Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

11.06.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 9

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 18.06.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Sei X ein normierter Raum, und sei $M \subset X$ konvex und abgeschlossen. Zeigen Sie, daß dann M auch *schwach folgenabgeschlossen* ist, das heißt: wenn $(x_1, x_2, \dots) \subset M$ eine Folge ist, die in X schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert, so ist $x \in M$.

   Hinweis: Hahn–Banach

2. Beweisen Sie, daß beim Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit die Vollständigkeit des Grundraums unverzichtbar ist. Evtl. ist die Folge

$$T_i \colon c_{0,0} \to c_{0,0}, \qquad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, ix_i, 0, 0, \dots), \qquad (i \in \mathbb{N})$$

   nützlich. Hierbei ist $c_{0,0}$ der Raum der Folgen $(x_1, x_2, \dots)$ mit $x_j \in \mathbb{R}$, für die höchstens endlich viele Folgenglieder nicht Null sind.

3. Sei $1 < p < \infty$, und sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_p$ eine Familie von Folgen, und sei $x \in \ell_p$. Beweisen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) die Folge $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ konvergiert in ℓ_p schwach gegen x,

   (b) es ist $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, sowie $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| x^{(n)} \right\|_{\ell_p} < \infty$.

   Zeigen Sie weiterhin, daß diese Äquivalenz für $p = 1$ nicht gilt.

   Hinweis: Aufgabe 3 von Blatt 6

4. In einem Banachraum X seien zwei lineare abgeschlossene Operatoren T und S dicht definiert. Ihre zugehörigen Resolventen seien geschrieben als $R_\lambda(T)$ und $R_\lambda(S)$. Beweisen Sie, daß

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T)$$

   für alle $\lambda, \mu \in \rho(T)$.

   Und wenn $D(T) = D(S)$, dann ist zu zeigen, daß

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S - T) R_\lambda(S)$$

   für alle $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$.

Die Klausur findet am 26.07. nachmittags statt.