Differentialgleichungen

Eine einfache Differentialgleichung löst man bereits beim Integrieren in der Oberstufe. Sie hat die Form $y'(x) = f(x)$ und y wird gesucht.

Beispiel:

$y'(x) = 6x^2 - 4x + 1$

$\Rightarrow y(x) = \frac{6}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + x + c$

$y(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + c$

Ist noch eine Anfangsbedingung gegeben, so kann man aus der allgemeinen Lösung (oben) die Lösung des Anfangswertproblems bestimmen.

Gilt z.B. im oberen Beispiel $y(0) = 1$, dann erhält man c durch Einsetzten der Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung:

$y(0) = 0 - 0 + 0 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Damit wäre $y(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ die Lösung des Anfangswertproblems

$y'(x) = 6x^2 - 4x + 1$ mit $y(0) = 1$.

Eine weitere bekannte Differentialgleichung ergibt sich bei Wachstumsprozessen, wo der Zuwachs proportional zum Funktionswert ist:

$y' = a \cdot y$ (Kurzschreibweise statt $y'(x) = a \cdot y(x)$)

Diese löst man wie folgt:

$y' = a \cdot y$

Man ersetzt y' durch $\frac{dy}{dx}$ und danach separiert man alle Terme mit y auf einer Seite und alle mit x auf der anderen Seite (Trennung der Veränderlicher):

$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \qquad | \cdot dx$

$dy = a \cdot y \cdot dx \qquad | : y$

$\frac{dy}{y} = a \cdot dx \qquad | \int$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int a\, dx$

$\ln(y) = a \cdot x + K \qquad | e^{()}$

(K ist die Integrationskonstante)

$y = e^{K + ax} = e^K \cdot e^{ax}$

Wir schreiben um und setzen $c = e^K$

$\Rightarrow y = c \cdot e^{ax}$

Nun könne man das Anfangswertproblem

$y' = -y$ ($a = -1$)

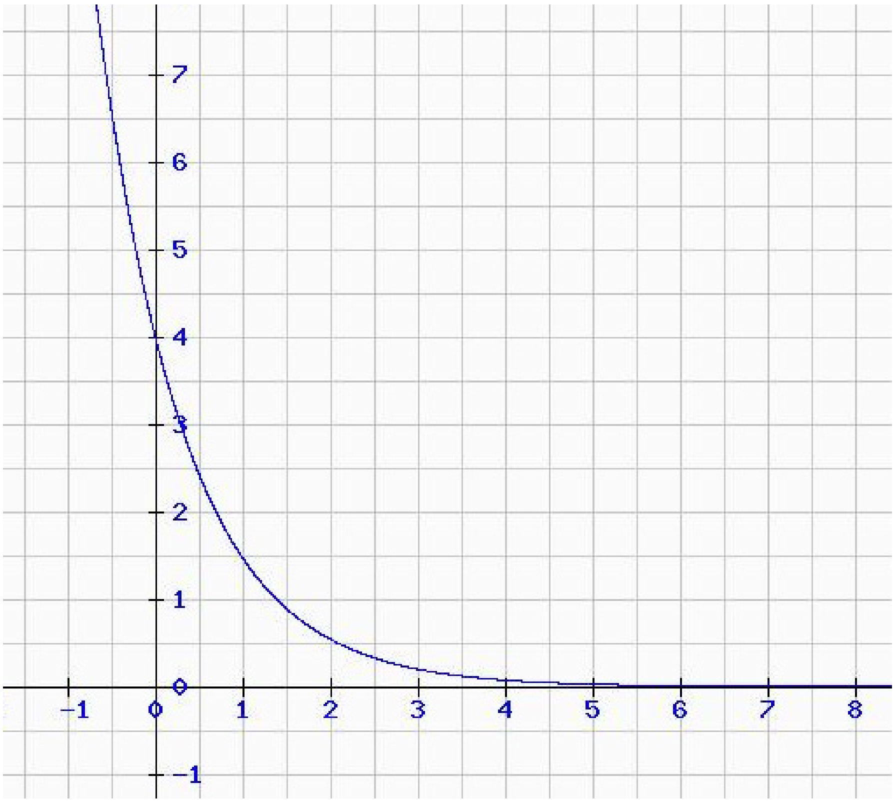
$y(0) = 4$

lösen: $y(x) = c \cdot e^{-x}$ wäre die allgemeine Lösung. Hier kann man die Anfangsbedingung einsetzen:

$y(0) = c \cdot e^{0} = 4 \Leftrightarrow c = 4$

Damit wäre $y(x) = 4e^{-x}$ Lösung des Anfangswertproblems.

Es folgt der Graph dieser Lösung:



Weiteres Beispiel:

$y' - 2y = x$

Hier handelt es sich um eine sogenannte inhomogene Differenzialgleichung, da neben y und y´ auch weitere nur von x abhängige Ausdrücke vorhanden sind (es könnten auch Konstanten vorhanden sein). Allgemein wäre

$$a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = f(x)$$

eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (mit Konstanten Koeffizienten a und b, die allgemein auch von x abhängen könnten). Für $f(x) = 0$ wäre diese Differentialgleichung homogen, für $f(x) \neq 0$ inhomogen.

Wie löst man nun die Differentialgleichung?

Man löst als erstes die homogene Differentialgleichung, also

$y' - 2y = 0 \quad | + 2y$

$y' = 2y$

$\frac{dy}{dx} = 2y \quad | \cdot dx$

$dy = 2y\,dx \quad | : y$

$\frac{dy}{y} = 2dx \quad | \int$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 2dx$

$\ln(y) = 2x + K \quad | \; e^{(\,)}$

$y = e^{2x+K} = c \cdot e^{2x}$

Also haben wir die homogene Lösung $y_h(x) = c \cdot e^{2x}$ gefunden. Nun bestimmen wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (DGL), d.h. von

$y' - 2y = x.$

Dazu können wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite machen. Auf der rechten Seite steht ein Polynom 1. Grades. Damit setzen wir auch ein Polynom 1. Grades an:

$y(x) = ax + b$

$y'(x) = a$

In der inhomogene DGL einsetzen:

$a - 2 \cdot (ax + b) = x$

$a - 2ax - 2b = x$

$-2ax + a - 2b = x$

Nun könnte man 2 verschiedene Werte für x einsetzen (z.B. $x = 0$ und $x = 1$), womit wir ein lineares Gleichungssystem für a und b erhalten, oder man macht einen Koeffizientenvergleich.

Vor x steht auf der rechten Seite eine 1:

$-2a = 1$

Es steht keine „Zahl ohne x“ da, d.h. es ist keine Konstante auf der rechten Seite vorhanden:

$a - 2b = 0$

Damit haben wir die Gleichungen aufgestellt:

(1) $-2a = 1$

(2) $a - 2b = 0$

Aus (1) folgt: $a = -\frac{1}{2}$

In (2) einsetzen:

$-\frac{1}{2} - 2b = 0 \mid + \frac{1}{2}$

$-2b = \frac{1}{2} \mid : (-2)$

$b = -\frac{1}{4}$

Damit ist eine spezielle inhomogene Lösung durch $y_p(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ gegeben. Das p steht für partikulär (da dies eine partikuläre Lösung ist).

Nun ergibt sich die allgemeine Lösung aus der Summe der homogenen Gleichung und der speziellen bzw. partikulären Lösung:

$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

$y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + c \cdot e^{2x}$

Dies ist die allgemeine Lösung der obigen DGL.

Wenn nun ein Anfangswert bzw. eine Anfangsbedingung gegeben ist, z.B. $y(0) = 2$, dann kann man die Lösung des Anfangswertproblems

$y' - 2y = x$

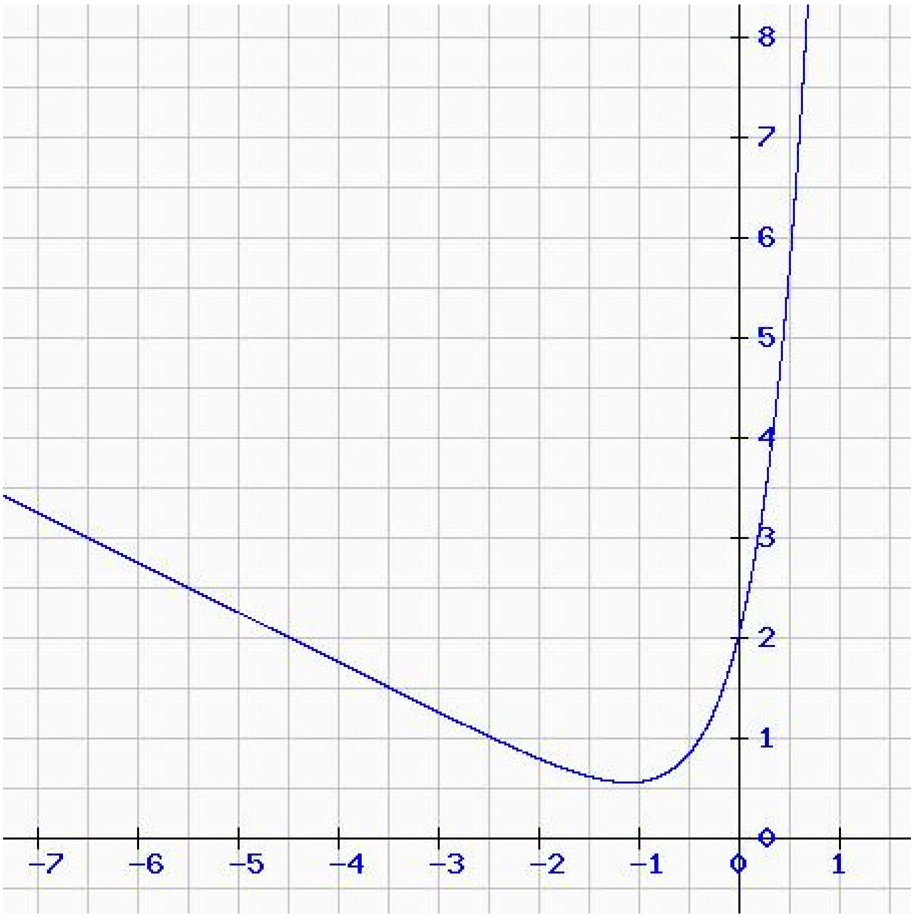
$y(0) = 2$

bestimmen, in dem man die Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung einsetzt:

$y(0) = -1/2 \cdot 0 \ -1/4 + c \cdot e^0 = 2 \Leftrightarrow c = 2 + \frac{1}{4} = 9/4$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + 9/4e^{2x}$

Es folgt der Graph von y:



Eine Möglichkeit zur Bestimmung der partikulären Lösung wäre auch die Methode der Variation der Konstanten.

Wir zeigen diese Möglichkeit im Beispiel, aber allgemein wäre sie hier zu aufwändig:

Wir verwenden die homogene Lösung und gehen davon aus, dass c von x abhängt. Die Ansatzfunktion setzen wir dann in der inhomogenen DGL ein (wir müssen zuvor nur y´ berechnen):

$y(x) = c(x) \cdot e^{2x}$

$y'(x) = c'(x) \cdot e^{2x} + 2 \cdot c(x) \cdot e^{2x}$ (Produktregel)

In DGL eigesetzt:

$y'(x) - 2 \cdot y(x) = x$

$c'(x) \cdot e^{2x} + 2 \cdot c(x) \cdot e^{2x} - 2 \cdot c(x) \cdot e^{2x} = x$

$c'(x) \cdot e^{2x} = x \qquad | : e^{2x}$ bzw. $\cdot e^{-2x}$

$c'(x) = x \cdot e^{-2x}$

Nun würde man die partielle Integration benötigen (bzw. Teilintegration, siehe http://mathe-total.de/Analysis-Skript/Analysis-Integralrechnung.pdf S. 13 (73)) und wir würden $c(x) = (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4})e^{-2x}$ (ohne Integrationskonstante) erhalten.

In den Ansatz eingesetzt ergibt sich dann:

$y(x) = (- ½ x - ¼) \cdot e^{-2x} \cdot e^{2x} \quad (= y_p(x))$

$= - ½ x - ¼$

Es folgt noch ein **Beispiel** für beschränktes Wachstum:

$y' = - 1/10 \cdot (y – 20)$

$y(0) = 80$

Hier könnte man auch $g(x) = y(x) – 20$ substituieren und man würde über die inhomogene Gleichung eine homogene erhalten. Hier wäre dann

$y(x) = g(x) + 20$

und

$g'(x) = y'(x)$.

Alles in die DGL einsetzen:

$g'(x) = -1/10\, g(x)$

Dies würde $g(x) = c \cdot e^{-1/10\, x}$ ergeben.

Und beim Zurücksubstituieren ($y(x) = g(x) + 20$) erhält man die Lösung:

$y(x) = 20 + c \cdot e^{-1/10x}$

Oder man bestimmt die Lösung in zwei Schichten (erst homogene Lösung und dann die partikuläre Lösung):

$y' = - \frac{1}{10} y + 2 \qquad | + \frac{1}{10} y$

$y' + \frac{1}{10} y = 2 \qquad (1)$

Homogene Gleichung: $y' + \frac{1}{10} y = 0$

$\Rightarrow y(x) = c \cdot e^{-1/10x} \quad (= y_p(x))$

Ansatz für partikuläre Lösung $y(x) = a$ (Polynom 0. Grades, da rechts bei (1) ein Polynom 0. Grades steht) in inhomogene DGL einsetzen:

$0 + 1/10 \cdot a = 20$

$a = 20$

Also $y_p(x) = 20$

$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = 20 + c \cdot e^{-1/10x}$

Zum Schluss setzen wir die Anfangsbedingung in die Lösung ein, um c zu bestimmen:

$y(0) = 20 + c \cdot e^0 = 80 \quad |-20$

$c = 60$

Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblem gefunden: $y(x) = 20 + 60e^{-1/10x}$

Hierzu kann man sich auch eine Anwendung vorstellen. Ein Tee hat eine Temperatur von 80°C und die Umgebung hat eine Temperatur von 20°C. Jetzt kühlt der Tee ab. Zu so einer Art Funktion gab es auch eine Abituraufgabe in Hessen (http://www.mathe-total.de/new/Abituraufgabe-Analysis-2011-Hessen.pdf).

Es folgt der Graph: