Lineare Algebra 1

Wintersemester 2019/20
Musterlösung, Blatt **Nr. 7**

7-1 Untersuchen Sie, welche der folgenden Familien $B = (b_i)_{i=1,2,\dots,r}$ von Vektoren in K^n linear unabhängig sind, bzw. ein Erzeugendensystem ist, bzw. eine Basis ist.

(a) $K = \mathbb{R}, r = 3, n = 3, B = ((3,5,2),(0,1,1),(3,6,2))$.

(b) $K = \mathbb{R}, r = 3, n = 2, B = ((3,5),(0,1),(3,0))$.

(c) $K = \mathbb{Z}_5, r = 3, n = 3, B = (([1],[2],[3]),([0],[1],[2]),([3],[1],[4]))$.

(d) $K = \mathbb{C}, r = 2, n = 2, B = ((i, i-1),(1, 1+i))$.

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} e_2 &= b_3 - b_1\,, \\ e_3 &= b_2 - e_1 = b_2 - b_3 + b_1\,, \\ e_1 &= \tfrac{1}{3}\,(b_1 - 5e_2 - 2e_3) = \tfrac{1}{3}\,(b_1 - 5b_3 + 5b_1 - 2b_2 + 2b_3 - 2b_1) \\ &= \tfrac{4}{3}b_1 - \tfrac{2}{3}b_2 - b_3\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathbb{R}^3 = [(e_1, e_2, e_3)] \subseteq [B] \subseteq \mathbb{R}^3\,.$$

Daher ist B ein Erzeugendensystem. Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ ist B eine Basis.

(b) Weil $e_2 = b_2$ und $e_1 = \frac{1}{3}b_1$ gilt

$$\mathbb{R}^2 = [(e_1, e_2)] \subseteq [B] \subseteq \mathbb{R}^2\,.$$

Daher ist B ein Erzeugendensystem. Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ enthält jedes minimale Erzeugendensystem zwei Elemente. Somit ist B keine Basis.

(c) Es ist $3b_1 = b_3$ und damit B nicht linear unabhängig. Wegen $\dim_{\mathbb{Z}_5} \mathbb{Z}_5^3 = 3$ enthält jedes minimale Erzeugendensystem drei linear unabhängige Vektoren. Damit ist B kein Erzeugendensystem und erst recht keine Basis.

(d) Wegen $(-i)b_1 = b_2$ und $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ ist B kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis.

7-2 Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V.

(a) Bestimmen Sie für ein $i \in \{1, \dots, r\}$ alle Vektoren $v \in V$, so dass $\{b_1, \dots, b_{i-1}, v, b_{i+1}, \dots, b_n\}$ eine Basis ist.

(b) Bestimmen Sie alle Vektoren $v \in V$, so dass jeder Basisvektor b_i durch v ersetzt werden kann.

Lösung. Bezeichne für $v \in V$ und $1 \leq i \leq n$ mit B_v die Basis $(b_1, \ldots, b_{i-1}, v, b_{i+1}, \ldots, b_n)$.

(a) Sei $1 \leq i \leq n$ fest und $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$ mit $\alpha_i \neq 0$. Nach dem Austauschlemma von Steinitz ist B_v eine Basis. Sei daher nun $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$ mit $\alpha_i = 0$. Wir nehmen an, dass B_v eine Basis ist. Dann gilt $b_i \in [B_v]$. Daher gibt es Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ mit

$$b_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \beta_j b_j + \beta_i v = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n (\beta_j + \beta_i \alpha_j) b_j \,.$$

Weil B eine Basis ist, muss daher notwendig $-1 = 0$ gelten. Ein Widerspruch. Also ist B_v in diesem Fall keine Basis.

(b) Nach (a) ist die Menge derjenigen v, die die Forderung erfüllen, genau

$$\left\{ v \in V \mid v = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j \text{ mit } \alpha_j \neq 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq n \right\} .$$

7-3 Sei p eine Primzahl. Für den Körper $K = \mathbb{Z}_p$ betrachten wir den Vektorraum $V = \mathbb{Z}_p^2$.

(a) Wieviele Elemente hat der Vektorraum $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ der Endomorphismen von V?

(b) Wieviele Elemente hat die Automorphismengruppe $\mathrm{Gl}(V) = \mathrm{Aut}(V) = \{f \in \mathrm{End}(V)\,;\, f \text{ bijektiv }\}$?

Lösung. Zunächst halten wir fest, dass es p^2 Elemente in V gibt.

(a) Ein Endomorphismus $f : V \to V$ ist eindeutig durch die Bilder einer Basis, z.B. (e_1, e_2), bestimmt. D.h., es gibt für $f(e_1)$ und $f(e_2)$ je p^2 Möglichkeiten. Es folgt $|\mathrm{End}(V)| = p^4$.

(b) Ein Endomorphismus $f : V \to V$ ist genau dann ein Automorphismus, wenn $(f(e_1), f(e_2))$ eine Basis ist. Es darf also $f(e_1)$ nicht der Nullvektor sein. Dafür gibt es $p^2 - 1$ Möglichkeiten. Desweiteren darf $f(e_2)$ nicht in der linearen Hülle von $f(e_1)$ liegen. Da $|K| = |\mathbb{Z}_p| = p$ enthält die lineare Hülle von $f(e_1)$ genau p Elemente, und somit bleiben für $f(e_2)$ genau $p^2 - p$ Möglichkeiten. Es folgt $|\mathrm{Aut}(V)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$.

7-4 Sei K ein Körper, wir betrachten den Vektorraum $V = K^2$ und die kanonische Basis (e_1, e_2) mit $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (b_1, b_2)$ mit $b_1 = e_1 + \lambda e_2, b_2 = e_2$ für jedes $\lambda \in K$ eine Basis ist.

(b) Bestimmen Sie die zu der Basis B gehörende *Koordinatendarstellung* $\Phi_B : (v_1, v_2) \in K^2 \longmapsto \Phi_B(v_1, v_2) \in K^2$, also die lineare Abbildung mit $\Phi_B(b_j) = e_j, j = 1, 2$.

Lösung. (a) Wir zeigen, dass B eine linear unabhängige Familie ist. Wegen $\dim V = 2$ ist es dann automatisch eine Basis. Seien also $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ mit $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = 0$. Dann gilt offenbar $\alpha_1 e_1 + (\alpha_1 \lambda + \alpha_2) e_2 = 0$. Da (e_1, e_2) eine Basis ist, muss nun $\alpha_1 = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = 0$ gelten, also $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

(b) Nach Definition von Φ_B gilt $\Phi_B(v_1, \lambda v_1) = (v_1, 0)$ und $\Phi_B(0, v_2) = (0, v_2)$. Es folgt $\Phi_B(v_1, v_2) = \Phi_B(v_1, \lambda v_1 + v_2 - \lambda v_1) = \Phi_B(v_1, \lambda v_1) + \Phi_B(0, v_2) - \Phi_B(0, \lambda v_1) = (v_1, 0) + (0, v_2) - (0, \lambda v_1) = (v_1, v_2 - \lambda v_1)$.