Lineare Algebra I und II

Skript zur Vorlesung von Prof. Dr. Carl-Friedrich Bödigheimer

Wintersemester 2014/2015, Sommersemester 2015
Stand: 29. Mai 2015

Hinweis:
Im Sommersemester (ab etwa Kapitel 5) wird dieses Skript erstellt von Jürgen Kanzler.
Fehler, Korrekturen oder sonstige Anmerkungen zum Skript können gern an `s6jukanz@uni-bonn.de` geschickt werden.

Inhaltsverzeichnis

Überblick

Achtung:

Diese Version des Skriptes ist nicht vollständig korrigiert! Verbesserungsvorschläge, Rechtschreibfehler und inhaltliche Fehler dürfen gerne an linaskript@tauradian.de geschickt werden. Wir freuen uns über Rückmeldung!

Vorwort

Lineare Algebra:

- Theorie der linearen Gleichungssysteme
- Theorie der Vektorräume und linearen Abbildungen
- Theorie der Matrizen und Vektoren
- Unbekannte / Variablen x kommen nur zur ersten Potenz vor
- Keine gemischten Terme $x_i \cdot x_j$

1 Gleichungssysteme

1.1 Rechnen im $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Algebraische Aspekte

Definition 1.1.1. Grundkörper $\mathbb{R}$ = *reelle Zahlen*

Definition 1.1.2. Der $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ besteht aus Elementen, die man sich auf zwei Weisen vorstellt:

(i) Zahlentupel = Zeilenvektoren: $x = (x_1, \ldots, x_n)$

- x_i = Einträge, Koordinaten, Komponenten
  z.B. Punkte im $\mathbb{R}^3 : P = (x_1, x_2, x_3)$

(ii) Spaltenvektoren: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Für beide Auffasungen gibt es nun Operationen, wir notieren sie für einen Spaltenvektor:

- Addition: $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$
- Skalierung: $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$
- Nullvektor: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Unterschied: Wird bei der Matrizenmultiplikation deutlich werden.

Satz 1.1.3. ***Rechenregeln***
$x + (y + z) = (x + y) + z$
$x + y = y + x$
$x + 0 = x$
$-x = (-1) \cdot x$
$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$

Definition 1.1.4. Skalarprodukt
$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ definiert man ein sogenanntes **Skalarprodukt**: $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
$\langle x, y \rangle$ ist linear in x (bei festem y) und linear in y (bei festem x). Das nennt man bilinear.

Satz 1.1.5. ***Rechenregeln***
$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
$\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$
$\langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$
$\langle 0, y\rangle = 0$
$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \cdot \langle x, y\rangle$
$\langle x, \mu y\rangle = \mu \cdot \langle x, y\rangle$
$(\forall y : \langle x, y\rangle = 0) \implies x = 0$

Beweis. Angenommen $x \neq 0 \Rightarrow \exists i : x_i \neq 0$.
Setze $y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \text{i} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, also $y_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$
Dann gilt $0 = \langle x, y\rangle = x_i \cdot y_i = x_i$. Widerspruch. □

Das waren algebraische Aspekte (unabhängig von $\mathbb{R}$, gilt in jedem Körper $\mathbb{K}$ bzw. in seinem Spaltenvektorraum K^n)

1.1.2 Geometrische Aspekte

Definition 1.1.6.

- *Betrag*: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots}$ Diese Formel ist die Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$
- *Winkelmessung*: $\cos(x, y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$, $(x, y \neq 0)$
- *Matrix* = rechteckiges Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
  Der erste Index zählt die Zeilen, der zweite Index zählt die Spalten.

  Spalte: $S_j(A)$ j-te Spalte
  Zeile: $Z_i(A)$ i-te Zeile

- *Nullmatrix* alle Einträge 0
- *Skalierung* von Matrizen: $\lambda \cdot A$ = jedes Element mit Lambda multiplizieren
- Addition, Subtraktion von Matrizen erfolgt komponentenweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{mn}$ kann als Riesenspaltenvektor oder Riesenzeilenvektor oder Mittelweg mit n Spalten und m Zeilen aufgefasst werden.

Das Produkt einer $(m \times n)$-Matrix A mit einem Spaltenvektor x liefert einen neuen Spaltenvektor:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Satz 1.1.7. *Wir betrachten die Multiplikation mit einem festem A als Funktion als Funktion $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$.*

- $T_A(0) = 0$
- $T_A(\lambda x) = \lambda T_A(x)$
- $T_A(x' + x'') = T_A(x') + T_A(x'')$

1.1.3 Lineare Gleichungssysteme

Definition 1.1.8. Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System von m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ der Art:

$$\begin{array}{ll} (G_1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ (G_m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}$$

Die a_{ij} mit $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ heißen Koeffizienten die $b_i = 1, \dots, m$ heißen Werte des LGS. Wichtig: alles ist durchnummeriert.

Kompakte Schreibweise
$A = (a_{ij})$ = Matrix der Koeffizienten
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = Spaltenvektor der Unbekannten
$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Spaltenvektor der Werte
$A \cdot x = b$

Notation:
Gegeben A und b
$(A|b)$ = erweiterte Matrix

Definition 1.1.9. Ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, der simultan alle Gleichungen löst, heißt Lösung des LGS.

$$\mathcal{L}(A|b) := x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n | Ax = b \subseteq \mathbb{R}^n$$

Bemerkung 1.1.10.
1. $A \in \mathbb{R}^{n \cdot m}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$
2. Alles ist durchnummeriert
3. Es ist möglich, dass alle Koeffizienten $= 0$ sind: $A = 0$ ("triviales" LGS)
   $\mathcal{L}(0|b) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & b = 0 \\ \emptyset, & b \neq 0 \end{cases}$
4. Es ist möglich, dass eine Zeile von A null ist.
   $b_j = 0 \implies$ Diese Gleichung ist überflüssig, $b \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(A|b) = \emptyset$
5. Es kann sein, dass eine Spalte von A null ist
   $a_{1i} = a_{2i} = ... = 0 \implies x_i$ "überflüssig"

Definition 1.1.11. Ist $b = 0$, so heißt das LGS $(A|0)$ homogen . Ist $b \neq 0$ so heißt das LGS inhomogen.

Bemerkung 1.1.12. Was hat das alles mit $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu tun?
$x \mapsto y := A \cdot x$

1. $(A|b)$ hat eine Lösung (d.h. $\mathcal{L}(A|b) \neq \emptyset$) genau dann, wenn $b \in \mathrm{Bild}(T_A) = T_A(\mathbb{R}^n) =$ Wertemenge gibt, es also ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $T_A(x) = b$ gibt.
2. $0 \in \mathcal{L}(A|0)$ (d.h. $\mathcal{L}(A|0) \neq \emptyset$)

Ein homogenes System hat immer mindestens eine Lösung, nämlich die triviale Lösung $x = 0$.

1.1.4 Struktur der Lösungsmenge

Satz 1.1.13. *(homogener Fall)*

(i) $(A|0)$ *hat immer die triviale Lösung*

(ii) $x \in \mathcal{L}(A|0) \implies \lambda x \in \mathcal{L}(A|0)$

(iii) $x, x' \in \mathcal{L}(A|0) \implies x + x' \in \mathcal{L}(A|0)$

Satz 1.1.14. *(inhomogener Fall)*

(i) $x, x' \in \mathcal{L}(A|b) \implies x - x' \in \mathcal{L}(A|0)$

(ii) Sei $\overline{x} \in \mathcal{L}(A|b)$

Dann gibt es zu jeder anderen Lösung $x \in \mathcal{L}(A|b)$ *genau eine Lösung* ζ *des homogenen Systems mit* $x = \overline{x} + \xi$

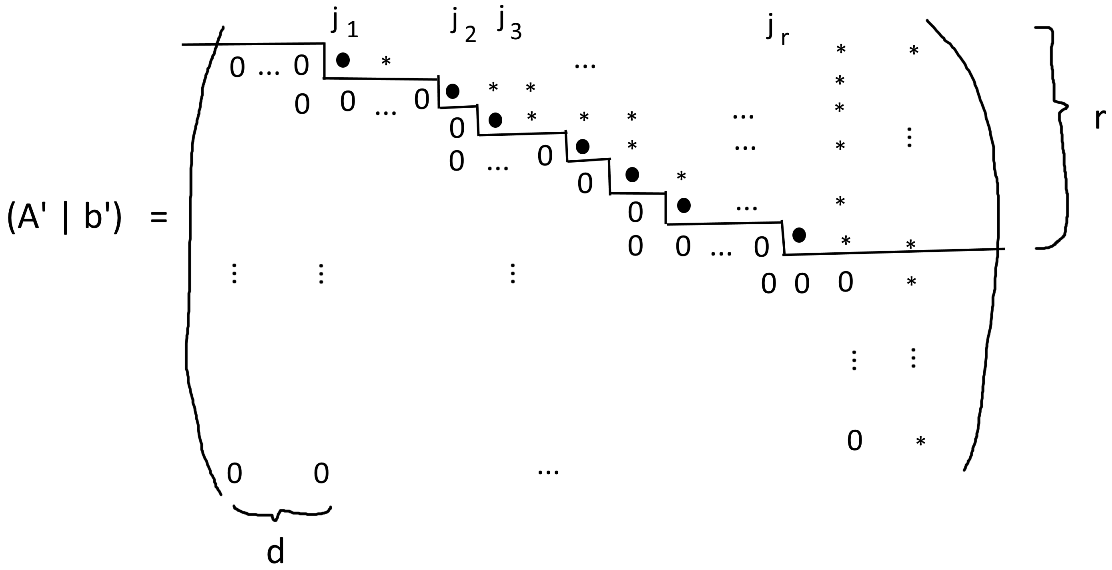
Beweis. (i) $x, x' \in \mathcal{L}(A|b) \implies Ax = b, Ax' = b$
$Ax - Ax' = b - b = 0$
$A(x - x') = 0$
Also $x - x' \in \mathcal{L}(A|0)$

(ii) Es gilt $A\overline{x} = b$
Ist $x \in L(A|b)$, also $Ax = b$, so haben wir nach (i) $x - \overline{x} = \xi \in \mathcal{L}(A|0)$
Also: $x = \overline{x} + \xi$
Und ξ ist eindeutig bestimmt: $x - \overline{x} = \xi$
$x - \overline{x} = \xi'$
$\implies \xi = \xi'$

□

1.1.5 Gauß-Algorithmus

Das Ziel des Gauß-Algorithmus ist es, ein LGS $Ax = b$ durch Zeilenumformungen in die sogenannte Zeilenstufenform zu bringen; d.h. am Ende soll unser LGS folgendermaßen aussehen:



Die Einträge • sind von Null verschieden, $*$ ist beliebig und alles unter der Treppenlinie ist Null. Die Größen d und r werden wichtige Charakteristiken sein.
Weil wir nur Zeilenumformungen verwenden werden, gilt:
$\mathcal{L}(A|b) = \mathcal{L}(A'|b')$
Und wir erhalten rekursiv eine Darstellung der Lösungsmenge.

Wir definieren zunächst den Begriff der Treppenfunktion.

Definition 1.1.15. Eine Treppenfunktion τ ist eine Funktion, die Spaltennummern $0, 1, ..., n$ auf Zeilennummern $0, 1, ..., m$ abbildet, sodass folgende Eigenschaften gelten:

- $\tau(0) = 0$
- $\tau(j) \leq \tau(j+1)$ $(1 \leq j \leq n)$ monoton
- $\tau(j) = \tau(j-1) oder \tau(j-1) + 1$ $(1 \leq j \leq n)$ Stufenhöhe ≤ 1

Eine Matrix $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ ist in Zeilenstufenform, wenn es eine treppenfunktion τ gibt, sodass gilt:

- (ZSF 1) $a_{ij} = 0$ für $i > \tau(j) (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$
- (ZSF 2) $a_{ij} \neq 0$ für $i = \tau(j)$, falls $\tau(j) > \tau(j-1)$ $(1 \leq j \leq n)$

Bemerkung 1.1.16. Wir werden zwar den Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Matrix $(A|b)$ anwenden, aber die Treppenfunktion bezieht sich nur auf A; wie werden sagen, $(A|b)$ sei in Zeilenstufenform, wenn A in Zeilenstufenform ist.

Bemerkung 1.1.17.
- Wir nennen die Stellen $1 \leq j_1 < ... < j_r \leq n$, an dem τ springt (also $\tau(j_k) = \tau(j_k - 1) + 1$ die Sprungstellen.
- Die Anzahl der Sprungstellen nennen wir den Rang $rg(A) = r$ der Matrix (oder auch Zeilenrang); es ist immer $0 \leq r \leq m, n$

Gauß-Algorithmus
Eingabe $(A|b)$
$A \in Mat_{m,n}(A), b \in \mathbb{R}^m$
Start: Setze $p \to 0, q \to 0$ (Hilfsvariablen)

1. Suche in den Spalten $S_j(A)$ in der Reihenfolge $j = q+1, ..., n$ einen Eintrag $a_{ij} \neq 0$ in der Reihenfolge $i = p+1, ..., m$.
   - Gibt es kein solchen a_{ij}, so gehe zu ENDE.
   - Sei $a_{ij} \neq 0$ mit j minimal unter $q < j \leq n$ und i minimal unter $p < i \leq m$
2. Vertausche Zeile i mit Zeile $p+1$
3. Subtrahiere von Zeile $i+1$ das $\frac{a_{p+1,q}}{a_{p,q}}$-fache der Zeile p.
   Subtrahiere von Zeile $i+2$ das $\frac{a_{p+2,q}}{a_{p,q}}$-fache der Zeile p.
   ...
   Subtrahiere von Zeile m das $\frac{a_{m,q}}{a_{p,q}}$-fache der Zeile p.
4. Setze $p \to p+1, q \to j$.
   - Ist $p = m$ oder $q = n$, gehe zu ENDE
   - Sonst gehe zu 1.

ENDE.
Ausgabe: $(A'|b')$ in Zeilenstufenform.

Bemerkung 1.1.18. Man nennt das a_{ij} in 1. ein Pivotelement .

Satz 1.1.19. *Jedes LGS $(A|b)$ wird durch den Gauß-Algorithmus in ein äquivalentes LGS $(A'|b')$ mit gleicher Lösungsmenge überführt.*

Beweis.

1. Zunächst ist offensichtlich, dass für $A = 0$ das LGS $(0|b)$ bereits in Zeilenstufenform ist, und zwar für die konstante Treppenfunktion $\tau(0) = \tau(1) = ... = \tau(n) = 0$. Wie führen den Beweis durch Induktion über m.
2. Für $m = 1$ und $A \neq 0$ sei $a_{11} = ... = a_{1j-1} = 0$ und $a_{1j} \neq 0$. Dann ist A bereits in Zeilenstufenform mit $\tau(0) = ... = \tau(j-1) = 0$ und $\tau(j) = ... = \tau(n) = 1$.
3. Für $m > 1$ führt ein erster Durchlauf des Gauß-Algorithmus für $A \neq 0$ an einem ersten Pivotelement $a_{i_1 j_1} \neq 0$. Nach Vertauschen und den Subtraktionen haben wir ein System und eine partiell definierte Treppenfunktion. Der zweite Durchlauf des Gauß-Algorithmus ist eigentlich ein erster Durchlauf auf das neue System. Dieses hat noch $m-1$ Zeilen. Nach Induktion wird es in Zeilenstufenform überführt.

$\square$

2 Körper und Vektorräume

2.1 Körper

2.1.1 Körperaxiome und Unterkörper

Definition 2.1.1. Ein *Körper* ist eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Verknüpfungen $+$ (Addition),$\cdot$ (Multiplikation), die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Addition $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
  1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
  2. $a + b = b + a$ (Kommutativität)
  3. Es gibt ein neutrales Element der Addition $\tilde{x} \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $\tilde{x} + x = x$. Dieses bezeichnen wir mit 0.
  4. Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{K}$, sodass $x + (-x) = 0$. (Existenz von additiv Inversen)
- Multiplikation $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
  5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativität)
  6. $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität)
  7. Es gibt ein neutrales Element der Multiplikation $\tilde{x} \in \mathbb{K}$, sodass für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $\tilde{x} \cdot x = x$. Dieses Element bezeichnen wir mit 1.
  8. Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein Element $x^{-1} \in \mathbb{K}$, sodass $x \cdot x^{-1} = 1$. (Existenz von multiplikativ Inversen)
- Zusammenhang zwischen Addition und Multiplikation
  9. $a \cdot (b + c) = (a + b) \cdot c$ (Distributivität)
  10. $1 \neq 0$

Definition 2.1.2. Eine Teilmenge $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$ eines Körpers $\mathbb{K}$ nennen wir *Unterkörper* , wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $x, y \in \mathbb{K}' \Rightarrow x + y \in \mathbb{K}', x \cdot y \in \mathbb{K}'$ (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation)
2. $0, 1 \in \mathbb{K}'$
3. $x \in \mathbb{K}' \Rightarrow -x \in \mathbb{K}'$
4. $x \in \mathbb{K}' \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{K}'$

Bemerkung 2.1.3. Wie wir es aus der Schule gewohnt sind, schreiben wir vereinfachend $x - y$ statt $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ statt $x \cdot y^{-1}$. Dies sind jedoch erstmal nur Notationen, da wir keine Verknüpfung $-$, oder $/$ definiert haben.

Beispiel 2.1.4. Beispiele für Körper, die uns allen geläufig sind sind die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, oder auch die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, welche wir im nächsten Abschnitt definieren werden. Ein Beispiel für einen Teilkörper von $\mathbb{R}$, der nicht der Körper rationalen Zahlen ist, ist $(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], +, \cdot)$, wobei $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$

2.1.2 Komplexe Zahlen

Definition 2.1.5. Der Körper der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ besteht aus der Menge $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Verknüpfungen

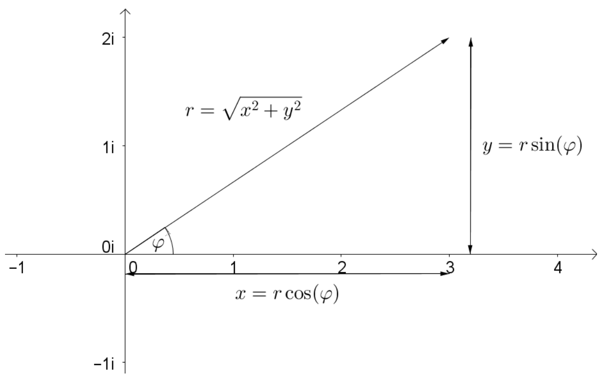
- $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- $(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + x' \cdot y)$

Es ist:

- $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$
- $1_{\mathbb{C}} = e_1 = (1, 0)$
- $-(x, y) = (-x, -y)$
- $(x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$

wie sich jeweils leicht nachrechnen lässt. Des weiteren stellen wir fest, dass $(e_2)^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0)$ und nennen e_2 die *imaginäre Einheit* i. Wir schreiben $(x, y) = x + iy$.
Dass für Addition und Multiplikation die gewünschten Eigenschaften (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität) gelten lässt sich leicht nachrechnen.

Definition 2.1.6. $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ kann als Zahl in der Gaußschen Zahlenebene interpretiert werden, die durch einen Winkel und eine Länge definiert ist.



mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist diese Darstellung eindeutig, wobei

$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$

r und φ nennen wir die *Polarkoordinaten* von z. Wir schreiben $z = (r; \phi)$

2.1.3 Endliche Körper

Bemerkung 2.1.7. Nachdem alle Körper, die uns bis hier hin begegnet sind unendlich viele Elemente hatten wollen wir nun versuchen zu einer Primzahl p einen Körper mit genau p Elementen, also einen endlichen Körper zu finden.

Definition 2.1.8. Man kann zeigen, dass es zu gegebenen $n, z \in \mathbb{Z}, n > 1$ eindeutige Zahlen $a, r \in \mathbb{Z}$ gibt mit $0 \leq r < n$, sodass $z = an+r$. Dies ist die Division durch n mit Rest r. Für ein gegebenes n wollen wir alle Zahlen als gleich auffassen, bei denen r gleich ist und sie in einer Menge zusammenfassen. Wir bezeichnen die Menge

$$[z] = \{z' \in \mathbb{Z} | z' = a'n + r, a' \in \mathbb{Z}\} = \{z' \in \mathbb{Z} | z' - z \text{ ohne Rest durch } n \text{ teilbar}\}$$

als die *Restklasse von z modulo n* . Und nennen $z' \in [z]$ *Repräsentant* der Restklasse .

2.1.4 Inverse in $\mathbb{F}_p$

Satz 2.1.9. *Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $0 < b < a$, dann gilt:*

1. *Der $ggT(a,b)$ ist der letzte nicht verschwindende Rest r_n der folgenden Kette von Divisionen-mit-Rest*
$$\begin{array}{lll} a = q_1 b + r_1 & \text{mit} & 0 \le r_1 < b; q_1, r_1 \in \mathbb{N} \\ b = q_2 r_1 + r_2 & \text{mit} & 0 \le r_2 < r_1; q_2, r_2 \in \mathbb{N} \\ r_1 = q_3 r_2 + r_1 & & \\ r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n & \text{mit} & 0 \le r_n < r_{n-1}; q_n, r_n \in \mathbb{N} \\ r_{n-1} = q_{n+1} r_n & \text{mit} & q_{n+1} \in \mathbb{N} \end{array}$$
2. *Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft*
$$ggT(a,b) = \alpha a + \beta b.$$

Beweis.

1. Da die r_i strikt fallend, denn $b > r_1 > r_2 > ... > r_n > r_{n+1} = 0$, bricht der Algorithmus ab. Ist $t \in \mathbb{Z}$ ein Teiler von a und b, so ist t auch Teiler von r_1 und damit auch von r_2 usw. bis schließlich r_n. Umgekehrt gilt: Ist t Teiler von r_n, so auch von r_{n-1}, r_{n-2}, usw. bis a und b.
2. Löse die Gleichung rückwärts auf und setze ein.

□

2.1.5 Charakteristik eines Körpers

Bisher konnte man den Eindruck gewinnen als läge $\lambda \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$, da öfters schon so gerechnet wurde. Dies ist nicht so. Zwar gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, aber $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ sind keine Teilmenge von $\mathbb{F}_p$. Daher soll von jetzt an als Vereinbarung gelten, dass für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{K}$ gilt
$$nx := x + x + ... + x \text{ (n-mal)}.$$
Dies ist also nicht die Multiplikation von Körperelementen. Nun das Ganze etwas genauer in folgender

Definition 2.1.10. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &:= 0 \\ \varepsilon_1 &:= 1 \\ \varepsilon_{n+1} &:= \varepsilon_n + 1 \qquad (n \ge 1) \\ \varepsilon_n &:= -\varepsilon_{-n} \qquad (n \le -1) \end{aligned}$$
Also
$$\varepsilon_n := n \cdot 1$$

Definition 2.1.11. Falls kein $\varepsilon_n = 0$ mit $n > 0$, so hat $\mathbb{K}$ die *Charakteristik* 0, und schreibt
$$char(\mathbb{K}) = 0.$$
Andernfalls nennt man das kleinste $n \ge 1$ mit $\varepsilon_n = 0$ die *Charakteristik* von $\mathbb{K}$, schreibe
$$char(\mathbb{K}) = n.$$

Beispiel 2.1.12.
1. $char(\mathbb{Q}) = char(\mathbb{R}) = char(\mathbb{C}) = 0$
2. $char(\mathbb{F}_p) = p$ (p ist eine Primzahl)

Bemerkung 2.1.13. Ist $char(\mathbb{K}) = 0$, so ist $\mathbb{Q}$ ein Unterkörper.
Denn
$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \frac{n}{m} &\longmapsto \varepsilon_n \cdot \varepsilon_n^{-1}, \end{aligned}$$
so ergibt sich $\varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon_{a+b}$ und $\varepsilon_a \cdot \varepsilon_b = \varepsilon_{ab}$ und somit erhält man ein $\mathbb{K}' = \{x - \varepsilon_n \cdot \varepsilon_m^{-1} | n, m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 0\}$ mit $\varepsilon_0 = 0$ und $\varepsilon_1 = 1$.

Definition 2.1.14. Eine Funktion $\phi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}'$ zwischen zwei Körpern heißt *Körperhomomorphismus* , falls gilt

1. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
2. $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$
3. $\phi(0) = 0$ und damit auch $\phi(-x) = -\phi(x)$
4. $\phi(1) = 1$ und damit auch $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$, falls ϕ injektiv und $x \neq 0$

Beispiel 2.1.15. $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit $x \longmapsto (x, 0)$ ist ein *Körperisomorphismus* auf einem Unterkörper.

Satz 2.1.16. *Ist $char(\mathbb{K}) > 0$, so ist $char(\mathbb{K})$ eine Primzahl.*

Beweis. Sei $char(\mathbb{K}) = n$ mit $n > 0$ und $n = a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ sowie $1 < a,\ b < n$. Das heißt n ist keine Primzahl. Dann wäre $0 = \varepsilon_n = \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b$ mit $\varepsilon_a, \varepsilon_b \neq 0$ und somit gäb es einen Nullteiler. □

2.2 Vektorräume

2.2.1 Vektorraumaxiome

Im folgenden Abschnitt ist mit $\mathbb{K}$ immer ein Körper gemeint.

Definition 2.2.1. Ein *Vektorraum V* über $\mathbb{K}$ ist eine Menge mit einer Verknüpfung und einer Operation.
Addition:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \text{ mit } (x, y) \longmapsto x + y$$

Skalierung:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V \text{ mit } (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x, y \in V : \quad x + y = y + x$
2. $\forall x, y, z \in V : \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists 0 \in V\ \forall x \in V : \quad x + 0 = x = 0 + x$
4. $\forall x \in V \exists -x : \quad x + (-x) = 0 = (-x) + x$
5. $\forall x \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
6. $\forall x \in V : \quad 1 \cdot x = x$
7. $\forall \lambda \in K,\ \forall x, y \in V : \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
8. $\forall x \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

Proposition 2.2.2. *1.* $0 \cdot x = 0$

2. $\lambda \cdot 0 = 0$

3. $(-1) \cdot x = -x$

4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in V: \quad \lambda \cdot x = 0 \implies \lambda = 0$ *oder* $x = 0$

Beweis. Übungsaufgabe □

Beispiel 2.2.3.

1. $\mathbb{K}^n$ mit $n > 0$ ist ein Vektorraum. Denn die Addition ist definiert durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ und die Skalierung durch $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$. Die Eigenschaften sind leicht nachzuprüfen.
2. Insbesondere ist $\mathbb{K}^0 = \{0\}$ der *triviale* Vektorraum und $\mathbb{K}^1$ Vektorraum über sich selbst.
3. Auch $Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ mit festem $m, n \in \mathbb{N}$ ist ein Vektoraum. Auch hier lassen sich Addition und Skalierung sowie deren Eigenschaften leicht nachweisen.

Bemerkung 2.2.4. Vektorräume über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ nennt man *rational*, *reell* bzw. *komplex*.

2.2.2 Unterraum

Sei V im Folgenden ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 2.2.5. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *Unterraum* von V, falls gilt

1. $u, u' \in U \implies u + u' \in U$ (abgeschlossen unter der Addition)
2. $\lambda \in \mathbb{K}\ u \in U \implies \lambda \cdot u \in U$ (abgeschlossen unter Skalierung)

Bemerkung 2.2.6. Sei $u \in U$ beliebig und $\lambda = 0$, dann folgt daraus $0 \cdot u = 0 \in U$.

Beispiel 2.2.7.

1. $U = 0 = \{0\}$ ist Unterraum in jedem Vektorraum.
2. $V = \mathbb{K}^n,\ i = 1, ..., n\ U_i := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n | x_i = 0\}$ ist Unterraum von V.
   $U_I := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n | x_i = 0 \text{ für } i \in I\}\ I \subset 1, ..., n$ ist Unterraum von V.
3. $V = \mathbb{K}^n \quad U = \{x = (x_1, ..., n) \in \mathbb{K}^n | x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$ ist Unterraum von V.
4. $v \in V \quad U = \{tv | t \in \mathbb{K}\}$ ist Unterraum von V. Diesen Unterraum bezeichnet man auch als *Spann* bzw. *lineares Erzeugnis* von v. Manchmal nennt man ihn auch *lineare Hülle* von v. Doch dazu später mehr.
5. Sei $u, v, w \in V$, dann ist $U = Span(u, v, w) = \{x = \lambda u + \mu v + \nu w \in V | \lambda, \mu\nu \in \mathbb{K}\}$
6. $(A|0)$ sei homogenes LGS und $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$, dann ist $Ł(A|0) \subset \mathbb{K}^n$ ein Unterraum.
7. U_1, U_2 seien Unterräume von V, dann ist auch $U = U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V. Allgemeiner: $U_i \subset V\ i \in I \implies U := \bigcap_{i \in I} U_i$. I muss nicht endlich sein. **Achtung!** Die Vereinigung von Unterräumen sind im Allgemeinen keine Unterräume mehr. Als einfaches Beispiel dafür dienen hier die beiden Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^2$ als Unterräume. Addiert man nämlich $(1, 0)$ aus dem x-Achsen-Unterraum zu $(0, 1)$ aus dem y-Achsen-Unterraum, so erhält man $(1, 1)$. $(1, 1)$ liegt aber nicht in der Vereinigung von den beiden Koordinatenachsen. **Achtung!** Auch das mengenmäßige Komplement ist im Allgemeinen kein Unterraum. Das orthogonale Komplement allerdings schon. Denn sei $V = \mathbb{R}^n$ und $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix}$, dann ist $U = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 n_1 +, ..., +x_n n_n = 0\}$
8.

2.2.3 Körperwechsel

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[d, hook] & \times & \mathbb{L} \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathbb{L} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{L} & \times & \mathbb{L} \arrow[r] & \mathbb{L}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\lambda, x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \lambda \cdot x \arrow[d, equal] \\
(\lambda, x) \arrow[r, mapsto] & \lambda x
\end{tikzcd}$$

2.3 Lineare Abbildungen

Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ einen Körper; V und W seien Vektorräume über $\mathbb{K}$ (Man sagt auch: $\mathbb{K}$-Vektorräume).

Definition 2.3.1. Eine Funktion $f : V \longrightarrow W$ ist eine *lineare Abbildung* , falls gilt:

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, mit $x, y \in V$

(iii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, mit $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$.

Hierbei folgt (i) offensichtlich aus (iii): $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$.

Lineare Abbildungen sind die zentralen Objekte der linearen Algebra; man könnte diese auch als Studium der linearen Abbildungen bezeichnen. Wir betrachten nun einige Beispiele:

Beispiel 2.3.2. 1. Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor x, wie wir sie bereits direkt zu Beginn eingeführt haben, ist eine lineare Abbildung: $V = \mathbb{K}^n$; $W = \mathbb{K}^m$; $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$
$f = T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $x \longmapsto A \cdot x$

2. Für ein $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ haben wir ein lineares Gleichungssysteme studiert. Ein Ergebnis war $W = \mathcal{L}(A|0) \subseteq \mathbb{K}^n$, die Lösungsmenge im homogenen Fall ist ein Untervektorraum. Mit $r = \mathrm{rg}(A)$ und $l = n - r$ erhalten wir die bekannte Parameterdarstellung des Lösungsraums als lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^l &\longrightarrow \mathcal{L}(A|0) \\ u &\longmapsto L(u) \end{aligned}$$

Diese lineare Abbildung ist außerdem bijektiv. (Eine solche Abbildung nennt man auch *Isomorphismus.*)

3. Geometrische Beispiele: Drehung, Streckung, Scherung und Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ lassen sich als Matrizenmultipliktion darstellen und sind somit lineare Abbildungen.

$$f = T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto A \cdot x$$

Die zur Drehung um ϕ assoziierte Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Die Matrix zur Streckung um λ_1 entlang der x-Achse und um λ_2 entlang der y-Achse ist:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Bei der Scherung bleibt eine Achse erhalten, in diesem Beispiel die x-Achse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ \alpha x + y \end{pmatrix}$$

Zur Spiegelung an der y-Achse betrachte man

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

die Spiegelung an der Winkelhalbierenden ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Auch die Projektion ist eine lineare Abbildung. Jeder Vektor $v \in V = \mathbb{R}^2$ kann eindeutig geschrieben werden als $v = w + w'$ mit $w \in W$ und einem Vektor w', der auf der Geraden liegt, die von $\tilde{w}'$ aufgespannt wird. Die Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 = V \to W, w + w' = v \to w$ ist eine (surjektive!) lineare Abbildung.

4. Analytische Beispiele
   Auf dem Vektorraum $V = C^{q+1}(\mathbb{R})$ der $(q+1)$-mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen (mit der Addition $(f+g)(x) := f(x) + g(x), f, g \in V$) ist die Ableitung eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} D : C^{q+1}(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^q(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ die Ableitung von f nach x. Wegen der bekannten Ableitungsregeln, dass die Ableitung der Summe gleich der Summe der Ableitungen ist, und dass die Ableitung einer skalierten Funktion gleich der skalierten Ableitung ist, sind Ableitungen lineare Abbildungen. Insbesondere gilt für beliebig oft differenzierbare Funktionen ($q = \infty$):

$$\begin{aligned} D : C^{\infty}(\mathbb{R}) &\longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Auf dem Vektorraum $V = L^1([0,1])$ der über $[0,1]$ integrierbaren Funktionen ist die Integration eine lineare Abbildung.

$$\begin{aligned} I : L^1([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

mit $a, b \in [0,1]$. Hier gilt die analoge Regel, dass das Integral einer Summe gleich der Summe der Integrale ist.
Betrachten wir als letztes Beispeil $V = \mathcal{F}_{kov}$, den Vektorraum der reellen konvergenten Folgen $a = (a_0, a_1, \ldots)$. Die Grenzwertbildung ist eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \lim : V = \mathcal{F}_{konv} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a = (a_n) = (a_0, a_1, \ldots) &\longmapsto \lim_{n \to \infty} a_n \end{aligned}$$

Die Summe zweier konvergenter Folgen ist wieder eine konvergente Folge, also ist die Grenzwertbildung eine lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} (a_n) \longmapsto \lim a_n, \; b_n &\longmapsto \lim b_n \\ (a_n) + (b_n) &\longmapsto \lim a_n + \lim b_n. \end{aligned}$$

Proposition 2.3.3. *Es seien U, V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$, dann gilt:*

(i) Die Identität $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V, x \longmapsto x$ ist linear.

(ii) Sind $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen, dann auch die Verknüpfung $g \circ f : U \to W$.

(iii) Die Nullabbildung $0 : V \to W, x \mapsto 0$ ist eine lineare Abbildung.

(iv) Sind f, f' lineare Abbildungen, dann ist auch λf, definiert durch $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, mit $\lambda \in \mathbb{K}$, wieder eine lineare Abbildung.

(v) *Genauso ist auch* $f + f'$ *mit* $(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$ *eine lineare Abbildung. Beides folgt einfach aus der Tatsache, dass* f *und* f' *lineare Abbildungen sind (*f' *ist* nicht *die Ableitung von* f*!).*

(vi) *Sei* $f : V \longrightarrow W$ *eine lineare bijektive Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung* $f^{-1} : W \to V$ *linear.*

Beweis von Proposition (vi). Zu zeigen: $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$. Seien $x, y \in W$. Da f bijektiv ist gilt: $\exists! x', y' \in V : x = f(x'), y = f(y')$; „$\exists!$“ bedeutet „es gibt eindeutig“. Dann folgt mit der Linearität von f:

$$f^{-1}(x + y) = f^{-1}(f(x') + f(y')) = f^{-1}(f(x' + y') = x' + y' = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

Damit haben wir die Bedingung (ii) aus Definition 2.3.1 verfiziert. Wir zeigen nun Bedingung (iii): Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zu zeigen: $f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x)$. Auch dies folgt mit x' wie oben aus der Linearität von f:

$$f^{-1}(\lambda x) = f^{-1}(\lambda f(x')) = f^{-1}(f(\lambda x')) = \lambda x' = \lambda f^{-1}(x)$$

□

Definition 2.3.4. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.

(i) Die Teilmenge von W $\mathrm{im}(f) = f(V) := \{x \in W | x = f(x') \text{ für } x' \in V\} \subseteq W$ heißt *Bild von* f (engl. *image*).

(ii) Die Teilmenge von V $\ker(f) = f^{-1}(0) := \{x \in V | f(x) = 0\} \subseteq V$ heißt *Kern von* f (engl. *kernel*).

Proposition 2.3.5. *Sei* $f : V \to W$ *eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen.*

(i) *Das Bild* $\mathrm{im}(f)$ *ist ein Untervektorraum in* W*.*

(ii) *Der Kern* $\ker(f)$ *ist ein Untervektorraum in* V*.*

(iii) *Ist* $b \in \mathrm{im}(f)$ *und etwa* $f(\xi) = b$*, so ist* $f^{-1}(b)$ *ein affiner Unterraum und zwar* $f^{-1}(b) = \ker(f) + \xi$*.*

Ein Spezialfall von (iii) ist, dass die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems im inhomogenen Fall ein affiner Unterraum ist.

Beweis. (i) Seien $x, y \in \mathrm{im}(f)$, sodass $x = f(x'), y = f(y')$ für $x', y' \in V$. Daraus folgt, dass $x + y = f(x') + f(y') = f(x' + y')$. Also liegt $x + y$ im Bild von f.

(ii) Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y) = 0$, also $x, y \in \ker(f)$. Dann gilt $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0$. Damit liegt auch $x + y$ im Kern von f.

(iii) Sei $b \in \mathrm{im}(f)$ mit $f(\xi) = b$. Für $x \in V$ mit $f(x) = b$ gilt:

$$f(x - \xi) = f(x) - f(\xi) = b - b = 0$$

Also liegt $x - \xi$ im Kern von f.

□

Beispiel 2.3.6. Betrachten wir wieder die Matrizenmultipliktion: $f = T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x \mapsto T_A(x) = A \cdot x$ mit $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

- $\ker(T_A) = T_A^{-1}(0) = \mathcal{L}(A|0)$. Der Kern ist der Lösungsraum des assoziierten linearen Gleichungssystems im homogenen Fall.

- $\mathrm{im}(T_A) = \{b \in \mathbb{K}^m | \mathcal{L}(A|b) \neq \}$. Das Bild ist die Menge der Vektoren, für die das assoziierte lineare Gleichungssystem im inhomogenen Fall lösbar ist.

- Falls $b \in \mathrm{im}(T_A)$ mit etwa $T_A(\xi) = b$, so ist $T_A^{-1}(b) = \mathcal{L}(A|b) = \mathcal{L}(A|0) + \xi$, der Lösungsraum des inhomogenen und lösbaren Falls.

Beispiel 2.3.7. Die *komplexe Konjugation* $^-$ ist ein Beispiel für eine Abbildung, die $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist.

$$\begin{gathered}^- : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy\end{gathered}$$

Die komplexe Konjugation ist ein Körperisomorphismus, denn

$$\overline{0} = 0;\ \overline{1} = 1;\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ (Multiplikativität).}$$

$\mathbb{C}$-Linearität würde bedeuten $\overline{z_1 z_2} = z_1 \cdot \overline{z_2}$. Die Abbildung kann also nicht sowohl ein Körperisomorphismus sein als auch $\mathbb{C}$-linear. Da die komplexe Konjugation multiplikativ ist, ist sie lediglich $\mathbb{R}$-linear:

$$\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z} \Leftrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} = \mathrm{Fix}(^-)$$

Definition 2.3.8. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $f : V \to W$ heißt *affin* , falls es eine linere Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt, und ein $b \in W$ mit $f(x) = \varphi(x) + b$.

Beispiel 2.3.9.

1. Die Translation $\tau_b : W \to W$ mit $0 \neq b \in W, w \mapsto w + b$ ist immer eine affine Abbildung
2. Die Abbildung $f(x) = mx + b$ mit $m \in \mathbb{K}$ ist eine affine Abbildung. *Achtung!:* In der Schule und der Analysis werde solche Funktionen als lineare Funktionen bezeichnet. In der linearen Algebra sind dies aber im allgemeinen affine Funktionen!
3. Wir betrachten die Parameterdarstellung der Lösungsmenge $\mathcal{L}(A|b)$ eines Linearen Gleichungssystems $(A|b)$ der Größe $m \times n$, wobei $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n, r = rg(A), l = n - r$
   Es sei L^0 die Parameterdarstellung für den homogenen Fall, also
   $$L^0 : \mathbb{R}^l \to \mathcal{L}(A|b); U = (U_0, U_1, \dots, U_r) \mapsto L^0(U) = (U_0, L_1, U_1, L_2, U_2, \dots, L_r, U_r)$$
   wobei $L_1 = L_1(U_1, U_2, \dots, U_r), L_2 = L_2(U_2, U_3, \dots, U_r), \dots, L_r = L_r(U_r)$ Nun suchen wir uns irgend eine Lösung $\xi \in \mathcal{L}A|b$ des inhomogenen Gleichungssystems. Für den Lösungsraum des inhomogenen Gleichungssystems gilt nun:
   $$L = L^0 + \xi; L(U) = L^0(U) + \xi$$
4. Es sei f eine affine Abbildung. Offenbar ist $f(0) = b$ die Translationskonstante, während $f(x) - b = \Phi(x)$ der so genannte lineare Anteil ist. Damit hat man für affine Abbildungen folgende Gleichungen:
   $$\begin{aligned} f(\lambda x) - b =& \lambda(f(x) - b) \\ f(x + y) - b =& (f(x) - b) + (f(y) - b) = f(x) + f(y) - 2b \end{aligned}$$
5. Ist f eine lineare Abbildung, so ist $Im(f) \subseteq W$ ein linearer Unterraum.
   Ist f eine affine Abbildung, so ist $Im(f) \subseteq W$ ein affiner Unterraum.

Proposition 2.3.10. *Es sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Unterkörper von $\mathbb{L}$ (genau wie $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$) und V ein Vektorraum über Ł. Wir wissen, dass V dann auch ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Es kommt aber vor, dass eine Funktion $f : V \to W$ zwar linear ist, wenn man V als $\mathbb{K}$-Vektorraum betrachtet, es jedoch nicht ist, wenn man V als Ł-Vektorraum betrachtet.*

Beispiel 2.3.11. Ein Beispiel für die eben genannten Funktionen ist die komplexe Konjugation über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

$$\_ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; x + iy = z \mapsto \overline{z} = x - iy$$

Diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-Linear, da man leicht nachrechnen kann, dass $\lambda(x, y) \mapsto (x, -y)$. Sie ist jedoch nicht $\mathbb{C}$-Linear, wie man leicht am Beispiel der Multiplikation mit i sieht. Es ist:

$$i \cdot \overline{(x, y)} = i \cdot (x, -y) = (x, y) \neq (-x, -y) = \overline{(-y, x)} = \overline{i \cdot (x, y)}$$

Abgesehen von der Linearität bei Multiplikation mit einer komplexen Zahl besitzt die komplexe Konjugation aber viele nützliche Eigenschaften. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt nämlich

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$
$$\overline{0} = 0, \overline{1} = 1$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

2.3.1 Morphismen

Definition 2.3.12. Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, dann heißt f
Monomorphismus, wenn f injektiv
Epimorphismus, wenn f surjektiv
Isomorphismus, wenn f bijektiv Endomorphismus, wenn $V = W$ Automorphismus, wenn $V = W$, f bijektiv

Proposition 2.3.13. *Es seien $f : V \to W$, $g : W - U$ linear. Dann gilt*

- *f ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow$ $ker(f) = 0$*
- *$g \circ f$ ist ein Monomorphismus $\Leftrightarrow$ f ist ein Monomorphismus*
- *$g \circ f$ ist ein Epimorphismus $\Leftrightarrow$ f ist ein Epimorphismus*

3 Basen und Dimension

3.1 Erzeugendensystem

Definition 3.1.1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v, e_1, e_2, ..., e_n \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und

$$v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \tag{$*$}$$

Wir nennen $(*)$ eine Linearkombination (der $e_1, \ldots, e_n$ über $\mathbb{K}$), oder eine lineare Darstellung von v (durch $e_1, \ldots, e_n$ über $\mathbb{K}$). Ist $v = 0$, so nennt man $(*)$ eine lineare Relation zwischen den $e_1, \ldots, e_n$ (über $\mathbb{K}$). Sind alle $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, so nennt man $(*)$ eine triviale Linearkombination, oder triviale Darstellung von $v = 0$, oder eine triviale Relation.

Definition 3.1.2. Es sei $\xi \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Dann heißt

$$Span(\xi) := \{v \in V | \text{Es gibt endlich viele } e_1, \ldots, e_n \in \xi \text{ und } \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ so dass } v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n\}$$

Der Spann, oder das lineare Erzeugnis von ξ in V. Wir vereinbaren, dass $Span(\emptyset) = \{0\} = 0$.

Beispiel 3.1.3.
1. Ist $\xi = \{0\}$, so ist $Span(\xi) = 0$
2. Ist $u \in V, \neq 0$, so ist $Span(\{u\})$ die von u aufgespannte Gerade.
3. Sind $u_1, u_2 \neq 0$ nicht kollinear, also weder $u_1 \in Span(u_2)$ noch $u_2 \in Span(u_1)$, so ist $Span(u_1, u_2)$ eine Ebene.
4. Ist $V = \mathbb{K}^n$, so nennen wir $e_i = (0, 0, \ldots, \underset{\text{i-te Stelle}}{1}, \ldots, 0)$ den i-ten Einheitsvektor. Für $0 \leq m \leq n$ ist $\xi_m = \{e_1, \ldots, e_m\}$ und $Span(\xi_m) = \mathbb{K}^m \subseteq \mathbb{K}^n$, wobei einfach die letzten $n - m$ Koordinaten 0 sind.
5. Ist $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\xi = \{1, \sqrt{2}\}$, so ist $Span(\xi) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$
6. Sind $U_i \subseteq V, i \in I$ Untervektorräume eines Vektorraumes V und ist $\xi = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, so nennen wir $Span(\xi) = \underset{i \in I}{+} U_i$ die Interne Summe der U_i

Proposition 3.1.4. *Es Sei $\xi \subseteq V$ eine Teilmenge von V*

1. $0 \in Span(\xi)$
2. $\xi \subseteq Span(\xi)$ *insbesondere ist* $Span(V) = V$
3. $Span(U) = U$, *falls U ein UVR ist*
4. $Span(Span(U)) = Span(U)$
5. $Span(\xi)$ *ist der kleinste UVR von V, der ξ enthält.*
6. $Span(\xi)$ *ist der Durchschnitt aller UVR von V welche ξ enthalten.*

Definition 3.1.5. Eine Teilmenge $\mathcal{E}$ heißt *Erzeugendensystem von V*, falls gilt: $Span(\mathcal{E}) = V$.
V heißt *endlich erzeugt*, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

Uns interessiert dabei jedoch nur das kleinste Erzeugendensystem, beziehungsweise das $minimale Erzeugendensystem$.

Lemma 3.1.6. *Ist $\mathcal{E}$ ein EZS von V und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}, e \in \mathcal{E}$, dann ist auch $\mathcal{E}' = (\mathcal{E} - \{e\}) \cup \{\lambda \cdot e\}$ mit*
$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_i, \ldots\}$
$\Downarrow \mathfrak{M}_i[\lambda]$
$\mathcal{E}' = \{e_1, \ldots, \lambda e_i, \ldots\}$

Beweis. $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$
$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \frac{\lambda_i}{\lambda}\lambda_i e_i + \cdots + \lambda_n e_n$

$\square$

Lemma 3.1.7. *Sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_j, \ldots\}$ ein EZS. Dann ist $\mathcal{E}' = (\mathcal{E} - \{e_i\}) \cup \{e_i + e_j\}$ wieder ein EZS.*
$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_j, \ldots\}$
$\Downarrow \mathfrak{A}_j$
$\mathcal{E}' = \{e_1, \ldots, e_i + e_j, \ldots, e_j, \ldots\}$

Beweis. $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i + \cdots + \lambda_n e_n$
$= \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i(e_i + e_j) + \cdots + (\lambda_j - \lambda_i)e_j + \cdots + \lambda_n e_n$

$\square$

Lemma 3.1.8. *Sei $\mathcal{E}$ ein EZS von V. Es gäbe in $\mathcal{E}$ eine nicht-triviale Relation, dh. es gibt $e_i, \ldots, e_n \in \mathcal{E}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ wobei nicht alle $\lambda_i = 0$ und es gelte $0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_i e_i + \cdots + \lambda_n e_n$ und etwa $\lambda_i \neq 0$. Dann ist $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \{e_i\}$ wieder ein EZS von V.*

Beweis. Es gilt:
$e_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \underbrace{\widehat{\lambda_i e_i}}_{[*]} + \cdots + \lambda_n e_n)$
$[*] = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{i-1}e_{i-1} + \lambda_{i+1}e_{i+1} + \cdots + \lambda_n e_n)$
d.h. $e_i \in Span(\mathcal{E}) = Span(\mathcal{E} - e_i)$
Also: wenn immer e_i in einer Darstellung eines $v \in V$ vorkommt gilt:
$v = \alpha_{i_1}e_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}e_{i_k} + \cdots + \alpha_{i_m}e_{i_m}$
$\downarrow$
$= \alpha_{i_1}e_{i_1} + \cdots + \alpha[*] + \cdots + \alpha_{i_m}e_{i_m}$

$\square$

3.2 Lineare Unabhängigkeit

$V =$ Vektorraum über $\mathbb{K}$
$\mathcal{B} \subseteq V$ Teilmenge

Definition 3.2.1. $\mathcal{B}$ heißt *linear unabhängig* in V, falls gilt:
$b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}$ sind paarweise verschieden und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.
Wenn $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$ gilt, dann nur deshalb, weil $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Bemerkung 3.2.2. $\mathbb{B}$ ist NICHT "von" etwas unabhängig! Es IST linear unabhängig.

Bemerkung 3.2.3. Oder: Jedes b ist VON ALLEN ANDEREN linear unabhängig.
($\Leftrightarrow b$ kann nicht als Linearkombination der anderen geschrieben werden $\Leftrightarrow b \notin Span(\mathcal{B}, \{b\})$)

Bemerkung 3.2.4. Man sagt: Es gibt keine nicht-triviale Relation unter den Elementen von $\mathcal{B}$.

Bemerkung 3.2.5. Die Eigenschaft linearer Unabhängigkeit kommt in der Menge $\mathcal{B}$ vor, nicht in ihren Elementen.

Bemerkung 3.2.6. v ist linear unabhängig von $\mathcal{B} \Leftrightarrow v \notin Span(\mathcal{B})$.
v ist linear abhängig von $\mathcal{B} \Leftrightarrow v \in Span(\mathcal{B})$.

Bemerkung 3.2.7. $0 \notin \mathcal{B}$, falls $\mathcal{B}$ linear unabhängig.
Denn sonst $0 = \lambda \cdot 0, \lambda \neq 0$ z.B. für $\lambda = 1$

Bemerkung 3.2.8. Wir setzen $\mathcal{B} = \emptyset$ ist linear unabhängig.

Beispiel 3.2.9. $\mathcal{B} = \{b\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow b \neq 0$. Jede Relation müsste lauten $\lambda \cdot b = 0$

Beispiel 3.2.10. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow b_1, b_2 \neq 0$ mit b_1, b_2 nicht kolinear
$b_1 = \lambda_2 b_2$
$b_2 = \lambda_1 b_1$
Beides ist nicht möglich, da $\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = 0$

Beispiel 3.2.11. $V = \mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$, $m \leq n$, Standardeinheitsvektoren $e_i = (0, \dots 0, 1, 0, \dots, 0)$, wobei 1 an i-ter Stelle steht.
$\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.

$$\text{Angenommen } \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_m \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

1. Koordinate
$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
2. Koordinate
$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \dots + \lambda_m \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$
$\vdots$
m. Koordinate
$\lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_m \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_m = 0$

Satz 3.2.12. *$\mathcal{B} \subset V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn jedes $v \in Span(\mathcal{B})$ genau eine (oder eine eindeutige) Darstellung als Linearkombination besitzt.*
$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n$ für ein geeignetes $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$, und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Beweis. Angenommen wir hätten zwei Darstellungen
$v = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} b_{i_n}$
$v = \lambda_{j_1} b_{j_1} + \dots + \lambda_{j_m} b_{j_m}$
Dann gilt:
$0 = v - v = \lambda_{i_1} b_{i_1} + \dots + \lambda_{i_n} b_{i_n} - \lambda_{j_1} b_{j_1} + \dots + \lambda_{j_m} b_{j_m}$

Wir fassen zusammen und kürzen weg. Deshalb können wir folgendes annehmen:
alle b_{i_r} und b_{j_r} sind paarweise verschieden und alle λ_{i_r} und $\lambda_{j_r} \neq 0$

Sind die Darstellungen verschieden, so gibt es mindestens ein $b_{i_k} = b_{j_l}$, aber $\lambda_{i_k} \neq \lambda j_l$.
Dann ist die rechte Seite eine nicht triviale Relation. Aber $\mathcal{B}$ war als linear unabhängig angenommen. Widerspruch! ☐

$V = P_n(\mathbb{K}) \ni p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
$a_i \in \mathbb{K}$ $\quad$ $p'(x) := a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^n$ ist die formale Ableitung
$W = P_{n-1}(\mathbb{K})$ $\quad$ $P_\infty(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]$
$P_\infty(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[x]$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\} \subseteq P_n(\mathcal{K})$ sind Stammpolynome. $\mathcal{B}$ ist ein EZS und linear unabhängig.

3.3 Basen

Definition 3.3.1. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq V$ eines VR-V über $\mathbb{K}$ heißt *Basis von V*, falls $\mathcal{B}$ ein EZS und linear unabhängig ist.

Bemerkung 3.3.2. Eine Basis ist ein minimales EZS und ein maximales linear unabhängiges System.

Beispiel 3.3.3. $V = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$

Beispiel 3.3.4. $V = P(\mathbb{K}) : \mathcal{B} = 1, x, x^2, \ldots, x^n$
$V = \mathbb{C}/\mathbb{C} \qquad \mathcal{B} = \{1\}$
$V = \mathbb{C}/\mathbb{R} \qquad \mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$
$V = \mathbb{C}/\mathbb{K} = \mathbb{Q} \qquad \mathcal{B} = ?$
$\mathcal{B} = \{\log 2, \log 3, \log 5, \ldots\}$ ist ein EZS und somit linear unabhängig.

Beispiel 3.3.5. Anwendung: $(A \mid 0) =$ homogenes LGS, $m \times n$ über $\mathbb{K}$
Annahme: Die Matrix ist bereits in ZSF

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & 0 & * & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

$1.Zeile = a_1$
$2.Zeile = a_2$
$\vdots$
letzte Zeile vor Nullzeilen $= a_r$
$r = rang(A),\ \pi_j =$Pivotelemte, $j_1, \ldots, j_r =$ Sprungstellen der Treppenfunktion
1. Behauptung: Die ersten r Zeilen $a_1, \ldots, a_r$ sind linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{K}^n$.
2. Behauptung: Die Pivotspalten $j_1, \ldots, j_r$ sind linear unabhängig in $\mathbb{K}^m$.

Anwenden: $a_1, \ldots, a_m \in V = \mathbb{K}^n,\ U = Span(a_1, \ldots, a_n)$

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \Rightarrow \text{Zeilenstufenform mit Treppenfunktion}$$

Gesucht ist eine Basis.

Nachtrag:

Lemma 3.3.6. *$\mathcal{E} \subseteq V$. $Span(\mathcal{E})$ ist der kleinste ("kleinste obere Schranke") Untervektorraum von V, der $\mathcal{E}$ enthält.*

Beweis. Alle UVR von V bilden einen "Verband" = Menge X mit einer *Ordnungsrelation*.
D.h. wir haben:
zwischen je zwei $x_1, x_2 \in X$ kann eine Relation gelten $x_1 \le x_2$ oder nicht. Es muss nicht Vergleichbarkeit herrschen. Es kann sein, dass weder $x_1 \le x_2$ noch $x_2 \le x_1$ gilt. □

Beispiel 3.3.7. $X = \mathbb{R}, x_1 \le x_2$ mit der uns bekannten Bedeutung.
Hier:
$x_1 \le x_2$ oder $x_2 \le x_1$ oder beides ($\Rightarrow x_1 = x_2$)
Dies nennt man eine *totale* oder *lineare Ordnung*.

Beispiel 3.3.8. $M =$ Menge, $\mathfrak{X} =$ *Pot(M)* = Potenzmenge = $\mathcal{P}$ = Menge aller Teilmengen von M.
$M = \{1, 2\}$
$\mathfrak{X} = \emptyset$
$\swarrow \searrow$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{1\} \arrow[dr] & & \{2\} \arrow[dl] \\ & \{1,2\} & \end{tikzcd}$$

$Ordnungsrelation: \; x_1 \leq x_2 \;:\Leftrightarrow\; x_1 \subseteq x_2$

Beispiel 3.3.9. $\mathfrak{X} = \mathbb{N}, a \leq b \Leftrightarrow a$ ist Teiler von b.
Es müssen folgende Axiome gelten:

1. Reflexivität: $x \leq y$
2. Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq y \Rightarrow x \leq z$

Ein maximales Element in $\mathfrak{X}$ ist ein $x \in \mathfrak{X}$, sodass gilt: $x \geq x_0 \Rightarrow x = x_0$

Beispiel 3.3.10. $V = VR$ über $\mathbb{K}, \mathfrak{X} =$ Menge der linear unabhängigen Teilmengen von V, Ordnungsrelation = Inklusion

Lemma 3.3.11. Zorn'sches Lemma
garantiert ein maximales $\mathcal{B} \in \mathfrak{X}$. Es ist dann leicht zu zeigen: $\mathcal{B}$ ist auch ein EZS.

Beweis. Angenommen, das ist nicht so. D.h. es gibt ein UVR W mit $\mathcal{E} \subseteq W \subsetneq Span(\mathcal{E})$.
Dann gibt es ein $x \in Span(\mathcal{E})$ mit $x \notin W$, also gibt es geeignete $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Es ist aber:
alle $e_i \in W$
alle $\lambda e_i \in W$
ABER $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in W \Rightarrow$ Widerspruch! □

Beispiel 3.3.12. $Span(\mathcal{E})$ ist der Durchschnitt aller UVR, die $\mathcal{E}$ enthalten.

Beweis. Sei $U_\alpha (\alpha \in I)$: alle UVR in V mit $\mathcal{E} \subseteq U_\alpha$. Nach (1) und (2) ist $Span(\mathcal{E})$ ein solches U_α. Also gilt: $\bigcup\limits_{\infty} U_\alpha \subseteq Span(\mathcal{E})$.
Sei $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in Span(\mathcal{E})$ d.h. $e_i \in \bigcap\limits_{\infty} U_\alpha$. □

Nachtrag:

Lemma 3.3.13. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis, $b_i \in \mathcal{B}, 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{\lambda \cdot b_i\})$ wieder eine Basis.*

Beweis. Aus Lemma 3.2 und Lemma 3.17. □

Lemma 3.3.14. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis, $b_i, b_j \in \mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{b_i + b_j\}$ wieder eine Basis.*

Beweis. Aus Lemma 3.3 und Lemma 3.18. □

Lemma 3.3.15. *Austauschsatz von Steinitz*
Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_i, \dots\}$ eine Basis von V und sei $b \in V$ mit einer Darstellung $b = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_i b_i + \dots + \beta_n b_n$ für $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ und etwa $\beta_i \neq 0$.
Dann ist $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} - \{b_i\} \cup \{b\}$ wieder eine Basis.

Beweis. Sei $v \in V$ dargestellt durch $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_i b_i + \dots + \lambda_n b_m$.
O.B.d.A. nehmen an: $n = m$ (Ergänzung durch Nullterme, falls $n \neq m$)
Dann können wir schreiben:
$v = (\lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_i}{\beta_i}) b_1 + \dots + \hat{b_i} + \dots + (\lambda_n - \frac{\beta_n \lambda_i}{\beta_i}) b_n$
weil $b_i = -\frac{\beta_1}{\beta_i} b_1 - \dots - \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i} bi - 1 - \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} bi + 1 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_i} b_n$
D.h. v ist auch darstellbar durch $\mathcal{B}'$. Ist $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_i b_i + \dots + \alpha_n b_n = 0$ eine Relation in $\mathcal{B}'$, so erhalten wir durch Einsetzten von b daraus eine Realtion in $\mathcal{B}$:
$(\alpha_1 - \alpha_i \beta_1) b_1 + \dots + \alpha_i \beta_i b_i + \dots + (\alpha_n - \alpha_i \beta_n) b_n = 0$
Weil $\mathcal{B}$ linear unabhängig, muss dies eine triviale Relation sein, also
$\alpha_1 - \alpha_i \beta_1 = 0$

$$\vdots$$
$\alpha_i \beta_i = 0 \qquad \Rightarrow \alpha_i = 0 \rightarrow$ Also $\alpha_k = 0$ auch für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$
$$\vdots$$
$\alpha_n - \alpha_i \beta_n = 0$
Deshalb ist $\mathcal{B}'$ linear unabhängig. □

Satz 3.3.16. *Existenzsatz von Basen*
Jeder Vektorraum besitzt eine Basis

Bemerkung 3.3.17. Wir zeigen dies hier nur für endlich abzählbar erzeugte VR über $\mathbb{K}$, denn dafür genügt die gewöhnliche Induktion. Für VR. die überabzählbar erzeugt sind, braucht man "transfinite Induktion". Eine Variante ist das *Zorn'sche Lemma*, welches zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz äquivalent ist. (siehe Aufgabe 35)

Beweis. (Im endlichen oder abzählbaren Fall)
Wir wählen ein abzählbares EZS $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots\}$. (Ist V endlich erzeugt, so läuft k nur bis zu diesem einen endlichen n.) Wir betrachten technisch (algorithmisch) $\mathcal{E}$ als eine geordnete Folge.
Wir setzten $\mathcal{E}_\prime := \emptyset$
$\mathcal{E}_k := \{e_1, \ldots, e_k\}$ für $k = 1, \ldots, (n), \ldots$
Algorithmus (Basisauswahlverfahren)
$\mathcal{B} := \emptyset$
$$\mathcal{B}_k := \begin{cases} \mathcal{B}_{k-1} & \text{falls } b_k \in Span(\mathcal{B}_{k-1}) \\ \mathcal{B}_{k-1} \cup b_k & \text{falls } b_k \notin Span(\mathcal{B}_{k-1}) \end{cases}$$
(Falls V endlich erzeugt wird, so läuft k nur bis n.)

1. $\mathcal{B}_k \subseteq \mathcal{B}_{k-1}$ - nach Konstruktion
2. $Span(\mathcal{B}_k) = Span(\mathcal{E}_k)$ - nach Konstruktion und Induktion
3. $\mathcal{B}_k$ ist linear unabhängig - nach Induktion, mit Lemma 3.19.
   Wir setzten $\mathcal{B} = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=0}^{n} & \text{falls } V \text{ endlich erzeugt ist} \\ \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} & \text{falls } V \text{ abzählbar unendlich ist} \end{cases}$
4. $\mathcal{B}$ ist ein EZS:
   Ist $v \in V$ durch die ersten $k : e_1, \ldots, e_k$ darstellbar, also $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_k b_k$, so ist
   $v \in Span(\mathcal{E}_k) =_2 Span(\mathcal{B}_k) \subseteq_1 Span(\mathcal{B})$
5. $\mathcal{B}$ ist linear unabhngig.
   Gibt es eine Relation zwischen (endlich vielen) Elementen in $\mathcal{B}$, so liegen diese bereits in einem $\mathcal{B}_N$, weil es nur endlich viele sind.
   $e_1 \in \mathcal{B}_{k_1}$
   $e_2 \in \mathcal{B}_{k_2}$
   $\vdots \qquad \Rightarrow e_1, \ldots, e_l \in \mathcal{B}_N,\ N = max\{k_1, \ldots, k_n\}$
   $e_l \in \mathcal{B}_{k_l}$
   Aber nach 3) ist $\mathcal{B}_N$ linear unabhängig.

□

Bemerkung:
Das Basisauswahlverfahren (BAV) aus dem Basisexistenzsatz ist im Wesentlichen ein Algorithmus:

<u>EINGABE:</u> Geordnetes EZS $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n, ...\}$ (endlich oder abzählbar)

<u>ABFRAGE:</u> Ist $e_{k+1} \in Span(\{e_1, ..., e_k\})$?
Wenn nein füge Ihn zur Basis hinzu.

Wenn ja füge es nicht zur Basis hinzu und betrachte e_{k+2}

AUSGABE: Geordnete Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$

Beispiele:
1) $V = Pol(\mathbb{R})$ (Die Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).
Wähle als EZS die Stammpolynome $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$.
Behauptung: $X^{n+1} \notin Span(1, ..., X^n)$ (Dies ist für Polynome trivial aber noch lange nicht für Polynomfunktionen!)
Um dies zu zeigen nutzen wir einen Trick der universal einsetzbar ist:
Gäbe es eine Linearkombination, so dass

$$X^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \tag{3.1}$$

so könnte man (1) n-mal differenzieren (bei Polynomfunktionen wendet man formales Differenzieren an) und erhält

$$(n+1)!X = a_n n! \tag{3.2}$$

Damit wäre aber bereits, wenn X=0 in (2) eingesetz wird

$$0 = a_n n! \Rightarrow a_n = 0 \tag{3.3}$$

setzt man nun (3) in (1) ein und iteriert das Verfahren, erhält man, dass alle $a_i = 0$ sind, womit aber $X^{n+1} = 0$ wäre, was definitiv nicht der Fall ist.

2) Analog sieht man ein, dass $\mathcal{B} = \{e^{a_k x} | k \in \mathbb{N} \ und \ a_k \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig in $C^\infty(\mathbb{R})$ ist.

3) Wiederum Analog sieht man ein, dass $\mathcal{B} = \{sin(a_k x) | k \in \mathbb{N} \ und \ a_k \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig ist.

4) Sei V der Raum stetiger stückweise affiner Funktionen $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit 0=f(0)=f(1)
So ist $\mathcal{B} = \{Z_\xi \mid Z_\xi(x) : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R};\ Z_\xi = \begin{cases} \dfrac{x}{\xi} & 0 \le x \le \xi \\ \dfrac{x-1}{\xi-1} & \xi \le x \le 1 \end{cases} ; \xi \in \mathbb{R}\}$ eine Basis.
Es ist sehr selten, dass eine überabzählbare Basis explizit angegeben werden kann, da es im Allgemeinen sehr schwer ist mit überabzählbarer Dimension (siehe Abschnitt 3.4) zu arbeiten. So ist für $C^\infty(\mathbb{R})$ keine Hamel-Basis bekannt.

Satz 3.3.18 (Basisergänzungssatz). *Sei V ein endlich oder abzählbar erzeugter K-Vektorraum. So kann jede linear unabhängige Teilmenge $\mathcal{B}' \subseteq V$ zu einer Basis ergänzt werden.*

Beweis. Wähle ein beliebiges geordnetes Erzeugendensystem $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n, ...\}$, welches nach dem Basisexistenzsatz definitiv existiert und wegen Abzählbarkeit auch geordnet werden kann.
So ist offensichtlich $\mathcal{E}' = \{b_1, ..., b_n, e_1, ..., e_n, ...\}$ erneut ein Erzeugendensystem. Wird nun BAV auf $\mathcal{E}'$ angewandt, so werden die b_i zuerst betrachtet und wegen linearer Unabhängigkeit als Basisvektoren gewählt. Somit gilt für die letztendliche Basis $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. □

Beispiele:(BAV)
1)$V = K^n$; $\mathcal{E} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, ..., e_1 + e_2 + ... + e_n\}$
$\mathcal{B}' = \{2e_2\} \longmapsto \mathcal{B} = \{2e_2, e_1, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, ...\}$

2)$V = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$; $K = \mathbb{Q}$; $\mathcal{E} = \{2, 2\sqrt{2}\}$
$\mathcal{B}'_1 = \{1 + \sqrt{2}\} \longmapsto \mathcal{B}_1 = \{1 + \sqrt{2}, 2\}$
$\mathcal{B}'_2 = \{3\} \longmapsto \mathcal{B}_2 = \{3, 2\sqrt{2}\}$

3.4 Dimension

Unser Ziel wird es sein die Dimension eines Vektorraumes durch die Kardinalität einer Basis des Vektorraumes zu definieren.
Doch dafür müssen wir uns zunächst überzeugen, dass solch ein Dimensionsbegriff wohldefiniert ist. Nach dem Basisexistenzsatz besitzt jeder Vektorraum zumindest eine Basis, dies bereitet uns also keine Probleme. Allerdings haben wir in den Übungen eingesehen, dass ein Vektorraum sehr viele Basen besitzt.
Zwar hat $\mathbb{F}_2$ genau eine Basis, dieser ist aber auch der einzige neben dem trivialen Nullvektorraum mit nur einer Basis. So besitzt $\mathbb{F}_3$ zwei Basen, $(\mathbb{F}_2)^2$ hat drei Basen und $(\mathbb{F}_7)^3$ besitzt bereits 5.630.688 Basen.
Noch deutlicher wird das Problem im $\mathbb{R}^d$. Denn nach dem Basisergänzungsatz kann man eine Basis konstruieren, indem man zunächst einen beliebigen von Null verschiedenen Vektor wählt, und daraufhin immer wieder von den vorher gewählten linear unabhängige Vektoren hinzufügt. So ergibt sich für die Menge aller geordneten Basen des $\mathbb{R}^d$ folgende Darstellung $\prod_{k=1}^{d-1}\{\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{R}^k\}$ Womit $\mathbb{R}^d$ sogar überabzählbar viele Basen besitzt.
Also stellt sich die Frage, ob alle Basen gleich mächtig sind.

Proposition 3.4.1. *Sei V ein von n Vektoren (insbesondere endlich) erzeugter Vektorraum, dann sind n+1 Vektoren linear abhängig.*

Beweis. Es sei $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ein Erzeugendensystem in V. So folgt die Behauptung induktiv:

Induktionsverankerung: Für n=0 ist $\mathcal{E} = \{\}$ womit $V = Span(\{\}) = 0$ ist.
Induktionsschritt: Seien $v_1, ..., v_n, v_{n+1} \in V$ beliebige aber verschiedene Vektoren. So besitzt jedes v_i folgende Darstellung:

$v_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} e_{i,j}$ mit $\omega_{i,j} \in K$

Zu Zeigen ist, dass eine nicht-triviale Relation $0 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k v_k$ existiert, also dass mindestens ein $\lambda_k \neq 0$ ist. Betrachte λ_k als Unbekannte in einem wie folgt konstruierten LGS:

$Es\ gelte : 0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n} \omega_{i,j} e_{i,j}$
setze $\omega'_{i,j} := \omega_{j,i}$

Womit sich ein LGS des Ranges $r \leq n$ ergibt, also min. eine freie Variable λ_k enthält. Womit wiederum das LGS eine nichttriviale Lösung besitzt. $\square$

Nun können wir folgenden gewünschten Satz formulieren:

Satz 3.4.2 (Dimensionssatz)**.** *Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ sowie $\mathcal{B}' = \{b'_1, ..., b'_m\}$ zwei Basen in V, dann sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ schon gleich mächtig (bzw. n=m).*

Beweis. $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem in V mit n Vektoren. Nach Proposition 1 sind n+1 Vektoren linear Abhängig, womit $m \leq n$. Analog für $\mathcal{B}'$.
Somit ist n=m. $\square$

Also können wir nun unseren angestrebten Dimensionsbegriff definieren:

Definition 3.4.3 (Dimension)**.** Sei $\mathcal{B}$ eine Basis in V, wobei V ein K-Vektorraum ist. So definiere:

$$dim_K(V) := |\mathcal{B}|$$

Als die Dimension von V.

Beispiele:
1) Sei K ein Körper so ist $dim_K(K^n) = n$

2) $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

3) Nach Übung sind $log(p_i)$ für beliebige Primzahlen p_i linear unabhängig in $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Also

ist $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.
Dies ist zwar etwas informell, da es wie bereits erwähnt mehrere Arten der Unendlichkeit gibt. Es wird sich herausstellen, dass jene Dimension sogar überabzählbar ist.
Hier sieht man auch, dass unsere geometrische Vorstellung des Dimensionsbegriffes bei manchen Vektorräumen versagt, da R als Q-Vektorraum so zu sagen unendlich viele Richtungen besitzt, so stellt z.B. jedes $log(p_i)$ und jedes $\sqrt{a}$ für ein $a \neq n^2$ mit $a, n \in \mathbb{N}$ eine Richtung dar.

4) Sei K[X] ein Polynomring über K, so ist $dim_K(K[X]) = |\mathbb{N}|$ also abzählbar.
Denn wähle als Basis $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$.

5) Sei $\mathbb{A}$ der Raum stetiger stückweise affiner Funktionen auf dem Intervall [0;1] mit f(0)=0 und f(1)=0. So ist $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{A}) = |R|$ also überabzählbar.

6) Sei $\mathbb{E}$ der Untervektorraum des Vektorraumes der glatten Funktionen über $\mathbb{R}$ aufgespannt von e^{ax}. So ist $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}) = |\mathbb{R}|$ also auch überabzählbar.

Bemerkung:
Was wir in der linearen Algebra eine Basis nennen heißt im allgemeinen Hamel-Basis. Denn in anderen Gebieten der Mathematik treten andere Basisbegriffe auf. So arbeitet die Analysis oftmals in bzw. mit Räumen überabzählbarer Dimension, wie $C^\infty(\mathbb{R})$, wobei es für solche im allgemeinen sehr schwer ist eine Hamel-Basis anzugeben. Also betrachten Analytiker lediglich approximative Basen, die sogenannte Hilbert-Basis, bei der sich zwar nicht jedes Element des Vektorraumes als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren schreiben lässt, wohl aber beliebig gut durch eine Linearkombination der Basisvektoren approximiert werden kann. Beispiele sind Fourier-Reihen, welche glatte periodische Funktionen durch Überlagerungen von sin und cos approximieren. Und der Weierstraß'sche Approximationssatz garantiert, dass glatte Funktionen durch Polynomfunktionen approximiert werden können.

Für die Algebra reicht eine Hilbertbasis jedoch nicht aus!

Die folgende Propsition mag trivial erscheinen –und bei Vektorräumen ist sie es tatsächlich–, aber wenn man sich beispielsweise mit Gruppen beschäftigt, gilt die analoge Aussage nicht.

Proposition 3.4.4. *Für einen Unterraum $U \subseteq V$ eines endlich-erzeugten Vektorraums gilt immer* $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von U, dann ergänze sie zu einer Basis $\mathcal{B}'$ von V, also $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Dann ist $\dim(U) = |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'| = \dim(V)$ ☐

Proposition 3.4.5. *Es seien U', U'' Untervektorräume von V (V wieder endlich-erzeugt) mit $U := U' \cap U''$ und $\tilde{U} := U' + U''$. Dann gilt* $\underbrace{\dim(\tilde{U})}_{n+m+k} = \underbrace{\dim(U')}_{k+n} + \underbrace{\dim}_{k+m}(U'') - \underbrace{\dim(U)}_{k}$.

Beweis. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}$ für U. Wir ergänzen einmal zu einer Basis $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$ von U' und $\mathcal{B}'' \supset \mathcal{B}$ von U''. Außerdem setzen wir $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ Die Beziehungen sind im folgenden *kommutativen Diagramm* dargestellt:

$$\begin{array}{ccccc} & U'' & \hookrightarrow & \tilde{U} & = U' + U'' \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ U' \cap U'' = & U & \hookrightarrow & U' & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \mathcal{B}'' & \subseteq & \tilde{\mathcal{B}} \\ & \cup\!\mathsf{I} & & \cup\!\mathsf{I} \\ \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' = & \mathcal{B} & \subseteq & \mathcal{B}' \end{array}$$

Behauptung: $\tilde{\mathcal{B}}$ ist eine Basis für U'. $\mathcal{B}'$ ist offensichtlich ein Erzeugendensystem für $\tilde{U}$. Betrachte die linearunabhängige Menge $\mathcal{B}'$ und das Erzeugendensystem $\mathcal{E} := \tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cup \{b'_1, ..., b'_{m-k}\}$ von $\tilde{U}$ und wende das Basisauswahlverfahren an:
$b''_1 \notin \mathrm{Span}(\mathcal{B}')$, also Fügen wir b'_1 hinzu; $b''_2 \notin \mathrm{Span}(\mathcal{B}' \cup \{b''_1\})$, wir fügen b'_2 hinzu, und so weiter. Das heißt, das Basisauswahlverfahren liefert uns hier tatsächlich $\tilde{\mathcal{B}}$. ☐

Beispiel 3.4.6. 1. Seien $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ Körper. Sei $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_l\}$ eine Basis von $\mathbb{L}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ist V ein $\mathbb{L}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}_{\mathbb{L}} = \{b_1, ..., b_n\}$ (als $\mathbb{L}$-Vektorraum!), dann ist

$$\mathcal{B}_{\mathbb{K}} := \Lambda \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{K}} = \{\lambda_1 b_1, ..., \lambda_l b_1, \lambda_1 b_2, ..., \lambda_l b_2, ..., \lambda_1 b_n, ..., \lambda_l b_n\}$$

eine Basis von V als $\mathbb{K}$-Vektorraum. Insbesondere gilt:

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}}_{l} \cdot \underbrace{\dim_{\mathbb{L}} V}_{n}$$

Konkret heißt das, wenn wir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ betrachten: $\Lambda = \{1, i\}, l = 2$. Also: $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$

2. Wir betrachten $V = \mathbb{C}^n$ als $\mathbb{C}$- und als $\mathbb{R}$-Vektorraum:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{e_1, ..., e_n\};\ e_k = (0, ..., 0, \underset{\boxed{k}}{1}, 0, ..., 0)$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{e_1, ie_1, e_2, ie_2, ..., e_n, ie_n\};\ ie_k = (0, ..., 0, \underset{\boxed{k}}{i}, 0, ..., 0)$$

3. Wir betrachten $V = \mathbb{C}[X]$ der komplexen Polynome in X, wieder zunächst als Vektorraum über $\mathbb{C}$ und dann über $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{1, X, X^2, ..., X^n, ...\} \text{ Stammpolynome}$$

$$\mathcal{B}_R = \{1, i, X, iX, ..., X^n, iX^n, ...\}$$

Beispiel 3.4.7. es sei $\mathbb{L}$ ein *endlicher* Körper (etwa $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \dots, \mathbb{F}_p$). Weil $\mathbb{L}$ endlich ist, muss $\mathrm{char}(\mathbb{L}) = p$ (p eine Primzahl) sein. Wie in Definition 2.1.11 setzen wir

$$\varepsilon_0 := 0, \varepsilon_1 := 1, \varepsilon_{n+1} := \varepsilon_n + 1$$

Also gilt $\varepsilon_p = 0$.
Behauptung: $\mathbb{K} := \{\varepsilon_0$, für $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{p-1}\}$ bilden einen Unterkörper, der isomorph ist zu $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$. Zu zeigen: $\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathbb{L}, \underline{r} \mapsto \varepsilon_r,\ 0 \leq r < p$. Es gilt $-\varepsilon_k = \varepsilon_{p-k}, \varepsilon_n + \varepsilon_m = \varepsilon_{n+m}$. Das multiplikative Inverse ε_k^{-1} ist durch den euklidischen Algorithmus eindeutig bestimmt.
$\mathbb{L}$ hat als Vektorraum über $\mathbb{K}$ eine endliche Basis $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$. Da jedes $v \in \mathbb{L}$ genau eine Darstellung $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ hat, sind insgesamt p^n Elemente möglich: Für jeden der n Koeffizienten $\lambda_1 ... \lambda_n$ gibt es jeweils p Wahlmöglichkeiten, da $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Daraus folgt, dass

$$|\mathbb{L}| = p^n$$

Es gibt also insbesondere keinen Körper mit etwa sechs Elementen.

3.5 Prinzip der linearen Fortsetzung

Das Prinzip der linearen Fortsetzung besagt, dass eine lineare Abbildung durch die Werte auf einer Basis vollständig bestimmt ist. Dieser „Trick“ist hilfreich, da man statt unendlicher Systeme endliche Basen betrachten kann. Außerdem können wir die Werte auf einer Basis vorgeben, und dann wissen, dass es eine solche lineare Abbildung gibt.

Proposition 3.5.1. *Seien V, W zwei Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$.*

(i) Für ein Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von V gilt: Sind $f, g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen und gilt $f(e) = g(e)$ für alle $e \in \mathcal{E}$, dann gilt $f = g$ (d.h. $\forall v \in V : f(v) = g(v)$).

(ii) Für eine linear-unabhängige Menge $\mathcal{B}$ in V gilt: Ist $\varphi : \mathcal{B} \to W, b \mapsto \varphi(b)$ eine beliebige Funktion, so gibt es eine lineare Fortsetzung *$f : V \to W$, das heißt eine lineare Abbildung f mit der Eigenschaft $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$ (d.h. $f(b) = \varphi(b), b \in \mathcal{B}$).*
Im kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "f"] & W \\ \mathcal{B} \arrow[u, phantom, "\cup|"] \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

(iii) *Aus (i) und (ii) folgt dann: Für eine Basis $\mathcal{B}$ von V gilt: Jede Funktion $\varphi : \mathcal{B} \to W$ besitzt geanu eine lineare Fortsetzung $f : V \to W$ (d.h. $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$).*

Korollar 3.5.2. *Es gibt eine Bijektion zwischen den Funktionen von $\mathcal{B}$ nach V und den linearen Abbildungen von V nach W.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Funkt}(\mathcal{B}, W) = W^{\mathcal{B}} &\xrightarrow{\cong} \mathrm{lin}_{\mathbb{K}}(V, W) = \mathrm{Hom}_K(V, W) \\ \varphi &\longmapsto f \\ \varphi := f|_{\mathcal{B}} &\longleftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

Beweis. (i) Sei v dargestellt durch $\mathcal{E}$, etwa

$$v = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$$

Dann rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)) \\ &= \lambda_1 \underbrace{f(e_1)}_{\shortparallel} + ... + \lambda_n \underbrace{f(e_n)}_{\shortparallel} \\ &= \lambda_1 \overbrace{g(e_1)} + ... + \lambda_n \overbrace{g(e_n)} \\ &= g(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) \\ &= g(v) \end{aligned}$$

(ii)Auf $\mathcal{B} = \{b_1, ..., b_n\}$ seien Werte $w_i = \varphi(b_i)$ vorgegeben. wir ergänzen $\mathcal{B}$ zu einer Basis $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ von v:

$$\mathcal{B}' = \{b_1, ..., b_n, \underbrace{b'_1, ..., b'_m}_{\text{ergänzt}}\}$$

Wir schreiben $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n + \lambda'_1 b'_1 + ... + \lambda'_m b'_m$. Wir wählen $w_{n+1}, ..., w_{n+m}$ beliebig in W (z.B. $= 0$). Dann definieren wir:

$$f(v) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n + \lambda'_1 w_{n+1} + ... + \lambda'_m w_{n+m}$$

Wir stellen fest:

1. Damit ist $f : V \to W$ für jedes v definiert, denn für jedes v gibt es eine Darstellung.
2. f ist wohldefiniert, weil die Darstellung von v eindeutig ist.
3. f ist linear.
4. $f|_{\mathcal{B}} = \varphi$ auf $\mathcal{B}$

□

V Sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. $\mathcal{B} \subseteq V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "f"] & W \\ \mathcal{B} \arrow[u, dashed, "\subseteq"] \arrow[ur, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

f ist linear, ϕ entspricht dann einer beliebigen Funktion.
$\mathrm{Funkt}(\mathcal{B}, W) = W^{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathrm{Lin}_{\mathcal{B}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(V, W)$; $\phi \longleftrightarrow f$

1. $\mathcal{E}$ ist Erzeugendensystem
   $f, g : V \longrightarrow W$
   $f_{|\mathcal{E}} = g_{|\mathcal{E}} \implies f = g$
2. $\mathcal{B}$ ist linear-unabhängig $\forall \phi : \mathcal{B} \longrightarrow W \exists f : V \longrightarrow W$ linear $f_{|\mathcal{B}} = \phi$
3. $\mathcal{B}$ ist eine Basis $\forall \phi : \mathcal{B} \longrightarrow W \exists! f : V \longrightarrow W$ linear $f_{|\mathcal{B}} = \phi$

Beispiel 3.5.3. $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

3.6 Koordinaten

V ist endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$.
$\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ ist geordnete Basis.
Sei $V \ni v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ und $v = \lambda'_1 b_1 + ... + \lambda'_n b_n$, dann ist $\lambda_1 = \lambda'_1, ..., \lambda_n = \lambda'_n$ (eindeutige Darstellung).

Definition 3.6.1. Falls $\mathcal{B}$ eine fest gewählte Basis ist, dann gibt es *Koordinaten* bzgl. $\mathcal{B}$. Definiert durch

$$K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \longmapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

falls $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$.
$K^i_{\mathcal{B}}(v) = \lambda_i$ ist die i-te Koordinate.
$K_{\mathcal{B}}(v) = (K^1_{\mathcal{B}}(v), ..., K^n_{\mathcal{B}}(v))$

Satz 3.6.2. *$K_{\mathcal{B}}$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis.

1. zz. $K_{\mathcal{B}}$ ist bijektiv:
   $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \longmapsto v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ Rückrichtung ist klar nach Konstruktion (siehe Definition).

2. zz. $K_{\mathcal{B}}$ ist linear:
   $K_{\mathcal{B}}(0) = (0, ..., 0) = 0$
   Seien $v, v' \in V$.
   Dann gilt $K_{\mathcal{B}}(v) + K_{\mathcal{B}}(v') = K_{\mathcal{B}}(v + v')$, denn$(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n) + (\lambda'_1 b_1 + ... + \lambda'_n b_n) = (\lambda_1 + \lambda'_1) b_1 + ... + (\lambda_n + \lambda'_n) b_n$
   Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in V$. $K_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha K_{\mathcal{B}}(v)$, denn $\lambda_1 \alpha b_1 + ... + \lambda_n \alpha b_n = \alpha(\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n)$

□

Beispiel 3.6.3.
1. Wenn $V = \mathbb{K}^n$ und $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ Standardbasis, dann ist $K_{\mathcal{B}}(v) = v$, also $K_{\mathcal{B}} = id$. Denn $v = (v_1, ..., v_n) = v_1 e_1 + ... + v_n e_n$.

2. Wenn $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = (b_1, b_2) = ((1, 0), (1, 1))$, dann ist $v = (1, 1) = 1b_1 + 1b_2 = 1(1, 0) + 1(1, 1)$

3. Wenn $V = P_n(\mathbb{K}) \widehat{=}$ Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, ..., X^n\}$. Dann ist $p(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X_n$, $K_{\mathcal{B}} = (a_0, ..., a_n)$

Es stellt sich nun die Frage, was tun, wenn V nicht endlich erzeugt ist?

- wähle auch hier Basis $\mathcal{B}$
- was wäre auf der rechten Seite $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ oder $\mathbb{K}^{|\mathcal{B}|}$ $W^{\mathcal{B}}$ ist die Menge aller Funktionen $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow W$
- $\mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ ist in der Tat zu groß für unsere Zwecke

Besser:Teilraum $\mathbb{K}(\mathcal{B})$ ist frei von $\mathcal{B}$ erzeugter Vektorraum. $\mathbb{K}^{\mathcal{B}} \widehat{=}$ Menge aller Funktionen von $\mathcal{B}$ nach $\mathbb{K}$ ist das kartesische Produkt aller Faktoren $\mathbb{K}$, Indexmenge $\mathcal{B}$
$\Pi \mathbb{K}_b \widehat{=}$ alle mit $\mathcal{B}$ indizierten Familien $(\lambda_b \mid b \in \mathcal{B}) \longleftrightarrow \phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}; b \longmapsto \lambda_b$. Im Falle $\mathcal{B}$ abzählbar, so wäre dies dann die folge $(\lambda_1, \lambda_2, ...,)$
Unterraum $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{K}^{\mathcal{B}}$ aller Funktionen $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $\phi(b) = 0$ fr̈ fast alle $b \in \mathcal{B}$, d.h. die Menge supp$(\phi) \widehat{=}$ Menge der Träger von $\phi = \{b \in \mathcal{B} \mid \phi(b) \neq 0\}$ endlich.
$\text{supp}(\alpha\phi) = \text{supp}(\phi), \alpha \neq 0$
$\text{supp}(\phi_1 + \phi_2) \leq \text{supp}(\phi_1) \cup \text{supp}(\phi_2)$
$\mathbb{K}(\mathcal{B})$ ist eine $\mathbb{K}-$VR.
Basis? Standardbasis?

Definition 3.6.4. Für jedes $b \in \mathcal{B}$ ist die *charakteristische Funktion* definiert durch:

$$\mathcal{X}_b : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$b' \longmapsto \delta_{bb'} = \begin{cases} 1, & b' = b, \\ 0, & b' \neq b. \end{cases}$$

$\phi \in \mathbb{K}(\mathcal{B})$
$\operatorname{supp}(\phi) = \{b_1, ..., b_n\}$
$\phi = \phi(b_1)\mathcal{X}_{b_1} + ... + \phi(b_n)\mathcal{X}_{b_n}$ $X = \{\mathcal{X}_b \mid b \in \mathcal{B}\}$ ist ein Erzeugendensystem und linear-unabhängig $\alpha_1\mathcal{X}_{\lfloor_\infty} + ... + \alpha_n\mathcal{X}_{b_n} = 0$
Einsetzen $b = b_1, b_2$, dann $\alpha_1\mathcal{X}_{b_1}(b_1) = 1$ $\mathcal{B} \longleftarrow X$
$b \longmapsto \mathcal{X}_b$
Dann $\mathcal{B} \widehat{=} X \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{B})$ und $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(\mathcal{B}) = |\mathcal{B}|$

Beispiel 3.6.5. $\mathcal{B} = \{1, ..., n\}$, $\mathbb{K}(\mathcal{B}) \cong \mathbb{K}^n$; $e_i \longmapsto \mathcal{X}_i$
Koordinaten: $K_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K(\mathcal{B})$, $v = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$ eine Darstellung durch gewisse $b_1, ..., b_n \in \mathcal{B}$.(das ist nicht abgezählt)
$v \mapsto \mathcal{X}_v = \lambda_1\mathcal{X}_{b_1} + ... + \lambda_n\mathcal{X}_{b_n}$, $\quad \operatorname{supp}(\mathcal{X}_v) \subseteq \{b_1, ..., b_n\}$
$\phi \longmapsto v' = \phi(b'_1)b'_1 + ... + \phi(b'_m)b'_m$, $\quad \operatorname{supp}(\phi) = \{b'_1, ..., b'_m\}$

Satz 3.6.6. $\mathbb{K}_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}(\mathcal{B})$ *ist ein Isomorphismus.*

A ist Menge, $\mathbb{K}(A)$ frei von A erzeugter $\mathbb{K}$-VR, $\phi : A \longrightarrow \mathbb{K}$, $\operatorname{supp}(\phi)$ endlich, $\Psi \circ l_A = \Psi_{|A} = l_B \circ \psi$. Ψ soll lineare Abbildung werden mit der Eigenschaft

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "l_A"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"] & \mathbb{K}(A) \arrow[d, "l_b \circ \psi"] \\
B \arrow[r, hook, "l_B"] & \mathbb{K}(B) = W
\end{tikzcd}$$

3.7 Isomorphieinvarianten

Definition 3.7.1. Zwei Vektorräume V und W (über $\mathbb{K}$) heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $f : W \to W$ gibt. Wir schreiben $V \cong W$

Satz 3.7.2. *Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis.

- $f = id_V$ ist ein Isomorphismus von V nach V, sodass für alle Vektorräume V gilt $V \cong V$
- Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus. Also gilt für Zwei Vektorräume V, W: $V \cong W \Leftrightarrow W \cong V$
- Sind $f : V \to W$ und $g : W \to X$ zwei Isomorphismen, so ist auch $g \circ f$ ein Isomorphismus. Für V, W, X gilt also $V \cong W, W \cong X \Rightarrow V \cong X$

□

Was ist eine Isomorphieinvariante? Das ist eine "Größe"γ (z.B. eine Zahl, ein Zahlenpaar, eine Angabe Ja/Nein), welche man einem Vektorraum zuordnen kann, so dass gilt:

$$V \cong W \Rightarrow \gamma(V) = \gamma(W)$$

Gilt auch die Umkehrung, so nennt man γ vollständig.

Beispiel 3.7.3.

- Betrachten wir alle Rechtecke in der Ebene und als Äquivalenzrelation die Kongruenz. Da $R \equiv R' \Leftrightarrow$ Seitenlängen$(a, b) = (a', b')$ ist (a, b) eine vollständige Kongruenzinvariante.
- Wählen wir statt der Seitenlängen (a, b) den Flächeninhalt *vol*, oder die Diagonallänge γ_2 wählt, so ist dies eine Kongruenzinvariante, aber keine vollständige.

- Betrachten wir als Äquivalenzrelation die Ähnlichkeit, so ist (a, b) keine Invariante. Wohl aber $\gamma_0'(\mathbb{R}) = \frac{a}{b}$

Wir werden für $\gamma = dim_{\mathbb{K}}$ wählen und sogar mehr zeigen.

Proposition 3.7.4. *Sei $f : V \to W$ linear*

1. *Ist $\xi \subseteq V$ ein Erzeugendensystem und f epimorph, so ist $\xi' = f(\xi)$ ein Erzeugendensystem von W.*
2. *Ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig und f monomorph, so ist $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ linear unabhängig.*

Beweis. 1. Es sei $w \in W$, also etwa $w = f(v)$ für ein $v \in V$. Wir können v schreiben als

$$v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

für geeignete $e_1, \ldots, e_n \in \xi, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ denn ξ ist EZS für V. Dann gilt $w = f(v) = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n)$ also ist $w \in Span(\xi')$

2. Angenommen, wir hätten eine nicht-triviale Relation zwischen Elementen in $\mathcal{B}'$, also etwa

$$\lambda_1 f(b_1) + \ldots + \lambda_n f(b_n) = 0$$

mit nicht alle

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

null. Dann hätten wir auch

$$f(\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n) = 0$$

und weil f monomorph ist, auch

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$$

$\mathcal{B}$ war aber als linear unabhängig vorausgesetzt

□

Korollar 3.7.5. *Es sei $f : V \to V'$ ein Isomorphismus. Ist $\mathcal{B} \subseteq V$ $\begin{cases} \textit{Erzeugendensystem} \\ \textit{linear unabhäangig} \\ \textit{eine Basis} \end{cases}$, so ist auch*

$$\mathcal{B}' = f(\mathcal{B}) \subseteq V' \begin{cases} \textit{Erzeugendensystem} \\ \textit{linear unabhängig} \\ \textit{eine Basis} \end{cases}$$

Beweis. Beweis folgt aus der Proposition. □

Satz 3.7.6. $V \cong V' \Leftrightarrow dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(V')$

Beweis. "$\Rightarrow$": Ist $f : V \to V'$ ein Isomorphismus und $\mathcal{B}$ irgendeine Basis von V, so ist nach dem Korollar $f(\mathcal{B})$ eine Basis von V'. Da f bijektiv ist, sind $\mathcal{B}$ und $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ gleich mächtig, also $dim_{\mathbb{K}}(V) = |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'| = dim_{\mathbb{K}}(V')$.

"$\Leftarrow$": Aus $dim_{\mathbb{K}}(V) = dim_{\mathbb{K}}(V')$ folgt, dass je zwei Basen $\mathcal{B}$ von V bzw. $\mathcal{B}'$ von V' gleich mächtig sind. Wir wählen eine Bijektion $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ und definieren $\Phi = \mathbb{K}(\varphi) : \mathbb{K}(\mathcal{B}) \to \mathbb{K}(\mathcal{B}')$ durch $\Phi(x) = x \circ \varphi : \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \xrightarrow[\cong]{\varphi^{-1}} \mathcal{B} \xrightarrow{x} \mathbb{K}$ einen Isomorphismus Φ. Insgesamt haben wir dann

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathbb{K}_{\mathcal{B}}\ \cong"] \arrow[d, "f"', "\cong"] & \mathbb{K}(\mathcal{B}) \arrow[d, "\Phi=\mathbb{K}(\varphi)", "\cong"'] \\ V' \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{K}(\mathcal{B}') \end{tikzcd}$$

Nun definieren wir $f := K_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \mathbb{K}(\varphi) \circ K_{\mathcal{B}}$. Dies ist ein Isomorphismus; er macht das obige Diagramm *kommutativ*.

□

Bemerkung 3.7.7. Dieses f ist nicht *kanonisch*, was so viel heißt wie: es ist nicht der einzige Isomorphismus, er hängt von vielen Wahlen ab:

- Wahl von $\mathcal{B}$
- Wahl von B'
- Wahl von φ

Rang: $rg(A) = rg(T_A) = rg(L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}(A))$
$T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$
$f = L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}(A) : V \to W$ $\qquad dim(V) = n \qquad dim(W) = m$

Satz 3.7.8. $rg(A) = rg(T_A) = rg(L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}(A))$

Beweis. Für die erste Gleichheit wenden wir die Dimensionsformel an:
$dim(W(A)) = dim(Im(T_A)) = n - dim(\mathcal{L}(A|0)) = r = rg(A)$
Für die zweite Gleichheit beachte man

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f = L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}"] \arrow[d, "K_{\mathfrak{A}}"', "\cong"] & W \arrow[d, "K_{\mathfrak{B}}", "\cong"'] \\ {} \arrow[r, "T_A"] & {} \end{tikzcd}$$

Wobei $f = L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} = K_{\mathfrak{B}}^{-1} \cdot T_A \cdot K_{\mathfrak{A}}$
Aber
1) $K_{\mathfrak{B}}(Im(f)) = Im(T_A)$
2) $K_{\mathfrak{B}} : Im(f) \underset{\rightarrow}{\cong} Im(T_A)$
Beweis fertig mit Lemma 1(1).

$\square$

Allgemein:

Lemma 3.7.9. *Es sei*
$$\begin{array}{ccccccc} Ker(f) & \subseteq & V & \xrightarrow{f} & W & \supseteq & Im(f) \\ \varphi \downarrow\cong & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow\cong \\ Ker(f') & \subseteq & V' & \xrightarrow{f} & W' & \supseteq & Im(f') \end{array}$$
ein kommutatives Diagramm,
dh. $\psi \circ f = f' \circ \psi$ sind φ und ψ Isomorphismen, dann gilt:

1. *$Im(f)$ wird von ψ isomorph auf das $Im(f')$ abgebildet.*
2. *$Ker(f)$ wird von φ isomorph auf den $Ker(f')$ abgebildet.*

Beweis. zu 2.
$v \in V, f(v) = 0 \Leftrightarrow \psi(f(v)) = 0 = f'(\varphi(v))$
$v \in Ker(f) \Rightarrow \varphi(v) \in Ker(f')$
Umgekehrt $v' \in Ker(f')$ also $f'(v') = 0$.
Weil φ surjektiv ist, ist $v' = \varphi(v)$ für ein $v \in V$.
Dh. $0 = f'(\varphi(v)) = \psi(f(v))$.
Weil ψ monomorph ist, folgt $f(v) = 0$, also $v \in Ker(f)$.

$\square$

Lemma 3.7.10. $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow[\psi]{\cong} W$
$$\begin{array}{c} \varphi \uparrow\cong \\ V \end{array}$$

1. *$Ker(f) = Ker(\psi \circ f)$ (aber i.A. $Im(f) \neq Im(\psi \circ f)$)*
2. *$Im(f \circ \varphi) = Im(f)$ (aber i.A. $Ker(f) \neq Ker(f \circ \varphi)$)*

Bemerkung 3.7.11. zu 4.2
a) V fest, $\mathbb{K}$ fest

$$\begin{array}{lll} & \overset{f}{\nearrow} W \to & Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \\ V & \varphi :\downarrow & \downarrow \varphi_* = Hom_{\mathbb{K}}(V, \varphi) \\ & \underset{\varphi \circ f}{\searrow} Y \to & Hom_{\mathbb{K}}(V, Y) \end{array}$$

Wieder erhält man ein Funktor.
kovariant: $W = Y : (id_W)_* = id_{Hom_{\mathbb{K}}(V,W)}$ (induzierte Abbildung)
$id_* = id$ (aber nicht die gleiche Identität!)
b) W fest, $\mathbb{K}$ fest

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f\circ\psi"'] \arrow[d, "\psi"] \arrow[r] & Hom_{\mathbb{K}}(X,W) \ni f\circ\psi = \psi^*(f) \\
W & V \arrow[l, "f"] \arrow[r] & Hom_{\mathbb{K}}(V,W) \ni f \arrow[u, "\psi^* = Hom_{\mathbb{K}}(\psi, W)"']
\end{tikzcd}$$

Ein Funktor $VR_{/\mathbb{K}} \to VR_{/\mathbb{K}}$
Kontravariant

1. $X = V \qquad (id_V)^* = id_{Hom_{\mathbb{K}}(V,W)}$
2. $(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$

=======

4 Matrizen

4.1 Rechnen mit Matrizen

Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir wie immer einen Körper, mit $M = \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ die Menge der $m \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$.
Für eine Matrix schreiben wir $A = (_{ij})$, mit dem *Zeilenindex* $i = 1, ..., m$ und dem *Spaltenindex* $j = 1, ..., n$.

Addition

$$\begin{aligned} + : M \times M &\longrightarrow M \\ (A, B) = ((a_{ij}), (b_{ij})) &\longmapsto C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

Die Matrix mit allen Einträgen gleich Null heißt *Nullmatrix* $0_{m,n} = 0$.
Es gilt:

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A + 0 = A = 0 + A$
4) zu jedem $A \in M$ gibt es ein Negatives $-A = (-a_{ij})$ mit $A + (-A) = 0$

Skalierung

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times M &\longrightarrow M \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A = (\lambda a_{ij}) \end{aligned}$$

Es gilt:

5) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7) $1 \cdot A = A$; $(-1) \cdot A = -A$
8) $0 \cdot A = 0$; $\lambda \cdot 0 = 0$

Einheitsmatrizen und Elementarmatrizen

Matrizen der Form $\tilde{E}^{kl} = (\tilde{e}_{ij}^{kl})$ $(i = 1, ..., m; j = 1, ..., n; k = 1, ..., m; l = 1, ..., n))$ mit

$$\tilde{e}_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{falls } (i, j) \neq (k, l) \end{cases}$$

heißen *Einheitsmatrizen*.

$$\tilde{E}^{kl} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \boxed{l} & \end{array} \\ \boxed{k} & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \\ \cdots & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrizen der Form $E^{kl} = \mathbb{1} + \tilde{E}^{kl}(k \neq l)$ heißen *Elementarmatrizen*.

Satz 4.1.1. *(i)* $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ *ist ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

(ii) $\mathcal{B} = \{\tilde{E}^{kl} | k = 1, ..., m; l = 1, ..., n\}$ *ist eine Basis.*

(iii) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})) = m \cdot n$

Beweis. (i) folgt aus 1) bis 8).

(ii)

$$A = (a_{ij}) = \begin{matrix} a_{11}\tilde{E}^{11} & +a_{12}\tilde{E}^{12} & +... & +a_{1n}\tilde{E}^{1n} \\ +a_{21}\tilde{E}^{21} & +... & & \\ \vdots & & & \\ +a_{m1}\tilde{E}^{m1} & +... & & +a_{mn}\tilde{E}^{mn} \end{matrix} = \sum_{i,j} a_{ij}\tilde{E}^{ik}$$

Also ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem. Für die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$ schreibe man eine mutmaßliche Relation

$$0 = \begin{matrix} \lambda_{11}\tilde{E}^{11} & +... & +\lambda_{1n}\tilde{E}^{1n} \\ \vdots & & \\ +\lambda_{m1}\tilde{E}^{m} & +... & +\lambda_{mn}\tilde{E}^{mn} \end{matrix}$$

mit $m \cdot n$ Termen. Also erhalten wir $m \cdot n$ Gleichungen für jede Stelle (i, j):

$$0 = \lambda_{ij} \cdot \tilde{e}^{ij}_{ij} = \lambda_{ij}$$

Also sind alle $\lambda_{ij} = 0$.

(iii) folgt aus (ii).

□

Multiplikation von Matrizen

$$\begin{matrix} \mathrm{Mat}_{m,k}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{k,n}(\mathbb{K}) & \dot{\longrightarrow} \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ A,B & \longmapsto A \cdot B = AB =: C \\ (a_{ij}),(b_{jl}) & \longmapsto (c_{il}) \end{matrix}$$

mit $c_{il} := \sum\limits_{s=1}^{k} a_{is}b_{sl};\ i = 1, ..., m; l = 1, ..., n.$

Es gilt:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$
   $(A + B) \cdot C = AC + BC$

3) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

4) $\underset{m,k}{0} \cdot \underset{k,n}{A} = \underset{m,n}{0}\,;\ \underset{m,k}{A} \cdot \underset{k,n}{0} = \underset{m,n}{0}$

Lemma 4.1.2. *i) Ist die i-te Zeile* $Z_i(A) = 0$*, so auch die i-te Zeile* $Z_i(AB)$*, für alle* B*.*

ii) Ist die j*-te Spalte* $S_j(B) = 0$*, so auch* $S_j(AB)$*, für alle* A*.*

Achtung!!! Das Matrizenprodukt ist im Allgemeinen **nicht** kommutativ:

$$AB \neq BA$$

.

Beispiel 4.1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der } y\text{-Achse}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der } x\text{-Achse}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der Hauptdiagonalen}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an der Nebendiagonalen}$$

Spezielle Produkte

a) $m = 1, n = 1, k$ beliebig: Skalarprodukt $\langle A, B\rangle$

$$\underbrace{(a_1, ..., a_k)}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{a_1 b_1 + ... + a_k b_k}_{C}$$

b) $k = 1; m, n$ beliebig:

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} & (b_1, ..., b_n) & = & \begin{pmatrix} a_1 b_1 & ... & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & ... & a_m b_n \end{pmatrix} \\ A & B & = & C \end{array}$$

mit $\operatorname{rg}(C) = 1$

c) $n = 1; m, k$ beliebig, $A \in \operatorname{Mat}_{m,k}(\mathbb{K})$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und k Unbekannten.

Bemerkung 4.1.4. Eine $(n \times n)$-Matrix heißt *quadratisch.*

Einsmatrix

Die quadratische $(n \times n)$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Einträgen 1 entlang der Diagonale und 0 sonst, heißt *Einsmatrix* $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$. Es gilt (für $A \in \operatorname{Mat}_{mn}(\mathbb{K})$):

1)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1}_m & \cdot & A & = & A \\ m \times m & & m \times n & & m \times n \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & \mathbb{1}_n & = & A \\ m \times n & & n \times n & & m \times n \end{array}$$

Also ist $\mathbb{1}$ ein beidseitiges neutrales Element.

Achtung! Nicht jede $(n \times n)$-Matrix besitzt ein Inverses!

Definition 4.1.5. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1) Eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ heißt *Rechtsinverses* zu A, falls gilt: $A \cdot B = \mathbb{1}_m$.
2) Eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K})$ heißt *Linksinverses* zu A, falls gilt: $C \cdot A = \mathbb{1}_n$.
3) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ heißt *invertierbar*, falls es ein $\tilde{A} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ gibt mit $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \mathbb{1}_n$.

Bemerkung 4.1.6. Existiert im Fall 3) ein Inverses, so ist es eindeutig bestimmt. (Aber Rechts- und Linksinverse sind *nicht* eindeutig bestimmt.)

Beweis. Seien $\tilde{A}, \tilde{\tilde{A}}$ zwei Inverse zu A, also $A\tilde{A} = \mathbb{1}$, $A\tilde{\tilde{A}} = \mathbb{1}$. Nach Distributivität gilt:

$$A(\tilde{A} - \tilde{\tilde{A}}) = A\tilde{A} - A\tilde{\tilde{A}} = 0$$

Wenn wir diese Gleichung nun von links mit $\tilde{A}$ multiplizieren, erhalten wir:

$$0 = \tilde{A} \cdot 0 = \tilde{A}A(\tilde{A} - \tilde{\tilde{A}} = \mathbb{1} \cdot (\tilde{A} - \tilde{\tilde{A}})$$

. Damit folgt $\tilde{A} = \tilde{\tilde{A}}$. □

Notation Ist A invertierbar, so nennen wir das (eindeutig bestimmte) Inverse A^{-1}.

Lemma 4.1.7. *i) Ist A invertierbar, so auch A^{-1} und $(A^{-1})^{-1} = A$.*

ii) Sind A und B invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (Man beachte die Reihenfolge!)

iii) Ist A invertierbar und $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, so auch λA und $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Beweis. klar. □

Beispiel 4.1.8. $(A_1 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \cdots A_1^{-1}$

Satz 4.1.9. *Eine $(n \times n)$-Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn ihr Rang $rg(A) = n$, also maximal.*

Definition 4.1.10 (Transponieren)**.**

$$\begin{aligned} {}^\top : \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (a_{ij}) = a &\longmapsto A^\top := (a_{ji}) \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

1) $(A^\top)^\top = A$
2) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$
3) $(\lambda A)^\top = \lambda \cdot A^\top$
4) $0^\top = 0$
5) $\mathbb{1}_n^\top = \mathbb{1}_n$
6) $(AB)^\top = B^\top A^\top$
7) Ist A invertierbar, so auch $A^\top$ mit $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Beispiel 4.1.11.

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n && \text{Zeilenvektor} \\
x^\top &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} && \text{Spaltenvektor} \\
x \cdot y^\top &= \langle x, y \rangle && x, y \text{ Zeilenvektoren} \\
x^\top \cdot y &= \langle x, y \rangle && x, y \text{ Spaltenvektoren}
\end{aligned}
$$

4.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Wir haben bereits gesehen, dass die Multiplikation einer $(m \times n)$-Matrix C mit einem $(n \times 1)$-Spaltenvektor $x \in K^n$ einen $(m \times 1)$-Spaltenvektor ergibt und dass dies eine lineare Abbildung ist:

$$
\begin{aligned}
T_C : K^n &\to K^m \\
x &\mapsto Cx
\end{aligned}
$$

Rechenregeln:

1. $T_C(0) = 0$
2. $T_C(\lambda x) = \lambda T_C(x)$
3. $T_C(x + x') = T_C(x) + T_C(x')$

Sei V ein K-Vektorraum mit geordneter Basis $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $\dim V = n$, W ein K-Vektorraum mit geordneter Basis $B = (b_1, \ldots, b_m)$, $\dim W = m$ und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Dann ist f durch $f(A)$ vollkommen bestimmt, also durch $f(a_1), \ldots, f(a_n) \in W$.

Jedes $f(a_j)$ ist bestimmt durch seine Koeffizienten bzgl. der Basis B:

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} b_i$$

Also ist f durch die λ_{ij} vollkommen bestimmt. Diese λ_{ij} fasse man zu einer Matrix $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ zusammen und notiere:

1. $K_B(f(a_j)) = (\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{mj}) = S_j(\Lambda) = \Lambda e_j \qquad$ (j-te Spalte)
2. $a_j = K_A^{-1}(e_j)$

Damit haben wir $K_B \circ f = T_\Lambda \circ K_A$:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_A"'] & W \arrow[d, "K_B"] \\
K^n \arrow[r, "T_\Lambda"'] & K^m
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_j \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(a_j) \arrow[d, mapsto] \\
e_j \arrow[r, mapsto] & S_j(\Lambda)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies f &= K_B^{-1} \circ T_\Lambda \circ K_A \\
T_\Lambda &= K_B \circ f \circ K_A^{-1}
\end{aligned}
$$

Bei festgewählten Basen A und B bestimmt f eine Matrix Λ und damit T_Λ und umgekehrt bestimmt Λ das T_Λ und damit f.

Definition 4.2.1. Wir definieren zwei Funktionen:

$$\begin{aligned} M_{BA} : \operatorname{Hom}_K(V,W) &\to \operatorname{Mat}_{m,n}(K) \\ f &\mapsto C = (c_{ij}) \end{aligned}$$

mit $c_{ij} = K_B(f(a_j))$ und

$$\begin{aligned} L_{BA} : \operatorname{Mat}_{m,n}(K) &\to \operatorname{Hom}_K(V,W) \\ C &\mapsto f = K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A \end{aligned}$$

Beispiel 4.2.2.

1. $f = 0: \; M_{BA}(0) = 0$
   $C = 0: \; L_{BA}(0) = 0$
2. $V = W, \; A = B$:
   $f = \mathrm{id}: \; M_{AA}(\mathrm{id}) = \mathbb{1}$
   $C = \mathbb{1}: \; L_{AA}(\mathbb{1}) = \mathrm{id}$
3. $V = W = \mathbb{R}^2, \; A = (e_1, e_2), \; B = (e_1, e_2 + e_1), \; f = \mathrm{id}:$
   $M_{BA}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $V = W = \mathbb{R}^2, \; A = (e_1, e_2), \; B = (e_1, e_2 + e_1), \; C = \mathbb{1}:$
   $L_{BA}(\mathbb{1}) = ((x, y) \mapsto (x, -x + y)$ (Scherung)
5. $V = K^n, \; W = K^m, \; A = (e_1, \ldots, e_n), \; B = (e_1, \ldots, e_m):$
   $M_{BA}(T_C) = C, \; L_{BA}(C) = T_C$, denn $K_A = \mathrm{id}, \; K_B = \mathrm{id}$

Satz 4.2.3. *Sei A bzw. B eine Basis für V bzw. W. M_{BA} und L_{BA} sind zueinander invers und linear, d.h. sie sind Isomorphismen von Vektorräumen.*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}(V,W) \arrow[r, shift left, "M_{BA}"] & \operatorname{Mat}_{m,n}(K) \arrow[l, shift left, "L_{BA}"] \end{tikzcd}$$

Seien $V = K^n$, $W = K^m$ und A und B die Standardbasen von V, W. Nun betrachte man die Funktionen

$$\begin{aligned} L_{BA} = T : \; \operatorname{Mat}_{n,m}(K) &\to \operatorname{Hom}(K^n, K^m) \\ C &\mapsto K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A = T_C \end{aligned}$$

Lemma 4.2.4. *T ist linear und multiplikativ, d.h. $T_0 = 0$, $T_{\lambda C} = \lambda T_C$, $T_{A+B} = T_A + T_B$, sowie für $n = m$ gilt $T_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}$ und $T_{A^{-1}} = T_A^{-1}$, als auch $T_{AB} = T_A T_B$ für passende A und B.*

Die Beweise reduzieren sich auf Rechenregeln für Matrizen.

Es sei $\varphi : W \to Y$ eine feste lineare Abbildung. Dann haben wir die Postkomposition

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\varphi\circ f"'] & W \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

und können dies als Funktion

$$\begin{aligned} \varphi_* = \operatorname{Hom}_K(V, \varphi) : \; \operatorname{Hom}_K(V,W) &\to \operatorname{Hom}_K(V,Y) \\ f &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

betrachten.

Entsprchend sei $\psi : X \to V$ eine feste lineare Abbildung. Dann haben wir die Präkomposition

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "f\circ\psi"'] & V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

und können dies als Funktion

$$\begin{aligned} \psi^* = \operatorname{Hom}_K(\psi, W): \ \operatorname{Hom}_K(V, W) &\to \operatorname{Hom}_K(X, W) \\ f &\mapsto f \circ \psi \end{aligned}$$

betrachten.

Lemma 4.2.5. $\varphi_* : \ \operatorname{Hom}_K(V, W) \to \operatorname{Hom}_K(V, Y)$ *ist linear:*

1. $\varphi_*(0) = 0$

2. $\varphi_*(\lambda f) = \lambda \varphi_*(f)$

3. $\varphi_*(f + g) = \varphi_*(f) + \varphi_*(g)$

1'. $\varphi \circ 0 = 0$

2'. $\varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f)$

3'. $\varphi \circ (f + g) = (\varphi \circ f) + (\varphi \circ g)$

Lemma 4.2.6. $\psi^* : \ \operatorname{Hom}_K(V, W) \to \operatorname{Hom}_K(V, Y)$ *ist linear:*

1. $\psi^*(0) = 0$

2. $\psi^*(\lambda f) = \lambda \psi^*(f)$

3. $\psi^*(f + g) = \psi^*(f) + \psi^*(g)$

1'. $0 \circ \psi = 0$

2'. $(\lambda f) \circ \psi = \lambda(f \circ \psi)$

3'. $(f + g) \circ \psi = (f \circ \psi) + (g \circ \psi)$

Beweis. (Lemma 4.2.5).

$$\varphi_*(0) = \varphi \circ 0 = 0$$

$$\begin{aligned} (\varphi_*(\lambda f))(x) &= (\varphi \circ (\lambda f))(x) \\ &= \varphi(\lambda f(x)) = \lambda \varphi(f(x)) \\ &= \lambda((\varphi \circ f)(x)) = \lambda(\varphi_*(f)(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_*(f + g))(x) &= (\varphi \circ (f + g))(x) = \varphi((f + g)(x)) \\ &= \varphi(f(x) + g(x)) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)) \\ &= (\varphi \circ f)(x) + (\varphi \circ g)(x) = \varphi_*(f)(x) + \varphi_*(g)(x) \end{aligned}$$

□

Beweis. (Satz 4.2.3). Sei $M = M_{BA}$, $L = L_{BA}$, $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $x \in V$.

$$\begin{aligned} L(M(f)) &= K_B^{-1} \circ T_{M(f)} \circ K_A \\ &= K_B^{-1} \circ K_B \circ f \circ K_A^{-1} \circ K_A = f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(L(C))(x) &= M(K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A)(x) \\ &= K_B(K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A)K_A^{-1}(x) = T_C(x) = Cx \\ \implies M(L(C)) &= C \end{aligned}$$

Also $L \circ M = \mathrm{id}$ und $M \circ L = \mathrm{id}$.

Es genügt, die Linearität von L zu zeigen. Dies folgt mithilfe der gerade bewiesenen Lemmata:

$$\begin{aligned} L(\lambda C) &= K_B^{-1} \circ T_{\lambda C} \circ K_A \\ &= K_B^{-1} \circ (\lambda T_C) \circ K_A \\ &= \lambda (K_B^{-1} \circ T_C \circ K_A) \\ &= \lambda L(C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(A+B) &= K_B^{-1} \circ T_{A+B} \circ K_A \\ &= K_B^{-1} \circ (T_A + T_B) \circ K_A \\ &= K_B^{-1} \circ T_A \circ K_A + K_B^{-1} \circ T_B \circ K_A \\ &= L(A) + L(B) \end{aligned}$$

□

Basis für $\mathrm{Hom}_K(V,W)$

Da L_{BA} ein Isomorphismus ist, können wir die Basis $\tilde{E}^{kl}$ der Standardeinheitsmatrizen nach $\mathrm{Hom}(V,W)$ schicken und erhalten

$$f^{kl} : \; V \to W, \; a_j \mapsto \begin{cases} b_k & \text{, falls } j = l \\ 0 & \text{, falls } j \neq l \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt nun

$$\begin{aligned} L_{BA}(\tilde{E}^{kl}) &= f^{kl} \\ M_{BA}(f^{kl}) &= \tilde{E}^{kl} \end{aligned}$$

In Lemma 4.2.4 haben wir für die Funktion T auch schon multiplikative Eigenschaften aufgelistet, daraus folgt

$$\begin{aligned} M_{AA}(\mathrm{id}) &= \mathbb{1} \\ L_{AA}(\mathbb{1}) &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

Für die multiplikativen Eigenschaften von M und L betrachten wir drei Vektorräume V, W und Z mit geordneten Basen $A \subseteq V$, $B \subseteq W$ und $C \subseteq Z$ Dann haben wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(W,Z) \times \mathrm{Hom}(V,W) &\to \mathrm{Hom}(V,Z) \\ \mathrm{Mat}_{l,m}(K) \times \mathrm{Mat}_{m,n}(K) &\to \mathrm{Mat}_{l,n}(K) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f, g \qquad &\mapsto f \circ g \\ A, B \qquad &\mapsto A \cdot B \end{aligned}$$

Satz 4.2.7.

$$\begin{aligned} M_{AA}(\mathrm{id}) &= \mathbb{1} \\ L_{AA}(\mathbb{1}) &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{CA}(f \circ g) &= M_{CB}(f) \cdot M_{BA}(g) \\ L_{CA}(A \cdot B) &= L_{CB}(A) \circ L_{BA}(B) \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Ausgaben wurden bereits bewiesen, bei den anderen genügt es, diese für L zu beweisen.

$$\begin{aligned} L_{CA}(AB) &= K_C^{-1} \circ T_{AB} \circ K_A \\ &= K_C^{-1} \circ T_A \circ T_B \circ K_A \\ &= K_C^{-1} \circ T_A \circ K_B \circ K_B^{-1} \circ T_B \circ K_A \\ &= L_{CB}(A) \circ L_{BA}(B) \end{aligned}$$

□

Korollar 4.2.8. *$f : V \to W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $M_{BA}(f)$ invertierbar ist; in diesem Fall ist $M_{BA}(f^{-1}) = M_{BA}(f)^{-1}$.*

$C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $L_{BA}(C)$ ein Isomorphismus ist; in diesem Fall ist $L_{AB}(C^{-1}) = L_{BA}(C)^{-1}$, und speziell ist $L_{AB}(\mathbb{1}) = L_{BA}(\mathbb{1})^{-1}$.

4.3 Basiswechsel

Angenommen, wir haben bislang einer linearen Abbildung $f : V \to W$ bzgl. der Basen $A \subseteq V$ und $B \subseteq W$ eine Matrix zugeordnet, nämlich $C = M_{BA}(f)$. Wie ändert sich C, wenn wir andere Basen A' und B' nehmen?

Wir benutzen Satz 4.2.7 zweimal:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[l, "f"'] \\ W & V \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "M_{B'B}(\mathrm{id})"'] & A \arrow[l, "M_{BA}(f)"'] \\ B' & A' \arrow[l, "M_{B'A'}(f)"] \arrow[u, "M_{AA'}(\mathrm{id})"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} C' = M_{B'A'}(f) &= M_{B'A'}(\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}) \\ &= M_{B'B}(\mathrm{id}) \cdot M_{BA}(f) \cdot M_{AA'}(\mathrm{id}) \\ &= M_{B'B}(\mathrm{id}) \cdot M_{BA}(f) \cdot M_{A'A}(\mathrm{id})^{-1} \\ &= \Omega_{B'B} \cdot C \cdot \Omega_{A'A}^{-1} \end{aligned}$$

Die Matrix $\Omega = \Omega_{A'A}$ heißt Basiswechselmatrix für den Wechsel von A nach A'. Ihre j-te Spalte $S_j(\Omega_{A'A})$ enthält die Koeffizienten, um a_j durch die $a'_1, \ldots, a'_k$ darzustellen:

$$a_j = \sum_{k=1}^{n} \omega_{kj} \cdot a'_k$$
$$K_{A'}(a_j) = (\omega_{1j}, \ldots, \omega_{nj}) = S_j(\Omega)$$

Proposition 4.3.1.

1. $\Omega_{AA} = 1$
2. $\Omega_{A'A} = \Omega_{AA'}^{-1}$
3. $\Omega_{A''A'} \cdot \Omega_{A'A} = \Omega_{A''A}$
4. *Es sei A eine Basis von V und D eine invertierbare Matrix in $\mathrm{Mat}_n(K)$. Dann git es eine Basis A' von V mit $\Omega_{A'A} = D$.*

Beweis. $\varphi = L_{AA}(D) : V \to V$ ist ein Automorphismus. Also ist $A' = (\varphi^{-1}(a_1), \ldots, \varphi^{-1}(a_n))$ wieder eine Basis, wenn $A = (a_1, \ldots, a_n)$ war. Dann haben wir

$$\begin{aligned} D = M_{AA}(\varphi) &= M_{AA'}(\varphi) \cdot M_{A'A}(\mathrm{id}) \\ &= M_{A'A}(\varphi^{-1}) \cdot \Omega_{A'A} \\ &= \mathbb{1} \cdot \Omega_{A'A} = \Omega_{A'A} \end{aligned}$$ □

Normalformen

Wir werden noch sehen, dass wir die zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ bzgl. zweier Basen $A \subseteq V$ und $B \subseteq W$ gehörende Matrix $C = M_{BA}(f)$ durch geschickte Wahl von A und B auf eine sehr einfache Form bringen können.

Anders gesagt, multipliziert man eine Matrix C von links und rechts mit invertierbaren Matrizen R und S, dann kann man $C' = RCS$ auf sehr einfache Form

$$C' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

bringen, wobei $r = rg(f) = rg(C)$ der Rang von C ist.

Interessanter ist, wenn C eine $n \times n$-Matrix ist, die also zu einem Endomorphismus $f : V \to V$ bzgl. einer Basis A gehört, also $C = M_{AA}(f)$. Dann kann man sich auf simultane Basiswechsel beschränken und versucht, durch geschickte Wahl von A die Matrix C möglichst einfach zu machen.

Anders gesagt, man multipliziert C von links mit R und von rechts mit R^{-1}, also $C' = RCR^{-1}$. Dies nennt man eine Konjugation. Daran kann man nun viel mehr ablesen.

Und als drittes wird man dann noch die zulässigen R einschränken und nur mit speziellen R konjugieren.

Lemma 4.3.2. *Es sei $f : V \to W$ linear und es seien $\psi : V \to V$ und $\phi : W \to W$ Automorphismen. Dann gilt:*

(i) $ker(\phi \circ f \circ \psi) = \psi^{-1}(ker(f))$

(ii) $im(\phi \circ f \circ \psi) = \phi(ker(f))$

Lemma 4.3.3. *Sei $M \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), A \in Mat_{m,m}(\mathbb{K})$ und $B \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$ sowie A und B invertierbar. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{L}(AMB|0) = ker(T_{AMB}) = T_B^{-1}(\mathcal{L}(M|0)) = T_{B^{-1}}(\mathcal{L}(M|0)) = B^{-1}(\mathcal{L}(M|0))$
$:= \{B^{-1}x | x \in \mathcal{L}(M|0)\}$

(ii) $\mathcal{W}(AMB) = T_A(\mathcal{W}(M)) = A\mathcal{W}(M) = \{y \in \mathbb{K}^m | \mathcal{L}(AMB|y) \neq \emptyset\}$

Beweis:
Das erste Lemma war eine Übungsaufgabe, das zweite folgt aus dem ersten Lemma mit Isomorphismen

$$M_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}} : \quad Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \rightleftarrows Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \quad : L_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$$

Korollar 4.3.4 (→ Übungsaufgabe 55)**.** *(i)* $rg(\phi \circ f \circ \psi) = rg(f)$

(ii) $rg(AMB) = rg(M)$

Beweis: Wir wissen bereits aus Lemma 1:
$ker(\phi \circ f \circ \psi) = \psi^{-1}(ker(f))$, also ist $\dim(ker(\phi \circ f \circ \psi)) = \dim(\psi^{-1}(ker(f))) = \dim(ker(f))$, weil ψ^{-1} ein Isomorphismus ist. Weiter gilt nach der Dimensionsformel:

$$n = \dim(V) = \dim(im(f)) + \dim(ker(f)) = \dim(im(\phi \circ f \circ \psi)) + \dim(im(\phi \circ f \circ \psi)),$$

daraus folgt sofort die Behauptung $rg(f) = rg(\phi \circ f \circ \psi)$. □

4.4 Spaltenumformungen

Wir kennen für Zeilen folgende Umformungen:

$\mathfrak{M}_i[\lambda]$:	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \to Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	*Multiplikation der i-ten Zeile mit* λ
$\mathfrak{A}_{ij}$:	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \to Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	*Addition der j-ten zur i-ten Zeile*
$\mathfrak{V}_{ij}$:	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \to Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	*Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile*

Analog gilt für Spaltenumformungen:

$\mathfrak{M}'_i[\lambda]$:	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \to Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	*Multiplikation der i-ten Zeile mit* λ
$\mathfrak{A}'_{ij}$:	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \to Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	*Addition der j-ten zur i-ten Zeile*
$\mathfrak{V}'_{ij}$:	$Mat_{m,n}(\mathbb{K}) \to Mat_{m,n}(\mathbb{K})$	*Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile*

Voller Gaußalgorithmus

Satz 4.4.1. *Jede Matrix $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ mit $rg(A) = r$ kann durch Zeilen- und Spaltenumformungen in eine Form wie $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gebracht werden.*

Beweis:

(1) Der einfache Gauß-Algorithmus, das heißt wenn nur Zeilenumformungen benutzt werden, bringt A zunächst auf die Form

(2) Durch Vertauschen der Spalten $j_1, \dots, j_r$ auf die Plätze $1, \dots, r$, also durch ein "nach vorne ziehen", erhalten wir

(3) Dividieren der Spalte 1 durch π_1, …, Spalte r durch π_r, erhalten wir

(4) Als letzten Schritt werden alle Spalten -ausgeräumt"

4.5 Spezielle Matrizen

Sei im Folgenden n fest gewählt.

a) **Elementarmatrizen**
Für $1 \leq k \neq l \leq n$ sei

$$E^{kl} = \mathbb{1}_n + \widetilde{E}^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

die Elementarmatrix. Dann ist E^{kl} invertierbar mit $(E^{kl})^{-1} = \mathbb{1} - \widetilde{E}^{kl}$, denn es gilt

$$(\mathbb{1} + \widetilde{E}^{kl})(\mathbb{1} - \widetilde{E}^{kl}) = \mathbb{1}^2 - (\widetilde{E}^{kl})^2 = \mathbb{1} - 0 = \mathbb{1}.$$

Etwas allgemeiner gilt für $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$: $\quad E^{kl}[\lambda] = \mathbb{1} + \lambda \widetilde{E}^{kl}$,

$$E^{kl}[\lambda] : \qquad \begin{aligned} e_k &\longmapsto e_k \\ e_l &\longmapsto e_l + \lambda e_k \\ e_i &\longmapsto e_i (i \neq k, l) \end{aligned}$$

Geometrisch betrachtet erhalten wir Scherungen:

$$n = 2 : \qquad E^{12}[\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 4.5.1. *Für die Elementarmatrizen gelten*

(1) $E^{kl}[0] = \mathbb{1}$

(2) $E^{kl}[\lambda] \cdot E^{kl}[\mu] = E^{kl}[\lambda + \mu]$, *insbesondere* $(E^{kl}[\lambda])^s = E^{kl}[s\lambda]$

(3) $E^{kl}[\lambda]^{-1} = E^{kl}[-\lambda]$

(4) $E^{ij}[\lambda] \cdot E^{kl}[\mu] E \cdot^{ij} [-\lambda] \cdot E^{kl}[-\mu] = \mathbb{1}, \quad i \neq l, j \neq k$

(5) $E^{ij}[\lambda] \cdot E^{jl}[\mu] \cdot E^{ij}[-\lambda] \cdot E^{jl}[-\mu] = E^{il}[\lambda\mu], \quad i \neq l$

(6) $E^{ij}[\lambda] \cdot E^{ki}[\mu] \cdot E^{ij}[-\lambda] \cdot E^{ki}[-\mu] = E^{kj}[-\lambda\mu], \quad j \neq k$

(7) $(E^{ij}[1] \cdot E^{ji}[1]^{-1} \cdot E^{ij}[1])^4 = \mathbb{1}$

Beweis:
Man kann solche Formeln durch Nachrechnen beweisen, oder man kontrolliert, dass beide Seiten auf den Standardeinheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ das gleiche tun. Eine gute Methode ist auch folgende: Man rechnet das im kleinsten Fall $n = 2$ oder einem anderen kleinen Wert nach, und nennt die kleinen Matrizen kurz $e^{ij}[\lambda]$. Dann sieht man schnell, dass die Gleichungen auch für die durch $\mathbb{1}$ ergänzte große Elementarmatrix

$$E^{ij}[\lambda] = \begin{pmatrix} e^{ij}[\lambda] & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

gelten. Und zum Schluss benutzt man $E^{ij}[\lambda] = PE^{ij}P^{-1}$ für ein geeignetes P, wenn k, l beliebig ist. □

Bemerkung 4.5.2. Ausdrücke der Form $aba^{-1}b^{-1}$ nennt man einen *Kommutator*.

b) **Streckungsmatrizen**
Sei $k = 1, \ldots, n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann definieren wir die Streckungsmatrix als

$$D_k[\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 4.5.3. *Es gilt*

(1) $D_k[1] = \mathbb{1}$

(2) $D_k[\lambda] \cdot D_k[\mu] = D_k[\lambda\mu]$, *insbesondere* $D_k[\lambda]^s = D_k[\lambda^s]$

(3) $D_k[\lambda]$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\lambda \neq 0$ *ist, und in diesem Fall ist* $D_k[\lambda]^{-1} = D_k[\frac{1}{\lambda}]$

(4) $D_i[\lambda] \cdot D_j[\mu] = D_j[\mu] \cdot D_i[\lambda]$

c) **Diagonalmatrizen**

Matrizen der Form $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ heißen Diagonalmatrizen.

Lemma 4.5.4. *Es gilt*

(1) $D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = D[\lambda_1] \cdot \ldots \cdot D[\lambda_n]$

(2) $D[1, \ldots, 1] = \mathbb{1}$

(3) $D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \cdot D[\mu_1, \ldots, \mu_n] = D[\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n]_m u_n$

(4) $D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ *ist genau dann invertierbar, wenn* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$, *in diesem Fall ist* $D[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]^{-1} = D[\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}]$

d) **Permutationsmatrizen**
Eine *Permutation* auf den Ziffern $1, \ldots, n$ ist eine Bijektion $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, zusammen mit einer Abbildung
$$f_\sigma : \quad \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad e_k \longmapsto e_{\sigma(k)},$$
die also eine Permutation der Standardbasis darstellt. Die dazugehörige Matrix sei
$$P_\sigma = M_{SS}(F_\sigma).$$
Sie hat in jeder Zeile i genau einen von Null verschiedenen Eintrag, und zwar an der Stelle $j = \sigma^{-1}(i)$ eine 1, und sie hat in jeder Spalte j genau einen von Null verschiedenen Eintrag, und zwar an der Stelle $i = \sigma(j)$ eine 1.

Beispiel 4.5.5.

- $\sigma = id$
- Transposition $(i\ j)$: $\quad i \longmapsto j, \quad j \longmapsto i, \quad k \longmapsto k$ für $k \neq i, j$

Lemma 4.5.6. *Es gilt*

(1) $P_{id} = \mathbb{1}$

(2) $P_\sigma \cdot P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$

(3) P_σ *ist invertierbar und es ist* $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$

(4) $P_{(i\ j)}1{-}1 = P_{(i\ j)}$ *für eine Transposition* $(i\ j)$

Lemma 4.5.7.

1. $P_\sigma E^{ij}[\lambda]P_\sigma^{-1} = E^{\sigma(i)\sigma(j)}[\lambda]$
2. $P_\sigma D_k[\lambda]P_\sigma^{-1} = P_{\sigma(k)}[\lambda]$
3. $P_\sigma D(\lambda_1, ..., \lambda_k)P_\sigma^{-1} = D(\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, ..., \lambda_{\sigma^{-1}(k)})$
4. $P_\sigma P_\varepsilon P_\sigma^{-1} = P_{\sigma\varepsilon\sigma^{-1}}$
5. $D_j[\lambda^{-1}]E^{ij}[\mu]D_i[\lambda] = Eij[\lambda\mu]$

Was bewirken diese Matrizen?

Proposition 4.5.8. *Sei* $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), \lambda \neq 0$

1. $E^{ij}A = \mathfrak{A}_{ij}(A)$ *Addition der j-ten Zeile zur i-ten*
2. $D_i[\lambda]A = \mathfrak{M}_i[\lambda](A)$ *Multiplikation der i-ten Zeile mit* λ
3. $P_{ij}A = \mathfrak{V}_{ij}(A)$ *Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile*

Proposition 4.5.9. *Sei* $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), E^{ij}, D_i[\lambda], P_{\sigma(j)} \in Mat_{n,m}(\mathbb{K})\lambda \neq 0$

1. $AE^{ij} = \mathfrak{A}'_{ij}(A)$ *Addition der j-ten Zeile zur i-ten*
2. $AD_i[\lambda] = \mathfrak{M}'_i[\lambda](A)$ *Multiplikation der i-ten Zeile mit* λ
3. $AP_{\sigma(j)} = \mathfrak{V}'_{ij}(A)$ *Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile*

Man stellt also fest:

1. Der vollständige Gauß-Algorithmus, angewandt auf A, ist nichts anderes als sukzessives Multiplizieren von links oder rechts mit Elementarmatrizen, Streck- oder Vertauschmatrizen. Gauß macht aus der Matrix A die Matrix $A' = ZAS$, wobei Z das Produkt aller verwendeten Elementar-, Streck- und Vertauschmatrizen ist, in der richtigen Reihenfolge sortiert nach Zeilen- und Spaltenumformungen. Hier ist $r = rg(A)$.

2. A sei quadratisch und invertierbar.
   In diesem Fall kommt man ohne Spaltenumformungen aus. A wird durch Linksmultiplikation mit Z zu $A' = \mathbb{1}\ Z$ ist gleich A^{-1}. **Wichtig:** Man muss nicht wissen, ob A invertierbar ist, der Algorithmus bricht vorher ab.

Beispiel 4.5.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Linksmultiplikation mit $E21[-3]$ liefert:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
Linksmultiplikation mit $E^{12}[1]$ liefert:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
Linksmultiplikation mit $D_2[-\frac{1}{2}]$ liefert schließlich das Inverse A^{-1}. Die Inverse Matrix steht nun da, wo ursprünglich die Einheitsmatrix stand und an Stelle von A steht nun die Einheitsmatrix.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$

4.6 Normalformen

Sei im Folgenden $f : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V mit $dim(V) = n$ und W mit $dim(W) = m$, sei weiter der $rg(f) = r$. Setze $V' := Ker(f)$ mit Basis $\mathcal{A}'' = (a''_1, ..., a''_{n-r})$. Ergänze nun $\mathcal{A}''$ zu eine Basis $\mathcal{A}$ von V, also $\mathcal{A} = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'') = (a'_1, ..., a'_r, a''_1, ..., a''_{n-r})$. Dann gilt: (1) $f(a''_i) = 0$ mit $i = 1, ..., n-r$. Das ist klar, denn Elemente im Kern werden auf Null geschickt.
(2) Setze $\mathcal{B}' := f(A') = (f(a'_1), ..., f(a'_r))$. $\mathcal{B}'$ ist eine geordnete Basis von $im(f) \subseteq W$.
Warum ist das so? $0 = \lambda_1 f(a'_1) + ... + \lambda_r f(a'_r) = f(\lambda_1 a'_1 + ... + \lambda_r a'_r)$, da gleich Null muss $v' = (\lambda_1 a'_1 + ... + \lambda_r a'_r) \in Ker(f)$. v' ist mit der Basis des Kerns darstellbar $v' = \mu_1 a''_1 + ... + \mu_{n-r} a''_{n-r}$. Daraus folgt, dass $0 = (-\lambda_1)a'_1 + ... + (-\lambda_r)a'_r + \mu_1 a''_1 + ... + \mu_{n-r} a''_{n-r}$ und somit gelten muss, dass alle $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$ und $\mu_1 = ... = \mu_{n-r} = 0$. Ergänze zu einer Basis $\mathcal{B} = (\mathcal{B}', \mathcal{B}'') = (f(a'_1), ..., f(a'_r), b_1, ..., b_n - r)$. Dann ist

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Satz 4.6.1. *Für jede lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ zwischen Vektorräumen gibt es Basen $\mathcal{A}$ in V und $\mathcal{B}$ in W, so dass gilt*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ mit } r = rg(f)$$

Insbesondere gilt: Wenn f ein Isomorphismus ist und $m = n$ (d.h. V und W haben gleiche Dimension), dann ist $M_{\mathcal{B},\mathcal{A}}(f) = 1_n$

Beweis. nach obiger Konstruktion. □

Satz 4.6.2. *Für jede Matrix $M \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ gibt es invertierbare Matrizen A, B mit*

$$BMA = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Insbesondere gilt: Wenn M invertierbar ist, so ist $BMA = \mathbb{1}$

Beweis.

1. Gauß-Algorithmus mit $B = Z$ Produkt der Zeilenumformungen und $A = S$ Produkt der Spaltenumformungen.

2. $M_{\mathcal{B},\mathcal{A}} : Hom(V, W) \longleftrightarrow Mat_{m,n}(\mathbb{K}) : L$. $\mathcal{A}$ ist Basiswechselmatrix in V und $\mathcal{B}$ ist Basiswechselmatrix in W.

□

5 Gruppen

Wir haben schon etliche Gruppen gesehen und wollen diesen Begriff nun axiomatisieren.

Definition 5.0.3. Eine *Gruppe* G ist eine nicht-leere Menge mit einer Verknüpfung, genannt *Multiplikation*

$$\begin{array}{rccl} \mu: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x, y) & \longmapsto & \mu(x, y) = x \cdot y = xy, \end{array}$$

so dass folgende drei Axiome erfüllt sind:

(G1) *Assoziativgesetz*: Für alle $x, y, z \in G$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

(G2) *Neutrales Element*: Es gibt ein Element $1 \in G$ so dass für alle $x \in G$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

(G3) *Inverse Elemente*: Für jedes $x \in G$ gibt es ein $x^{-1} \in G$, so dass

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} x = 1.$$

Gilt zusätzlich das

(G4) *Kommutativgesetz*: Für alle $x, y \in G$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.

so nennt man G *kommutativ* oder *abelsch*.

Notation

1) Das Produkt wird meist ohne Punkt xy geschrieben und das Inverse x^{-1}. Wir werden gleich sehen, dass es zu jedem x *nur ein Inverses* gibt. Das neutrale Element wird oft auch mit e bezeichnet.
2) In einer abelschen Gruppe schreibt man das Produkt oft (aber nicht immer) als Addition $x + y$, das neutrale Element als 0, und das Inverse als $-x$. Die Axiome lauten dann

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ x + 0 &= 0 + x = x \\ x + (-x) &= (-x) + x = 0 \\ x + y &= y + x \end{aligned}$$

Lemma 5.0.4. *Gilt*

$$\begin{aligned} &x \cdot y_1 = y_1 \cdot x = 1 \quad \textit{und} \\ &x \cdot y_2 = y_2 \cdot x = 1, \end{aligned}$$

so ist $y_1 = y_2$.

Beweis. Wir benötigen nur

$$\begin{aligned} &(1)\ x \cdot y_1 = 1 \quad \text{und} \\ &(2)\ y_2 \cdot x = 1, \end{aligned}$$

denn

$$y_1 \stackrel{(G2)}{=} 1 \cdot y_1 \stackrel{(2)}{=} (y_2 x) y_1 \stackrel{(G1)}{=} y_2 (x y_1) \stackrel{(1)}{=} y_2 \cdot 1 \stackrel{(G2)}{=} y_2$$

□

Lemma 5.0.5.

$$
\begin{aligned}
&(1) & 1^{-1} &= 1 \\
&(2) & (x^{-1})^{-1} &= x \\
&(3) & (xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1}
\end{aligned}
$$

Beispiel 5.0.6. 1) $G = \mathbb{Z}$ mit der Addition (abelsch).

2) $G = \mathbb{K}$ mit der Addition (abelsch)

3) $G = \mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation (abelsch)

4) $G = V$ Vektorraum mit Addition (abelsch)

5) $G = \mathbb{Z}/n$ mit der Addition (abelsch)

6) *Allgemeine lineare Gruppe* $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ Gruppe der invertierbaren $n \times n$- Matrizen über $\mathbb{K}$ (nicht-abelsch für $n \geq 2$)

$$A \in \underbrace{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \supseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \supseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})}_{A^{-1} \text{ hat wieder Einträge im Unterkörper } \mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}} \supseteq \underbrace{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})}_{\text{Warum ist } A^{-1} \text{ wieder ganzzahlig?}}$$

7) $G = \mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{linear und bijektiv}\}$ *Automorphismen* von V (nicht abelsch für $\dim V > 1$).

8) *Diedergruppen* $G = \{\text{Drehungen und Spiegelungen eines regelmäßigen n-Ecks}\} = \mathrm{D}_{2n}$

9) Drehungen (ohne Spiegelungen) der 5 platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder)
Die *Ikosaedergruppe* hat 60 Elemente:

12 Ecken
30 Kanten
20 Flächen (Dreiecke)
Euler-Zahl $\chi = 12 - 30 + 20 = 2$

- 6 Geraden durch antipodische Ecken: Drehungen um $72°, 144°, 216°, 288° \rightsquigarrow 6 \cdot 4 = 24$
- 10 Geraden durch antipodische Flächenmittelpunkte: Drehungen um $120°, 240° \rightsquigarrow 10 \times 2 = 20$
- 15 Geraden durch antipodische Kantenmittelpunkte: Drehungen um $180° \rightsquigarrow 15 \cdot 1 = 15$
- identische Abbildung $\rightsquigarrow 1$

5.1 Symmetrische Gruppen

Definition 5.1.1 (Symmetrische Guppe)**.** Für eine beliebige Menge X nennt man

$$\mathrm{Sym}(X) = \{f : X \to X \text{ bijektiv}\}$$

die *symmetrische Gruppe von* X . Für $X = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man $\mathrm{S}_n = \mathfrak{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, \ldots, n\})$. Es gilt $|\mathfrak{S}_n| = n!$.
Spezielle Elemente:

- Die *Transposition* $(ij) \in \mathfrak{S}_n$ vertauschen nur zwei Elemente $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ und lässt alle anderen fix.
- $(ij)^{-1} = (ij) = (ji)$.
- *Zykel*: $i_1, \ldots, i_k$ seien paarweise verschiedene Elemente in $\{1, \ldots, n\}$. Wir definieren $(i_1 i_2 \ldots i_k) \in \mathfrak{S}_n$ durch $i_1 \mapsto i_2 \mapsto i_3 \mapsto \ldots \mapsto i_k \mapsto i_1$ und $i \mapsto i$ für alle anderen Elemente.
- $k = 1$: $(i_1) = 1$.
- $(i_1 i_2 \ldots i_k)^{-1} = (i_k i_{k-1} \ldots i_2, i_1)$.
- $(i_1 i_2 \ldots i_k) = (i_2 i_3 \ldots i_k i_1) = (i_3 i_4 \ldots i_k i_1 i_2) = \ldots$ (Jeder Zykel der Länge k hat k Notationen.)

- $\mathfrak{S}_n$ ist nicht abelsch für $n \geq 3$:

$$(12)(23) = (123)$$
$$(23)(12) = (132)$$

Lemma 5.1.2. *Jedes $\pi \in \mathfrak{S}_n$ lässt sich eindutig als Produkt von disjunkten Zykeln schreiben:*

$$\pi = (a_1 \dots a_k)(b_1 \dots b_l)(c_1 \dots c_m) \cdots (x_1 \dots x_r)$$

Dabei ist die Reihenfolge der r Zykel nicht bestimmt, weil disjunkte Zykel vertauschen; die Reihenfolge der Elemente in einem Zykel ist bis auf zyklische Vertauschung eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir schreiben $X = \{1, \dots, n\}$.
Wir beginnen mit dem Element 1 und verfolgen seine Bahn

$$1 = a_1 \overset{\pi}{\mapsto} a_2 \overset{\pi}{\mapsto} \dots \overset{\pi}{\mapsto} a_{k+1} = 1;$$

weil wir nur enndlich-viele Möglichkeiten haben, muss für ein $k \geq 1$ wieder $1 = a_{k+1}$ erscheinen; k sei minimal mit dieser Eigenschaft. Ist $k = 1$, so ist 1 ein Fixpunkt von π und wir brauchen den Zykel (a_1) gar nicht zu notieren; ansonsten haben wir einen ersten Zykel $(a_1 \dots a_k)$.
Wir setzen $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$ und betrachten die Menge $X \setminus \mathfrak{A}$. Ist diese Menge leer, sind wir fertig. Sonst wählen wir das kleinste Element b_1 und verfolgen seine Bahn

$$b_1 \overset{\pi}{\mapsto} b_2 \overset{\pi}{\mapsto} \dots \overset{\pi}{\mapsto} b_{l+1} = b_1.$$

Diese kann die Bahn von a_1 nicht kreuzen, liegt also ganz in $X \setminus \mathfrak{A}$. Ist $l = 1$, so brauchen wir den Zykel (b_1) nicht zu notieren; sonst haben wir den Zykel $(b_1 \dots b_n)$. Wir schreiben $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_l\}$.
Wir machen so weiter, als nächstes mit $X \setminus (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$, bis ganz X ausgeschöpft ist. □

Definition 5.1.3. Wir definieren den *Zykeltyp* von $\pi \in \mathfrak{S}_n$ als

$$\mathrm{Typ}(\pi) = (t_1, \dots, t_n),$$

wobei t_i die Anzahl der Zykel der Länge i und t_1 die Anzahl der Fixpunkte von π ist. Wir haben dann

$$n = 1t_1 + 2t_2 + \dots nt_n.$$

Beispiel 5.1.4. 1) $\pi = (ij)$ Transposition hat $\mathrm{Typ}(\pi) = (n-2, 1, 0, \dots, 0)$.
2) $\pi = 1$ hat $\mathrm{Typ}(1) = (n, 0, 0, \dots, 0)$.
3) $\pi = (1375462)(8)(910)$ hat $\mathrm{Typ}(\pi) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$.

Lemma 5.1.5. *Jeder Zykel ist ein Produkt von Transpositionen:*

$$(i_1 \dots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-2} i_{k-1})(i_{k-1} i_k)$$

Korollar 5.1.6. *Jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen.*

Lemma 5.1.7. $\sigma(i_1 \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2) \dots \sigma(i_k)$.

5.2 Untergruppen

Definition 5.2.1. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ einer Gruppe G heißt *Untergruppe*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(U1) $1 \in H$.
(U2) $g \in H \Leftrightarrow g^{-1} \in H$.
(U3) $g_1, g_2 \in H \Rightarrow g_1 g_2 \in H$.

Wir notieren Untergruppen mit $H \leq G$.

Beispiel 5.2.2.

1) $H = 1 =: 1 \leq G$ ist die *triviale* Untergruppe.

2) $n\mathbb{Z} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ ist durch } n \text{ teilbar}\} \leq \mathbb{Z}$

3) $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} = \{x \in \mathbb{R}^\times \mid |x| = 1\} \leq \mathbb{R}^\times$

4) $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} \leq \mathbb{C}^\times$.

5) $\mathbb{S}^3 = \{z \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4 \mid |z| = 1\} \cong \mathbb{H}^\times$, wobei $\mathbb{H}$ die Gruppe der Quaternionen bezeichnet.

6) $\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^n = 1\} \leq \mathbb{C}^\times$ Gruppe der n-ten Einheitswurzeln

7) $H = \{1, (ij)\} \leq \mathfrak{S}_n$ für $n \geq 2$; $H' = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(k) = k\} \leq \mathfrak{S}_n$

8) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

9) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \mid ad - bc = 1 \right\} \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ für $\mathbb{K}$ Körper oder $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$

10) $H = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid A^\top = A^{-1}\}$ ist eine Untergruppe, denn $\mathbb{1}^\top = \mathbb{1}^\top$ und $(AB)^\top = B^\top A^\top = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.

11) Sei V ein Vektorraum und sei $0 \neq v \in V$. Dann sind

$$H = \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid f(v) = v\} \qquad \text{und}$$
$$H' = \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid \exists \lambda \in \mathbb{K}^\times : f(u) = \lambda u\}$$

Untergruppen von $\mathrm{GL}(V)$. Ein $f \in H$ lässt das Erzeugnis von v ($\langle v \rangle$) *punktweise* fest. Ein $f \in H'$ lässt hingegen nur den von v erzeugten Unterraum invariant, denn $f(\langle v \rangle) = \langle v \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 : f(v) = \lambda v$, wobei letzteres eine *Eigenwertgleichung* ist. Wir haben also $H \leq H'$.
Allgemeiner betrachten wir für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ die Untergruppen

$$H = \{f \in GL(V) \mid \forall u \in U : f(u) = u\} \qquad \text{und}$$
$$H' = \{f \in GL(V) \mid f(U) = U\}$$

von $\mathrm{GL}(V)$, für die gilt $H \leq H'$.

12) Die Menge der Diagonalmatrizen $\mathcal{D} = \{D[\lambda_1, ..., \lambda_n] \mid \lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0\}$ sind mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Die Menge aller *zentralen Matrizen* $\mathcal{Z} = \{D[\lambda, ..., \lambda] | \lambda \neq 0\}$ eine Untergruppe: $\mathcal{Z} \leq \mathcal{D}$. Die zentralen Matrizen sind besonders wichtig, da sie das *Zentrum* der Gruppe $GL_n(\mathbb{K})$ sind, das heißt, sie vertauschen mit allen Matrizen.

13) Die Menge der Permutationsmatrizen $\mathcal{P} = \{P_\sigma | \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ ist eine Untergruppe der $GL_n(\mathbb{K})$: $P_1 = \mathbb{1}$, $P_{\alpha\beta} = P_\alpha P_\beta$.

14) Die Menge der *oberen Dreiecksmatrizen* $\mathcal{T}^+$, also der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ist abgeschlossen bezüglich der Matrixmultiplikation und daher eine Untergruppe der GL_n. Die entsprechende Aussage gilt auch für die Menge der *unteren Dreiecksmatrizen* $\mathcal{T}^-$.

15) Für den Tetraeder $\mathcal{T}$ ist die Gruppe der Rotationen eine Untergruppe der Symmetrien (also Rotationen *und* Spiegelungen):

$$\mathrm{Rot}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} \leq \mathcal{T}' = \mathrm{Sym}(\mathcal{T}')$$

Die analoge Aussage gilt für alle platonischen Körper.

Definition 5.2.3. (i) Die Kardinalität einer Gruppe G heißt ihre *Ordnung* $|G|$.

(ii) Sei $g \in G$. Die kleinste natürliche Zahl s mit $g^s = 1$ nennt man die *Ordnung* von g, falls so ein s existiert; falls nicht, so heißt g von *unendlicher Ordnung*.
Notation: $\mathrm{ord}(g) = 1, 2, ..., \infty$.

Bemerkung 5.2.4.
- Die Kardinalität von G kann überabzählbar sein (z.B. $G = \mathbb{S}^1$).
- Ordnung hat hier nichts mit Ordnungsrelationen zu tun.

Beispiel 5.2.5.

1. In der Übungsaufgabe 56 haben wir gefunden:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{s} & -\sin\frac{2\pi}{s} \\ \sin\frac{2\pi}{s} & \cos\frac{2\pi}{s} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{ord}(A) = s$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \operatorname{ord}(A) = \infty \text{ für } \frac{2\pi}{\alpha} \notin \mathbb{Q}$$

2. Für ein festes $g \in G$ betrachten wir die Untergruppe aus allen ganzzahligen Potenzen von g:

$$H := \{1, g^{\pm 1}, g^{\pm 2}, ..., g^{\pm n}, ...\} \leq G$$

Es gilt $|H| = \operatorname{ord}(g)$.

3. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$. Die Ordnung eines k-Zykels $g = (i_1 i_2 ... i_k)$ ist $ord(g) = k$. Wenn g das Produkt disjunkter k- und l-Zykel ist, gilt:

$$g = (i_1 ... i_k)(j_1 ... j_l) \Rightarrow \operatorname{ord}(g) = \operatorname{kgV}(k, l).$$

Produkte nicht-disjunkter Zykel muss man erst als Produkte disjunkter Zykel ausdrücken.

Definition 5.2.6. Für jede Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq G$ einer Gruppe sei $H := \langle \mathcal{E} \rangle$ die Menge aller endlichen Produkte von Elementen und ihren Inversen in $\mathcal{E}$

$$g = e_1^{l_1} e_2^{l_2} \cdots e_i^{l_i} \cdots e_n^{l_n} \qquad l_i \in \mathbb{Z},$$

wobei die e_i *nicht* verschieden sein müssen! (Nur wenn G abelsch ist, kann man verlangen, dass die e_i verschieden sind.) H heißt die von $\mathcal{E}$ *erzeugte* Untergruppe. Ist $H = \langle \mathcal{E} \rangle = G$, so heißt $\mathcal{E}$ ein *Erzeugendensystem* für G.

Beispiel 5.2.7.

1. $G = \mathbb{Z}_{/n} = \{\underline{0}, \underline{1}, ..., \underline{n-1}\}, \mathcal{E} = \{\underline{1}\}$, wir können jede Restklasse als Summe $\underline{1} + \underline{1} + ...$ schreiben. Ein anderes Erzeugendensystem wäre zum Beispiel $\mathcal{E} = \{\underline{2}, \underline{3}\}$, da die Differenz ± 1 ist.
2. $G = \mathfrak{S}_n, \mathcal{E} = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, denn jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Es reicht sogar $\{(i\,(i+1)) \mid 1 \leq i < n\}$, da $\sigma\,(i\,(i+1))\,\sigma^{-1} = (\sigma(i)\sigma(i+1)) = (kl)$ für ein σ mit $\sigma(i) = k, \sigma(i+1) = l$.
3. $G = GL_n(\mathbb{K})$: Ein Erzeugendensystem der allgemeinen linearen Gruppe ist die Vereinigung von Elementarmatrizen, Streckungsmatrizen und Permutationsmatrizen.

Bemerkung 5.2.8. Beim linearen Erzeugnis $\operatorname{span}(\mathcal{E})$ in einem Vektorraum wird außer der Addition und dem Negativen auch die Skalierung benutzt.
Sei $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Dann ist

$$\langle \mathfrak{B} \rangle = \{v = k_1 b_1 + \ldots k_n b_n \mid k_1, \ldots k_n \in \mathbb{Z}\}$$

nur eine additive Untergruppe von V, aber *kein* Untervektorraum; man nennt $\langle \mathfrak{B} \rangle$ auch ein *Gitter*.

Nun noch ein paar wichtige Untergruppen:

Definition 5.2.9. Das *Zentrum* $\operatorname{Zen}(G)$ einer Gruppe G ist die Untergruppe

$$\operatorname{Zen}(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G : zg = gz\},$$

also die Elemente, die mit allen kommutieren.
Die *Kommutatoruntergruppe* $\operatorname{Kom}(G) = [G, G]$ ist die von allen *Kommutatoren* $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ ($x, y \in G$ beliebig) erzeugte Untergruppe. Beachte:

- $[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$
- $[x, y][a, b]$ ist in der Regel *kein* Kommutator (deshalb nimmt man das Erzeugnis).

- Abgeschlossen bezüglich Konjugieren:

$$\gamma[x,y]\gamma^{-1} = \gamma xyx^{-1}y^{-1}\gamma^{-1} = (\gamma x\gamma^{-1})(\gamma y\gamma^{-1})(\gamma x^{-1}\gamma^{-1})(\gamma y^{-1}\gamma^{-1}) = [\gamma x\gamma^{-1}, \gamma y\gamma^{-1}]$$

Beispiel 5.2.10.

1. G abelsch: $\mathrm{Zen}(G) = G$, denn die Gruppe ist kommutativ; $\mathrm{Kom}(G) = 1$, da $xy = yx \Leftrightarrow [x,y] = 1$.
2. Für $G = GL_n(\mathbb{K})$ ist $\mathrm{Zen}(G) = \{D[\lambda, ..., \lambda] \mid 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}\} \cong \mathbb{K}^\times$. Dies Matrizen nennt man *zentrale Matrizen*, vergleiche Übungsaufgabe 63.
3. $G = \mathfrak{S}_n, n \geq 3 : \mathrm{Zen}(G) = 1$
4. Für drei verschiedene Indizes $1 \leq i, j, k \leq n$ gilt

$$[E^{ii}[\lambda], E^{jk}[\mu]] = E^{jk}[\lambda\mu]$$

Für $n \geq 3$ erzeugen die Kommutatoren also alles: $\mathrm{Kom}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

5.3 Homomorphismen

Definition 5.3.1. Eine Funktion $f : G \to G'$ zwischen zwei Gruppen G, G' heißt *Homomorphismus*, falls gilt:

1. $f(1) = 1$,
2. $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in G$.

Bemerkung 5.3.2.

- Es gilt $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$
- $\mathrm{ord}(f(x))$ teilt $\mathrm{ord}(x)$, falls $\mathrm{ord}(x)$ endlich; insbesondere hat $f(x)$ endliche Ordnung, wenn x endliche Ordnung hat.
- Isomorphismus: f bijektiv $\xrightarrow{\cong}$
  Epimorphismus: f surjektiv $\twoheadrightarrow$
  Monomorphismus: f injektiv $\rightarrowtail$
  Endomorphismus: $G = G'$
  Automorphismus: $G = G'$ und f Isomorphismus

Beispiel 5.3.3.

1. Für festes n: $G = \mathbb{Z} \to G' = \mathbb{Z},\ f(x) = nx$
   $n \neq 0$: mono, $n = \pm 1$: iso
2. $\rho_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n, \rho_n(x) = \underline{x}$ Restklasse modulo n, epi
3. $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightleftarrows (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) : \ln$
4. $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{S}^1, \cdot),\ t \mapsto e^{2\pi i t}$
5. $f : V \to V' f$ linear, insb. gilt: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
6. Die Homomorphismen

$$G = \mathrm{GL}(V) \underset{L_{\mathcal{A}\mathcal{A}}}{\overset{M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}}{\rightleftarrows}} G' = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad (\dim_{\mathbb{K}}(V) = n, \mathcal{A} \subset V \text{ Basis}),$$

   sind beide Isomorphismen.
7. $\varepsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}, \varepsilon(n) = \varepsilon_n = (1 + ... + 1)$ n-mal
   $\varepsilon(0) = 0, \varepsilon(n + m) = \varepsilon(n) + \varepsilon(m)$
8. $\mathbb{Z}/n \to \mu_n,\ k \mapsto \zeta_n^k,\ \zeta_n = exp(\frac{2\pi i}{n})$

9. $(\mathbb{R},+) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{R}_{>0},\cdot)$ $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
   Umkehrfunktion: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
10. $P : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{P}_n =$ Gruppe der Permutationsmatrizen, $\sigma \mapsto P_\sigma$
11. $D : (\mathbb{K}^\times)^n \to \mathbb{D} =$ Gruppe der Diagonalmatrizen, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \mapsto D(\lambda_1, ..., \lambda_n)$
12. Für $g \in G$ haben wir einen Homomorphismus $f_g : \mathbb{Z} \to G,\ k \mapsto g^k$. Falls $\text{ord}(g) = n$, so ist auch $\mathbb{Z}/n \to G, \bar{k} \mapsto g^k$ ein Homomorphismus.

Definition 5.3.4 (Signum)**.** Auf den symmetrischen Gruppen definieren wir eine wichtige Funktion

$$\text{sign} : \mathcal{S}_n \to \{\pm 1\}, \text{sign}(\sigma) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

1. Warum ist $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$?
2. Ein Paar (i,j) mit $1 \le i < j \le n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ nennt man einen **Fehlstand** von σ.
3. Hat σ genau k Fehlstände $(0 \le k \le \frac{n(n-1)}{2})$, so gilt

$$\prod_{1\le i<q\le n} (\sigma(j)-\sigma(i)) = (-1)^k \prod_{1\le i<j\le n} |\sigma(j)-\sigma(i)| = (-1)^k \prod_{1\le i<j\le} |j-i| = (-1)^k \prod_{1\le i<j\le} (j-i),$$

   weil in den beiden mittleren Produkten die gleichen Faktoren in eventuell anderer Reihenfolge vorkommen. Also ist $\text{sign}(\sigma) = (-1)^k$ bestimmt durch die Anzahl der Fehlstände.

Beispiel 5.3.5.

1. $\sigma = (ij)$ Transposition $\text{sign}(\sigma) = -1$
2. $\sigma = (123)$; $\text{sign}(\sigma) = \frac{3-2}{2-1}\frac{1-2}{3-1}\frac{1-3}{3-2} = +1$

Lemma 5.3.6. sign *ist ein Homomorphismus:*

$$\begin{aligned} \text{sign}(1) &= 1, \\ \text{sign}(\pi\circ\sigma) &= \text{sign}(\pi)\cdot\text{sign}(\sigma) \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{sign}(\pi\circ\sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\pi(\sigma(j))-\pi(\sigma(i))}{j-i} \\ &= \prod_{i<j} \frac{\pi(\sigma(j))-\pi(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \\ &= \prod_{k<l} \frac{\pi(l)-\pi(k)}{l-k} \cdot \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \\ &= \text{sign}(\pi)\cdot\text{sign}(\sigma) \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.3.7.

1. $\sigma = (i_1\ i_2\ ...\ _k)$ k-Zykel
   $= (i_1\ i_2)(i_2\ i_3)...(i_{k-1} i_k)$ $k-1$ Faktoren
   $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{k-1}$
2. $\text{sign}(\sigma^{-1}) = \text{sign}(\sigma)$
3. $\text{Typ}(\sigma) = (t_1, t_2, ..., t_n)$:
   $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{t_1\cdot 0}\cdot(-1)^{t_2\cdot 1}...(-1)^{t_n\cdot n} = (-1)^{n-(t_1+t_2+...+t_n)}$

Definition 5.3.8. Für einen Homomorphismus $f : G \to G'$ definieren wir

1. $\ker(f) = \bar{f}(1) = \{x \in G \mid f(x) = 1\} \subseteq G$, genannt der *Kern* von f.

2. $\operatorname{im}(f) = f(G) = \{y \in G' \mid \exists_{x \in G} f(x) = y\} \subseteq G'$ genannt das *Bild* von f.

Lemma 5.3.9. *1)* $\ker(f)$ *ist eine Untergruppe; f ist genau dann ein Monomorphismus, wenn* $\ker(f) = 1$ *ist.*

2) $\operatorname{im}(f)$ *ist eine Untergruppe; f ist genau dann ein Epimorphismus, wenn* $\operatorname{im}(G) = G'$ *ist.*

Beweis. 1) $1 \in \ker(f)$, wegen $f(1) = 1$.
$g_1, g_2 \in \ker(f) \Rightarrow f(g_1) = 1, f(g_2) = 1 \ \Rightarrow f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) = 1 \cdot 1 = 1$
Ist f ein Monomorphismus, so kann nur für $x = 1$ die Bedingung $f(x) = 1$ gelten. Angenommen $f(g_1) = f(g_2)$; dann ist $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2)^{-1} = 1$; also folgt aus $\ker(f) = 1$ nun $g_1 g_2^{-1} = 1$, also $g_1 = g_2$.
2) $1 = f(1)$, also $1 \in im(f)$.
Ist $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$, so ist $f(x_1 x_2) = y_1 y_2$. □

Beispiel 5.3.10.

1. $f : \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n,\ x \mapsto \bar{x}$ Restklasse mod n
   $\ker(f) = n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$

2. $\varepsilon \mathbb{Z} \to \mathbb{K},\ \varepsilon(n) = n1$
   $\ker(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{char}(\mathbb{K}) = 0$
   $\ker(\varepsilon) = p\mathbb{Z} \Leftrightarrow \operatorname{char}(\mathbb{K}) = p$ (Primzahl)

3. $L_g : \mathbb{Z} \to G,\ f(n) = g^n \quad (g \in G$ fest$)$
   $\ker(L_g) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ord}(g) = \infty$
   $\ker(L_g) = n\mathbb{Z} \Leftrightarrow \operatorname{ord}(g) = n$

4. $L_{a,b} : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot) \quad a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$
   $L_{a,b}(t) = e^{(a+ib)t}$
   $\operatorname{im}(L_{a,b}) =$ Spirale (logarithmische oder Bernoulli'sche)

5. X Menge, G Gruppe: $\Gamma = \operatorname{Funkt}(X, G)$ ist eine Gruppe:
   $(\gamma_1 \gamma_2)(x) := \gamma_1(x) \gamma_2(x),\ 1(x) := 1,\ \gamma^{-1}(x) := \gamma(x)^{-1}$

6. Ist X eine Gruppe, so ist $\operatorname{Hom}(X, G)$ i.A. keine Untergruppe:

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(xy) = \gamma_1(xy)\gamma_2(xy) = \gamma_1(x)\gamma_1(y)\gamma_2(x)\gamma_1(y)$$
$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(x)(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(y) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)\gamma_1(y)\gamma_2(y)$$

Lemma 5.3.11. *Für einen Homomorphismus $\phi : G \to G'$ gilt:*

1. $\phi(\operatorname{Kom}(G)) \subset \operatorname{Kom}(G')$

2. $\operatorname{Kom}(G) \subset \ker(\phi)$, *falls G' abelsch ist.*

Beweis. 1): Ist $g = [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ ein Kommutator, so ist $\phi(g) = \phi(xyx^{-1}y^{-1}) = \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1} = [\phi(x), \phi(y)]$ wieder ein Kommutator.
$[x, y]^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$ auch Und ist g ein Produkt von Kommutatoren (und Inversen von Kommutatoren), so auch $\phi(g)$.

2): Ist G' abelsch, so ist $\operatorname{Kom}(G') = 1$, also $\phi(\operatorname{Kom}(G)) = 1$, also $\operatorname{Kom}(G) \subset \ker(\phi)$:
Oder auf Elementen:
$\phi[x, y] = \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1} = \phi(x)\phi(x)^{-1}\phi(y)\phi(y)^{-1} = 1.$ □

5.3.1 Vorwärtsschicken/ Rückwärtsschicken von Gruppenstrukturen

Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $X = G'$ eine bloße Menge und $\phi : G \to X$ eine Bijektion, so kann man X derart zu einer Gruppe $(G', *)$ machen, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

$$\phi : (G, \cdot) \to X = G' \text{ Bijektion}$$

vorwärtsgeschobene Gruppenstruktur auf G':

$x * y := \phi(\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y))$
$1^* := \phi(1)$
$x^{-1*} := \phi(\phi^{-1}(x)^{-1})$

1) $\phi^{-1}(x * y) = \phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y)$
2) $\phi^{-1}(1^*) = 1$
3) $\phi^{-1}(x^{-1*}) = \phi^{-1}(x)^{-1}$
$\phi^{-1} : (G', *) \xrightarrow{\sim} (G, \cdot)$

1') $\phi(ab) = \phi(a) * \phi(b)$
2') $\phi(1) = 1^*$
3') $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$
$\phi : (G, \cdot) \xrightarrow{\sim} (G, *)$

Gruppenaxiome folgen aus (1-3) oder (1'-3'); man kann sie auch direkt nachprüfen:

$$\begin{aligned}
x * (y * z) &= x * \phi(\phi^{-1}(y) \cdot \phi^{-1}(z)) \\
&= \phi(\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}\phi(\phi^{-1}(y) \cdot \phi^{-1}(z))) \\
&= \phi(\phi^{-1}(x) \cdot (\phi^{-1}y \cdot \phi^{-1}(z))) \\
&= \phi((\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y)) \cdot \phi^{-1}(z)) \\
&= \phi(\phi^{-1}(\phi(\phi^{-1} \cdot \phi^{-1}(y))) \cdot \phi^{-1}(z)) \\
&= \phi(\phi^{-1}(x * y) \cdot \phi^{-1}z) \\
&= (x * y * z)
\end{aligned}$$

Genau analog: Zurückziehen

$X = G' \xrightarrow{\psi} (G, \cdot)$ Bijektion

$x * y := \psi^{-1}(\psi(x) \cdot \psi(y))$
$1^* := \psi^{-1}(1)$
$x^{-1*} := \psi^{-1}(\psi(x)^{-1})$

Beispiel 5.3.12.

1. **Tangens**: $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\tan} (\mathbb{R}, *)$
   (nicht für $n\frac{\pi}{2}$ definiert!)

$$\begin{aligned}
\tan(a + b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \\
x * y : &= \frac{x + y}{1 - xy}
\end{aligned}$$

2. $G = \mathbb{R}$ mit Addition
   $G' = \mathbb{R}_{>0}$ mit Multiplikation

- Das geometrische Mittel ist das mit $\psi = \ln$ zurückgezogene arithmetisches Mittel:
$$\exp(\frac{\ln(x)+\ln(y)}{2}) = \exp(\frac{\ln(xy)}{2}) = \exp(\ln\sqrt{xy}) = \sqrt{xy}$$
- Das harmonische Mittel ist das mit $\psi = \frac{1}{t}$ zurückgezogene arithmetische Mittel
$$G' = \mathbb{R}_{>0}, (\frac{x^{-1}+y^{-1}}{2})^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2}{\frac{y+x}{xy}} = \frac{2xy}{x+y}$$

3. $G = (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\psi=(\ )^3} G' = \mathbb{R}$
$x * y = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = x + 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y$
$x^{-1*} = -x$
$0^* = 0$ „Deformation der Addition"

5.3.2 Einige wichtige Isomorphismen

1. $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{\cong} \mu_n \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rot}_n \subset \mathrm{D}_{2n}$ Diedergruppe
$\bar{k} \mapsto \zeta_n^k \mapsto \mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$
2. Gruppe mit zwei Elementen:
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/2 & \cong & \mathbb{S}^0 & \cong & \mathfrak{S}_2 \\ 0 & \mapsto & 1 & \mapsto & \mathrm{id} \\ 1 & \mapsto & -1 & \mapsto & (12) \end{array}$$
3. Die folgenden Isomorphismen hängen von einer Basis $\mathcal{A}$ von V ab ($\dim V = n$):
$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}(V) \arrow[r, shift left, "M_{\mathcal{A}\mathcal{A}}"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \arrow[l, shift left, "L_{\mathcal{A}\mathcal{A}}"] \end{tikzcd}$$
4. $\mathcal{S}_n \xrightarrow{\cong} P_n$ Permutationsmatrizen
$\sigma \mapsto P_\sigma$
5. $\mathrm{Zen}(\mathrm{GL}_n(V)) \cong \mathrm{Zen}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) \cong \mathbb{K}^\times,\ n \geq 3$
Diagonalmatrizen $D_n \to (\mathbb{K}^\times)^n$
$D[\lambda_1, ..., \lambda_n] \mapsto (\lambda_1, ..., \lambda_n)$
6. Diedergruppen: $D_2 \cong \mathcal{S}_2,\ D_4 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2,\ D_6 \simeq \mathcal{S}_3$
7. Platonische Gruppen:
   - Tetraeder: $\mathfrak{T} \cong \mathfrak{A}_4$
   - Würfel und Oktaeder: $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{Oc} \cong \mathfrak{S}_4$
   - Dodekaeder und Ikosaeder: $\mathfrak{Do} \cong \mathfrak{I} \cong \mathfrak{A}_5$
8. **Automorphismengruppen**
   a) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z},\ -\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$
   $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{id, -id\} \simeq \mathbb{S}^0$
   b) $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$: nur die Identität
   $\bar{0} \mapsto \bar{0}$
   $\bar{1} \mapsto \bar{1}$
   Aut $(\mathbb{Z}/2) = \bar{1}$
   c) $\mathbb{Z}/3 \to \mathbb{Z}/3$: außer der Identität noch $\theta = -id$.
   $\theta : \bar{0} \mapsto \bar{0}$
   $\bar{1} \mapsto \bar{2}$
   $\bar{2} \mapsto \bar{1}$
   $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3) \simeq \mathbb{S}^0$

5.4 Produkte

Definition 5.4.1. Gegeben seien zwei Gruppen G_1 und G_2. Wir definieren eine neue Gruppe $G = G_1 \times G_2$ mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &:= (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2) \\ (x_1, x_2)^{-1} &:= (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \\ 1 &:= (1, 1) \end{aligned}$$

Offenbar ist das wieder eine Gruppe und wird *direktes Produkt* genannt.

Beispiel 5.4.2.

1. $V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n_1} \times \mathbb{K}^{n_2} \qquad n_1 + n_2 = n$
2. $(\mathbb{R}^\times, \cdot) \cong (\mathbb{S}^0, \cdot) \times (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$
   $x \mapsto (\frac{x}{|x|}, |x|)$
3. $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}_{>0}$
   $z \mapsto (\frac{z}{|z|}, |z|)$
4. $V \supset U_1, U_2$ Untervektorräume,
   $V = U_1 + U_2,\ U_1 \cap U_2 = 0$
   $V \cong U_1 \times U_2 =: U_1 \oplus U_2$ interne direkte Summe

   $(u_1, u_2) \mapsto u_1 + u_2$
5. Sei V wie in 4.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}(V) & \geq & G = \{f \in \mathrm{GL}(V) \mid f(U_1) \subseteq U_1, f(U_2) \subseteq U_2\} \arrow[d] & \ni & f \arrow[d, mapsto] \\ & & \mathrm{GL}(U_1) \times \mathrm{GL}(U_2) & \ni & (f_1, f_2) \end{tikzcd}$$

   wobei $f_i = f|_{U_i}^{U_i} : U_i \to U_i$.

Eigenschaften

- $$x_1 \xmapsto{i_1} (x_1, 1); (1, x_2) \xleftarrow{i_2} \!\shortmid x_2 \qquad \text{Inklusionen}$$

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, bend left, "i_1"] & G_1 \times G_2 \arrow[l, bend left, "\pi_1"] \arrow[r, bend right, "\pi_2"'] & G_2 \arrow[l, bend right, "i_2"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x_1 & (x_1, x_2) \arrow[l, mapsto, "\pi_1"'] \arrow[r, mapsto, "\pi_2"] & x_2 \end{tikzcd} \qquad \text{Projektionen}$$

- G_1, G_2 abelsch $\implies G_1 \times G_2$ abelsch.
- Im abelschen Falle sagt man *direkte Summe* und schreibt auch $G = G_1 \oplus G_2$.
  Bsp.: $\mathbb{Z}/6 \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$

Proposition 5.4.3 (Universelle Eigenschaft). *Zu je zwei Homomorphismen $f_1 : \Gamma \to G_1, f_2 : \Gamma \to G_2$ gibt es genau einen Homomorphismus $f = (f_1, f_2) : \Gamma \to G_1 \times G_2$ mit $f_1 = \pi_1 \circ f, f_2 = \pi_2 \circ f$:*

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, bend left, "f_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_2"'] & & \\ & G \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] & G_1 \arrow[d] \\ & G_2 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Wir erhalten eine Bijektion von Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\Gamma, G) &\overset{\cong}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}(\Gamma, G_1) \times \mathrm{Hom}(\Gamma, G_2) \\ f &\longmapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f) \\ (f : \gamma \mapsto (f_1(\gamma), f_2(\gamma))) &\longleftarrow\!\shortmid (f_1, f_2) \end{aligned}$$

5.5 Direkte Summen von Vektorräumen

5.5.1 Externe direkte Summe

Definition 5.5.1. Sind V_1, V_2 zwei Vektorräume, so ist $V := V_1 \times V_2$ mit

Addition	$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') := (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$
Null	$0 := (0, 0)$
Negative	$-(v_1, v_2) = (-v_1, -v_2)$
Skalierung	$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$

wieder ein Vektorraum. Wir schreiben $V = V_1 \oplus V_2$.

- Es gibt Monomorphismen (Inklusionen)

$$\begin{array}{rccc} i_1 : & V_1 & \to & V, \\ & v_1 & \mapsto & (v_1, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} i_2 : & V_2 & \to & V \\ & v_2 & \mapsto & (0, v_2) \end{array}$$

  und Epimorphismen (Projektionen)

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & V & \to & V_1, \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & v_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \pi_2 : & V & \to & V_2 \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & v_1 \end{array}$$

- $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$
- $\pi_1 \circ i_2 = 0, \pi_2 \circ i_1 = 0$
- $\pi_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_{V_1}, \pi_2 \circ i_2 = \mathrm{id}_{V_2}$
- $(i_1 \circ \pi_1)^2 = (i_1 \circ \pi_1), (i_1 \circ \pi_2)^2 = (i_2 \circ \pi_2)$

Beispiel 5.5.2.
- $V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n_1} \times \mathbb{K}^{n_2}$ für $n = n_1 + n_2$
- $0 \oplus V \cong V \cong V \oplus 0$
- $V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3) \cong (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3$
- $V_1 \oplus V_2 \cong V_2 \oplus V_1$

Satz 5.5.3 (Universelle Eigenschaft („Produkt“))**.**
- *Zu je zwei linearen Abbildungen $f_1 : W \to V_1, f_2 : W \to V_2$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f : W \to V_1 \oplus V_2$ mit $f_1 = \pi_1 \circ f, f_2 = \pi_2 \circ f$:*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dotted, "f"] \arrow[drr, bend left, "f_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_2"'] & & \\ & V_1 \oplus V_2 \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] & V_1 \\ & V_2 & \end{tikzcd}$$

  Anders gesagt:

$$\begin{array}{rccc} \Pi : & \mathrm{Hom}(W, V_1 \oplus V_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(W, V_1) \oplus Hom(W, V_2) \\ & f & \longmapsto & (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f) \end{array}$$

  ist eine Bijektion von Mengen.

- *Darüber hinaus ist Π sogar linear, d.h. ein Isomorphismus von Vektorräumen.*

Satz 5.5.4 (Universelle Eigenschaft „Summe“)**.** • *Zu je zwei linearen Abbildungen $f_1 : V_1 \to W$ und $f_2 : V_2 \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V_1 \oplus V_2 \to W$ mit $f \circ i_1 = f|_{V_1}$ und $f \circ i_2 = f|_{V_2} = f_2$*

$$\begin{tikzcd}
W & & \\
& V_1 \oplus V_2 \arrow[ul, dotted, "f"] & V_2 \arrow[l, "i_2"] \arrow[ull, bend right, "f_2"'] \\
& V_1 \arrow[u, "i_1"'] \arrow[uul, bend left, "f_1"] &
\end{tikzcd}$$

Anders gesagt:

$$\begin{array}{cccc} \Sigma : & \mathrm{Hom}(V_1 \oplus V_2, W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V_1, W) \oplus \mathrm{Hom}(V_2, W) \\ & f & \longmapsto & (f \circ i_1, f \circ i_2) \end{array}$$

ist eine Bijektion von Mengen.

- *Darüber hinaus ist Σ sogar linear, d.h. ein Isomorphismus von Vektorräumen.*

5.5.2 Interne direkte Summe

Definition 5.5.5. Sind $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume und gilt $U_1 + U_2 = V$ sowie $U_1 \cap U_2 = 0$, so heißt V *direkte interne Summe* von U_1 und U_2. Wir nennen U_1 und U_2 *komplementär* (in V).

- $i_1 : U_1 \to V, i_2 : U_2 \to V$ sind Monomorphismen.

Proposition 5.5.6 (Universelle Eigenschaft der Summe, intern)**.** *Es sei V die interne direkte Summe von U_1 und U_2.*

(i) Zu je zwei Homomorphismen $f_1 : U_1 \to W, f_2 : U_2 \to W$ gibt es genau einen Homomorphismus $f : V \to W$ mit $f \circ i_1 = f|_{U_1} = f_1 : U_1 \to W$ und $f \circ i_2 = f|_{U_2} = f_2 : U_2 \to W$.
Anders gesagt:

$$\begin{array}{cccc} \Sigma : & \mathrm{Hom}(V, W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(U_1, W) \oplus \mathrm{Hom}(U_2, W) \\ & f & \longmapsto & (f \circ i_1, f \circ i_2) \end{array}$$

ist eine Bijektion von Mengen.

(ii) Darüber hinaus ist Σ sogar linear, d.h. ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Proposition 5.5.7. *Ist V die interne direkte Summe von U_1 und U_2, so ist V isomorph zur externen direkten Summe $V \cong U_1 \oplus U_2$.*

Beweis.

$$\begin{array}{cccc} \phi : & U_1 \oplus U_2 & \longrightarrow & V \\ & (u_1, u_2) & \longmapsto & u_1 + u_2 \end{array}$$

ist ein Isomorphismus:

1) linear
2) Epimorphismus wegen $U_1 + U_2 = V$
3) Monomorphismus wegen $U_1 \cap U_2 = 0$.

□

Damit haben wir auch Projektionen $\pi'_i : V \to U_1$ durch $\pi'_i = \pi_i \circ \phi^{-1}$: ist v zerlegt in $v = u_1 + u_2$, so ist $\pi'_i(v) = u_i$.

Proposition 5.5.8. *Ist $V = V_1 \oplus V_2$ die externe direkte Summe von V_1 und V_2, so ist V die interne direkte Summe von $U_1 = i_1(V_1) = \{(v_1, 0) \in V \mid v_1 \in V_1\}$ und $U_2 = i_2(V_2) = \{(0, v_2) \in V \mid v_2 \in V_2\}$.*

5.6 Quotientenvektorräume

Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf V:

Definition 5.6.1. Zwei Vektoren $v, v' \in V$ heißen *kongruent modulo* U genau dann, wenn $v - v' \in U$ gilt. Notation: $v \equiv v' \mod U \iff v - v' \in U$.

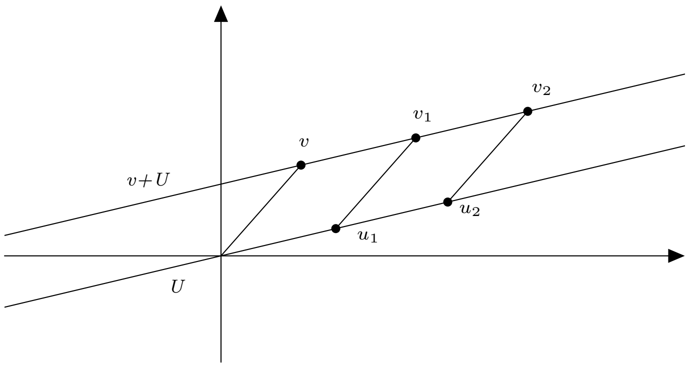
- **Äquivalenzrelation**

  1) $v \equiv v$, da $v - v = 0 \in U$.
  2) $v \equiv v' \iff v' \equiv v$, weil aus $v - v' \in U$ natürlich $v' - v \in U$ folgt.
  3) $v \equiv v', v' \equiv v'' \implies v \equiv v''$, weil aus $v - v' \in U$ und $v' - v'' \in U$ auch $v - v'' = (v - v') + (v' - v'') \in U$ folgt.

- **Äquivalenzklassen**

$$[v]_U := \{v' \in V \mid v \equiv v' \mod U\}$$

Lemma 5.6.2. $[v]_U = v + U$ *(affiner Unterraum)*



Beweis.

$$\begin{array}{cccc} [v]_U \in & v' & \longmapsto & v + (v - v') & \in v + U \\ & v + u & \longleftarrow & v + u & \end{array}$$

□

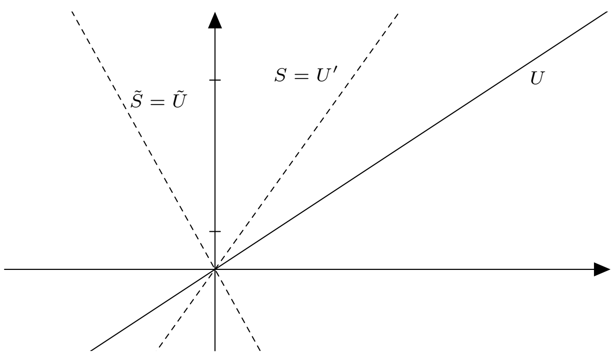
1) $[v]_U \neq \emptyset$, denn $v \in [v]_U$.

2) $[v_1]$ und $[v_2]$ sind gleich ($\Leftrightarrow v_1 \equiv v_2$) oder disjunkt ($\iff v_1 \not\equiv v_2$).

3) $V = \bigcup_{v \in V} [v]_U$.

4) $[0] = U$ ausgezeichnete Klasse

Definition 5.6.3. Ein *„Schnitt“* oder *Repräsentantensystem* ist eine Teilmenge $S \subseteq V$, so dass $S \cap [v]_U$ aus genau einem Element v_s besteht (für alle $v \in V$).



Beispiel 5.6.4. Ist U' komplementärer Unterraum zu U (d.h. $V = U + U', U \cap U' = 0$), so ist $S = U'$ ein Schnitt; V ist in diesem Fall die interne direkte Summe von U und U'.

Für einen Schnitt S haben wir eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} S & \xrightarrow{\cong} & V/U = \{[v]_U \mid v \in V\} \quad \text{Menge der Äquivalenzklassen} \\ s & \longmapsto & [s]_U \end{array}$$

Definition 5.6.5. Die Menge V/U wird wie folgt zu einem Vektorraum (über $\mathbb{K}$), welcher *Quotientenvektorraum* heißt:

- Addition:

$$\begin{array}{rcl} V/U \times V/U & \xrightarrow{+} & V/U \\ [v_1]_U + [v_2]_U & := & [v_1 + v_2]_U \end{array}$$

- Null: $0 := [0]_U = U$
- Skalierung $\lambda \cdot [v]_U := [\lambda v]_U$, also $\lambda \cdot (v + U) := \lambda v + U$

Beweis. a) Wohldefiniertheit

- der Addition:

$$\begin{array}{l} v_1 \equiv v_1' \\ v_2 \equiv v_2' \end{array} \implies \begin{array}{l} v_1' = v_1 + u_1 \\ v_2' = v_2 + u_2 \end{array} \implies v_1' + v_2' = v_1 + v_2 + (u_1 + u_2) \implies v_1' + v_2' \equiv v_1 + v_2$$

- der Skalierung:

$$v_1 \equiv v_2 \implies \lambda v_1 \equiv \lambda v_2$$

b) Vektorraumaxiome: nachrechnen.

□

Proposition 5.6.6. *1) $U = 0$: $V/0 \cong V$, $[v] = v + 0 = v$.*

2) $U = V$: $V/V \cong 0$, $[v] = v + V = V$.

3) Sind U, U' komplementäre Untervektorräume von V, so ist $V/U \cong U'$.

Beweis. Wir zeigen 3): Wir haben eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} S = U' & \xrightarrow{\varphi} & V/U \\ u' & \longmapsto & [u']_U \end{array}$$

Diese ist ein Isomorphismus, denn

$$\begin{array}{rcl} u_1' + u_2' & \mapsto & [u_1' + u_2']_U = [u_1']_U + [u_2']_U \\ \lambda u' & \mapsto & [\lambda u']_U = \lambda [u']_U \end{array}$$

□

Proposition 5.6.7. $\dim_{\mathbb{K}} V/U = \dim_{\mathbb{K}} V - \dim_{\mathbb{K}} U$.

Beweis. Es sei $\{b_1, \ldots, b_m\} = \mathfrak{B}'$ eine Basis von U', die wir zu einer Basis $\mathfrak{B} = \{b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\}$ ergänzen.
Dann ist $\overline{\mathfrak{B}} = \{\pi_U(b_{m+1}, \ldots, \pi_U(b_n)\}$ eine Basis für V/U: es ist ein Erzeugendensystem und linear unabhängig. □

Satz 5.6.8 (Universelle Eigenschaft)**.** *(i) Die Abbildung $\pi_U : V \to V/U, v \mapsto [v]_U = v + U$ ist linear und surjektiv.*

(ii) Für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $U \subseteq \ker(f)$ gibt es genau eine lineare Abbildung $f' : V/U \to W$ mit $f = f' \circ \pi_U$.

$$U \subseteq \ker(f) \subseteq \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_U"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dotted, "f_U"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. (i) π_U ist offenbar surjektiv und nach Konstruktion der Struktur auf V/U auch linear.

(ii) Wir setzen $f_U([v]) = f_U(v+U) = f(v) \in W$.
Dies ist wohldefiniert, denn

$$f(v+u) = f(v) + \underbrace{f(u)}_{=0,\text{ weil } U \subseteq \ker(f)} = f(v)$$

Weil π_U surjektiv ist, ist f_U eindeutig bestimmt.

□

Bemerkung 5.6.9. Der Beweis zeigt, wie man zu einer Basis von V/U kommt:

1) Ist $\{b_1, b_2, \ldots\} = \mathfrak{E}$ ein Erzeugendensystem von V, so ist $\pi_U(\mathfrak{E}) = \{\pi_U(b_1), \ldots\}$ ein Erzeugendensystem von V/U, aus dem man eine Basis auswählen kann.

2) Ist $\mathfrak{B}'$ eine Basis von U und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{B}'$ eine ergänzte Basis von V, so ist $\overline{\mathfrak{B}} = \pi_U(\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}')$ eine Basis von V/U.

Mit dieser 2. Bemerkung sieht man, dass dies auch für unendlich-dimensionale Vektorräume gilt.

Satz 5.6.10. *Jeder Untervektorraum $U \subset V$ besitzt einen komplementären Unterraum U':*

$$(1) \quad U + U' = V \qquad\qquad (2) \quad U \cap U' = 0$$

Beweis. Wie oben. □

Satz 5.6.11. *Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} V/\ker(f) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & \mathrm{im}(f) \\ [v] & \longmapsto & f(v) \end{array}$$

ein Isomorphismus.

Korollar 5.6.12. *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist U' komplementär zu* $\ker(f) = U$*, so ist*

$$\varphi = f|_{U'}^{W'} : \quad U' \longrightarrow W' := \mathrm{im}(f)$$

ein Isomorphismus.

Beispiel 5.6.13. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^m$. Sei

$$f = T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax,$$

und $V = \mathbb{K}^n, W = K^m$.

- $$\begin{array}{rcccccl} U = & \mathcal{L}(A \mid 0) & = & \ker(T_A) & = & 0 + U & \text{Lösungen des homogenen Systems (linearer Unterraum)} \\ & \mathcal{W}(A) & = & \mathrm{im}(T_A) & \cong & V/\mathcal{L}(A \mid 0) & \end{array}$$

- $v + U = \mathcal{L}(A \mid b)$, falls $f(v) = b$ $\quad(\Leftrightarrow b \in \mathcal{W}(A)$ (affiner Unterraum)
- $\emptyset = \mathcal{L}(A \mid b)$, falls es kein $v \in V$ mit $f(v) = b$ gibt $(\Leftrightarrow b \notin \mathcal{W}(A))$.
- V ist zerlegt in die affinen Unterräume $v + U = \mathcal{L}(A \mid f(v))$ einer davon ist $U = \mathcal{L}(A \mid 0)$.
- Ist U' komplementär zu U so besitzt jeder affine Raum einen eindeutigen Repräsentanten

$$u' + \mathcal{L}(A \mid 0) = \mathcal{L}(A \mid f(u'))$$

5.7 Normale Untergruppen

Sei G eine Gruppe. Wir betrachten für ein festes $\gamma \in G$ die Funktion

$$I_\gamma : \quad G \to G, \qquad I_\gamma(g) = \gamma g \gamma^{-1},$$

welche *Konjugation mit* γ heißt.

(1) I_γ ist ein Homomorphismus von G, denn

$$\begin{aligned} I_\gamma(1) &= \gamma \cdot 1 \cdot \gamma^{-1} = 1, \\ I_\gamma(xy) &= \gamma xy\gamma^{-1} = \gamma x\gamma^{-1}\gamma y\gamma^{-1} = I_\gamma(x)I_\gamma(y) \end{aligned}$$

(2) $I_1 = \mathrm{id}_G$, denn $I_1(x) = 1x1^{-1} = x$.
$I_\alpha \circ I_\beta = I_{\alpha\beta}$, denn $I_\alpha(I_\beta(x)) = \alpha\beta x\beta^{-1}\alpha^{-1} = (\alpha\beta)x(\alpha\beta)^{-1}$.
$I_\alpha^{-1} = I_{\alpha^{-1}}$.

(3) Also ist $I_\gamma : G \to G$ ein Automorphismus für jedes $\gamma \in G$.

(4) Und $I : G \to \mathrm{Aut}(G), \gamma \mapsto I_\gamma$ ist ein Homomorphismus.

(5) Ist $\gamma \in \mathrm{Zen}(G)$, so ist $I_\gamma = \mathrm{id}_G$; und umgekehrt. Also ist $\mathrm{Zen}(G) = \ker(I)$.
Insbesondere ist $I_\gamma = \mathrm{id}$ für alle $\gamma \in G$ wenn G abelsch ist.

Man nennt die I_γ *innere Automorphismen* von G. Sie bilden eine Untergruppe $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}(G)$.
Selbst eine abelsche Gruppe wie $\mathbb{Z}/n$ kann nicht-innere Automorphismen haben:

$$\alpha : \mathbb{Z}/3 = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\} \to \mathbb{Z}/3, \quad \underline{0} \mapsto \underline{0}, \underline{1} \mapsto \underline{2}, \underline{2} \mapsto \underline{1}$$

Es ist $\mathrm{Inn}(\mathbb{Z}/3) = 1$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3) = \{\mathrm{id}, \alpha\}$.

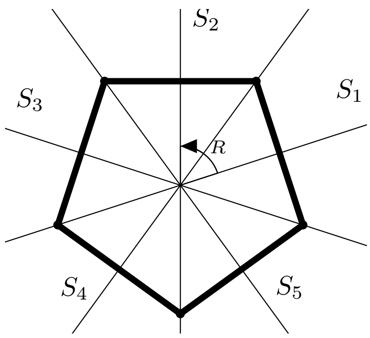
Definition 5.7.1. Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt *normal* (oder ein *Normalteiler*, am besten „selbstkonjugiert“), falls $I_\gamma(H) = H$ gilt für alle $\gamma \in G$.

Für eine Untergruppe H von G ist

$$I_\gamma(H) = \gamma H \gamma^{-1} = \left\{\gamma h \gamma^{-1} \mid h \in H\right\} \leq G$$

wieder eine Untergruppe von G, und zwar isomorph zu H, aber vielleicht verschieden von H. Für einen Normalteiler ist hingegen $I_\gamma(H) = H$.

Beispiel 5.7.2. 1) $G = \mathrm{D}_{2n}$ Diedergruppe mit Spiegelungen $S_1, \dots, S_n$ mit $S_i^2 = 1$ und Rotation R mit $R^n = 1$.



- $H_i := \{1, S_i\}$ ist nicht normal, da $RH_iR^{-1} = H_{i+1}$ wegen $RS_iR^{-1} = S_{i+1}$
- $\mathrm{Rot}_n = \left\{1, R, R^2, \dots, R^{n-1}\right\}$ ist normal, denn $S_iRS_i^{-1} = R^{-1}$.

2) In einer abelschen Gruppe G ist jede Untergruppe normal.

3) In $G = \mathfrak{S}_n$ ist $H = \{1, (1,2)\}$ nicht normal, denn $(2,3)H(2,3) = \{1, (1,3)\}$.

4) $\mathrm{Inn}(G)$ ist normal in $\mathrm{Aut}(G)$.

5) Die *alternierende Gruppe* $\mathfrak{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathrm{sign}\,\sigma = 1\} = \ker(\mathrm{sign})$ ist normal in $\mathfrak{S}_n$.

Beweis. Sei $\sigma \in \mathfrak{A}_n$. Dann ist für alle $g \in \mathfrak{S}_n$

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}(g\sigma g^{-1}) &= \operatorname{sign}(g)\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(g^{-1}) \\ &= \operatorname{sign}(g)\cdot 1\cdot \operatorname{sign}(g)^{-1} = 1\end{aligned}$$

□

Also ist mit σ auch $g\sigma g^{-1}$ wieder in $\mathfrak{A}_n$, für alle $g \in \mathfrak{S}_n$.

Das letzte Beispiel lässt sich verallgemeinern:

Lemma 5.7.3. *Ist $\varphi : G \to G'$ ein Homomorphismus, so ist* $\ker(\varphi)$ *normal in G.*

Beweis. Sei $x \in \ker(\varphi)$, also $\varphi(x) = 1$. Dann gilt für jedes $g \in G$:

$$\begin{aligned}\varphi(gxg^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g)\cdot 1\cdot \varphi(g)^{-1} = 1\end{aligned}$$

Also ist auch $gxg^{-1} \in \ker(\varphi)$. □

Bemerkung 5.7.4. Es gibt Gruppen, die (außer $H = 1, H = G$) keine normalen Untergruppen haben; diese nennt man *einfache* Gruppen (weil sie in einem gewissen Sinne unzerlegbar sind). Z.B ist die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ einfach für $n \geq 5$.

Definition 5.7.5. (i) Zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ heißen *konjugiert*, wenn es ein $\gamma \in G$ gibt mit $\gamma g_1 \gamma^{-1} = g_2$. Notation: $g_1 \sim g_2$.

(ii) Zwei Untergruppen $H_1, H_2 \leq G$ heißen *konjugiert*, wenn es ein $\gamma \in G$ gibt mit $\gamma H_1 \gamma^{-1} = H_2$. Notation: $H_1 \sim H_2$.

a) Konjugiertheit ist eine Äquivalenzrelation für Elemente:

- $g \sim g$, denn $I_1(g) = g$.
- $g_1 \sim g_2 \implies \exists \gamma \in G : \gamma g_1 \gamma^{-1} = g_2 \Leftrightarrow \exists \gamma' = \gamma^{-1} g_1 = \gamma^{-1} g_2 \gamma = \gamma' g_2 \gamma'^{-1} \implies g_2 \sim g_1$.
- $g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3 \implies \exists \gamma : \gamma g_1 \gamma^{-1} = g_2$, also $\exists \gamma' : \gamma' g_2 \gamma'^{-1} = g_3$ und somit $\gamma\gamma' g_1 \gamma'^{-1}\gamma^{-1} = (\gamma\gamma') g_1 (\gamma\gamma')^{-1} = g_3$, d.h. $g_1 \sim g_2$.

b) Konjugierte Elemente haben gleiche Ordnung. Ist nämlich $g_1^n = 1$ und $\gamma g_1 \gamma^{-1} = g_2$, so ist

$$g_2^n = (\gamma g_1 \gamma^{-1})^n = \gamma g_1 \gamma^{-1} \gamma g_1 \gamma^{-1} \dots \gamma g_1 \gamma^{-1} = \gamma g_1^n \gamma^{-1} = \gamma\gamma^{-1} = 1,$$

also ist die Ordnung von g_2 höchstens so groß wie die Ordnung von g_1. Die Rückrichtung ist analog.

c) Ist $\varphi : G \to G'$ ein Homomorphismus und $g_1 \sim g_2$, so auch $\varphi(g_1) \sim \varphi(g_2)$:

$$g_1 \sim g_2 \implies \exists \gamma : \gamma g_1 \gamma^{-1} = g_2 \implies \varphi(\gamma g_1 \gamma^{-1}) = \varphi(\gamma)\varphi(g_1)\varphi(\gamma)^{-1} = \varphi(g_2)$$

d) Konjugiertheit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von G.

e) Konjugierte Untergruppen sind isomorph.

Beispiel 5.7.6. (1) $G = \mathfrak{S}_n$: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \operatorname{Typ}(\alpha) = \operatorname{Typ}(\beta)$.

(2) $G = D_{2n}$: Ist n ungerade, so sind alle Spiegelungen S_i zueinander konjugiert. Ist n gerade, so zerfallen die Spiegelungen in zwei Konjugationsklassen.

(3) In einer abelschen Gruppe ist jedes Element nur zu sich selbst konjugiert; ebenso für Untergruppen.

(4) In jeder Gruppe ist das neutrale Element 1 nur zu sich selbst konjugiert; ebenso die Untergruppen $H = 1, H = G$.

5.8 Quotientengruppen

Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

Definition 5.8.1. Für ein $g \in G$ ist seine *Linksnebenklasse* die Teilmenge

$$gH = \{x = gh \mid h \in H\} \subset G,$$

und seine *Rechtsnebenklasse* die Teilmenge

$$Hg = \{y = hg \mid h \in H\} \subset G.$$

Bemerkung 5.8.2. (1) Für $g \in H$ ist $gH = Hg = H$.

(2) Im Allgemeinen ist $gH \neq Hg$, und keine der beiden Nebenklassen ist eine Untergruppe (außer wenn $g \in H$).

(3) G zerfällt sowohl in Links- als auch Rechtsnebenklassen, was man wie folgt sieht:

(4) Wir können zwei Äquivalenzrelationen $\equiv_H, {}_H\!\equiv$ auf G definieren:

$$\begin{aligned} x_1 \equiv_H x_2 &\Leftrightarrow \exists h \in H : x_1 h = x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1^{-1} x_2 \in H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 \;{}_H\!\equiv x_2 &\Leftrightarrow \exists h \in H : x_1 = h x_2 \\ &\Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in H \end{aligned}$$

Für die Äquivalenzklassen $[x]_H$ bzw. ${}_H[H]$ gilt:

$$[x]_H = xH \qquad \text{und} \qquad {}_H[x] = Hx.$$

Lemma 5.8.3. $|gH| = |H|$.

Beweis. $x = gh \mapsto g^{-1}x$ ist eine Bijektion. □

Da alle Äquivalenzklassen somit gleichmächtig sind, ist die Mächtigkeit von G gleich der Mächtigkeit von H mal der Anzahl der Äquivalenzklassen; die letzte Anzahl nennt man den *Index* von H in G, geschrieben $[G : H]$.

Korollar 5.8.4. *Für eine endliche Gruppe gilt: die Ordnung einer Untergruppe H ist immer ein Teiler der Gruppenordnung:*

$$|G| = |H| \cdot [G : H]$$

Lemma 5.8.5. *$H \leq G$ ist genau dann normal, wenn $gH = Hg$ für alle $g \in G$ gilt.*

Beweis. klar (Übung). □

Beispiel 5.8.6. Wir betrachten in $G = \mathfrak{S}_3$ die Untergruppen $H = \{1, \langle 1,2 \rangle\}, N = \big\{1, \langle 1,2,3 \rangle = z, \langle 1,3,2 \rangle = z^2\big\}$ und listen sämtliche Links- und Rechtsnebenklassen auf, indem wir in den Spalten der folgenden Tabelle für jedes Element σ von $\mathfrak{S}_3$ mit $\times, \bigcirc$ bzw. $\otimes$ markieren, ob σ zur jeweiligen Linksnebenklasse, Rechtsnebenklasse bzw. zu beiden gehört.

$\times$	1	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 1,3 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 1,2,3 \rangle$	$\langle 1,3,2 \rangle$	$\bigcirc$
$1H$	$\otimes$	$\otimes$					$H1$
$\langle 1,2 \rangle H$	$\otimes$	$\otimes$					$H\langle 1,2 \rangle$
$\langle 1,3 \rangle H$			$\otimes$		$\times$	$\bigcirc$	$H\langle 1,3 \rangle$
$\langle 2,3 \rangle H$				$\otimes$	$\bigcirc$	$\times$	$H\langle 2,3 \rangle$
$\langle 1,2,3 \rangle H$			$\times$	$\bigcirc$	$\otimes$		$H\langle 1,2,3 \rangle$
$\langle 1,3,2 \rangle H$			$\bigcirc$	$\times$		$\otimes$	$H\langle 1,3,2 \rangle$
$1N$	$\otimes$				$\otimes$	$\otimes$	$N1$
$\langle 1,2 \rangle N$		$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$			$N\langle 1,2 \rangle$
$\langle 1,2 \rangle N$		$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$			$N\langle 1,3 \rangle$
$\langle 2,3 \rangle N$		$\otimes$	$\otimes$	$\otimes$			$N\langle 2,3 \rangle$
$\langle 1,2,3 \rangle N$	$\otimes$						$N\langle 1,2,3 \rangle$
$\langle 1,3,2 \rangle N$	$\otimes$				$\otimes$	$\otimes$	$N\langle 1,3,2 \rangle$

Man erkennt insbesondere, dass N ein Normalteiler ist, H aber nicht.

Es sei nun $H \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe. Dann konstruieren wir eine neue Gruppe $\Gamma := G/H = H\backslash G$ genannt *Quotientengruppe*, wie folgt:

- als Menge besteht Γ aus allen Linksnebenklassen (oder Rechtsnebenklassen) gH für $g \in G$. (Ist G endlich, so sind dies $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$ Elemente
- als neutrales Element $1 = 1_\Gamma$ nehmen wir $1H = H$.
- als Multiplikation setzen wir
$$g_1 \cdot g_2 H := (g_1 g_2)H.$$
- als Inverse setzen wir
$$(gH)^{-1} := g^{-1}H$$

Zu zeigen ist nur die Wohldefiniertheit der Multiplikation; alle Gruppenaxiome folgen dann sofort.

Seien $g_1' = g_1 h_1$ und $g_2' = g_2 h_2$ (für $h_1, h_2 \in H$) andere Repräsentanten der gleichen Linksnebenklassen, so haben wir:

$$\begin{aligned} g_1' g_2' &= g_1 h_1 g_2 h_2 \\ &= g_1 g_2 \underbrace{g_2^{-1} h_1 g_2}_{\tilde{h} \in H, \text{ weil H normal}} \\ &= g_1 g_2 \tilde{h} h_2. \end{aligned}$$

Also repräsentieren $g_1' g_2'$ und $g_1 g_2$ die gleiche Nebenklasse.

Proposition 5.8.7. *Sei $H \trianglelefteq G$. Dann gilt:*

i) $\Gamma = G/H$ *ist eine Gruppe.*

ii)
$$\pi = \pi_H^G : \quad G \longrightarrow G/H, \quad g \longmapsto gH$$
ist ein Epimorphismus (genannt kanonische Projektion*).*

iii) $\ker(\pi) = H$.

Beweis. klar nach vorausgegangener Konstruktion. □

Satz 5.8.8 (Universelle Eigenschaft)**.** *Es sei $H \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe und $\varphi : G \to G'$ ein Homomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(i) $\ker(\varphi) \geq H$.

(ii) Es gibt einen Homomorphismus $\bar{\varphi} : \Gamma = G/H \to G'$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] & G \arrow[r, "\varphi"] & G' \\ H \arrow[u, dashed] \arrow[r, hook] & G \arrow[u, equal] \arrow[r, "\pi"] & \Gamma \arrow[u, dashed, "\bar{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wir definieren $\bar{\varphi}(gH) := \varphi(g)$.
$\bar{\varphi}$ ist wohldefiniert, denn aus $g' = gh$ $(h \in H)$ folgt mit (i):

$$\bar{\varphi}(g'H) = \varphi(g') = \varphi(gh) = \varphi(g)\underbrace{\varphi(h)}_{=1} = \varphi(g) = \bar{\varphi}(gH).$$

Offenbar ist $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$(i) \Leftarrow (ii)$: Gibt es ein $\bar{\varphi} : G/H \to G'$ mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, so folgt sofort für jedes $h \in H$:

$$\varphi(h) = \bar{\varphi}(\pi(h)) = \bar{\varphi}(1) = 1,$$

also $H \leq \ker(\varphi)$. $\square$

Satz 5.8.9. *Für jeden Homomorphismus $\varphi : G \to \tilde{G}$ gilt:*

$$G/\ker(\varphi) \cong \operatorname{im}(\varphi).$$

Beweis. Mit Satz 5.8.8 ($G' = \operatorname{im}(\varphi), H = K = \ker(\varphi), \varphi' = \varphi|^{G'} : G \to G'$) wissen wir, dass es ein $\bar{\varphi}$ gibt mit $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
K = \ker(\varphi) \arrow[r, hook] & G \arrow[r, two heads, "\varphi'"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{im}(\varphi) = G' \leq G \\
& G/K \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\bar{\varphi}$ ist also surjektiv. $\bar{\varphi}$ ist auch injektiv, denn aus $\bar{\varphi}(g_1 K) = \bar{\varphi}(g_2 K)$, also $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, folgt $g_2^{-1} g_1 \in K$, also $g_1 K = g_2 K$. $\square$

Beispiel 5.8.10. 1) Die Homomorphismen $\mathrm{id} : G \to G$ und $1 \to G$ zeigen $G/G \cong 1$ (triviale Gruppe) und $G/1 \cong G$.

2) Wegen

$$\mathfrak{A}_n = \ker(\operatorname{sign}) \hookrightarrow \mathfrak{S}_n \overset{\operatorname{sign}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\},$$

ist $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \cong \mathbb{S}^0$.

3) Sei $G = \mathbb{Z}/n = \{\underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{n-1}\}$ eine zyklische Gruppe und $k \cdot l = n$. Dann haben wir Isomorphismen

$$H = \left\{\underline{0}, \underline{k}, \underline{2k}, \ldots, \underline{(l-1)k}\right\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/l, \underline{xk} \longmapsto \underline{x}, (x = 0, 1, 2, \ldots l-1)$$

und

$$\psi : G/H \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/k, \underline{g}H \longmapsto \underline{g}, (g = 0, 1, \ldots, k-1).$$

4) Ist $G = G_1 \times G_2$ ein direktes Produkt, so ist $H = G_1 \times 1 = \ker(\pi_{G_2})$ normal und da die Projektion $\pi_{G_2} : G \to G_2$ surjektiv ist, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\psi : \begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{\cong} & G_2 \\ \underbrace{(g_1, g_2)H}_{(1, g_2)H} & \longmapsto & g_2. \end{array}$$

5) Wir haben gesehen, dass in der Diedergruppe $G = D_{2n}$ die Untergruppe $H = \mathrm{Rot}_n \cong Z/n$ der Rotationen um Winkel $\frac{360^\circ}{n} \cdot k, k = 0, 1 \ldots, n-1$ normal ist. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccl} G/H & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{S}^0 \\ gH & \longmapsto & \begin{cases} +1, & \text{falls } g \in \mathrm{Rot}_n \\ -1, & \text{falls } g \notin \mathrm{Rot}_n \text{ (also Spiegelung oder Produkt aus Spiegelung und Rotation).} \end{cases} \end{array}$$

6) Für die allgemeine lineare Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist die Untergruppe der Diagonalmatrizen $H = \mathrm{Zen}(G) = \{D[\lambda, \ldots, \lambda] \mid \lambda \neq 0\}$ ein Normalteiler und

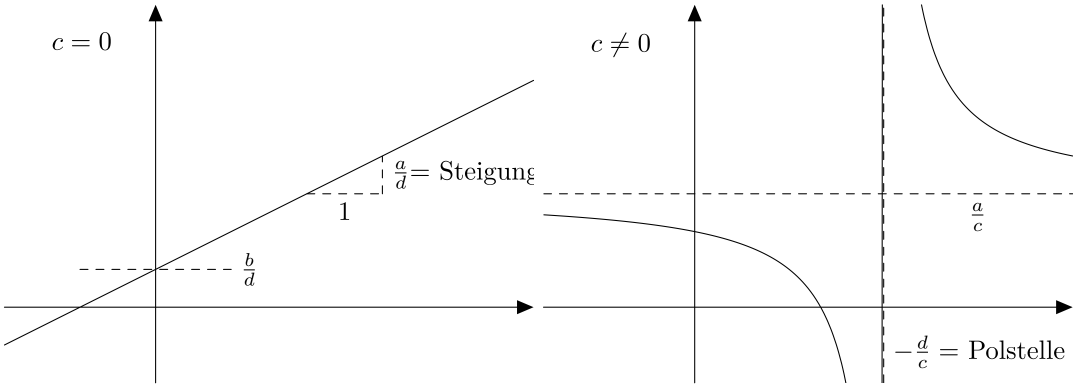
$$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K}) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{Zen}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$$

ist die *allgemeine projektive Gruppe*.

7) *Möbius-Gruppe*

$$\mathfrak{M}(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \cup \infty \to \mathbb{R} \cup \infty \mid f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ \text{für } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ mit } ad-bc \neq 0 \right\}$$

Dabei setzen wir $f(\infty) := \frac{a}{c}$, insbesondere $f(\infty) = \infty$, falls $c = 0$ und $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, falls $c \neq 0$.



$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\pi}{\longmapsto} f_M(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Es gilt:

$$f_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}$$
$$f_{M_1 \cdot M_2} = f_{M_1} \circ f_{M_2}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Zen}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathfrak{M}(\mathbb{R}) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathbb{R}^\times & & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Analoge Betrachtungen können wir für $\mathfrak{M}(\mathbb{C})$ durchführen.

8) *Affine Gruppen*

$$G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \{\text{affine Abbildungen } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a \neq 0\}$$

Diejenigen $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ mit $b = 0$ bilden die Untergruppe der invertierbaren linearen Abbildungen, welche isomorph ist zu $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$ (multiplikativ).
Für $a = 1$ erhalten wir die Untergruppe der Translationen $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$ (additiv).
Es gibt eine Bijektion

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times, f \longmapsto (b, a),$$

aber diese ist *kein* Isomorphismus von Gruppen, wenn man rechts die Gruppenstruktur des direkte Produkts $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$ nimmt. Stattdessen muss man rechts wie folgt multiplizieren:

$$(b', a') \cdot (b, a) := (a'b + b', a'a).$$

Diese Gruppenstruktur nennt man ein *semidirektes Produkt*.

- $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}) \trianglelefteq \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ ist eine normale Untergruppe.
- $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \leq \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ ist eine nicht-normale Untergruppe.
- $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ ist auch eine Quotientengruppe:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Trans}(\mathbb{R}) \arrow[r, tail] & \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) / \mathrm{Trans}(\mathbb{R}) \arrow[l, bend left, "s"] & \cong & \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}),
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\pi(f) := a$ und $s(a) := (x \mapsto ax)$ und damit $\pi \circ s = \mathrm{id}$.
- Analog: $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

6 Determinanten

6.1 Einleitung

Betrachten wir ein LGS $Ax = w$ der Größe 2×2:

$$\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 & = w_1 \\ cx_1 + dx_2 & = w_2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Der Gauß-Algorithmus erlaubt uns, erstens die *Lösbarkeit* (und sogar den Rang) zu bestimmen und zweitens, die *Lösungsmenge* zu parametrisieren. Unser nächstes Ziel ist eine *Lösungsformel*, falls es eine eindeutige Lösung gibt:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(a, b, c, d, w_1, w_2) = F_1(A, w) \\ x_2 &= F_2(a, b, c, d, w_1, w_2) = F_2(A, w) \end{aligned}$$

Im obigen Beispiel kann man die Formeln rasch herleiten:

(1) $(A \mid w)$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $D = ad - bc \neq 0$,
(2) und in diesem Fall gilt:

$$x_1 = \frac{dw_1 - bw_2}{D}, \quad x_2 = \frac{aw_2 - cw_1}{D}.$$

Die Größe $D = ad - bc =: \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ nennt man *Determinante* und wir sehen

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} w_1 & b \\ w_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

6.2 Axiomatische Definition

Wir wollen den Begriff der Determinante einer Matrix durch wenige Eigenschaten charakterisieren; erst danach beweisen wir die Existenz und kommen zu einer Formel.

Ist $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ eine $(n \times n)$-Matrix, so fassen wir sie auch als das n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ ihrer Spalten $a_j = a_{\bullet j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^\top$ auf.

Definition 6.2.1. Eine Funktion $D : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ heißt *Determinantenfunktion*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(D1) *Scherungsinvarianz*: Für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt

$$D(a_1, \ldots, \underbrace{a_i + a_j}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, \underbrace{a_j}_{j\text{-te Stelle}}, \ldots, a_n) = D(a_1, \ldots, \underbrace{a_i}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, \underbrace{a_j}_{j\text{-te Stelle}}, \ldots a_n).$$

(D2) *Spaltenmultiplikativität*: Für alle $1 \leq i \leq n, \lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$D(a_1, \ldots, \underbrace{\lambda a_i}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, a_n) = \lambda D(a_1, \ldots, \underbrace{a_i}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, a_n).$$

(D3) *Alterniertheit*: Für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt

$$D(a_1, \ldots, \underbrace{a_i}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, \underbrace{a_j}_{j\text{-te Stelle}}, \ldots, a_n) = -D(a_1, \ldots, \underbrace{a_j}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, \underbrace{a_i}_{j\text{-te Stelle}}, \ldots, a_n).$$

Bemerkung 6.2.2. Diese Axiome besagen *nicht*, dass D eine lineare Funktion von dem Vektorraum $\mathbb{M} = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ in den Vektorraum $\mathbb{K}$ ist. Wir werden das noch genauer untersuchen.

Beispiel 6.2.3. 1) $n = 1 : D(a) = a$ (1 Term).
2) $n = 2$: $D\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ (2 Terme).
3) $n = 3$, bekannt als *Regel von Sarrus*:

$$D\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{32}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

(6 Terme).
4)
- $D(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ist die triviale Determinantenfunktion.
- Ist D eine Determinantenfunktion, so auch δD für $\delta \in \mathbb{K}$.
- Sind D_1 und D_2 Determinantenfunktionen, so auch $D_1 + D_2$.

Fazit: Die Menge der Determinantenfunktionen $D : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ bilden einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, den wir mit $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{K})$ bezeichnen. (Aber $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{K})$ ist *kein* Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.)
Wir werden sehen, dass dieser Vektorraum die Dimension 1 hat und es somit bis auf Normierung nur eine Determinantenfunktion gibt.

Lemma 6.2.4. *Für eine Determinantenfunktion D gilt:*

(i) $D(A) = 0$, *falls A eine Nullspalte besitzt.*
(ii) $D(A) = 0$, *falls zwei Spalten von A gleich sind.*
(iii) $D(A) = 0$, *falls die Spalten von A linear abhängig sind (also* $\mathrm{rg}(A) < n$ *ist).*

Beweis. (i) folgt aus dem Axiom (D2) mit $\lambda = 0$.
(ii) Sei etwa $a_i = a_j$ $(i < j)$, dann rechnet man nach:

$$\begin{aligned} D(a_1, \ldots, a_n) &= -D(a_1, \ldots, a_i, \ldots, -a_j, \ldots, a_n) && \text{wegen (D2)} \\ &= -D(a_1, \ldots, \underbrace{a_i - a_j}_{=0}, \ldots, -a_j, \ldots, a_n) && \text{wegen (D1)} \\ &= 0 && \text{wegen (i).} \end{aligned}$$

(iii) Sei etwa $\lambda_1 a_{i_1} + \ldots + \lambda_s a_{i_s} = 0$ für $1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{K}^\times$, dann rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} D(a_1, \ldots, a_n) =& \frac{1}{\lambda_1 \cdots \lambda_s} D(a_1, \ldots, \lambda_1 a_{i_1}, \ldots, \lambda_s a_{i_s}, \ldots, a_n) \\ & \quad \text{wegen (D2), angewandt auf die Spalten } i_1, \ldots, i_s \\ =& \frac{1}{\lambda_1 \cdots \lambda_s} D(a_1, \ldots, \underbrace{\lambda_1 a_{i_1} + \lambda_2 a_{i_2} \ldots + \lambda_s a_{i_s}}_{=0}, \ldots, \lambda_2 a_{i_2}, \ldots, \lambda_s a_{i_s}, \ldots, a_n) \\ & \quad \text{die Spalten } i_2, \ldots, i_s \text{ zur Spalte } i_1 \text{ addiert} \\ =& \, 0 \quad \text{wegen (1).} \end{aligned}$$

□

Wir erinnern an die Elementarmatrizen $E_{ij}(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda \tilde{E}_{ij}$ (für $i \neq j$) und $E_{ii}(\lambda) = D[1, \ldots, \lambda, \ldots, 1], \lambda \in \mathbb{K}^\times$ und an die Permutationsmatrizen P_{ij} (für $i \neq j$). Folgende Formeln hatten wir hergeleitet:

1. $E_{ij}(\lambda) = E_{jj}(\lambda^{-1}) E_{ij}(1) E_{jj}(\lambda)$,
2. $P_{ij} = E_{ij}(1) E_{ij}(-1) E_{ji}(1) E_{jj}(-1)$.

Linksmultiplikation mit diesen Matrizen bewirkt folgendens:

$$\begin{aligned} AE_{ij}(\lambda) &= \text{das } \lambda\text{-fache der Spalte } j \text{ wird zur Spalte } i \text{ addiert,} \\ AP_{ij} &= \text{Spalte } i \text{ und Spalte } j \text{ werden vertauscht.} \end{aligned}$$

Lemma 6.2.5. *Für eine Determinantenfunktion D gilt:*

(i) $D(AE_{ij}(\lambda)) = D(A)$, *falls* $i \neq j$.
(ii) $D(AE_{ii}(\lambda)) = \lambda D(A)$.
(iii) $D(AP_{ij}) = -D(A)$, *falls* $i \neq j$.

Beweis. Wir beginnen mit (ii): dies ist eine Umformulierung des Axioms (D2).
(i): Aus Gleichung 1) und (ii) folgt, dass D durch Hinzumultiplizieren der drei Elementarmatrizen erst durch λ dividiert, dann nicht verändert und dann wieder mit λ multipliziert wird.
(iii): Aus Gleichung 2) und (i) und (ii) folgt, dass nur die vierte Elementarmatrix $E_{jj}(-1)$ den Faktor -1 beiträgt. □

Satz 6.2.6. *Es sei $D : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Determinantenfunktion und es gelte $D(\mathbb{1}) = D(e_1, \ldots, e_n) = 0$. Dann ist D die triviale Determinantenfunktion, d.h. $D(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$.*

Beweis. Wir bringen A durch Zeilentransformationen Z und Spaltentransformationen S auf Normalform, d.h.

$$Z \cdot A \cdot S = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{mit } r = \mathrm{rg}(A).$$

Ist $\mathrm{rg}(A) = r < n$, so ist $D(A) = 0$ nach Lemma 6.2.4(iii).
Ist $\mathrm{rg}(A) = n$, so haben wir

$$A = Z^{-1} \cdot S^{-1}.$$

$Z^{-1}S^{-1}$ ist ein Produkt aus Elementarmatrizen $E_{ij}(\lambda)$; nach Lemma 6.2.5 kann man sie von rechts nach links abbauen, wobei sich entweder die Determinante durch Weglassen eines $E_{ij}(\lambda)$ nicht ändert (Fall $i \neq j$, Lemma 6.2.5(i)) oder die Determinante sich um einen Faktor λ ändert (Fall $i \neq j$, Lemma 6.2.5(ii)).
Also haben wir insgesamt

$$D(A) = \delta D(\mathbb{1}) = \delta \cdot 0 = 0,$$

mit $0 \neq \delta =$ Produkt der erwähnten Faktoren. □

Aus diesem Satz folgt nun ein erstaunliches Resultat:

Satz 6.2.7. *Je zwei nicht-triviale Determinantenfunktionen sind proportional.*

Damit folgt: $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{K})$ ist höchstens 1-dimensional. Wir wissen aber noch nicht, ob es überhaupt eine nicht-triviale Determinantenfunktion gibt (außer durch Beispiele in den Fällen $n = 1, 2, 3$).

Beweis. Es seien D_1, D_2 zwei nicht-triviale Determinantenfunktionen. Nach Satz 6.2.6 gilt dann $D_1(\mathbb{1}), D_2(\mathbb{1}) \neq 0$.
Wir betrachten die neue Determinantenfunktion

$$D : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad D(A) := D_2(\mathbb{1})D_1(A) - D_1(\mathbb{1})D_2(A).$$

Wegen $D(\mathbb{1}) = D_2(\mathbb{1})D_1(\mathbb{1}) - D_1(\mathbb{1})D_2(\mathbb{1}) = 0$, muss D trivial sein nach Satz 6.2.6. Also

$$D_2(\mathbb{1})D_1(A) = D_1(\mathbb{1})D_2(A) \quad \text{für alle } A,$$

und somit

$$D_2(A) = \frac{D_2(\mathbb{1})}{D_1(\mathbb{1})} \cdot D_1(A).$$

□

Definition 6.2.8. Eine Determinantenfunktion D heißt *normiert*, wenn $D(\mathbb{1}) = 1$ gilt.

Es gibt also höchstens eine normiertes Element in $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{K})$. Unsere Beispiele in den Dimensionen $n = 1, 2, 3$ sind normiert.

Satz 6.2.9 (Produktsatz für Determinanten)**.** *Für eine normierte Determinantenfunktion D gilt:*

$$D(A \cdot B) = D(A) \cdot D(B) \quad \textit{für alle } A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Beweis. Für ein festes $A \in \mathbb{M} = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ betrachten wir zwei Funktionen

$$\begin{aligned} D_1 : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{K}, &\quad D_1(X) := D(A)D(X), \\ D_2 : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{K}, &\quad D_2(X) := D(AX). \end{aligned}$$

(1) Offenbar ist D_1 eine Determinantenfunktion.

(2) Um zu zeigen, dass auch D_2 eine ist, schreiben wir $X = (x_1, \ldots, x_n)$ als Spaltentupel, genau wie $A^\top = (a_1^\top, \ldots, a_n^\top)$ mit $a_i^\top = i$-te Zeile von A.
Dann hat die Matrix $C = AX$ die Einträge $c_{ij} = \langle a_i^\top, x_j \rangle$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$, d.h.

$$c_j = \begin{pmatrix} \langle a_1^\top, x_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n^\top, x_j \rangle \end{pmatrix}.$$

Vergleichen wir also

$$A \cdot (x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (c_1, \ldots, c_i + c_j, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$$

mit

$$A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$$

unter D, so ergibt sich die Scherungsinvarianz von D_2.
Genauso ergibt sich aus

$$A(x_2, \ldots, \lambda x_i, \ldots, x_n) = (c_1, \ldots, \lambda c_i, \ldots, c_n)$$

die Linearität in der i-ten Spalte von D_2.

(3) Demnach ist

$$\begin{aligned} D_3(X) :=& D_1(X) - D_2(X) \\ =& D(A)D(X) - D(AX) \end{aligned}$$

auch eine Determinantenfunktion.
Wegen

$$\begin{aligned} D_3(\mathbb{1}) &= D(A)D(\mathbb{1}) - D(A\mathbb{1}) \\ &= D(A) \cdot 1 - D(A) = 0 \end{aligned}$$

folgt $D_3(X) = 0$ für alle $X \in \mathbb{M}$ nach Satz 6.2.6. Das ist gerade der Produktsatz.

□

Für normierte Determinantenfunktionen haben wir folgende Korollare:

Korollar 6.2.10. *$A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $D(A) \neq 0$ ist; in diesem Fall ist $D(A^{-1}) = D(A)^-$*

Beweis. Ist A nicht invertierbar, so ist $\mathrm{rg}(A) < n$, und deshalb $D(A) = 0$ nach Lemma 6.2.4.
Ist A invertierbar, so folgt einerseits $D(A \cdot A^{-1}) = D(\mathbb{1}) = 1$ und andererseits $D(A \cdot A^{-1}) = D(A) \cdot D(A^{-1})$. □

Korollar 6.2.11. *(i) $D(AB) = D(BA)$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$.*

(ii) $D(\Omega A \Omega^{-1}) = D(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ und $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Beweis. (i) ist klar, weil $\mathbb{K}^\times$ kommutativ ist, also

$$D(AB) = D(A)D(B) = D(B)D(A) = D(BA).$$

(ii) folgt aus (i).

□

Korollar 6.2.12. *$D(A^\top) = D(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$.*

Beweis. Dies folgt aus einer Zerlegung in Elementarmatrizen E_{ij} mit $E_{ij}(\lambda)^\top = E_{ji}(\lambda)$. □

6.2.1 Einige Berechnungen für normierte Determinantenfunktionen

Sei D eine normierte Determinantenfunktion. Wir berechnen $D(A)$ für spezielle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}$:

a) *Diagonalmatrizen*:

$$D(D[\lambda_1, \dots, \lambda_n]) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Um das einzusehen wendet man das Axiom (D2) auf jede Spalte an:

$$D(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n D(e_1, \dots, e_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

b) *Zentrale Matrizen*:

$$D(D[\lambda, \dots, \lambda]) = \lambda^n$$

c) *Permutationsmatrizen*:

$$D(P_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$$

Für eine Transposition $\sigma = (ij)$ mit $i \neq j$ gilt $D(P_{ij}) = -1$ nach dem Axiom $(D3)$ bzw. Lemma 6.2.5(iii). Schreibt man σ als Produkt von s Transpositionen, so folgt $D(P_\sigma) = (-1)^s = \mathrm{sign}(\sigma))$.

d) *Elementarmatrizen*:

$$D\left(E_{ij}(\lambda)\right) = \begin{cases} 1, & i \neq j \\ \lambda, & i = j \end{cases}$$

Dies folgt aus Lemma 6.2.5(i) und (ii) mit dem Produktsatz.

e) *Dreiecksmatrizen* (obere und untere):

$$D\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Wir können $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$ annehmen. Wir ziehen λ_1 aus der ersten Spalte, subtrahieren dann das a_{12}-fache der ersten Spalte von der zweiten, ziehen den Faktor λ_2 aus der zweiten Spalte, u.s.w.:

$$\begin{aligned} D(\lambda_1 e_1, a_2, \dots, a_n) &= \lambda_1 D(e_1, \lambda_2 e_2 + a_{12} e_1, a_3, \dots, a_n) \\ &= \lambda_1 D(e_1, \lambda_2 e_2, a_3, \dots, a_n) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 D(e_1, e_2, \lambda_3 e_3 + a_{13} e_1 + a_{23} e_2, a_4, \dots, a_n) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 D(e_1, e_2, e_3, \lambda_4 e_4 + \dots, \dots, a_n) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n D(e_1, e_2, \dots, e_n). \end{aligned}$$

f) *Vielfache von Matrizen*:

$$D(\lambda A) = \lambda^n D(A)$$

Man wendet das Axiom (D2) auf jede Spalte an.

6.2.2 Multilineare Funktionen

Definition 6.2.13. Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Funktion

$$F : V \times \ldots \times V = V^k \longrightarrow W$$

- heißt (k-fach) *multilinear*, falls für alle $v_1, \ldots, v_k, v_i' \in V, \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}, 1 \leq i < j \leq k$ gilt:

$$F(v_1, \ldots, \alpha v_i + \alpha' v_i', \ldots, v_k) = \alpha F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \alpha' F(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k)$$

- heißt *alternierend*, falls für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt:

$$F(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -F(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

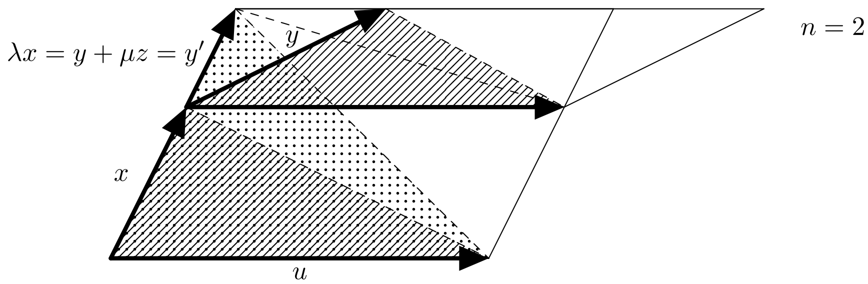
Beispiel 6.2.14. 1) $k = 1$: 1-fach multilinear ist unser altes linear.

2) $k = 2$: Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

ist bilinear. Es ist nicht alternierend (sondern es ist symmetrisch: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$).

Geometrisches Argument (Scherungsinvarianz und Multilinearität)



Das Volumen im $\mathbb{R}^n$ ist eine scherungsinvariante Größe:

$$\text{vol}(x, z) = \text{Flächeninhalt des von } x \text{ und } z \text{ aufgespannten Dreiecks},$$

$$\text{vol}(x + y, z) = vol(x, z) + vol(y, z),$$

d.h. die Flächeninhalte der beiden schraffierten Dreiecke summieren sich zum Flächeninhalt des gepunkteten Dreiecks.

Satz 6.2.15. *Eine Determinantenfunktion*

$$D : \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist n-fach multilinear und alternierend.

Beweis. Lemma 6.2.5(iii) besagt, dass D alternierend ist.
Die Multilinearität muss man nur für eine Spalte (sagen wir der ersten) zeigen; für die anderen folgt sie wegen der Alterniertheit. Die Multiplikativität der ersten Spalte folgt aus Axiom (D2); also geht es nur noch um die Additivität.
Um nun

$$D(a_1 + b_1, a_2, \ldots, a_n) = D(a_1, a_2, \ldots, a_n) + D(b_1, a_2, \ldots, a_n)$$

zu zeigen, unterscheiden wir drei Fälle.

<u>1. Fall</u> $\text{rg}(a_2, \ldots, a_{n-1}) < n - 1$.
Dann sind die Ränge aller drei Matrizen $(a_1 + b_1, a_2, \ldots, a_n), (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, a_2, \ldots, a_n)$ kleiner als n. Nach Lemma 6.2.4 sind alle drei Werte von D null.

2. Fall $\mathrm{rg}(a_2,\dots,a_n) = n-1$ und $\mathrm{rg}(a_1,a_2,\dots,a_n) = n-1$.
Dann ist $D(a_1,a_2,\dots,a_n) = 0$ und $a_1 \in \mathrm{Span}(a_2,\dots,a_n)$, etwa $a_1 = \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$. Man subtrahiert nacheinander das α_i-fache der Spalte i von der Spalte 1 $(i = 2,\dots,n)$ in der Matrix $(a_1 + b_1, a_2,\dots,a_n)$ und erhält:

$$D(a_1+b_1,a_2,\dots,a_n) = D(b_1,a_2,\dots,a_n).$$

3. Fall $\mathrm{rg}(a_2,\dots,a_n) = n-1$ und $\mathrm{rg}(a_1,a_2,\dots,a_n) = n$.
Dann ist $b_1 \in \mathrm{Span}(a_1,a_2,\dots,a_n)$, etwa $b_1 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n$. Man subtrahiert nacheinander das β_i-fache der Spalte i von Spalte 1 $(i = 2,\dots,n)$ in der Matrix $(a_1 + b_1, a_2,\dots,a_n)$ und erhält:

$$\begin{aligned} D(a_1+b_1,a_2,\dots,a_n) &= D(a_1+\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\ldots+\beta_n a_n,a_2,\dots,a_n) \\ &= D(a_1+\beta_1 a_1,a_2,\dots,a_n) \\ &= (1+\beta_1) D(a_1,a_2,\dots,a_n). \end{aligned}$$

Andererseits ist ebenso nach sukzessiver Subtraktion

$$\begin{aligned} D(b_1,a_2,\dots,a_n) &= D(\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\ldots+\beta_n a_n,a_2,\dots,a_n) \\ &= D(\beta_1 a_1,a_2,\dots,a_n) \\ &= \beta_1 D(a_1,a_2,\dots,a_n). \end{aligned}$$

Also ist

$$D(a_1,a_2,\dots,a_n) + D(b_1,a_2,\dots,a_n) = (1+\beta_1) D(a_1,a_2,\dots,a_n).$$

□

Bemerkung 6.2.16. 1) Man beachte, dass wir die Alterniertheit aus den Axiomen (D1) und (D2) gefolgert haben, siehe Beweis von Lemma 6.2.5(iii).

2) Dann folgte der Produktsatz und die Multilinearität.

6.3 Leibniz-Formel

Wir entwickeln nun endlich eine Formel für eine Determinantenfunktion. Damit erst erhalten wir einen Existenzbeweis, dass es für jedes n eine nicht-triviale Determinantenfunktion gibt.

Satz 6.3.1 (Leibniz-Formel)**.** *Für eine normierte Determinantenfunktion D gilt für jede Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$:*

$$D(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n)n}.$$

Beweis. Wir benutzen die Standardbasis $e_1,\dots,e_n$ in $\mathbb{K}^n$ und schreiben jeden Spaltenvektor

$$a_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \qquad (j = 1,\dots,n).$$

Wir benutzen die Linearität in jeder Spalte und entwickeln:

$$\begin{aligned} D(a_1,a_2,\dots,a_n) &= D\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, a_2,\dots,a_n\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} D\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} e_{i_2}, a_3,\dots,a_n\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} D\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \sum_{i_3=1}^n a_{i_3 3} e_3, a_4,\dots,a_n\right) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D\left(e_{i_1},\dots,e_{i_n}\right) \end{aligned}$$

In dieser Summe stehen n^n Terme:

- Der Term für den Multiindex $I = (i_1, \dots, i_n)$ besteht aus dem Produkt der folgenden Einträge

$$a_I := a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

multipliziert mit dem Wert $D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$ der Matrix $E_I := (e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$.

Kommt in I ein Index zweimal vor ($i_r = i_s$ für $r \neq s$), so ist $D(E_I) = 0$ nach Lemma 6.2.4(ii). Also brauchen wir nur die wiederholungsfreien I zu berücksichtigen; diese I entsprechen genau den Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_n$ durch die Bijektion $I = (i_1, \dots, i_n) \leftrightarrow \pi(k) = i_k \quad (k = 1, \dots, n)$.
Dann ist $E_I = P_\pi$, also

$$D(E_I) = D(P_\pi) = \operatorname{sign}(\pi).$$

Damit haben wir die Leibniz-Formel

$$D(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n)n}.$$

□

Damit haben wir endlich auch die Existenz einer nicht-trivialen Determinantenfunktion bewiesen, denn die rechte Seite der Leibniz-Formel definiert offenbar für jedes $n \geq 1$ eine solche.

Satz 6.3.2. *Für jedes $n \geq 1$ ist der Vektorraum $\operatorname{Alt}_n(\mathbb{K})$ 1-dimensional; es gibt genau eine normierte Determinantenfunktion.*

Definition 6.3.3. Die eindeutige normierte Determinantenfunktion nennen wir *die* Determinante

$$\operatorname{Det} : \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}.$$

6.4 Determinante für Endomorphismen

Die Eigenschaft $\operatorname{Det}(\Omega A \Omega^{-1}) = \operatorname{Det}(A)$ erlaubt uns nun, auch für Endomorphismen eine Determinante zu erklären:

Definition 6.4.1. Sei $f : V \to$ ein Endomorphismus, $\dim V = n$. Wir wählen eine Basis $\mathfrak{B}$ von V und setzen:

$$\operatorname{Det}(f) := \operatorname{Det}\left(M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f)\right).$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathfrak{B}$, denn ist $\mathfrak{A}$ eine andere Basis und $\Omega = \Omega_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \operatorname{Mat}_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V)$ die Basiswechselmatrix, so ist

$$M_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}(\mathrm{id}_V) = \Omega_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V) \Omega_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^{-1}.$$

Also haben beide darstellenden Matrizen die gleiche Determinante.

Satz 6.4.2. *Die Determinante* $\operatorname{Det} : \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathbb{K}$ *hat folgende Eigenschaften:*

1) $\operatorname{Det}(\mathrm{id}_V) = 1$.

2) $\operatorname{Det}(f \circ g) = \operatorname{Det}(f) \cdot \operatorname{Det}(g)$.

3) $\operatorname{Det}(f) \neq 0$ *genau dann, wenn f ein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist* $\operatorname{Det}(f^{-1}) = \operatorname{Det}(f)^{-1}$.

Beispiel 6.4.3. 1) $\operatorname{Det}(0) = 0$.
2) $\operatorname{Det}(\lambda \,\mathrm{id}_V) = \lambda^n$, insbesondere $\operatorname{Det}(-\mathrm{id}_V) = (-1)^k$.

6.5 Spur

Die Spur einer Matrix ist eine Größe, die mit der Determinante in gewisser Beziehung steht.

Definition 6.5.1. Die *Spur* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ ist

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{ii}.$$

Satz 6.5.2. *Die Spur ist eine lineare Abbildung*

$$\mathrm{Spur} : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Also gilt für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

(1) $\mathrm{Spur}(\lambda A) = \lambda \,\mathrm{Spur}(A)$*,*

(2) $\mathrm{Spur}(A + B) = \mathrm{Spur}(A) + \mathrm{Spur}(B)$*.*

Weiter gilt:

(4) $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$*, und insbesondere*

(5) $\mathrm{Spur}(\Omega A \Omega^{-1}) = \mathrm{Spur}(A)$ *für invertierbares* Ω*.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung 6.5.3. Spur-Bedingungen haben oft etwas mit Fixpunkten zu tun:

$$\mathrm{Fix}(f) = \emptyset \implies \mathrm{Spur}(f_*) = 0,$$

wobei wir offen lassen, was die „induzierte“ Abbildung f_* ist.
Zum Beispiel gilt für eine Permutationsmatrix

$$\mathrm{Spur}(P_\sigma) = |\mathrm{Fix}(\sigma)|\,.$$

Definition 6.5.4. Für einen Endomorphismus $f : V \to V$ definieren wir

$$\mathrm{Spur}(f) = \mathrm{Spur}(M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f)) \in \mathbb{K}$$

für irgendeine Basis $\mathfrak{B}$ von V. Dieser Skalar ist von der Wahl der Basis unabhängig: ist $\mathfrak{A}$ eine andere Basis und $\Omega_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ die Basiswechselmatrix von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$, so gilt

$$M_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}(f) = \Omega_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f) \Omega_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^{-1},$$

also haben beide Matrizen $M_{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}(f)$ und $M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(f)$ die gleiche Spur.

Satz 6.5.5. *Die Spur* $\mathrm{Spur} : \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathbb{K}$ *ist eine lineare Abbildung mit*

(1) $\mathrm{Spur}(f \circ g) = \mathrm{Spur}(g \circ f)$*, insbesondere*
(2) $\mathrm{Spur}(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{Spur}(f)$*.*

Beispiel 6.5.6.

$\mathrm{Spur} : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$	$\mathrm{Spur} : \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \to \mathbb{K}$
$\mathrm{Spur}(\mathbb{1}) = n$	$\mathrm{Spur}(\mathrm{id}_V) = \dim V$
$\mathrm{Spur}(0) = 0$	$\mathrm{Spur}(0) = 0$
$\mathrm{Spur}(\lambda \mathbb{1}) = n\lambda$	$\mathrm{Spur}(\lambda\, \mathrm{id}_V) = \lambda \dim V$
$\mathrm{Spur}(-\mathbb{1}) = -n$	$\mathrm{Spur}(-\mathrm{id}_V) = -\dim V$

- $\mathrm{Spur}(A^\top) = \mathrm{Spur}(A)$
- obere/untere Dreiecksmatrizen

$$\mathrm{Spur}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

Beispiel 6.5.7 (Heisenberg-Gleichung)**.** Die Gleichung

$$\Psi \circ \Phi - \Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$$

für zwei lineare Abbildungen $\Phi, \Psi : V \to V$ spielt in der Quantenmechanik eine große Rolle.

- Ist V endlich-dimensional, so können wir die Spur anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} n = \dim_{\mathbb{K}}(V) = \mathrm{Spur}(\mathrm{id}_V) &= \mathrm{Spur}(\Psi \circ \Phi - \Phi \circ \Psi) \\ &= \mathrm{Spur}(\Psi \circ \Phi) - \mathrm{Spur}(\Phi \circ \Psi) = 0. \end{aligned}$$

  Ist also $V \neq 0$ und $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq n$, so gibt es keine Lösungen dieser Gleichung.

- Für den unendlich-dimensionalen reellen Vektorraum $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ der einmal stetig-differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien

$$\begin{aligned} &\Phi : V \to V, \quad \Phi(f)(x) := xf(x), \\ &\Psi : V \to V, \quad \Psi(f) := f' \end{aligned}$$

  und man sieht sofort mit der Produktregel für die Ableitung:

$$\Psi \circ \Phi - \Phi \circ \Psi = \mathrm{id}\,.$$

  In der Quantenmechanik benutzt man den Hilbert-Raum $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ der quadrat-integrierbaren Funktionen; sie beschreiben die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens. Φ ist der Ortsoperator, Ψ dier Impulsoperator. Aus der Gleichung folgt die Heisenbergsche Unschärferelation: man kann Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig exakt messen.

6.6 Cramersche Regel

Wir können nun die Formeln für die Lösungen eines eindeutig lösbaren LGS herleiten. Es sei $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $b \in \mathbb{K}^n$ und $\mathrm{Det}(A) \neq 0$. Dann ist das LGS

$$Ax = b$$

für jedes b eindeutig lösbar. Angenommen, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ist die Lösung, dann ist

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b, \tag{6.1}$$

als Linearkombination der Spalten von A. Setzen wir (6.1) als erste Spalte in die Determinante, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(b, a_2, \ldots, a_n) &= \mathrm{Det}\left(\sum_{i=1}^n x_i a_i, a_2, \ldots, a_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\mathrm{Det}(a_i, a_2, \ldots, a_n)}_{=0,\text{ falls } i=2,3,\ldots,n} \\ &= x_1 \mathrm{Det}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \end{aligned}$$

denn nur für $i = 1$ ist der Summand $\neq 0$. Also haben wir

$$x_1 = \frac{\mathrm{Det}(b, a_2, \ldots, a_n)}{\mathrm{Det}(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Genauso verfahren wir für die anderen Variablen x_k.

Satz 6.6.1. *Das LGS $Ax = b$ mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und n Gleichungen ist genau dann für jedes b eindeutig lösbar, wenn $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ gilt; und in diesem Fall ist*

$$x_k = \frac{\mathrm{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{\mathrm{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Bemerkung 6.6.2. Wir sehen, dass jedes x_k eine rationale Funktion in den Einträgen a_{ij} von A und den Koordinaten $b_1, \ldots, b_n$ von b ist.
Liegen die Einträge a_{ij} und b_k in einem Unterkörper $\mathbb{L}$ von $\mathbb{K}$, so auch die Lösungen $x_1, \ldots, x_n$.

Beispiel 6.6.3.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda_2 & \gamma \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Det}(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \alpha & \beta \\ b_2 & \lambda_2 & \gamma \\ b_3 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{\lambda_2\lambda_3 b_1 - \alpha\lambda_3 b_2 + (\alpha\gamma - \beta\lambda_2) b_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & b_1 & \beta \\ 0 & b_2 & \gamma \\ 0 & b_3 & \lambda_3 \end{vmatrix}}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{\lambda_1\lambda_3 b_2 - \lambda_1\gamma b_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{\lambda_3 b_2 - \gamma b_3}{\lambda_2\lambda_3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix}}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{\lambda_1\lambda_2 b_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = \frac{b_3}{\lambda_3}.$$

6.7 Laplacescher Entwicklungssatz

Der Laplacesche Entwicklungssatz ist vielleicht die wichtigste Methode, eine Determinante auszurechnen: man ersetzt eine $n \times n$-Determinante durch n $(n-1) \times (n-1)$-Determinanten.

Es sei $A = (a_{ij}) = (a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}), n \geq 2$. Für jedes $1 \leq i, j \leq n$ betrachtet man die *Streichungsmatrix*

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n-1,n-1}(\mathbb{K}),$$

welche aus A durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Satz 6.7.1 (Laplacescher Entwicklungssatz)**.** *(1) Entwicklung nach der j-ten Spalte ($j = 1, 2, \ldots, n$ fest):*

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det}(A'_{ij}).$$

(2) Entwicklung nach der i-ten Zeile ($i = 1, \ldots, n$ fest):

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det}(A'_{ij}).$$

Beweis. Wegen der Invarianz unter Transposition, also $\operatorname{Det}(A^\top) = \operatorname{Det}(A)$, folgt (2) aus (1). Weil das Vertauschen von Spalten nur ein Vorzeichen einträgt, also $\operatorname{Det}(AP_{ij}) = -\operatorname{Det}(A)$, brauchen wir (1) nur für irgendeine Spalte (sagen wir die n-te) zu zeigen.
Wir sortieren in der Leibniz-Formel

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sign}(\pi) \underbrace{a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} a_{\pi(n),n}}_{=:A[\pi]}$$

die Permutationen π in $\mathfrak{S}_n$ nach ihrem Wert auf n, also $\pi(n) = i$; das ergibt n Teil*mengen*

$$\mathfrak{S}_n(i) := \{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid \pi(n) = i\} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

und damit n Teilsummen $(i = 1, \dots, n)$

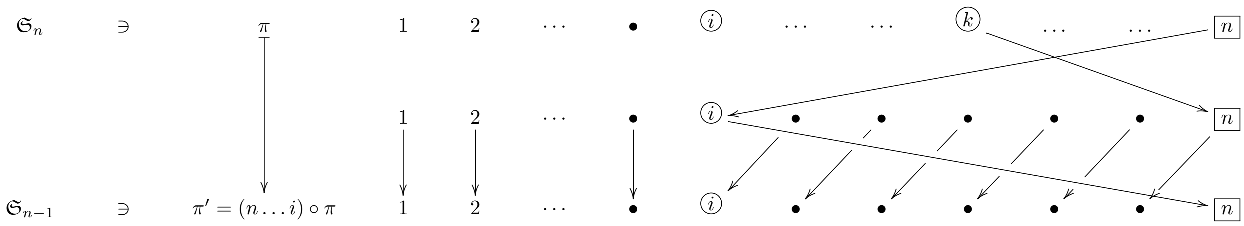
$$\Sigma(i) : = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n(i)} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1} \tag{6.2}$$

$$= a_{i,n} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n(i)} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n-1),n-1}, \tag{6.3}$$

worin der letzte Faktor $a_{\pi(n),n} = a_{i,n}$ nicht mehr von π abhängt und deshalb vor die Summe gezogen werden kann.
Durch die Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n(i) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n(n) \le \mathfrak{S}_n \\ \pi & \longmapsto & \pi' = \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & i+1 & i \end{pmatrix} \circ \pi \end{array}$$

auf die Unter*gruppe* $\mathfrak{S}_n(n)$:



Wir können $\mathfrak{S}_n(n)$ mit $\mathfrak{S}_{n-1} \le \mathfrak{S}_n$ identifizieren.
Das Signum hat sich aber geändert:

$$\operatorname{sign}(\pi') = (-1)^{n-i} \operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{i+n} \operatorname{sign}(\pi).$$

Die Indizes der Zeilen haben sich auch geändert, aber die Permutation $\begin{pmatrix} n & \dots & i \end{pmatrix}$ entspricht genau der neuen Nummerierung der Zeilen in A'_{in}:

$$a_{in} A'_{ij}[\pi'] = A[\pi] \text{ für } \pi \in \mathfrak{S}_n(i).$$

Also haben wir als Teilsumme:

$$\Sigma(i) = a_{in} \operatorname{Det}(A'_{ij}).$$

□

Beispiel 6.7.2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Det}(A) = 15$$

Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(A) &= 3 \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - 0 \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 4 \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot (+1) - 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = 15. \end{aligned}$$

6.8 Adjunkte einer Matrix

Für ein $A = (a_{ij}) = (a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ betrachten wir nun die Determinanten der Streichungsmatrizen, also

$$a^{\#}_{ij} := (-1)^{i+j} \operatorname{Det}(A'_{ji}),$$

wobei wir die Indizes vertauscht haben und ein Vorzeichen wie im Laplaceschen Entwicklungssatz gesetzt haben.

Definition 6.8.1. Die Zahl $a_{ij}^{\#}$ heißt *Kofaktor* von A an der Stelle (i,j). Die Matrix der Kofaktoren

$$A^{\#} := (a_{ij}^{\#} = ((-1)^{i+j}\operatorname{Det}(A'_{ij}))$$

heißt *Adjunkte*[1] von A. Im Falle $n=1$ setzt man für $A=(a_{11})$ dann $a_{11}^{\#}=1, A^{\#}=(1)=\mathbb{1}$.

Lemma 6.8.2.
$$a_{ij}^{\#} = \operatorname{Det}(a_1,\dots,a_{i-1},e_j,a_{i+1},\dots,a_j,\dots,a_n).$$

Beweis. Man entwickle die Determinante $\operatorname{Det}(a_1,\dots,a_{i-1},ej,a_{i+1},\dots,a_j,\dots,a_n)$ mit Laplace nach der i-ten Spalte. □

Wir haben eine Funktion
$$()^{\#} : \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}).$$
Sie ist nicht linear.

Lemma 6.8.3. *Für die Adjunkte gelten folgende Rechenregeln:*

1) $\mathbb{1}^{\#} = \mathbb{1}$, $0^{\#} = 0$.

2) $(\lambda A)^{\#} = \lambda^{n-1}A^{\#}$.

3) $(A\cdot B)^{\#} = B^{\#}\cdot A^{\#}$.

4) $(A^{-1})^{\#} = (A^{\#})^{-1}$ *für invertierbares* A.

5) $(A^{\top})^{\#} = (A^{\#})^{\top}$.

Lemma 6.8.4. *(i)* $(A^{\#})^{\#} = \operatorname{Det}(A)^{n-2}A$*, für* $n\geq 2$.

(ii) $\operatorname{Det}(A^{\#}) = \operatorname{Det}(A)^{n-1}$*, für* $n \geq 1$.

Beweis. Übung. □

Wir kommen nun zu folgenden Entwicklungssätzen.

Satz 6.8.5.
$$A^{\#}\cdot A = A\cdot A^{\#} = \operatorname{Det}(A)\cdot\mathbb{1}.$$

Beweis. Wir schreiben die Matrizengleichung
$$B := A^{\#}\cdot A = (b_{ij})$$
für jede Stelle (i,j) aus:
$$\begin{aligned} b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{\#}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\operatorname{Det}(a_1,\dots,a_{i-1},e_j,a_i,\dots,a_j,\dots,a_n) \\ = \operatorname{Det}(a_1,\dots,a_{i-1},\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_j}_{=a_j},a_{i+1},\dots,a_j,\dots,a_n) \\ = \operatorname{Det}(a_1,\dots,a_{i-1},\underline{a_j},a_{i+1},\dots,\underline{a_j},\dots,a_n)\end{aligned}$$
wegen der Linearität der Determinante. Aber diese letzte Determinante ist null für $i\neq j$, und sie ist $=\operatorname{Det}(A)$ für $i=j$. Also ist $B=\operatorname{Det}(A)\mathbb{1}$.
Die zweite Gleichung beweist man entsprechend. □

Bemerkung 6.8.6. Die Gleichung $A\cdot A^{\#}=\operatorname{Det}(A)\cdot\mathbb{1}$ an der Stelle $i=j$ bzw. aus $A^{\#}\cdot A=\operatorname{Det}(A)\cdot\mathbb{1}$ an der Stelle $j=i$ ist der Lapacesche Entwicklungssatz.

[1] Nicht zu verwechseln mit der später noch kommenden *Adjungierten*.

Berechnung der Inversen einer Matrix

Satz 6.8.7. *Für ein invertierbares A gilt*

$$A^{-1} = \operatorname{Det}(A)^{-1} \cdot A^{\#}.$$

Beweis. Folgt sofort aus der Gleichung $A^{\#} \cdot A = \operatorname{Det}(A) \cdot \mathbb{1}$. □

Beispiel 6.8.8.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad D = ad - bc \neq 0$$

$$\begin{aligned} A'_{11} &= d & a^{\#}_{11} &= +d \\ A'_{12} &= c & a^{\#}_{12} &= -b \\ A'_{21} &= b & a^{\#}_{21} &= -c \\ A_{22} &= a & a^{\#}_{22} &= +a \end{aligned} \qquad A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6.9 Spezielle lineare Gruppe

Nach dem Produktsatz für Determinanten ist

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{Det}: & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\} \\ & \cap\!| & & \cap\!| \\ & \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \end{array}$$

nach Einschränkung auf die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bzw. die multiplikative Untergruppe $\mathbb{K}^\times$ ein Homomorphismus; beide Abbildungen sind surjektiv.

Definition 6.9.1. Die Untergruppe

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \ker(\operatorname{Det}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{Det}(A) = 1\}$$

heißt (n-te) *spezielle lineare Gruppe* über $\mathbb{K}$. Und

$$\mathrm{SL}_{\mathbb{K}}(V) = \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V) \mid \operatorname{Det}(f) = 1\}$$

heißt *spezielle lineare Gruppe von V* für endlich-dimensionale V.

Bemerkung 6.9.2. 1) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ ist normal in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^\times$. Hier ist $\mathbb{K}^\times$ über den Schnitt

$$s : \mathbb{K}^\times \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = D[\lambda, 1, \ldots, 1]$$

nicht nur Quotientengruppe, sondern auch Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2) Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(V) & \underset{L_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}}{\overset{M_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}}{\rightleftarrows}} \cong & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \mathrm{SL}(V) & \overset{\cong}{\rightleftarrows} & \mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \end{array}$$

Beispiel 6.9.3. 1) *Drehungen*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

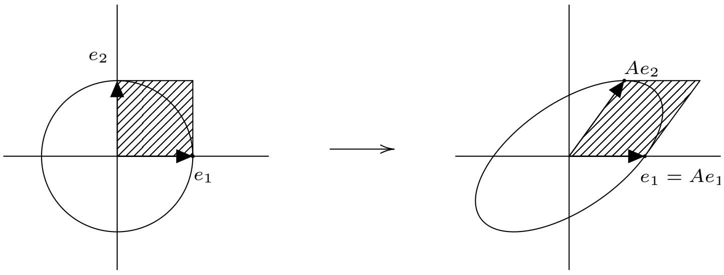
$\operatorname{Det}(A) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, also $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

2) *Elementarmatrizen* $E_{ij}(\lambda)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(E_{ij}(\lambda)) &= 1 && \text{für } i \neq j, \\ \mathrm{Det}(E_{ij}(\lambda)) &= 1 && \text{für } \lambda = 1. \end{aligned}$$

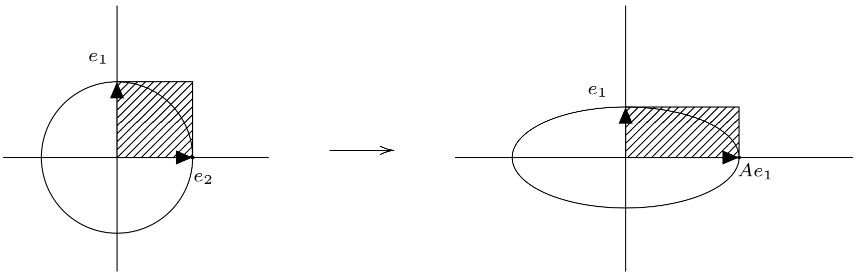
3) *Scherungen*(Transvektionen)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Det}(A) = 1$$



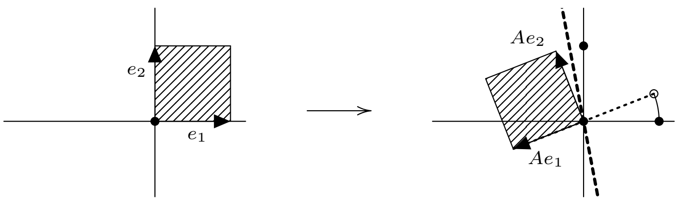
4) *Streckungen* $\lambda \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = E_{11}(\lambda) E_{22}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad \mathrm{Det}(A) = 1$$



5) *Nicht-Beispiel*: Spiegelung

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Det}(A) = -1$$



6.10 Orientierung reeller Vektorräume

Für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ haben wir die besondere Situation, dass $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht (im Gegensatz zu $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$):

$$\mathrm{GL}_{(}\,\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathrm{Det}} \mathbb{R} \smallsetminus 0 = \mathbb{R}_{>0} \sqcup \mathbb{R}_{<0}.$$

Hier ist $\mathbb{R}_{>0}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}^\times$, während $\mathbb{R}_{<0}$ eine Nebenklasse $(-1)\mathbb{R}_{>0} = \mathbb{R}_{<0}$ ist.

Definition 6.10.1. Die Untergruppe

$$\begin{array}{rlll} & \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) & = \mathrm{Det}^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) & = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Det}(A) > 0\} \\ \text{bzw.} & \mathrm{GL}(V) & = \mathrm{Det}^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) & = \{f \in \mathrm{Aut}(V) \mid \mathrm{Det}(f) > 0\} \end{array}$$

heißen *positive lineare Gruppe* über $\mathbb{R}$ bzw. von V.

Bemerkung 6.10.2. (1) Da $\mathbb{M} = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist, wissen wir, was eine offene/abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist, was eine stetige Kurve $A(t)$ von Matrizen ist und was eine stetige Funktion auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist.

(2) $\mathrm{Det} : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist stetig, also ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Det}^{-1}(\mathbb{R}_{>0} \sqcup \mathbb{R}_{<0})$ offen in $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$.

(3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ besteht aus zwei disjunkten, offenen Teilen:

- $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \mathrm{Det}^{-1}(]0, \infty[)$ ist Untergruppe
- $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \mathrm{Det}^{-1}(]-\infty, 0[)$ ist eine Nebenklasse, aber keine Untergruppe.

$$\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = S \cdot \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{S \cdot A \mid A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})\},$$

  $S = D(-1, 1, \dots, 1)$ eine Spiegelung.

(4) Sei $A^+ \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}), A^- \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$. Es gibt keine stetige Kurve (Schar, Weg)

$$A : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ mit } A(0) = A^+, A(1) = A^-.$$

Weil die Determinante stetig ist (denn sie ist ein Polynome vom Grad n^2 Einträgen der Matrix), hätten wir eine stetige Funktion

$$\varphi = \mathrm{Det} \circ A : [0, 1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathbb{R} - 0$$

mit $\varphi(0) > 0$ und $\varphi(1) < 0$; diese müsste nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle haben. (Man sagt: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist nicht wegzusammenhängend.)

(5) Beide Teile $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sind wegzusammenhängend: wir zeigen, dass jedes $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ bzw. $A \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ stetig nach $S = \mathbb{1} = D(1, \dots, 1)$ bzw. nach $S = D(-1, 1, \dots, 1)$ bewegt werden kann.
Dazu sei $A = E_{i_1 j_1}(\lambda_1) \cdot \ldots \cdot E_{i_s j_s}(\lambda_s)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_s \neq 0$, eine Produktdarstellung von A durch Elementarmatrizen.

- Für ein $E_{ij}(\lambda)$ mit $i \neq j$ nehmen wir den Weg

$$\varepsilon_{ij}^\lambda(t) := E_{ij}((1 - t)\lambda);$$

  er verläuft ganz in $\mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}$ wegen $\mathrm{Det}(\varepsilon_{ij}^\lambda(t)) = +1$ und von $\varepsilon_{ij}^\lambda(0) = E_{ij}(\lambda)$ nach $\varepsilon_{ij}^\lambda(1) = E_{ij}(0) = \mathbb{1}$.

- Für ein $E_{ii}(\lambda)$ (also $i = j$) müssen wir vorsichtiger wählen: ist $\lambda > 0$, so setzen wir

$$\tilde{\varepsilon}_{ii}^\lambda(t) := E_{ii}(t + (1 - t)\lambda),$$

  und ist $\lambda < 0$, setzen wir

$$\tilde{\varepsilon}_{ii}^\lambda(t) := E_{ii}(-t + (1 - t)\lambda).$$

  Der Weg $\tilde{\varepsilon}_{ii}^\lambda(t)$ verläuft ganz in $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ für $\lambda > 0$, und ganz in $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ für $\lambda < 0$; und er verläuft von $\tilde{\varepsilon}_{ii}^\lambda(0) = E_{ii}(\lambda)$ nach $\tilde{\varepsilon}_{ii}^\lambda(1) = E_{ii}(+1) = D(1, 1, \dots, 1) = \mathbb{1}$ für $\lambda > 0$ und für $\lambda < 0$ von $\tilde{\varepsilon}_{ii}^\lambda(0) = E_{ii}(\lambda)$ nach $\tilde{\varepsilon}_{ii}^\lambda(1) = D(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)$.
  Nun müssen wir - nur im Falle $i = j$ und $\lambda < 0$ - noch Drehungen $\delta_{12}(t) \cdot \delta_{23}(t) \cdot \ldots \cdot \delta_{i-1,i}(t)$ nachschalten (um die -1 an die erste Stelle wie in S zu schaffen): Wir setzen also

$$\delta_{k-1,k}(t) := \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & k-1 & k & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ k-1 \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ \hline & 0 & & \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) & & 0 & \\ & & & \sin(\pi t) & \cos(\pi t) & & & \\ \hline & & & & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

und dann

$$\varepsilon_{ii}^{\lambda}(t) := \tilde{\varepsilon}_{ii}^{\lambda}(t) \quad \text{für } \lambda > 0$$
$$\varepsilon_{ii}^{\lambda}(t) := \delta_{1,2}(t)\cdots\delta_{i-1,i}(t)\tilde{\varepsilon}_{ii}^{\lambda}(t) \quad \text{für } \lambda < 0$$

Weil die Drehmatrizen alle $\mathrm{Det}(\delta_{k-1,k}(t)) = +1$ haben, ist $\varepsilon_{ii}^{\lambda}(t)$ ein Weg in $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ und geht von $\varepsilon_{ii}^{\lambda}(0) = E_{ii}(\lambda)$ nach $\varepsilon_{ii}^{\lambda}(t) = D(-1,1,\dots,1) = S$.
Nach dieser Vorbereitung definieren wir unseren Weg als

$$A(t) = \varepsilon_{i_1j_1}^{\lambda_1}(t)\cdot\varepsilon_{i_2j_2}^{\lambda_2}(t)\cdot\ldots\cdot\varepsilon_{i_sj_s}^{\lambda_s}(t), \quad 0 \le t \le 1.$$

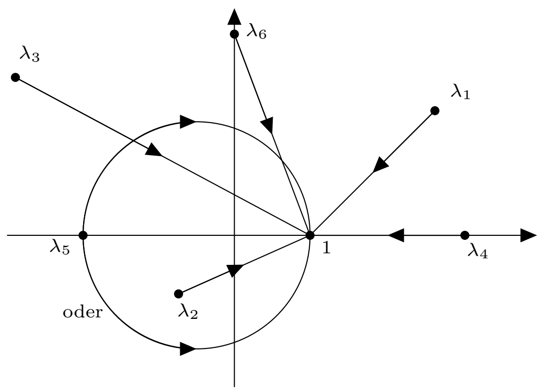
Das ist ein stetiger Weg von $A(0) = A$ nach $A(1)$. Um dieses zu bestimmen, erinnern wir uns:

$$\mathrm{Det}(A(t)) = \prod_{\substack{i_k=j_k\\ \lambda_k>0}}(t+(1-t)\lambda_k)\prod_{\substack{i_k=j_k\\ \lambda_k<0}}(-t+(1-t)\lambda_k)\,.$$

$\mathrm{Det}(A(t))$ ist also (für alle t) positiv (negativ), wenn die Anzahl der $\lambda_k < 0$ mit $i_k = j_k$ gerade (ungerade) ist. Also ist

$$D(A(1)) = S^l = \begin{cases}\mathbb{1}, & l \text{ gerade}\\ S, & l \text{ ungerade.}\end{cases}$$

(6) Weil $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus 0$ wegzusammenhängend ist, kannn man wie in (5) zeigen, dass ganz $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist: man muss die Wege $t+(1-t)\lambda$ von λ (für $t=0$) nach $+1$ (für $t=1$) nur geschickter wählen, wenn λ (wie z.B. für λ_5 im Bild) auf der negativen Halbachse liegt:



Orientierung

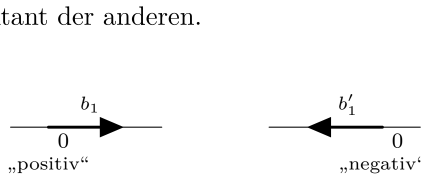
Definition 6.10.3. Es sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n. Auf der Menge $\mathbb{B}(V)$ aller geordneter Basen $\mathfrak{B} = (b_1,\dots,b_n)$ von V führen wir eine Äquivalenzrelation ein:

$$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}' \iff \mathrm{Det}(\Omega_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}) = \mathrm{Det}(M_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_V)) = \mathrm{Det}(\Phi_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}) > 0.$$

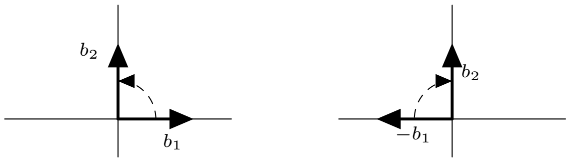
Hier ist $\Omega_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}$ also die Basiswechselmatrix; und $\Phi = \Phi_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}} : V \to V$ ist definiert durch $\Phi(b_i) = b_i'$ $(i = 1,\dots,n)$.
Wir nennen äquivalente Basen *gleichorientiert*; eine Äquivalenzklasse nennen wir eine *Orientierung* von V.

Es gibt für V genau zwei Orientierungen: ist $\mathfrak{B} = (b_1,\dots,b_n)$ ein Repräsentant der einen Orientierung, so ist $\mathfrak{B}' = (-b_1, b_2,\dots,b_n)$ ein Repräsentant der anderen.

Beispiel 6.10.4. 1) $V = \mathbb{R}$

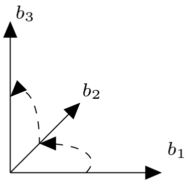


2) $V = \mathbb{R}^2$



„positiv" „negativ"

3) $V = \mathbb{R}^3$ (*Rechte-Hand-Regel*)



„positiv"

6.11 Volumenmessung im $\mathbb{R}^n$

Eine wichtige Anwendung der Determinante ist die Volumenmessung in reellen Vektorräumen.

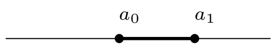
Definition 6.11.1. Es seien $n+1$ Punkte (als Ortsvektoren) $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Als ihre *konvexe Hülle* oder *Spat* bezeichnet man die Menge

$$\mathrm{Spat}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1 \right\}.$$

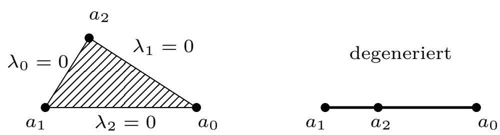
Die $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ nennt man die *baryzentrischen Koordinaten* von x in Bezug auf $a_0, \ldots, a_n$.

Beispiel 6.11.2.

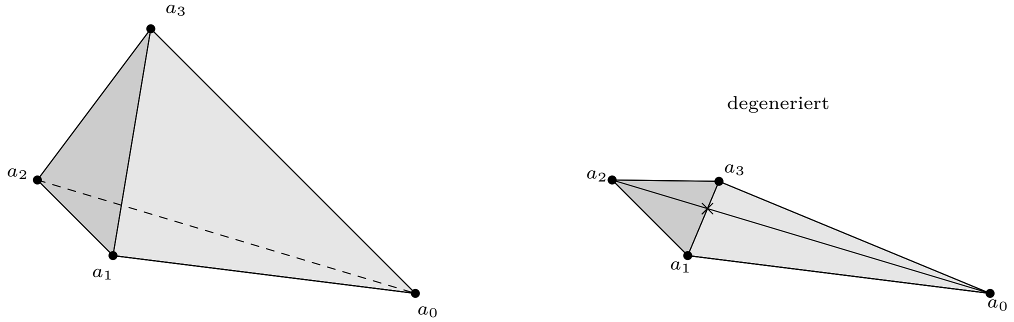
- $n = 1$



- $n = 2$



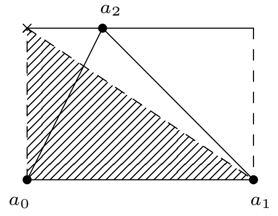
- $n = 3$



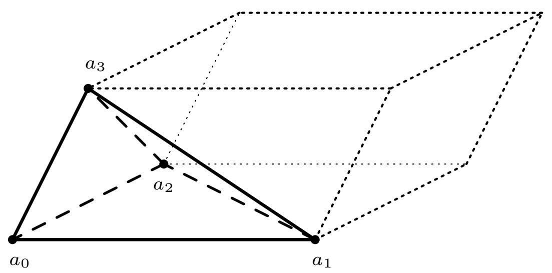
Definition 6.11.3. Das *Volumen* eines von $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Spats ist

$$\mathrm{vol}(a_0, a_1, \ldots, a_n) := \frac{1}{n!} \left| \mathrm{Det}(a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0) \right|$$

Beispiel 6.11.4.
- $n = 2$



- $n = 3$



- Scherungsinvarianz: *Prinzip des Cavalieri.*
- $\mathrm{vol}(0, e_1, \ldots, e_n) = \frac{1}{n!}$ für die Standardeinheitsvektoren e_i.

Lemma 6.11.5. *Ist* $\mathrm{Spat}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *in einem affinen Unterraum* $\mathcal{A}$ *der Dimension* $d < n$ *enthalten, so ist* $\mathrm{vol}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Beweis. In diesem „degenerierten“ Fall sind die Vektoren $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ nicht linear unabhängig; also ist die Determinante $= 0$. □

Lemma 6.11.6 (Translationsinvarianz)**.** *Für alle* $b \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathrm{vol}(b + a_0, b + a_1, \ldots, b + a_n) = \mathrm{vol}(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Lemma 6.11.7 (Streckungsmultiplikativität)**.**

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(a_0, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_n) &= |\lambda| \,\mathrm{vol}(a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_n), \\ \mathrm{vol}(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) &= |\lambda|^n \,\mathrm{vol}(a_0, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Lemma 6.11.8 (Permutationsinvarianz)**.** *Für jedes* $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1} = \mathrm{Sym}(\{0, 1, \ldots, n\})$*:*

$$\mathrm{vol}(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = \mathrm{vol}(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Satz 6.11.9. *Für eine affine Abbildung* $\varphi = f + b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *mit linearem Anteil* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *und Translationsanteil* $b \in \mathbb{R}^n$ *gilt:*

$$\mathrm{vol}(\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_n)) = |\operatorname{Det}(f)| \,\mathrm{vol}(a_0, \ldots, a_n)$$

Beweis. Nach Lemma 6.11.6 brauchen wir nur $\varphi = f$ zu betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)) &= \frac{1}{n!} \left|\operatorname{Det}(f(a_1) - f(a_0), \ldots, f(a_n) - f(a_0))\right| \\ &= \frac{1}{n!} \left|\operatorname{Det}(f(a_1 - a_0), f(a_2 - a_0), \ldots, f(a_n - a_0))\right| \\ &= \frac{1}{n!} \left|\operatorname{Det}(f) \operatorname{Det}(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_n - a_0)\right| \\ &= |\operatorname{Det}(f)| \,\mathrm{vol}(a_0, a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

□

Volumenmessung in einem reellen Vektorraum

Man kann in einem reellen Vektorraum V keine absolute Volumenmessung durchführen, sondern nur relativ zu einer Basis $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$:

$$\mathrm{vol}_{\mathfrak{B}}(a_0, a_1, \dots, a_n) := \frac{1}{n!} |\operatorname{Det}(f)|$$

für $a_0, a_1, \dots, a_n \in V$ und $f : V \to V$ ist bestimmt durch $f(b_i) := a_i - a_0$ für $i = 1, \dots, n$.

Beispiel 6.11.10. 1) $V = \mathbb{R}^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ Standardbasis: $\mathrm{vol}_{\mathcal{B}} = \mathrm{vol}$.

2) V unnd $\mathcal{B}$ beliebig: $\mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(0, b_1, \dots, b_n) = \frac{1}{n!}$.

3) V unnd $\mathcal{B}$ beliebig:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}' = (b_1, \dots, \lambda b_i, \dots, b_n) : && \mathrm{vol}_{\mathcal{B}'} = \lambda \, \mathrm{vol}_{\mathcal{B}} \\
&\mathcal{B}' = (b_1, \dots, b_i + b_j, \dots, b_j, \dots, b_n) : && \mathrm{vol}_{\mathcal{B}'} = \mathrm{vol}_{\mathcal{B}} \\
&\mathcal{B}' = (b_1, \dots, b_{i-1}, b_j, \dots, b_{j-1}, b_i, \dots, b_n) : && \mathrm{vol}_{\mathcal{B}'} = \mathrm{vol}_{\mathcal{B}}
\end{aligned}$$

Satz 6.11.11. *Sei V ein reeller Vektorraum und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis.*

(i) $\mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ *genau dann, wenn* $\dim(\mathrm{Span}(a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0)) < n$.

(ii) $\mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(\varphi(a_0), \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = |\operatorname{Det}(f)| \, \mathrm{vol}_{\mathcal{B}}(a_0, \dots, a_n)$ *für jede affine Abbidung* $\varphi = f + b$, $f : V \to V$ *linear und* $b \in V$.

(iii) $\mathrm{vol}_{\mathcal{B}'} = |\operatorname{Det}(\Omega_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})| \, \mathrm{vol}_{\mathcal{B}}$ *für zwei Basen* $\mathcal{B}$ *und* $\mathcal{B}'$, *wobei* $\Omega_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ *die Basiswechselmatrix ist.*

Beweis. Folgt aus Satz 6.11.9 □

6.12 Unterdeterminanten

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ gibt uns nur Auskunft, ob der Rang maximal ist oder nicht:

$$\mathrm{rg}(A) = n \iff \operatorname{Det}(A) \neq 0.$$

Den Rang selbst können wir aber durch sogenannte Unterdeterminanten ermitteln. Die Streichungsmatrizen A'_{ij} im Laplaceschen Entwicklungssatz führten zu den Kofaktoren

$$a^{\#}_{ij} = (-1)^{i+j} \operatorname{Det}(A'_{ji}).$$

Diese Kofaktoren sind Beispiele für Unterdeterminanten. Allgemeiner sei $I \subseteq \underline{n} = \{1, \dots, n\}$ eine Teilmenge mit $|I| = p$ und $I' = \underline{n} \setminus I$. Sei $J \subseteq \underline{m}$ und ebenfalls $|J| = p$. Hier kann $0 \leq p \leq n, m$ sein. Dann definieren wir für eine $n \times m$-Matrix A die *Untermatrix*

$$A_{I,J} = \begin{array}{l} \text{nur die Zeilen } i \text{ mit } i \in I, \\ \text{und nur die Spalten} j \text{ mit } j \in J. \end{array}$$

Ihre Determinante $\operatorname{Det}(A_{I,J})$ nennt man eine *p-reihige Unterdeterminante*. Als *Streichungsmatrizen* bezeichnen wir Untermatrizen

$$A'_{I,J} = A_{I',J'}.$$

Für ein Paar (I, J) definiert man als Signum

$$\mathrm{sign}(I, J) := (-1)^s \text{ mit } s = \sum_{k=1}^{p} (i_k - 1) + \sum_{k=1}^{p} (j_k - 1) = \sum_{k=1}^{p} (i_k + j_k),$$

wenn $I = \{i_1, \dots, i_p\}, J = \{j_1, \dots, j_p\}$; denn man braucht s Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen, um die Matrix $(a_1, \dots, a_{i_1 - 1}, e_{j_1}, \dots, a_{i_2 - 1}, e_{j_2}, \dots, a_n)$ in die Blockmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} A'_{I,J} & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

zu verwandeln.
Man hat nun einen verallgemeinerten

Satz 6.12.1 (Allgemeiner Satz von Laplace)**.** *Es sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix.*

(i) Für festes $I \subseteq \underline{n}$ mit $|I| = p$ gilt:

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\substack{K \subseteq \underline{n} \\ |K| = p}} \mathrm{sign}(I, K)\, \mathrm{Det}(A_{I,K})\, \mathrm{Det}(A'_{I,K}).$$

(ii) Für festes $J \subseteq \underline{n}$ mit $|J| = p$ gilt:

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\substack{K \subseteq \underline{n} \\ |K| = p}} \mathrm{sign}(K, J)\, \mathrm{Det}(A_{K,J})\, \mathrm{Det}(A'_{K,J}).$$

Bemerkung 6.12.2. Für $p = 1$ erhalten wir den einfachen Satz von Laplace.

Für eine quadratische Matrix A folgt natürlich sofort: für jedes $p = 1, 2, \ldots, n = \mathrm{rg}(A)$ gibt es mindestens eine p-reihige Unterdeterminante $\mathrm{Det}(A_{I,J})$, die nicht verschwindet. Es gilt allgemein:

Satz 6.12.3. *Für eine $m \times n$-Matrix A sind äquivalent:*

(i) $p \leq \mathrm{rg}(A)$

(ii) Es gibt eine p-reihige Unterdeterminante, die nicht null ist.

Beweis. Hat $A = (a_1, \ldots, a_n)$ den Rang $\mathrm{rg}(A) = r$, so kann man aus den Spalten r linear unabhängige $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ auswählen; jeweils p dieser Spalten sind auch linear unabhängig. Wir wählen $J \subseteq \{j_1, \ldots, j_r\}$ mit $|J| = p$.
Nun ist der Zeilenrang der $(m \times p)$-Matrix $\tilde{A} = A_{\underline{m},J}$ natürlich genau p. Also können wir p linear unabhängige Zeilen $I \subseteq \underline{m}$, $|I| = p$, auswählen. Dann ist $A_{I,J}$ eine $p \times p$-Untermatrix mit Rang p, also $\mathrm{Det}(A_{I,J}) \neq 0$. □

Man überträgt diesen Satz auf den Rang einer linearen Abbildung:

Satz 6.12.4. *Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ sind äquivalent:*

(i) $p \leq \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}(f))$

(ii) Es gibt einen p-dimensionalen Unterraum $V' \subseteq V$ und einen p-dimensionalen Quotientenraum $\overline{W}$ von W, so dass $\tilde{F} = \pi \circ f \circ i$ ein Isomorphismus ist.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ V' \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\cong"] & \overline{W} \end{tikzcd}$$

(Hierbei ist $i : V' \hookrightarrow V$ die Inklusion, und $\pi : W \twoheadrightarrow \overline{W}$ die Projektion.)

7 Eigenwerte und Eigenvektoren

7.1 Invariante Unterräume

Bei einer linearen Abbildung $f : V \to V$ interessiert uns, ob sie (außer der Null) Fixpunkte hat. Etwas allgemeiner will man wissen, ob sie eine Gerade invariant lässt:
Gibt es $v \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit

$$f(v) = \lambda v \quad ?$$

Diese Gleichung nennt man *Eigenwertgleichung*, wie sie uns z.B. bei der Google-Matrix (siehe Einleitung) begegnet ist; man nennt v einen *Eigenvektor* und λ einen *Eigenwert*.

Wählt man nun eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, welche mit $b_1 = v$ beginnt, so ist

$$M = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Ist nicht nur $U_1 = \operatorname{Span}(v) = \operatorname{Span}(b_1)$ invariant, sondern auch der komplementäre Unterraum $U_1' = \operatorname{Span}(b_2, \ldots, b_n)$, so hat M sogar die Gestalt

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & M' \end{array}\right).$$

Nun könnte man einen Eigenvektor in U' suchen, usw. Könnte man so n linear unabhängige Eigenvektoren finden? Dann hätte M sogar Diagonalgestalt

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und alles wäre sehr einfach.

7.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir betrachten die Eigenwertgleichung genauer.

Definition 7.2.1. Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus.

1) Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* von f, falls es ein $v \in V, v \neq 0$ gibt mit $f(v) = \lambda v$.

2) Ein Vektor $v \in V, v \neq 0$ heißt *Eigenvektor* von f, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt mit $f(v) = \lambda v$.

Die Menge der Eigenwerte heißt *Spektrum* von f und wird mit $\operatorname{Spek}(f)$ bezeichnet; für einen Eigenwert λ ist

$$\operatorname{Eig}_\lambda(f) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

der *Eigenraum* von f zu λ und $\dim \operatorname{Eig}_\lambda(f)$ heißt seine *Vielfachheit*.
Für eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ seien die Begriffe Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum analog definiert, also für $V = \mathbb{K}^n, f = T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, f(x) = Ax$.

Bemerkung 7.2.2. (1) Falls $\dim_K V < \infty$, sehen wir sofort:

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid f - \lambda \,\mathrm{id}_V \text{ nicht invertierbar}\}.$$

Falls $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$ ist, ist „nicht invertierbar" äquivalent zu „nicht injektiv"; aber für $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ it dies anders. Deshalb nennt man für $\dim_{\mathbb{K}} V = \infty$ die Menge $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid f - \lambda \,\mathrm{id}_V \text{ nicht invertierbar}\}$ das Spektrum von f und bezeichnet die kleinere Menge mit „nicht injektiv" anstelle von „nicht-invertierbar" dann als die Eigenwerte.

(2) $\mathrm{Eig}_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \,\mathrm{id}_V) \neq 0$ für ein $\lambda \in \mathrm{Spek}(f)$ und die Eigenräume sind Untervektorräume.

(3)

$$\begin{aligned} 0 \in \mathrm{Spek}(f) &\iff f \text{ nicht injektiv} \\ 1 \in \mathrm{Spek}(f) &\iff \mathrm{Fix}(f) \neq 0 \end{aligned}$$

(4) $\mathrm{Eig}_\lambda(f) \cap \mathrm{Eig}_\mu(f) = 0$, falls $\lambda, \mu \in \mathrm{Spek}(f), \lambda \neq \mu$; dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

Satz 7.2.3. *Sind $v_1, \ldots, v_k$ Eigenvektoren von $f : V \to V$ zu jeweils verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, so sind sie linear-unabhängig.*

Beweis. Für $k = 1$ ist die Aussage richtig, weil ein Eigenvektor immer $\neq 0$ ist.
Sei $k \geq 2$ und es sei

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \tag{7.1}$$

eine Relation. Wir multiplizieren (7.1) mit λ_k und erhalten

$$\lambda_k \alpha_1 v_1 + \lambda_k \alpha_2 v_2 + \ldots + \lambda_k \alpha_k v_k = 0, \tag{7.2}$$

und wir wenden f auf (7.1) an und erhalten

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0. \tag{7.3}$$

Die Differenz (7.2) − (7.3) ist eine Relation zwischen den $v_2, \ldots, v_k$:

$$(\lambda_k - \lambda_1)\alpha_1 v_1 + (\lambda_k - \lambda_2)\alpha_2 v - 2 + \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\alpha_{k-1} v_k = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt: $(\lambda_k - \lambda_i)\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$. Wegen $\lambda_k \neq \lambda_i$ folgt $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, k-1$; und dies in (7.1) eingesetzt ergibt auch $\alpha_k = 0$. □

Korollar 7.2.4. *Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ besitzt höchstens $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ verschiedene Eigenwerte. Ist $|\mathrm{Spek}(f)| = k$, so gibt es einen f-invarianten Unterraum der Dimension k*

Beispiel 7.2.5. 1)

$$\begin{array}{lll} f = \mathrm{id}_V & \mathrm{Spek}(f) = \{1\} & \mathrm{Eig}_1(f) = V \\ f = 0 & \mathrm{Spek}(f) = \{0\} & \mathrm{Eig}_0(f) = V \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{llll} f = -\,\mathrm{id}_V & \mathrm{Spek}(f) = \{-1\} & \mathrm{Eig}_{-1}(f) = V & \text{(Spiegelung am Nullpunkt)} \\ f = \lambda \,\mathrm{id}_V & \mathrm{Spek}(f) = \{\lambda\} & \mathrm{Eig}_\lambda(f) = V & \end{array}$$

3)

$$\begin{aligned} &f = \text{Spiegelung an einer Geraden im } \mathbb{R}^n \\ &f(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Spek}(f) = \{\pm 1\} \qquad \mathrm{Eig}_{+1}(f) = \mathrm{Span}(x_1) \qquad \mathrm{Eig}_{-1}(f) = \mathrm{Span}(x_2, \ldots, x_n)$$

4) Eine lineare Abbildung kann auch keine Eigenwerte haben:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Spek}(A) = \emptyset.$$

5)

$$A = D[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{Diagonalmatrix}$$

$$\operatorname{Spek}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \qquad \operatorname{Eig}_{\lambda_i}(A) = \operatorname{Span}(\{e_j \mid \lambda_j = \lambda_i\}).$$

6)

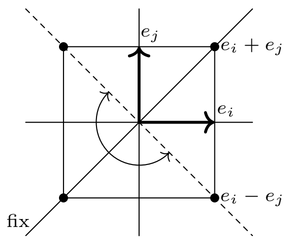
$$A = E_{ij}(\lambda),\ \text{Elementarmatrix } (i \neq j)$$

$$\operatorname{Spek}(A) = \{1\} \qquad \operatorname{Eig}_1(A) = \operatorname{Span}(\{e_k \mid k \neq j\})$$

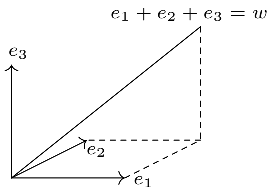
7)

$$A = P_{ij} \text{ Permutationsmatrix} \qquad \operatorname{Spek}(A) = \{\pm 1\}$$

$$\operatorname{Eig}_{+1}(A) = \operatorname{Span}(\{e_k \mid k \neq i, j\} \cup \{e_i + e_j\}) \qquad \operatorname{Eig}_{-1}(A) = \operatorname{Span}(\{e_i - e_j\})$$



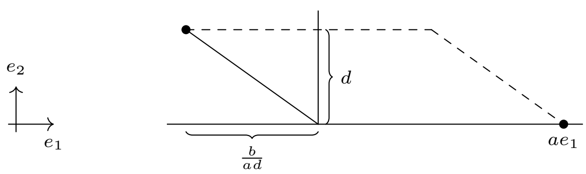
$A = P_{(123)}$ Permutationsmatrix für den 3-Zykel $(123) \in \mathfrak{S}_3$



- $\operatorname{Span}(w) = \operatorname{Fix}(A) = \operatorname{Eig}_1(A)$
- auf $\operatorname{Span}(w)^{\perp}$: Drehung um 120°

8)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{\text{Streckungen}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Scherung}} \qquad a \neq 0$$



$$\operatorname{Spek}(A) = \{a, d\}$$

$a \neq d:$	$\operatorname{Eig}_a(A) = \operatorname{Span}(e_1),$	$\dim \operatorname{Eig}_d(A) = 1;$
$a = d$ und $b \neq 0:$	$\operatorname{Eig}_a(A) = \operatorname{Span}(e_1);$	
$a = d$ und $b = 0:$	$\operatorname{Eig}_a(A) = \mathbb{K}^2.$	

Lemma 7.2.6. *(a) Ist v Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so ist v auch Eigenvektor von αf zum Eigenwert $\alpha\lambda$ ($\alpha \in \mathbb{K}$):*

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \subseteq \mathrm{Eig}_{\alpha\lambda}(\alpha f).$$

(b) Ist v Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so ist v auch Eigenvektor von f^q zum Eigenwert λ^q ($q \in \mathbb{N}$):

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \subseteq \mathrm{Eig}_{\lambda^q}(f^q).$$

Für invertierbares f gilt $\mathrm{Eig}_\lambda(f) = \mathrm{Eig}_{\lambda^{-1}(f^{-1})}$.

(c) Ist v Eigenvektor von f_1 zum Eigenwert λ_1 und ebenso Eigenvektor von f_2 zum Eigenwert λ_2, so ist v auch Eigenvektor von $f_1 + f_2$ zum Eigenwert $\lambda_1 + \lambda_2$:

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(f_1) \cap \mathrm{Eig}_{\lambda_2}(f_2) \subseteq \mathrm{Eig}_{\lambda_1+\lambda_2}(f_1 + f_2).$$

(d) Ist v Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so ist v auch Eigenvektor von $p(f) := \alpha_0 \,\mathrm{id}_V + \alpha_1 f + \ldots + \alpha_q f^q$ zum Eigenwert $p(\lambda) := \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_q\lambda^q$ ($\alpha_0, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{K}$):

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \subseteq \mathrm{Eig}_{p(\lambda)}(p(f))$$

Beweis. klar. □

Lemma 7.2.7. *Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V), \varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(V)$.*

i) $f' := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ und f haben die gleichen Eigenwerte:

$$\mathrm{Spek}(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \mathrm{Spek}(f).$$

ii) Ist v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so ist $v' := \varphi(v)$ Eigenvektor von f' zum Eigenwert λ:

$$\varphi(\mathrm{Eig}_\lambda(f)) = \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}).$$

Beweis. Beide Behauptungen folgen aus der Rechnung

$$(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(v)) = \varphi(f(v)) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$$

für $v \in \mathrm{Eig}_\lambda(f)$. □

Lemma 7.2.8. *Für zwei $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ gilt:*

i) $f \circ g$ und $g \circ f$ haben dieselben Eigenwerte:

$$\mathrm{Spek}(f \circ g) = \mathrm{Spek}(g \circ f).$$

ii) Ist v Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert λ, so ist $v' = g(v)$ Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert λ (falls $g(v) \neq 0$):

$$g(\mathrm{Eig}_\lambda(f \circ g)) \subseteq \mathrm{Eig}_\lambda(g \circ f), \qquad f(\mathrm{Eig}_\lambda(g \circ f)) \subseteq \mathrm{Eig}_\lambda(f \circ g)$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

7.3 Charakteristisches Polynom

Wie findet man alle Eigenwerte eines Endomorphismus $f : V \to V$?

$$\begin{aligned}\lambda \text{ ist Eigenwert} &\iff \text{ es gibt } v \in V \setminus 0 \text{ mit } f(v) = \lambda v \\ &\iff \text{ es gibt } v \in V \setminus 0 \text{ mit } (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) = 0 \\ &\iff \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq 0 \\ &\iff f - \lambda\,\mathrm{id}_V \text{ nicht invertierbar} \\ &\iff \mathrm{Det}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0.\end{aligned}$$

Wir haben für festes f eine Funktion

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda \longmapsto \mathrm{Det}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$$

mit Nullstellenmenge $\mathrm{CP}_f^{-1}(0) = \mathrm{Spek}(f)$.

Definition 7.3.1. $\mathrm{CP}_f(t) := \mathrm{Det}(f - t\,\mathrm{id}_V)$ heißt *charakteristisches Polynom* von f. Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ ist entsprechend

$$\mathrm{CP}_A(t) = \mathrm{Det}(A - t\mathbb{1}) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix}.$$

Nach Leibniz-Formel ist dies (bei festem f bzw. A bzw. allen a_{ij}) ein Polynom in t vom Grad n:

$$\mathrm{CP}_f(t) = \prod_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sign}(\pi) \tilde{a}_{1,\pi(1)} \cdots \tilde{a}_{n,\pi(n)},$$

mit $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}$, falls $i \neq j$, und $\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - t$.

Beispiel 7.3.2.

(1) Für die Nullfunktion $f = 0$ ist

$$\mathrm{CP}_0(t) = (-1)^n t^n, \qquad \mathrm{Spek}(0) = \{0\}.$$

(2) Für die Identität $f = \mathrm{id}_V$ ist

$$\mathrm{CP}_{\mathrm{id}_V}(t) = (1 - t)^n, \qquad \mathrm{Spek}(\mathrm{id}_V) = \{1\}.$$

(3) Für eine Diagonalmatrix $D = D[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ ist

$$\mathrm{CP}_D(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t), \qquad \mathrm{Spek}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

(4) Für eine Elementarmatrix $A = E_{ij}(\lambda), i \neq j$ ist

$$\mathrm{CP}_A(t) = (1 - t)^n, , \qquad \mathrm{Spek}(A) = \{1\}.$$

(5) Für eine Permutationsmatrix $A = P_{ij}$ für eine Transposition $\sigma = (ij)$ ist

$$\mathrm{CP}_A(t) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1-t &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && -t & 0 & \cdots & 0 & 1 &&& \\ && 0 & 1-t &&& 0 &&& \\ && \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ && 0 &&& 1-t & 0 &&& \\ && 1 & 0 & \cdots & 0 & -t &&& \\ &&&&&&& 1-t && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1-t \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Det}\left(\begin{array}{cc|ccc} -t & 1 & & 0 & \\ 1 & -t & & & \\ \hline & & 1-t & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1-t \end{array}\right) = (t^2-1)(1-t)^{n-2},$$

$$\mathrm{Spek}(A) = \{\pm 1\}.$$

(6) Für eine Drehung $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ um Winkel α ist

$$\mathrm{CP}_A(t) = 1 - 2\cos(\alpha)t + t^2,$$

$$\mathrm{Spek}(A) = \begin{cases} \emptyset & \alpha \neq 0, \pi \\ \{1\} & \alpha = 0 \\ \{-1\} & \alpha = \pi \end{cases}$$

(7) Für eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ist}$$

$$\mathrm{CP}_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t), \qquad \mathrm{Spek}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

(8) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $n = 1, 3, 5, \dots$ ungerade. Dann hat $\mathrm{CP}_A(t)$ mindestens eine Nullstelle und somit ist $\mathrm{Spek}(A) \neq \emptyset$.

(9) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\mathrm{CP}_A(t) = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - \underbrace{(a+d)}_{-\,\mathrm{Spur}(A)}\, t + \underbrace{(ad-bc)}_{\mathrm{Det}(A)}$$

Wir sehen, dass die Berechnung des charakteristischen Polynomes nicht ganz einfach ist; es gibt weniger Rechenregel als für die Determinante (man versuche einmal, den Laplaceschen Entwicklungssatz anzuwenden). Insbesondere ist $\mathrm{CP}_A(t)$ nicht „trivial“, d.h. nicht das Nullpolynom oder ein konstantes Polynome, wenn $\mathrm{rg}(A) < n$ ist.

Satz 7.3.3. *Für eine Blockmatrix* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *bzw.* $M' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ *gilt*

$$\mathrm{CP}_M(t) = \mathrm{CP}_A(t) \cdot \mathrm{CP}_C(t) \qquad \textit{bzw.}$$

Beweis. $M - t\mathbb{1}$ bzw. $M' - t\mathbb{1}$ hat Blockgestalt $\begin{pmatrix} A - t\mathbb{1} & B \\ 0 & C - t\mathbb{1} \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} A - t\mathbb{1} & 0 \\ C & D - t\mathbb{1} \end{pmatrix}$, und so folgt die Behauptung aus dem entsprechenden Ergebnis für die Determinante. □

Satz 7.3.4. *Für zwei $n \times n$-Matrizen A, B gilt:*

$$\mathrm{CP}_{AB}(t) = \mathrm{CP}_{BA}(t).$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{pmatrix} -t\mathbb{1} & A \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & A \\ B & t\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\mathbb{1} + AB & 0 \\ -B & -t\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

und andersherum

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & A \\ B & t\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\mathbb{1} & A \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\mathbb{1} & 0 \\ -tB & BA - t\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Nach dem Produktsatz für Determinanten (also $\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(BA)$) und Satz 7.3.3 folgt

$$\mathrm{CP}_{AB}(-t)^n = (-t)^n \,\mathrm{CP}_{BA}(t),$$

also die Behauptung. □

Satz 7.3.5. *Ähnliche Matrizen haben gleiches charakteristisches Polynom: Für $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ und $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ gilt*

$$\mathrm{CP}_{\Omega A \Omega^{-1}}(t) = \mathrm{CP}_A(t).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus vorigem Satz. Man kann aber auch direkt nachrechnen:

$$\Omega A \Omega^{-1} - t\mathbb{1} = \Omega A \Omega^{-1} - \Omega \cdot t\mathbb{1} \cdot \Omega^{-1} = \Omega(A - t\mathbb{1})\Omega^{-1},$$

und benutzen, dass ähnliche Matrizen die gleiche Determinante haben. □

Wir notieren noch

Satz 7.3.6. *(i)* $\mathrm{CP}_{A^\top} = \mathrm{CP}_A(t)$.

(ii) $\mathrm{CP}_{\lambda A}(t) = \lambda^n \,\mathrm{CP}_A(\frac{t}{\lambda})$ *für* $\lambda \neq 0$.

Beweis. Für (i) rechnet man nach

$$A^\top - t\mathbb{1} = A^\top - t\mathbb{1}^\top = (A - t\mathbb{1})^\top$$

und benutzt $\mathrm{Det}(M^\top) = \mathrm{Det}(M)$. Für (ii) rechnet man

$$\lambda A - t\mathbb{1} = \lambda(A - \frac{t}{\lambda}\mathbb{1})$$

und benutzt $\mathrm{Det}(\lambda M) = \lambda^n \,\mathrm{Det}(M)$. □

Korollar 7.3.7. *Für eine schiefsymmetrische Matrix $A = -A^\top$ gilt: Ist n gerade bzw. ungerade, so ist $\mathrm{CP}_A(t)$ ein gerades Polynom $\mathrm{CP}_A(-t) = \mathrm{CP}_A(t)$ bzw. ein ungerades Polynom $\mathrm{CP}_A(-t) = -\mathrm{CP}_A(t)$.*

Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

Betrachten wir nun das charakteristische Polynom genauer: Es seien $c_k(A) \in \mathbb{K}$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms:

$$\mathrm{CP}_A(t) = c_0(A) + c_1(A)t + \ldots + c_{n-1}(A)t^{n-1} + c_n(A)t^n.$$

Aus der Definition und Leibniz-Formel folgt sofort

(1) $c_0(A) = \mathrm{Det}(A)$ (setze $t = 0$).

(2) $c_n(A) = (-1)^n$ (nach Ausmultiplizieren) und somit insbesondere $\mathrm{grad}\, \mathrm{CP}_A(t) = n$.

Wir kennen noch einen weiteren Koeffizienten:

Proposition 7.3.8. $c_{n-1}(A) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Spur}(A)$.

Beweis. In der Leibniz-Formel für $\mathrm{Det}(A - t\mathbb{1})$ erreicht nur der Term für $\pi = 1 \in \mathfrak{S}_n$ den Grad n für die Unbekannte t:

$$\tilde{a}(1) = (a_{11} - t)(a_{22} - t) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - t),$$

denn fehlt in einem $\tilde{a}(\pi)$ ein Diagonalterm $a_{jj} - t$ mit $i \neq j$ (z.B. $j = \pi(i)$). Also ist

$$\mathrm{CP}_A(t) = \tilde{a}(\pi) + \underbrace{\sum_{\pi \neq 1} \mathrm{sign}(\pi)\tilde{a}(\pi)}_{P(t)}$$

mit $\mathrm{grad}(P(t)) \leq n - 2$. Also trägt $P(t)$ nichts zum Koeffizienten $c_{n-1}(A)$ und $c_n(A) = (-1)^n$ bei, und $c_{n-1}(A)$ ist der $(n-1)$-te Koeffizient von $\tilde{a}(1)$. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$\tilde{a}(1) = (-1)^n t^n (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})t^{n-1} + \text{niedere Terme}.$$

$\square$

Satz 7.3.9. *Für $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt:*

(i) $c_k(\Omega A \Omega^{-1}) = c_k(A)$.

(ii) $c_k(AB) = c_k(BA)$.

(iii) $c_k(A^\top) = c_k(A)$

(iv) $c_k(\lambda A) = \lambda^{n-k} c_k(A)$

(v) $c_k \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \sum_{i+j=k} c_i(A)c_j(D)$.

Gibt es Formeln für die anderen Koeffizienten $c_k(A)$, wie für $k = 0, n-1, n$?

Bemerkung 7.3.10. (1) Wir haben jetzt schon öfter einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ oder einem Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ eine „Größe“ zugeordnet, d.h. eine natürliche Zahl, oder ein Polynom. Beispiele hierfür waren

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &\in \mathbb{N}, \\ \mathrm{def}(A) &\in \mathbb{N}, \\ \mathrm{Det}(A) &\in \mathbb{K}, \\ \mathrm{Spur}(A) &\in \mathbb{K}, \\ \mathrm{CP}_A(t) &\in \mathbb{K}[t] = \text{ Ring der Polynome in } t \text{ mit Koeffizienten in } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Man nennt eine solche „Größe“ eine Ähnlichkeitsinvariante, wenn sie sich beim Übergang von A zu einer ähnlichen Matrix $A' = BAB^{-1}$ nicht ändert. Die obigen „Größen“ sind allesamt Beispiele für Ähnlichkeitsinvarianten. Nicht nur Det und Spur, sondern alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind Ähnlichkeitsinvarianten.

(2) Wir haben zwar das charakteristische Polynom $\mathrm{CP}_A(t)$ als Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eingeführt; aber es ist für viele Zwecke besser, es als *formalen Ausdruck* zu betrachten:

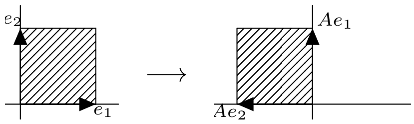
$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots + p_n t^n$$

Solche Ausdrücke kann man addieren (koeffizientenweise), mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{K}$ skalieren (koeffizientenweise), und multiplizieren (durch distributives Ausmultiplizieren und Zusammenfassen durch $t^k \cdot t^l := t^{k+l}$). In dieser Auffassung, also in $\mathbb{K}[t]$ sind zwei Polynome genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten gleich sind. Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist zwischen den beiden Auffassungen kein Unterschied.

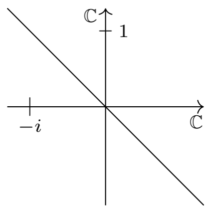
Beispiel 7.3.11. Beispiele für verschiedene Körper

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1//1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{CP}_A(t) = t^2 + 1.$$

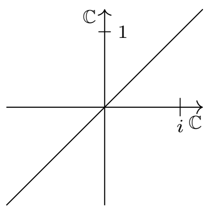
$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$ $\mathrm{Spek}(A) = \emptyset$



$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$ $\mathrm{Spek}(A) = \{\pm i\}$

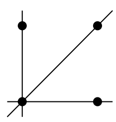


$$\mathrm{Eig}_i(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{C}^2,$$



$$\mathrm{Eig}_{-i}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{C}^2,$$

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{F}_2}$ $\mathrm{Spek}(A) = \{1\}$



$$\mathrm{Eig}_1(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right),$$

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{F}_3}$ $\mathrm{Spek}(A) = \emptyset$

7.4 Diagonalisierbarkeit

Definition 7.4.1. (i) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ heißt *diagonalisierbar*, falls A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist; d.h. es gibt ein $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, so dass

$$\Omega A \Omega^{-1} = A' = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

für gewisse $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

(ii) Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so welcher f als Diagonalmatrix dargestellt wird, d.h. $A' = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ ist eine Diagonalmatrix $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Bemerkung 7.4.2.

1. Offenbar ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $A = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(f)$ für irgendeine Basis $\mathcal{B}'$ diagonalisierbar ist; und A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $f = L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(A)$ für irgendeine Basis $\mathcal{B}'$ diagonalisierbar ist.

2. In (i) sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $\Omega A \Omega^{-1}$, und wegen Lemma 7.2.7(i) auch die von A. Der Standardeinheitsvektor e_i ist Eigenvektor von $\Omega A \Omega^{-1}$ zum Eigenwert λ; also ist nach Lemma 7.2.7(ii) dann $\Omega^{-1} e_i$ Eigenvektor von A zu λ. Also:

   a) $\mathrm{Spek}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

   b) $\mathrm{Eig}_\lambda(A) = \mathrm{Span}(\{\Omega^{-1} e_i \mid \lambda_i = \lambda\})$, $\lambda \in \mathrm{Spek}(A)$.

   In (ii) sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte und die Basisvektoren $b_1, \dots, b_n$ sind Eigenvektoren, genauer ist b_i Eigenvektor zu λ_i und

   a) $\mathrm{Spek}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$,

   b) $\mathrm{Eig}_\lambda(f) = \mathrm{Span}(\{b_i \mid \lambda_i = \lambda\})$, $\lambda \in \mathrm{Spek}(f)$.

Was sind die Vorteile, wenn man eine Matrix oder einen Endomorphismus diagonalisieren kann?

(I) Alle Ähnlichkeitsinvarianten kann man leicht ermitteln:

- Rang $\mathrm{rg}(A) = |\{\lambda_i \mid \lambda_i \neq 0\}|$,
- Determinante $\mathrm{Det}(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$,
- Spur $\mathrm{Spur}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$,
- charakterisches Polynom $\mathrm{CP}_A(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - t)$,
- Koeffizienten von CP_A $c_k(A) = s_{n-k}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wobei s_{n-k} ein elementar-symmetrisches Polynom ist,
- Spektrum $\mathrm{Spek}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$,

Für die Eigenräume erhält man $\mathrm{Eig}_\lambda(A) = \mathrm{Span}(\{\Omega^{-1} e_i \mid \lambda_i = \lambda\})$.

(II) Mit einer Basis aus Eigenvektoren hat man Koordinaten $K_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \dots, x_n)$ für ein $v \in V$ und f ist in diesen Koordinaten denkbar einfach:

$$K_{\mathcal{B}}(f(v)) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n).$$

(III) Man kann die Iterationen von A, also $A, A^2, A^3, \dots$, leicht ausrechnen durch

$$A^k = \Omega^{-1} \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \Omega,$$

und damit das dynamische System $v \mapsto A^k v$.

(IV) Man kann die für die Theorie der Differentialgleichungen wichtige Exponentialfunktion

$$\exp(A) := \sum_{q \geq 0} \frac{A^q}{q!}$$

leicht ausrechnen durch

$$\exp(A) = \Omega^{-1} \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \Omega.$$

(V) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bilden die diagonalisierbaren Matrizen eine offene und dichte Teilmenge von $\mathbb{K}^{n^2} = \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$. Deshalb sind „stetige Formeln“ auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$, die für diagonalisierbare Matrizen richtig sind, für alle Matrizen richtig.

Die Aufgabe besteht also darin:

(a) ein gutes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit zu finden,

(b) eine Basis aus Eigenvektoren zu bestimmen.

Die Matrix $B = M_{\mathcal{BB}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = (b_1, \ldots, b_n)$ ist im Falle (i) die Basiswechselmatrix von der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ des $\mathbb{K}^n$ in die neue Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, die aus den Eigenvektoren besteht. Im Falle (ii) taucht eine Basiswechselmatrix wie folgt auf: hat man f in irgendeiner Basis $\mathcal{A}$ von V durch die Matrix A dargestellt, also $A = M_{\mathcal{AA}}(f)$, so sei $B = M_{\mathcal{BA}}(\mathrm{id}_V)$; dann folgt

$$A' = M_{\mathcal{BB}}(f) = M_{\mathcal{BA}}(\mathrm{id}_V) \cdot M_{\mathcal{AA}} \cdot M_{\mathcal{AB}}(\mathrm{id}_V) = BAB^{-1}.$$

Nun also ein Kriterium zur Diagonalisierbarkeit. Ein Polynom $p(t) = p_0 + p_1 t, p_1 \neq 0$ vom Grad 1 nennt man auch *linear* (obwohl es keine lineare Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ im Sinne der Linearen Algebra beschreibt, sondern eine affine; nur für $p_0 = 0$ ist es linear). Tritt es in der speziellen Gestalt $\lambda - t$ als Faktor eines Polynoms $q(t) = (\lambda - t)\tilde{q}(t)$ auf, so ist $t = \lambda$ eine Nullstelle (Wurzel) von $q$und $(\lambda - t)$ heißt *Linearfaktor* von q. Ist $q(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t)$, so sagt man q *zerfalle* in Linearfaktoren.

Satz 7.4.3 (über die Diagonalisierbarkeit)**.**

(a) (Notwendige Bedingung)
Ist die Matrix A (bzw. der Endomorphismus f) diagonalisierbar, so zerfällt das charakteristische Polynom $\mathrm{CP}_A(t)$ (bzw. $\mathrm{CP}_f(t)$) in Linearfaktoren.

(b) (Hinreichende Bedingung)
Zerfällt das charakteristische Polynom $\mathrm{CP}_A(t)$ einer Matrix A (bzw. $\mathrm{CP}_f(t)$ eines Endomorphismus) in Linear faktoren $(\lambda_i - t), i = 1, \ldots, n$ und(!) *sind diese paarweise verschieden, so ist A (bzw. f) diagonalisierbar.*

Beweis. Es genügt, jeweils eine Fassung (für Matrix oder Endomorphismus) zu beweisen.

(a) Zu A gebe es ein $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $\Omega A \Omega^{-1} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dann folgt

$$\mathrm{CP}_A(t) = \mathrm{CP}_{\Omega A \Omega^{-1}}(t) = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$$

nach Satz 7.3.5 und Beispiel 7.3.2.
Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ mit $M_{\mathcal{BB}}(f) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = A'$ so ist

$$\mathrm{CP}_f(t) = \mathrm{CP}_{A'}(t) = (\lambda_1 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$$

nach Definition 7.3.1 und Beispiel 7.3.2.

(b) Ist $\mathrm{CP}_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t)$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, so wähle man zu jedem Eigenwert λ_i einen Eigenvektor $b_i \in \mathbb{K}^n$. Nach Satz 7.2.3 sind diese linear unabhängig, also ist $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis und die Matrix $\Omega = (b_1, \ldots, b_n)$ mit den Spaltenvektoren b_i, so ist wegen $\Omega e_i = b_i$ dieses $\Omega = M_{\mathcal{BE}}$ die Basiswechselmatrix von der Standardbasis $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$. Nun folgt

$$\Omega^{-1} A \Omega e_i = \Omega^{-1} A b_i = \Omega^{-1} \lambda_i b_i = \lambda_i \Omega^{-1} b_i = \lambda_i e_i,$$

also ist $\Omega^{-1} A \Omega = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix.
Zerfällt $\mathrm{CP}_f(t)$ und ist b_i ein Eigenvektor zu λ_i, so ist $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von Eigenvektoren. Offenbar ist $M_{\mathcal{BB}}$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonale.

□

7.5 Trigonalisierbarkeit

Wenn wir nur wissen, dass $\mathrm{CP}_A(t)$ in Linearfaktoren $(\lambda_i - t)$ zerfällt, diese aber vielleicht nicht verschieden sind, dann kann man A immerhin noch trigonalisieren.

Definition 7.5.1.

(i) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ heißt *trigonalisierbar*, falls sie zu einer oberen (oder unteren) Dreiecksmatrix ähnlich ist:

$$\Omega A \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{für ein } \Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

(ii) Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt *trigonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt mit

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Für eine trigonalisierbare Matrix (bzw. Endomorphismus) gilt damit:

- $\mathrm{CP}_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t)$,
- $\mathrm{Det}(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$,
- $\mathrm{Spur}(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$,
- $c_k(A) = s_{n-k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \; (k = 0, \ldots, n)$, s_{n-k} elementarsymmetrisches Polynom,
- $\mathrm{Spek}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

Was die Eigenräume angeht, kann man nur

$$\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A) \neq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) \supseteq \mathrm{Span}(e_1),$$

sagen.

Beispiel 7.5.2.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{CP}_A(t) = (\lambda - t)^2 \qquad \mathrm{CP}_B(t) = (\lambda - t)^2$$

$$\mathrm{Spek}(A) = \{\lambda\} \qquad \mathrm{Spek}(B) = \{\lambda\}$$

$$\underbrace{\mathrm{Eig}_\lambda(A)}_{\dim=2} = \mathbb{K}^2 \qquad \underbrace{\mathrm{Eig}_\lambda(B)}_{\dim=1} = \mathbb{K}e_1$$

Satz 7.5.3. CP_A *zerfällt genau dann in (nicht notwendigerweise verschiedene) Linearfaktoren*

$$\mathrm{CP}_A(t) = (\lambda_1 - t) \cdots (\lambda_n - t),$$

wenn A zu einer oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.

Beweis. „$\Longrightarrow$": Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich. Es sei b_1 ein Eigenvektor zu λ_1. Ergänzt man dann zu einer Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, so hat A (genauer $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$) in dieser Basis die Darstellung

$$M = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T_A) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \hline & & & \\ 0 & & \tilde{A} & \\ & & & \end{array}\right) = \Omega A \Omega^{-1},$$

mit der Basiswechselmatrix $\Omega = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = (b_1, \ldots, b_n)$, wobei $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standarbasis ist.
Nun ist nach Satz 7.3.3 über das charakteristische Polynom von Blockmatrizen

$$\mathrm{CP}_A(t) = \mathrm{CP}_M(t) = (\lambda_1 - t)\,\mathrm{CP}_{\tilde{A}}(t),$$

also ist nach Koeffizientenvergleich $\mathrm{CP}_{\tilde{A}} = (\lambda_2 - t) \cdots (\lambda_n - t)$ zerfallend.
Nach Induktionvoraussetzung können wir annehmen, dass

$$\tilde{A} = \tilde{\Omega}^{-1} \tilde{D} \tilde{\Omega}$$

gilt für eine obere Dreiecksmatrix $\tilde{D}$ und ein $\tilde{\Omega} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$.
Wir setzen

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\Omega} \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

und

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \begin{pmatrix}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix} \tilde{\Omega}^{-1} \\ \hline 0 & \tilde{D} \end{array}\right),$$

und erhalten

$$P^{-1}DP = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n \\ \hline 0 & \tilde{\Omega}^{-1}\tilde{D}\tilde{\Omega} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right) = M,$$

also $A = \Omega^{-1}M\Omega = (\Omega^{-1}P^{-1})D(P\Omega)$.
Die umgekehrte Richtung „$\Longleftarrow$“ ist klar. $\square$

Korollar 7.5.4. *Jede komplexe Matrix ist trigonalisierbar.*

Bemerkung 7.5.5. Ist eine Endomorphismus $f : V \to V$ trigonalisiert durch die Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, so bilden die Räume

$$V_k := \operatorname{Span}(\{b_1, \ldots, b_n\})$$

eine aufsteigende Kette

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$$

von f-invarianten Unterräumen $f(V_k) \subseteq V_k$. Dies nennt man eine *f-invariante Fahne*. Die Existenz eienr sochen ist zur Trigonalisierbarkeit äquivalent. (Übung)

Bemerkung 7.5.6. Manchmal ist es wünschenswert, mehrere Matrizen $A, B, \ldots$ *simultan* zu *diagonalisieren* (sofern jede einzelne diagonalisierbar ist), d.h. es soll eine invertierbare Matrix Ω gefunden werden, so dass $\Omega A\Omega^{-1}, \Omega B\Omega^{-1}, \ldots$ alle diagonal sind. Da alle Diagonalmatrizen untereinander vertauschen, müssen dafür alle $A, B, \ldots$ untereinander vertauschen. Dies ist auch hinreichend:

Satz 7.5.7. *Zwei diagonalisierbare Matrizen A und B sind genau dann simultan diagonalisierbar, wenn sie vertauschen (d.h. $AB = BA$ gilt).*

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Beispiel 7.5.8. Zwei Spiegelungen A und B im $\mathbb{R}^n$ vertauschen genau dann, wenn die „Spiegel“ (d.h. $\operatorname{Fix}(A)$ und $\operatorname{Fix}(B)$) sich senkrect schneiden:

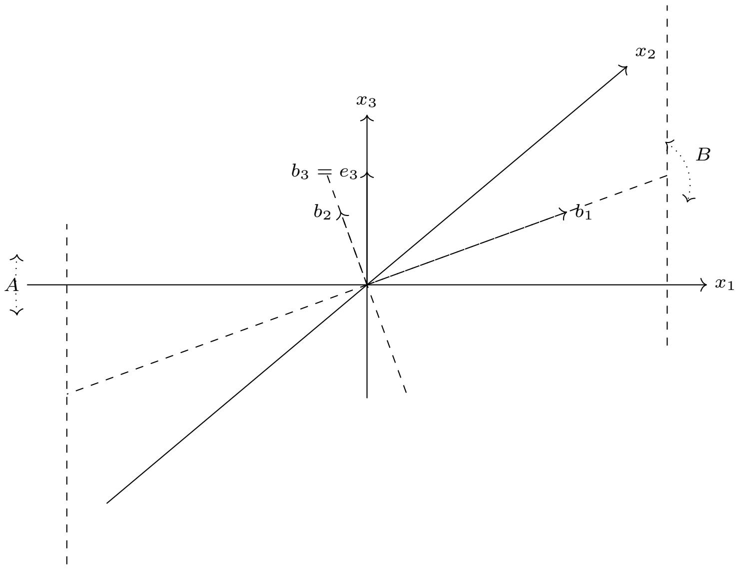
$$v \in \operatorname{Fix}(A), w \in \operatorname{Fix}(B) \implies \langle v, w\rangle = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der (x_1, x_2)-Ebene
$\operatorname{Fix}(A) = \operatorname{Span}(e_1, e_2) = \operatorname{Eig}_1(A)$
$\operatorname{Span}(e_3) = \operatorname{Eig}_{-1}(A)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der Ebene durch die (x_1, x_2)-Diagonale und x_3
$\operatorname{Fix}(B) = \operatorname{Span}(e_1 + e_2, e_3) = \operatorname{Eig}_1(B)$
$\operatorname{Span}(-e_1 + e_2) = \operatorname{Eig}_{-1}(B)$



$$\begin{aligned} b_1 &:= e_1 + e_2 \\ b_2 &:= -e_1 + e_2 \\ b_3 &:= e_3 \end{aligned}$$

1) A ist bereits diagonal, wird also durch $\mathcal{S} = (e_1, e_2, e_3)$ diagonalisiert, aber auch durch $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ und viele andere Basen.

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A \qquad \text{(zufälligerweise?)}$$

2) B wird von $\mathcal{S}$ *nicht* diagonalisiert, aber durch $\mathcal{B}$ (und viele andere Basen)

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T_B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stichwortverzeichnis