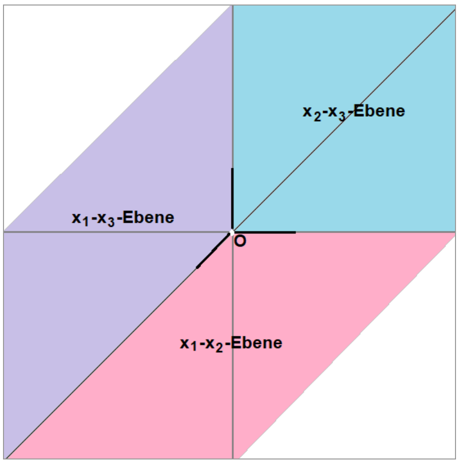
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Ebenen

Aufgabe: Stelle die x_1-x_2-, x_1-x_3-, x_2-x_3-Grundebenen des kartesischen x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems als Gleichungen von Ebenen in Parameter-, Normalen- und Koordinatenform dar.



Lösung: I. In der Vektorrechnung können Ebenen im dreidimensionalen reellen Vektorraum auf verschiedene Art und Weise dargestellt werden. Für eine Ebene E gelten somit die Darstellungsformen:

1) E: $\vec{x} = \vec{p} + r\vec{v} + s\vec{w}$ (Parameterform; mit Stützvektor, Spannvektoren, reellen Parametern)

2) E: $\vec{n}\left(\vec{x} - \vec{p}\right) = 0$ (Normalenform; mit Normalenvektor senkrecht zur Ebene, Stützvektor)

3) E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (Koordinatenform; mit Normalenvektor $(a\ b\ c)^T$, reeller Zahl d)

(unter Beachtung des Skalar- und Kreuzprodukts zwischen den Vektoren).

II. Der dreidimensionale reelle Vektorraum wird (linearkombinatorisch) erzeugt durch die drei, paarweise senkrecht zueinanderstehenden Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Jeweils zwei dieser Vektoren können daher zur Beschreibung einer der Grundebenen des Koordinatensystems herangezogen werden. Und zwar gelten mit dem Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems als Stützvektor die folgenden Parameterdarstellungen der Grundebenen:

x_1-x_2-Grundebene: E_{12}: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

x_1-x_3-Grundebene: E_{13}: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

x_2-x_3-Grundebene: E_{23}: $\vec{x} = r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

III. Ein Normalenvektor von zwei der Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist jeweils der dritte. Somit ergeben sich als <u>Normalenformen</u> der Grundebenen:

x_1-x_2-Grundebene: E_{12}: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

x_1-x_3-Grundebene: E_{13}: $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

x_2-x_3-Grundebene: E_{23}: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$.

IV. Ausrechnen der Normalenformen der Grundebenen mit dem Skalarprodukt ergibt die <u>Koordinatenformen</u>:

x_1-x_2-Grundebene: E_{12}: $x_3 = 0$

x_1-x_3-Grundebene: E_{13}: $x_2 = 0$

x_2-x_3-Grundebene: E_{23}: $x_1 = 0$.

www.michael-buhlmann.de / 03.2020 / Aufgabe 1001