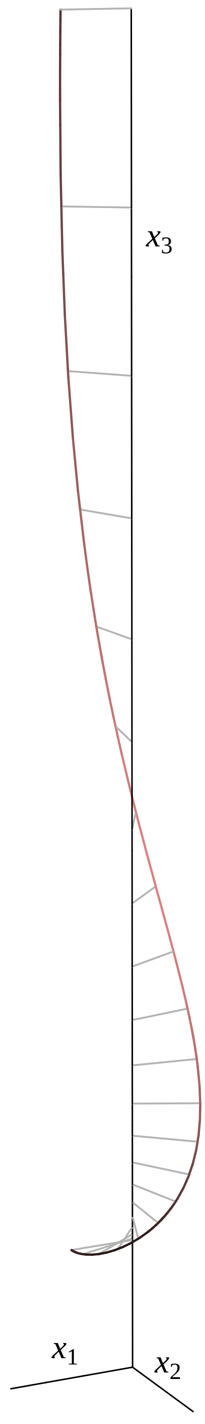
Aufgaben der Nachklausur vom 27.9.2010
Prüfungsstoff: Analysis II

1. Berechnen Sie die Länge der Kurve $\vec{x} : [0,3] \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\vec{x}\,(t) = (\cos(2t)\,, \sin(2t)\,, 2\cosh(t))\,.$$

Hinweis: $\cosh(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right)$.



3. Wir betrachten $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{Q}\}$.

   (a) Wie ist „offene Überdeckung" definiert?

   (b) Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Ist $\mathcal{U} := \left\{B_{\frac{1}{n}}(z_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine (offene) Überdeckung von $\mathbb{C}$?
   Hinweis: $B_\varepsilon(z_*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_*| < \varepsilon\}$.

4. Ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

stetig in $(0,0)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

7. Berechnen Sie alle Lösungen y von

$$y''''(t) + 2y''(t) + y(t) = te^t.$$

8. Sei A eine $n \times n$-Matrix.

   (a) Wie definiert man $\exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$?

   (b) Berechnen Sie $\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

10. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(1 - 4yz - 3z^2\right).$$

Das Taylorpolynom zu f von Ordnung 2 um $(0,0,0)$ ist

$$t_{2,(0,0,0)}(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 - 4yz - 3z^2.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $(0,0,0)$ ein stationärer Punkt ist.

   (b) Zeigen Sie, dass auch $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ein stationärer Punkt ist und berechnen Sie den dritten stationären Punkt.

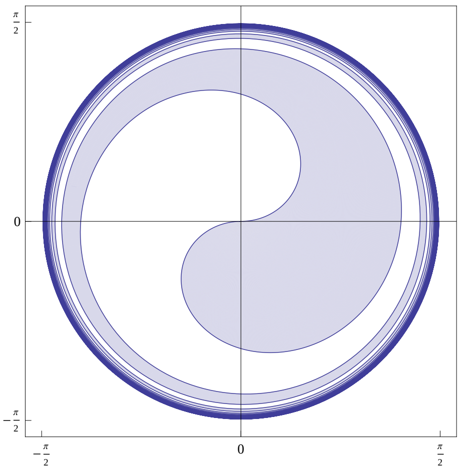
   (c) Hat f ein Maximum in $(0,0,0)$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. Das hier dargestellte Gebiet G wird definiert durch

$$(x,y) \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Es gibt } r \in \mathbb{R}^{+} \text{ und } \varphi \in \mathbb{R} \text{ mit} \\ \arctan(\varphi) < r < \arctan(\varphi + \pi) \\ \text{und } x = r\cos(\varphi)\,,\ y = r\sin(\varphi)\,. \end{array} \right.$$

Der kleinste Kreis, der G enthält, ist

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < \frac{1}{4}\pi^2 \right\}.$$



(a) Wie definiert man „offen“?

(b) Ist G offen? Eine kurze Begründung reicht.

(c) Beschreiben Sie (ohne Beweis) die abgeschlossene Hülle $\overline{G}$.

5. Unten sehen Sie die Skizze einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die folgende Bedingung erfüllt:

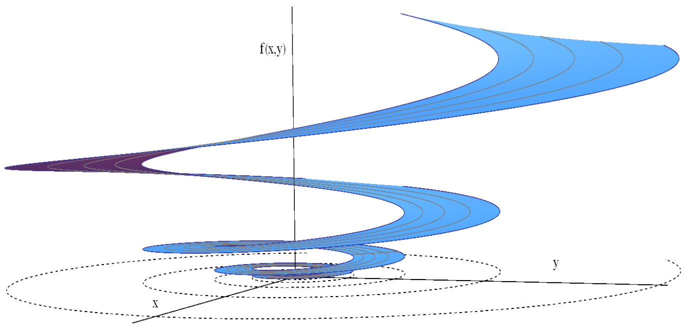
$$0 \leq f(x,y) \leq x^2 + y^2 \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wählen und begründen Sie die richtige Aussage:

i. f ist differenzierbar in $(0,0)$;

ii. f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$;

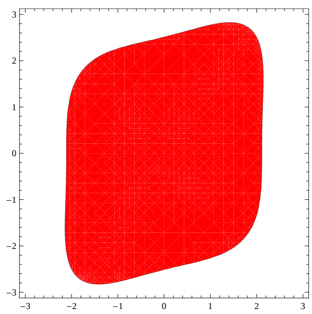
iii. Die Voraussetzungen reichen nicht aus, um Differenzierbarkeit zu beweisen oder zu widerlegen.



6. Berechnen Sie den Punkt

$$(x_0, y_0) \in \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x^4 - xy^3 + y^4 \leq 40 \right\},$$

an dem y_0 maximal wird.



9. Der Rand der nebenstehenden Figur wird beschrieben durch die Kurve $b : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mittels

$$b(t) = (\sin(4t)\cos(t)\,, \sin(4t)\sin(t))\,.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebietes, das durch diese Kurve beschränkt wird.

Hinweis: Nehmen Sie ein Blatt der Blume und multiplizieren Sie das Ergebnis mit 8.