & \cdots & y'_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)y_{k1}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)y_{kn}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{ii}(t)y_{i1}(t) & \cdots & a_{ii}(t)y_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \underbrace{\det Y(t)}_{u(t)} = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \right) \cdot u(t) = \text{tr} A(t)u(t). \end{aligned}$$

Dále $u(t_0) = \det Y(t_0)$. Funkce $u(t)$ je tedy řešením počáteční úlohy

$$u' = \operatorname{tr} A(t) \cdot u, \quad u(t_0) = \det Y(t_0).$$

Řešením dostáváme $u(t) = C \cdot e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds}$, přičemž z počáteční podmínky plyne $C = \det Y(t_0)$, a tedy

$$\det Y(t) = \det Y(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds}.$$

□

Věta 24

Je-li $Y(t)$ fundamentální matice rovnice (12), pak řešení počáteční úlohy (7),(8) je

$$x(t) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0) \cdot \xi + Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds.$$

Důkaz.

Protože $Y(t)$ je regulární a spojitá na intervalu I , je na I spojitá i $Y^{-1}(t)$. Existuje proto derivace $\int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds$ a platí

$$\begin{aligned} x'(t) &= Y'(t) \cdot Y^{-1}(t_0) \cdot \xi \\ &\quad + Y'(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds + Y(t) \cdot Y^{-1}(t) \cdot b(t) \\ &= A(t)Y(t)Y^{-1}(t_0)\xi + A(t)Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds + b(t) \\ &= A(t) \left[Y(t)Y^{-1}(t_0)\xi + Y(t) \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds \right] + b(t) \\ &= A(t) \cdot x(t) + b(t), \end{aligned}$$

tedy $x(t)$ je řešením (7).

$$x(t_0) = Y(t_0) \cdot Y^{-1}(t_0) \cdot \xi + \int_{t_0}^{t_0} Y^{-1}(s)b(s) ds = \xi. \quad \square$$

Poznámka

Při praktickém určování řešení počáteční úlohy (7),(8) se obvykle postupuje takto (tzv. metoda variace konstant)

- Řešení předpokládáme ve tvaru $Y(t) \cdot c(t)$, kde $c(t)$ je n -vektorová funkce (sloupcový vektor)
- dosadíme do rovnice (7):
 $Y'(t) \cdot c(t) + Y(t) \cdot c'(t) = A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t) + b(t)$
- využijeme vztahu $Y'(t) = A(t) \cdot Y(t)$ a dostaneme
 $\underbrace{A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t)} + Y(t) \cdot c'(t) = \underbrace{A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t)} + b(t)$, tudíž
 $c'(t) = Y^{-1}(t) \cdot b(t)$
- integrací dostaneme $c(t) = \eta + \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds$, a tedy
 $x(t) = Y(t) \cdot \eta + Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds$
- z počáteční podmínky určíme η : $\xi = Y(t_0)\eta + 0 \Rightarrow \eta = Y^{-1}(t_0)\xi$, a tedy
 $x(t) = Y(t) \cdot Y^{-1}(t_0)\xi + Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)b(s) ds$

Poznámka

Je-li speciálně $A(t) = A$, kde A je konstantní čtvercová matice řádu n , tj. uvažujeme-li počáteční úlohu $x' = Ax + b(t)$, $x(t_0) = \xi$, je řešení této úlohy tvaru $x(t) = e^{A(t-t_0)} \xi + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} b(s) ds$.

Uvažujme rovnici

$$y' = Ay, \quad (15)$$

kde A je konstantní čtvercová matice řádu n . Maticová funkce e^{At} je fundamentální maticí rovnice (15).

$$(e^{At})' = A e^{At}, \quad \det e^{At} \text{ stačí v jednom bodě: } \det e^{At} \Big|_{t=0} = \det I = 1 \neq 0$$

Naším cílem je popsat strukturu matice e^{At} , popř. jiné fundamentální matice $e^{At} \cdot C$.

Z lineární algebry je známo, že existuje regulární čtvercová matice řádu n , označme ji P , taková, že $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, kde J je takzvaný jordanův kanonický tvar matice A . Tento je blokově diagonální maticí tvaru

$$J = \begin{pmatrix} J_{01} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{0q} & & & & \\ & & & J_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J_s & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

kde J_{01}, \dots, J_{0q} jsou jednoprvkové matice a J_1, \dots, J_s jsou matice typu

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

J_{01}, \dots, J_{0q} a J_1, \dots, J_s jsou tzv. Jordanovy bloky a čísla $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou vlastní čísla matice A (tj. řešení charakteristické rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$, která nemusí být navzájem různá). Označme

$$J_0 = \begin{pmatrix} J_{01} & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{0q} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \lambda_q \end{pmatrix}.$$

Nechť n_j značí řád matice J_j pro $j = 0, \dots, s$ ($n_0 = q$).

Definice 8

- **Řetězcem** příslušným k vlastnímu číslu λ_j , kde $q < j \leq q + s$, rozumíme konečnou posloupnost sloupcových vektorů tvořenou $\left(\sum_{k=0}^{j-q-1} n_k + 1\right)$ -tým sloupcem matice P až $\left(\sum_{k=0}^{j-q} n_k\right)$ -tým sloupcem matice P .
- Řetězcem příslušným vlastnímu číslu λ_j , $1 \leq j \leq q$, rozumíme posloupnost tvořenou jediným, a to j -tým sloupcem matice P .
- **Délkou řetězce** rozumíme počet sloupcových vektorů, jimiž je tento řetězec tvořen.

Ke každému vlastnímu číslu λ matice A existuje aspoň jeden řetězec příslušný číslu λ (může jich být více než jeden). Součet délek všech řetězců příslušných k vlastnímu číslu λ matice A je zřejmě roven násobnosti vlastního čísla λ .

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{PJP^{-1}t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (PJP^{-1})^j \cdot t^j \\ &= \left| \underbrace{PJP^{-1}} \cdot \underbrace{PJP^{-1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{PJP^{-1}} \right| \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} P^j J^j P^{-1} \cdot t^j = P \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} J^j t^j \right) \cdot P^{-1} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

Budeme zkoumat nejprve strukturu matice e^{Jt} (je jednodušší)

$$e^{Jt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} J^j t^j = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_s t} \end{pmatrix},$$

$$J^j t^j = \begin{pmatrix} J_0^j t^j & & & \\ & J_1^j t^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^j t^j \end{pmatrix}$$

$$e^{J_0 t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} J_0^j t^j = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_q t} \end{pmatrix}, J_0^j t^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j t^j & & & \\ & \lambda_2^j t^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_q^j t^j \end{pmatrix}$$

$e^{J^j t}$: $j \in \{1, \dots, s\}$, $J_j = \lambda_{q+j} I_j + M_j$, I_j, M_j jsou matice řádu n_j , I je

$$\text{jednotková matice a } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = e^{(\lambda_{q+j}I + M_j)t} = e^{\lambda_{q+j}I t} \cdot e^{M_j t} = e^{\lambda_{q+j}t} \cdot I \cdot e^{M_j t} = e^{\lambda_{q+j}t} \cdot e^{M_j t}$$

$$e^{M_j t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M_j^k t^k$$

$$M_j^0 t^0 = I, M_j^1 t^1 = \begin{pmatrix} 0 & t & & \\ & 0 & t & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & t \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, M_j^2 t^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 & & \\ & 0 & 0 & t^2 & \\ & & \ddots & \ddots & t^2 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots, M_j^{n_j-1} t^{n_j-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & t^{n_j-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_j^k t^k = O \text{ pro } k = n_j, n_j + 1, \dots$$

$$e^{M_j t} = \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{1}{k!} M_j^k t^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & & \\ 0 & 0 & 1 & t & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Protože matice P je regulární, je matice $e^{At} \cdot P = P \cdot e^{Jt}$ fundamentální matice rovnice (15). Označme $y^{[1]}, \dots, y^{[n]}$ sloupce maticové funkce $e^{At} \cdot P$ a $h^{[1]}, \dots, h^{[n]}$ sloupce matice P . Potom

$$y^{[1]} = e^{\lambda_1 t} h^{[1]}$$

$$y^{[2]} = e^{\lambda_2 t} h^{[2]}$$

$$\vdots$$

$$y^{[q]} = e^{\lambda_q t} h^{[q]}$$

$$y^{[q+1]} = e^{\lambda_{q+1} t} h^{[q+1]}$$

$$y^{[q+2]} = e^{\lambda_{q+1} t} \left(h^{[q+1]} \frac{t}{1!} + h^{[q+2]} \right)$$

$$\vdots$$

$$y^{[q+n_1]} = e^{\lambda_{q+1} t} \left(h^{[q+1]} \frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!} + \dots + h^{[q+n_1-1]} \frac{t}{1!} + h^{[q+n_1]} \right)$$

$$y^{[q+n_1+\dots+n_{s-1}+1]} = e^{\lambda_{q+s} t} h^{[q+n_1+\dots+n_{s-1}+1]}$$

$$y^{[q+n_1+\dots+n_{s-1}+2]} = e^{\lambda_{q+s} t} \left(h^{[q+n_1+\dots+n_{s-1}+1]} \frac{t}{1!} + h^{[q+n_1+\dots+n_{s-1}+2]} \right)$$

$$y^{[n]} = e^{\lambda_{q+s} t} \left(h^{[q+n_1+\dots+n_{s-1}+1]} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + h^{[n-1]} \frac{t}{1!} + h^{[n]} \right)$$

Matice $e^{At} P$ nemusí být reálná, přestože matice A je reálná (vlastní čísla matice nejsou nutně reálná). Výše uvedený systém je fundamentální systém řešení rovnice (15).

Poznámka

Je-li A reálná konstantní matice, pak s každým blokem J_m příslušným nereálnému vlastnímu číslu λ_j obsahuje matice J blok téhož typu příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda_j}$. Navíc je z algebry známo, že o matici P lze předpokládat, že řetězce příslušné vlastním číslům jsou reálné a že s každým řetězcem příslušným nereálnému vlastnímu číslu λ_j obsahuje matice P i řetězec komplexně sdružený příslušný k vlastnímu číslu $\overline{\lambda_j}$. S každým nereálným řešením y , pak výše uvedená soustava obsahuje i řešení komplexně sdružené \overline{y} .

$h^{[1]}$ je řetězec příslušný k $\lambda_1, \dots, h^{[q]}$ je řetězec příslušný k λ_q ;
 $h^{[q+1]}, \dots, h^{[q+n_1]}$ jsou řetězce příslušné k vlastnímu číslu λ_{q+1}, \dots ,
 $h^{[q+n_1+\dots+n_{s-1}+1]}, \dots, h^{[n]}$ jsou řetězce příslušné k vlastnímu číslu λ_{q+s} .

Poznámka

- Bud' (*) libovolný fundamentální systém řešení rovnice (15), který s každým nereálným řešením obsahuje i řešení komplexně sdružené. Nahradíme-li každou dvojici nereálných komplexně sdružených řešení y a \overline{y} v (*) dvojicí $\frac{1}{2}(y + \overline{y})$ a $\frac{1}{2i}(y - \overline{y})$, bude tato nová soustava tvořit systém reálných řešení.
- Prvky libovolné fundamentální matice $Y(t)$ rovnice (15) jsou tvaru $y(t) = \sum_{k=1}^m p_k(t) e^{\lambda_k t}$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla matice A a $p_k(t)$ jsou polynomy stupně menšího než je násobnost λ_k .

Poznámka

V případě reálné matice A jsou prvky libovolné reálné fundamentální matice $Y(t)$ tvaru $y(t) = \sum_{k=1}^m e^{\operatorname{Re}\lambda_k t} (P_k(t) \cos(\operatorname{Im}\lambda_k t) + Q_k(t) \sin(\operatorname{Im}\lambda_k t))$, kde $P_k(t), Q_k(t)$ jsou reálné polynomy stupně menšího než je násobnost vlastního čísla λ_k .

$$\begin{aligned} y^{[1]} &= e^{(\operatorname{Re}\lambda_1 + i\operatorname{Im}\lambda_1)t} \cdot (h_1 + h_2) = e^{\operatorname{Re}\lambda_1 t} \cdot e^{i\operatorname{Im}\lambda_1 t} \cdot (h_1 + h_2) = \\ &= e^{\operatorname{Re}\lambda_1 t} (\cos(\operatorname{Im}\lambda_1 t) + i \sin(\operatorname{Im}\lambda_1 t)) \cdot (h_1 + h_2) = \\ &= e^{\operatorname{Re}\lambda_1 t} [h_1 \cos(\operatorname{Im}\lambda_1 t) - h_2 \sin(\operatorname{Im}\lambda_1 t) + h_1 \sin(\operatorname{Im}\lambda_1 t) + h_2 \cos(\operatorname{Im}\lambda_1 t)] \end{aligned}$$