Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 3

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.

Aufgabe 3.1
Ein Ring heißt lokal, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass die Untermenge

$$R := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \text{ ungerade } \} \subseteq \mathbb{Q}$$

ein lokaler Unterring von $\mathbb{Q}$ ist und, dass 2 das maximale Ideal von R erzeugt.

(b) Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Zeigen Sie, dass jedes $x \in R \backslash \mathfrak{m}$ eine Einheit ist.

(c) Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn die Untermenge alle Nichteinheiten von R ein Ideal ist.

Aufgabe 3.2
Seien $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(n_i, n_j) = 1$ für $i \neq j$.

(a) Sei $a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es $x \in \mathbb{Z}$ gibt so, dass für $1 \leq i \leq k$

$$x \equiv a_i \text{ mod } n_i$$

gilt. Zeigen Sie, dass x eindeutig mod $n_1 \cdots n_k$ ist.

(b) Finden Sie $x \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$x \equiv 1 \text{ mod } 8, \ x \equiv 2 \text{ mod } 25 \text{ und } x \equiv 3 \text{ mod } 81$$

gilt.

Aufgabe 3.3
Seien R ein Integritätsbereich und S eine multiplikative Untermenge von R.

(a) Beweisen Sie, dass die Abbildung $i : R \to S^{-1}R$ definiert durch

$$r \mapsto r/1$$

eine Einbettung von Ringen ist.

Nun identifizieren Sie R mit dem Bild von R unter i. Sei $IS^{-1}R$ das Ideal erzeugt von $I \lhd R$ in $S^{-1}R$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Ideal von $S^{-1}R$ von der Form $IS^{-1}R$ für ein Ideal $I \lhd R$ ist.

Hinweis: Sei $J \lhd S^{-1}R$. Zeigen Sie, dass $J \cap R$ ein Ideal von R ist. Zeigen Sie, dass $(J \cap R)S^{-1}R = J$.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p} \lhd R$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ das Ideal $\mathfrak{p}S^{-1}R$ ein Primideal ist.

(d) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von $S^{-1}R$ von der Form $\mathfrak{p}S^{-1}R$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \lhd R$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ ist.

Aufgabe 3.4

(a) Zeigen Sie, dass für $p, q \in \mathbb{Q}$,

$$p + q\sqrt{-2} = 0$$

genau dann gilt, wenn $p = q = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}] := \{p + q\sqrt{-2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist.

(c) Sei $N : \mathbb{Q}[\sqrt{-2}] \to \mathbb{Q}$ die Abbildung definiert durch

$$p + q\sqrt{-2} \mapsto p^2 + 2q^2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $c, d \in \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$

$$N(cd) = N(c)N(d)$$

gilt.

(d) Wenn (R, N) ein euklidischer Ring ist, nennen wir N eine euklidische Norm. Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] := \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $N' : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert durch

$$a + b\sqrt{-2} \mapsto a^2 + 2b^2$$

eine euklidische Norm ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]\backslash\{0\}$ $n, m \in \mathbb{Z}$ existieren so, dass $N(\alpha/\beta - n + m\sqrt{-2}) \leq 3/4$ ist.

Aufgabe 3.5 Zusatzaufgabe für Interessierte
Sei $\gamma = \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \in \mathbb{C}$. Sei $\mathbb{Z}[\gamma] := \{a + b\gamma \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Einheiten $x \in \mathbb{Z}[\gamma]$

$$x\bar{x} = 1$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Einheiten von $\mathbb{Z}[\gamma]$ genau 1 und -1 sind.

Hinweis: Die Abbildung $x \mapsto x\bar{x}$ ist multiplikativ.

(b) Angenommen, dass $\phi : \mathbb{Z}[\gamma] \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ eine euklidische Norm ist. Sei $x \in \mathbb{Z}[\gamma]\backslash\{0\}$ keine Einheit und für alle Nichteinheiten $y \in \mathbb{Z}[\gamma]\backslash\{0\}$ sei $\phi(x) \leq \phi(y)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\gamma]/x\mathbb{Z}[\gamma]$ entweder 2 oder 3 Elemente hat. Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\gamma]$ kein euklidischer Ring ist.

Hinweis: Das Element γ ist eine Nullstelle des Polynoms $x^2 + x + 5 = 0$. Wenn ein Ring R 2 oder 3 Elemente hat, hat $x^2 + x + 5$ eine Nullstelle in R?

Abgabe **Montag, 19.11.2012** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
