XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Gara Interregionale

Categoria Junior 1 – Lezione 1

Problema 1

Proprietà delle potenze e cifre significative per somme, prodotti e quozienti

$10^3 \cdot 10^5 = 10^8$

$(10^3)^3 = 10^9$

$10^8 + 10^2 \simeq 10^8$ (in quanto 10^2 è trascurabile rispetto a 10^8)

$\frac{10^{20}}{10^{-11} \cdot 10^{24}} = 10^{20-(-11+24)} = 10^7$

$25.764 + 113.22 = 138.98$

$2.347 + 3.15 \simeq 5.50$

$3.2576 \cdot 10^3 + 1.1322 \cdot 10^2 = 3.3708 \cdot 10^3$

$3.567 \cdot 10^3 \cdot 2.56 \cdot 10^4 \simeq 9.13 \cdot 10^7$

$\frac{25.764}{113.22} \simeq 0.22756 = 2.2756 \cdot 10^{-1}$

$\frac{25.764}{13.22} \simeq 1.949$

$\frac{3.274 \cdot 10^5}{2.22 \cdot 10^2} \simeq 1.47 \cdot 10^3$

Problema 2

Considerate un'ellisse con semiassi **a** = 7.02 UA e **b** = 5.52 UA. Calcolate l'eccentricità dell'ellisse e la distanza tra i due fuochi.

Soluzione

$$\mathbf{e} = \sqrt{1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{30.5\ UA^2}{49.3\ UA^2}\right)} = \sqrt{1-0.619} = 0.617$$

$$\mathbf{D = 2c} = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{49.3\ UA^2 - 30.5\ UA^2} = 8.67\ UA$$

Problema 3
Il pianeta Nettuno ha un periodo orbitale di 164.79 anni; trasformatene il valore in secondi, esprimendo il risultato con il corretto numero di cifre significative.

Soluzione:
Un anno terrestre $\simeq$ 365.26 giorni

Per trasformare i giorni in secondi moltiplichiamo questo valore per 24 (ore), per 60 (min), per 60 (sec)

da cui:

$$365.26 \text{ giorni} \simeq 31.558 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Quindi possiamo esprimere il periodo **T** di Nettuno in secondi:

$$T \simeq 164.79 \text{ anni} \simeq 164.79 \cdot 31.558 \cdot 10^6 \text{ s} \simeq 5.2005 \cdot 10^9 \text{ s}$$

Problema 4

Calcolate la velocità orbitale media della Luna intorno alla Terra in km/s. Assumete l'orbita della Luna circolare con raggio pari al semiasse maggiore. Trascurate la massa della Luna rispetto a quella della Terra.

Soluzione:

Per calcolare la velocità orbitale media della Luna $\boldsymbol{v_{mL}}$ utilizziamo la formula:

$$v_{mL} = \frac{s}{t} = \frac{O_L\ (lunghezza\ dell'orbita\ lunare)}{T_L\ (periodo\ di\ rivoluzione\ della\ Luna)}$$

Detto $\boldsymbol{a_L}$ il semiasse maggiore dell'orbita, calcoliamo la lunghezza $\boldsymbol{O_L}$ dell'orbita lunare:

$$O_L = 2\,\pi\,a_L \simeq 2\,\pi\,\cdot 384.4\,\cdot\,10^3\,km \simeq 2.415\,\cdot\,10^6\,km$$

Calcoliamo il periodo di rivoluzione della Luna, o mese siderale, T_L in secondi:

$$T_L \simeq 27.322\ giorni \cdot 24\ \cdot 60\ \cdot 60\ \simeq 23.606\ \cdot 10^5\ s$$

quindi:

$$v_{mL} = \frac{s}{t} = \frac{O_L}{T_L} \simeq \frac{2.415 \cdot 10^6\ km}{23.606 \cdot 10^5\ s} \simeq 1.023\ \frac{km}{s}$$

Problema 5

Calcolate la velocità orbitale media della Terra intorno al Sole in km/s. Assumete l'orbita circolare con raggio pari al semiasse maggiore. Trascurate la massa della Terra rispetto a quella del Sole.

Soluzione:

Per calcolare la velocità orbitale media della Terra $\boldsymbol{v_{mT}}$ utilizziamo la formula:

$$v_{mT} = \frac{s}{t} = \frac{O_T\,(lunghezza\ dell'orbita\ della\ Terra)}{T_T\,(periodo\ di\ rivoluzione\ della\ Terra)}$$

Detto $\boldsymbol{a_T}$ il semiasse maggiore dell'orbita, calcoliamo la lunghezza $\boldsymbol{O_T}$ dell'orbita della Terra:

$$O_T = 2\,\pi\,a_T \simeq 2\,\pi\, \cdot 149.6\, \cdot\, 10^6\ km \simeq 940.0\, \cdot\, 10^6\ km$$

Calcoliamo il periodo di rivoluzione della Terra, o anno siderale, T_T in secondi:

$$T_T \simeq 365.26\ giorni \cdot 24\ \cdot 60\ \cdot 60\ \simeq 31.558\ \cdot 10^6\ s$$

quindi:

$$v_{mT} = \frac{s}{t} = \frac{O_T}{T_T} \simeq \frac{940.0 \cdot 10^6\ km}{31.558 \cdot 10^6\ s} \simeq 29.79\ \frac{km}{s}$$

Problema 6

Un satellite artificiale descrive un'orbita circolare ad un'altezza di 400 km dalla superficie terrestre. Calcolate il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione:

Dalla III legge di Keplero, il periodo di un corpo di massa trascurabile attorno alla Terra è dato dalla relazione:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}}$$

Detto R_T il raggio della Terra e **h** l'altezza del satellite il semiasse maggiore **a** dell'orbita del satellite vale:

$$a = R_T + h = 6378 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6778 \text{ km}$$

si avrà quindi:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot (6778 \cdot 10^3\, m)^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\, \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\, kg}} \simeq \sqrt{3.084 \cdot 10^7\ s^2} \simeq 5.554 \cdot 10^3\, s$$

$$\simeq 92.57\, m \simeq 1\, h\ \ 33\, m$$

Problema 7

Tra il 21 Marzo e il 22 Settembre trascorrono 186 giorni, mentre tra il 23 Settembre e il 20 Marzo ne trascorrono 179. Eppure in ognuno dei due intervalli di tempo la Terra percorre esattamente metà della sua orbita intorno al Sole. Date una spiegazione del fenomeno.

Soluzione:

Dalla II legge di Keplero sappiamo che la velocità con cui un pianeta si muove lungo la sua orbita intorno al Sole dipende dalla distanza ed è massima al perielio e minima all'afelio. Nel periodo 21 marzo - 22 settembre è compreso l'istante in cui la Terra passa all'afelio (inizio luglio), quindi in questo intervallo la Terra si muove più lentamente di quanto non faccia nell'altro intervallo, quello invernale, in cui è compreso l'istante (inizio gennaio) in cui passa al perielio.

Problema 8

Un asteroide dista dal Sole 2.978 UA al perielio e 9.022 UA all'afelio. Determinate il semiasse maggiore, in UA e in km, e l'eccentricità dell'orbita. Calcolate il periodo di rivoluzione dell'asteroide. Stimate di quanto cambierebbe il periodo se l'eccentricità dell'orbita si dimezzasse.

Soluzione:

Dette $\mathbf{D_a}$ e $\mathbf{D_p}$ le distanze all'afelio e al perielio, il semiasse maggiore **a** dell'orbita dell'asteroide è dato da:

$$a = \frac{D_p + D_a}{2} = \frac{2.978\ UA + 9.022\ UA}{2} = 6.000\ UA \simeq 897.6 \cdot 10^6\ km$$

L'eccentricità **e** può essere calcolata dalla formula: $D_a = a\,(1+e)$, da cui ricaviamo:

$$e = \frac{D_a}{a} - 1 = \frac{9.022\ UA}{6.000\ UA} - 1 \simeq 0.5037$$

Il periodo di rivoluzione **T** in anni si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$T = \sqrt{a^3} \simeq \sqrt{6.000^3} \simeq 14.70 \text{ anni}$$

Poiché nella formula del calcolo del periodo l'eccentricità non compare, segue che il periodo di rivoluzione non dipende dall'eccentricità dell'orbita, ma solo dal semiasse maggiore.

Problema 9

Può una cometa avere un periodo di rivoluzione di un anno e una distanza all'afelio maggiore di quella media di Marte? Se sì, ricavare il valore minimo dell'eccentricità dell'orbita.

Soluzione:

Il periodo di rivoluzione T della cometa è pari a un anno; per calcolare il semiasse maggiore a_{cometa} dell'orbita della cometa utilizziamo quindi la formula:

$$a_{cometa} = \sqrt[3]{T^2} = 1\ UA$$

Dai dati forniti nella Tabella vediamo che il semiasse maggiore dell'orbita di Marte vale:

$$a_{Marte} \simeq 1.523\ UA$$

Detta **e** l'eccentricità dell'orbita, la distanza di un corpo all'afelio è data dalla relazione:

$$D_{afelio} = a\ (1+e)$$

Quindi affinché la cometa abbia una distanza all'afelio maggiore di quella media di Marte deve essere:

$$a_{cometa}\ (1+e) = 1\ \text{UA}\ (1+\text{e}) > 1.523\ UA$$

da cui:

$$(1+e) > 1.523$$

e infine:

$$e > 1.523 - 1$$

$$e > 0.523$$

Problema 10

Un asteroide ha semiasse maggiore dell'orbita a = $329.7 \cdot 10^6$ km ed eccentricità e = 0.221. Una cometa dista dal Sole 3.604 UA all'afelio e 0.804 UA al perielio. Quale dei due corpi ha periodo di rivoluzione maggiore?

Soluzione:

Il semiasse maggiore $\mathbf{a_a}$ dell'orbita dell'asteroide vale:

$$a_a = 329.7 \cdot 10^6 \text{ km} \simeq 2.204 \text{ UA}$$

Il suo periodo di rivoluzione **T** in anni si ottiene dalla relazione: $T = \sqrt{a^3}$

$$T = \sqrt{{a_a}^3} \simeq \sqrt{2.204^3} \simeq \sqrt{10.71} \simeq 3.272 \; anni$$

Il semiasse maggiore a_c dell'orbita della cometa si può ricavare dalla relazione:

$$a_c = \frac{D_a + D_p}{2} \simeq 2.204 \; UA$$

Poiché il semiasse maggiore dell'orbita dei due corpi è uguale, anche il periodo di rivoluzione è uguale e vale 3.272 anni.

Problema 11

L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore a = 7.143 UA e semiasse minore b = 2.635 UA. Dette V_A e V_P le velocità orbitali all'afelio e al perielio, si determini il periodo orbitale dell'asteroide e il valore del rapporto $\frac{V_A}{V_P}$

Soluzione:

Ricaviamo il periodo orbitale **T** in anni dell'asteroide dalla III legge di Keplero: $T = \sqrt{a^3}$

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{364.5} \simeq 19.09 \; anni$$

Dalla II legge di Keplero sappiamo che:

$$V_A D_A = V_P D_P$$

quindi:

$$\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a\,(1-e)}{a\,(1+e)} = \frac{1-e}{1+e}$$

L'eccentricità **e** si ricava dalla formula: $e = \sqrt{1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{6.943\ UA^2}{51.02\ UA^2}\right)} \simeq 0.9295$

Da cui otteniamo: $\frac{V_A}{V_P} = \frac{D_P}{D_A} = \frac{a\,(1-e)}{a\,(1+e)} = \frac{1-e}{1+e} \simeq 0.03654 = 3.654 \cdot 10^{-2}$

Notiamo che il rapporto delle velocità dipende unicamente dall'eccentricità dell'orbita.

Problema 12

L'ultimo passaggio della cometa di Halley al perielio è avvenuto il 9 febbraio 1986. Questa cometa descrive un'orbita ellittica intorno al Sole con semiasse maggiore di 17.83 UA. Calcolate il suo periodo di rivoluzione e l'anno del ritorno al perielio.

Soluzione:

Poiché la cometa di Halley orbita intorno al Sole il suo periodo di rivoluzione **T** in anni vale:

$$\mathrm{T} = \sqrt{a^3} = \sqrt{17.83^3} \simeq 75.29\ anni$$

L'anno **A** del ritorno al perielio (arrotondando all'intero più prossimo) sarà quindi:

$$\mathrm{A} = 1986 + 75 = 2061$$

Nota:

Il periodo orbitale della cometa di Halley non è perfettamente costante a causa dell'influenza gravitazionale dei pianeti. La data attualmente prevista per il prossimo passaggio al perielio è il 29 luglio 2061.

Problema 13

Un satellite artificiale orbita attorno alla Terra su un'orbita ellittica con semiassi maggiore e minore: $\boldsymbol{a} = 15.22 \cdot 10^3\ km$ e $\boldsymbol{b} = 13.21 \cdot 10^3\ km$. Calcolate la distanza minima del satellite al perigeo e all'apogeo rispetto alla superficie della Terra e il suo periodo di rivoluzione.

Soluzione

L'eccentricità **e** dell'orbita del satellite è data dalla relazione:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{174.5 \cdot 10^6\ km^2}{231.6 \cdot 10^6\ km^2}\right)} \simeq 0.4965$$

La distanza del satellite dal centro della Terra al perigeo $\mathbf{D_P}$ e all'apogeo $\mathbf{D_A}$ vale quindi:

$$D_P = a\,(1 - e) \simeq 7663\ \mathrm{km} \qquad D_A = a\,(1 + e) \simeq 227.8\ \cdot 10^2\ \mathrm{km}$$

La distanza minima di un satellite dalla superficie terrestre si ha quando un osservatore lo vede transitare allo zenith. Quindi per ottenere la distanza minima nei due casi ($\mathbf{H_P}$ e $\mathbf{H_A}$) basta sottrarre il raggio della Terra alle distanze all'afelio e al perielio:

$$H_P = D_p - R_T \simeq 1285\ km \qquad H_A = D_A - R_T \simeq 164.0\ \cdot 10^2\ km$$

Applicando la III legge di Keplero generalizzata e considerando che la massa del satellite è ovviamente trascurabile rispetto a quella della Terra, il periodo di rivoluzione **T** è dato da:

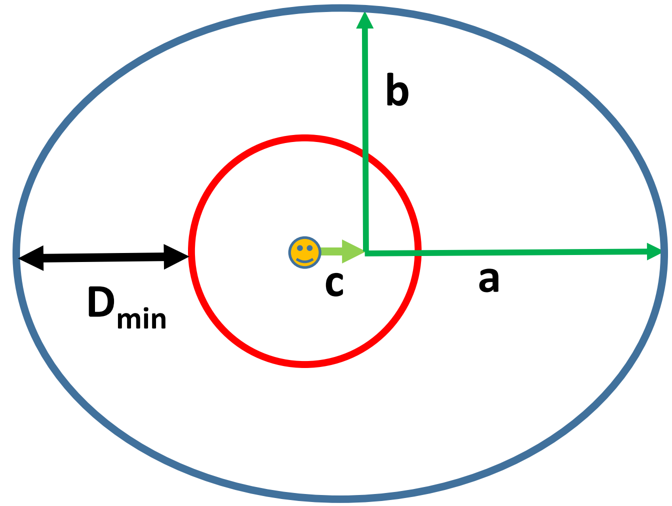
$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M_T}} \simeq$$

$$\sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.526 \cdot 10^{21}\ m^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ kg}} \simeq \sqrt{3.493\ \cdot\ 10^8\ s^2} \simeq 1.869 \cdot\ 10^4\ s \simeq 311.5\ minuti\ \simeq 5\ h\ \ 12\ minuti$$

Problema 14

L'Asteroide 704 "Interamnia", scoperto nel 1910, percorre intorno al Sole un'orbita stabile in prossimità dell'eclittica con eccentricità e = 0.151 e periodo T = 5.35 anni. Si dica se l'asteroide costituisce una minaccia per la Terra, stimando la sua distanza minima dal nostro pianeta. Si assuma per la Terra un'orbita circolare.

Soluzione:



Il semiasse maggiore **a** in UA dell'orbita di 704 Interamnia si trova applicando la III legge di Keplero: a^3 (UA) = T^2 (anni):

$$\boldsymbol{a} = \sqrt[3]{5.35^2} \simeq 3.06\ UA$$

Il semiasse minore dell'orbita si ricava dalla relazione:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \simeq 3.06\ UA \cdot \sqrt{1 - 0.0228} \simeq 3.02\ UA$$

La posizione del Sole rispetto al centro dell'ellisse è data da:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \simeq \sqrt{3.06^2 - 3.02^2} \simeq 0.493\ UA$$

L'orbita dell'asteroide (sul piano dell'eclittica e stabile) si trova ben all'esterno di quella della Terra (vedere disegno qui sopra)

La distanza minima D_{min} dalla Terra è data dalla distanza di Interamnia dal Sole al perielio meno la distanza della Terra dal Sole:

$$D_{min} = D_p - 1\ UA = a\,(1 - e) - 1\ UA \simeq 3.06\ UA\,(1 - 0.151) - 1\ UA \simeq 1.60\ UA$$

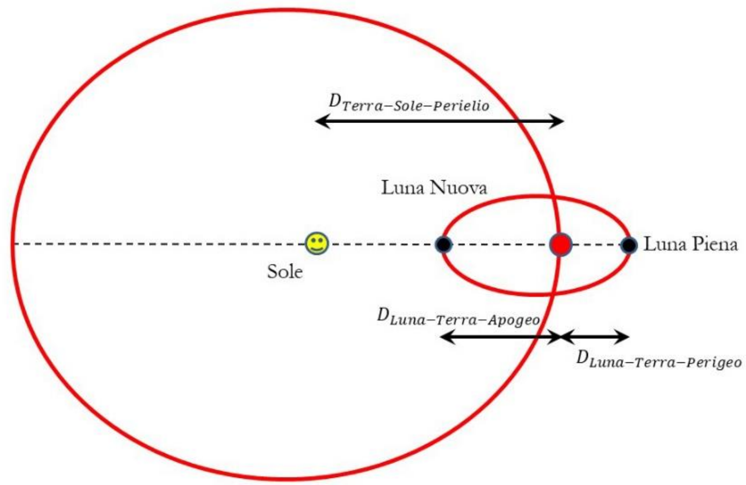
L'asteroide quindi non costituisce una minaccia per la Terra.

Problema 15

Calcolate, trascurando l'inclinazione dell'orbita lunare sull'eclittica, la distanza minima della Luna Piena e della Luna Nuova dal Sole. Per le eccentricità si assumano i valori: $e_L = 0.05490$ per l'orbita della Luna attorno alla Terra ed $e_T = 0.01671$ per l'orbita della Terra attorno al Sole.

Soluzione:

La Luna è Piena quando è opposta al Sole rispetto alla Terra: la sua distanza minima dal Sole si avrà quando la Terra è al perielio e la Luna Piena al perigeo (vedere il disegno a destra non in scala).



Quindi :

$$D_{\text{mimLunaPiena-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} + D_{\text{LPerigeo}}$$

$$D_{\text{TPerielio}} = a_T\,(1- e_T) \simeq 147.1 \cdot 10^6\ km$$

$$D_{\text{LPerigeo}} = a_L\,(1- e_L) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

$$D_{\text{mimLunaPiena-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} + D_{\text{LPerigeo}} \simeq 147.5 \cdot 10^6\ km$$

La Luna è Nuova quando si trova nella stessa direzione e dalla stessa parte del Sole rispetto alla Terra: la sua distanza minima dal Sole si avrà quando la Terra è al perielio e la Luna all'apogeo.

Quindi:

$$D_{\text{mimLunaNuova-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} - D_{\text{LApogeo}}$$

$$D_{\text{LApogeo}} = a_L\,(1+ e_L) \simeq 405.5 \cdot 10^3\ km$$

$$D_{\text{mimLunaNuova-Sole}} = D_{\text{TPerielio}} - D_{\text{LApogeo}} \simeq 146.7 \cdot 10^6\ km$$