

Percezione del movimento

Trattiamo la tematica della percezione del movimento attraverso i seguenti punti:

- flusso ottico
- analisi lineare e filtraggio spazio-temporale (Metodi del gradiente)
- elaborazione corticale del movimento
- modelli architetturali neuromorfi

1 Introduzione

Introduciamo due concetti fondamentali

- Il **moto**, in generale, può essere visto come una caratteristica spazio-temporale della distribuzione della luminosità in una scena.
- La **percezione**, in generale può essere vista come ricerca di caratteristiche del primo ordine, come la posizione nello spazio e nel tempo.

Esistono due meccanismi che guidano la visione

- A corto raggio
- A lungo raggio

Il primo si riferisce a spostamenti spaziali inferiori ai 15 primi di grado in un intervallo di tempo che non supera gli 80 millisecondi, da cui deriva "l'effetto cinema" con la percezione di un apparente movimento continuo. A tal proposito si parla anche di **visione a basso livello** (Early Vision). Il secondo meccanismo invece va alla ricerca di corrispondenze in oggetti che non sono puntuali (spigoli, angoli,..) e produce spostamenti che possono arrivare anche a parecchi gradi, comunque sempre entro i 300 millisecondi. Si parla in questo caso di **visione ad alto livello**.

Nella percezione del movimento possiamo distinguere due fasi

- La rappresentazione
- L'interpretazione

La *rappresentazione* individua la direzione del moto e la velocità locale, per realizzarla occorrono operatori con finezza diversa agenti su uno stesso punto (estrazione locale di informazione) per quantificare verosimilmente le grandezze.

Il secondo passo è quello dell' *interpretazione* che coinvolge regioni più ampie e permette la definizione di un campo vettoriale (flusso ottico).

Tecniche per affrontare il problema della percezione

- Metodi basati sull'intensità luminosa dell'immagine. Viene sfruttata direttamente l'immagine come distribuzione spazio temporale di luminosità (o una sua versione filtrata) per calcolare direttamente il flusso ottico.

Fra essi i più noti sono:

(a) metodi differenziali (o del gradiente). Si basano sul calcolo diretto della velocità tramite una misura della derivata spaziale e temporale della sequenza.

(b) metodi di correlazione o di **energia ST**. Comune a questi metodi è il calcolo del filtraggio ST della $I(x, y, t)$ e della moltiplicazione con una versione *ritardata* della distribuzione di luminosità filtrata da una regione vicina (o un vicino fotorecettore).

- Algoritmi di ricerca di corrispondenza (token matching algorithms). L'analisi è fondata sulla ricerca esplicita delle corrispondenze tra frames successivi (\rightarrow legati a meccanismi **long-range**). La stima della velocità si effettua su punti sparsi, bordi, angoli o altre caratteristiche dell'immagine, effettuando, tracking di questa feature nel tempo.

Implicazioni dell'analisi del moto

- tracking (inseguimento)
- valutazione del tempo di collisione (time-to-contact)
- valutazione della profondità
- segmentazione di immagini

NOTA è molto più importante la *direzione* del moto piuttosto che la velocità

- sensazioni *proprioceptive* (o controllo postura) (ego-motion)
- ricostruzione di immagini 3-D
- pianificazione dei movimenti oculari
- ausilio della pattern vision (flicker-fading)
- analisi statica di oggetti
- sensazione di allerta
- percezione del moto di oggetti e di oggetti in movimento (*stima* del moto).

2 Flusso ottico

Premesse:

in generale per l'analisi del moto si pongono tre obiettivi:

- per ogni punto dell'immagine trovare direzione e modulo della velocità \vec{v}

Hp

\vec{v} uniforme \rightarrow calcolo il flusso ottico.

$\vec{v}(t)$ \rightarrow velocità istantanea.

Per quanto riguarda questo obiettivo si può procedere attraverso il calcolo diretto del flusso ottico (e.g. metodo differenziale) oppure attraverso un calcolo distribuito \rightarrow lo vedremo nel filtraggio ST (approccio neuromorfo).

- trovare delle strutture / relazioni nel campo di velocità.
- ricavare informazioni *coerenti* nella globalità degli oggetti in moto.

Definizione

Secondo la teoria di Gibson (1950), gli oggetti sono concepiti come superfici e l'osservatore percepisce oggetti in moto con un metodo detto *optic array* (una visione a tutto tondo dell'ambiente) che si contrappone alla *immagine retinica* (retinal image).

Il flusso ottico *retinico* è un **campo vettoriale** in cui ogni vettore rappresenta la velocità *istantanea* sul piano immagine $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

Pertanto il F.O. è un campo *osservabile* \vec{v} che è generalmente vicino al *campo di* velocità reale (almeno qualitativamente).

OSS Il flusso ottico è la proiezione sulla superficie retinica della velocità degli oggetti sull'optic array (campo di velocità).

OSS2 È anche la proiezione della velocità relativa dell'osservatore.

Il F.O. può derivare da

1. *Moto di oggetti* nella scena (oggetti in movimento rispetto ad un osservatore fisso).
2. *Il moto dell'osservatore* in un ambiente immobile (*moto proprio*) (*ego motion*).
3. *Composizione* di (*moto di oggetti*) + (*moto proprio*).

Calcolo del flusso ottico

Vi sono dei metodi principali

- *Metodi del gradiente* (o differenziali) (*gradient schemes*). Si basano sul calcolo indiretto della velocità tramite la misura della derivata spaziale e temporale della sequenza.
- *Algoritmi di ricerca di corrispondenze* (*Token Matching Algorithms*). L'analisi è fondata sulla ricerca esplicita tra frame successivi.

3 Analisi lineare e filtraggio spazio-temporale (Metodi del gradiente)

3.1 Metodi del gradiente (Horn & Schunk; Lucas & Kanade; Nagel)

Servono a determinare i vettori velocità che nascono dalla proiezione del mondo $3-D$ sulla retina $2-D$ (nascita di un campo di velocità sulla retina).

Tramite i metodi del gradiente, misuriamo infatti, la velocità a partire dalla derivata prima dell'intensità luminosa.

Esistono tre metodi atti ad assolvere tale compito:

1) Caso pratico:

Assumiamo cambiamenti di intensità luminosa non legati al cambiamento delle condizioni di illuminamento.

Vale il *Principio di conservazione dell'intensità luminosa* :

Hp $I(x, y, t) = I(x + v_1 \Delta t, y + v_2 \Delta t, t + \Delta t)$

Secondo questa ipotesi, l'intensità luminosa nella scena NON cambia tra due istanti successivi (vedi fig: 1).

ovvero

$$I|_{t_0} = I|_{t_1}$$

dove

$$I|_{t_0} = I(x_A, y_A, t_0)$$

e

$$I|_{t_1} = I(x_B, y_B, t_1) = I(x_B, y_B, t_0 + \Delta t)$$

a tal punto

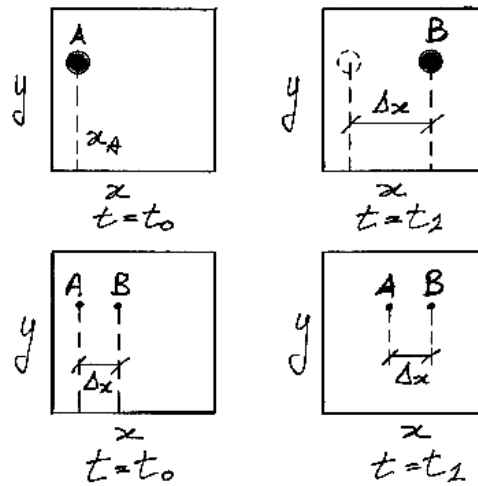


Figura 1:

$$I|_{t_0} - I|_{t_1} = 0$$

si può affermare che:

$$\frac{I(x_A + \Delta x, y_A, t_0) - I(x_A, y_A, t_0)}{\Delta x} \propto - \frac{I(x_A + \Delta x, y_A, t_1) - I(x_A + \Delta x, y_A, t_0)}{\Delta t}$$

una formula di questo tipo

$$\frac{(\alpha)}{\Delta x} = - \frac{(\beta)}{K \Delta t}$$

se l'oggetto è *indeformabile* e si muove di moto uniforme

$$\alpha = -\beta$$

per cui

$$\frac{1}{\Delta x} = + \frac{1}{K \Delta t}$$

si nota che K a proprio le dimensioni di una velocità

$$K = \frac{(\Delta x)}{(\Delta t)} \hat{=} v_1$$

v_1 componente lungo la direzione x.

Passando al limite

$$\Delta x \rightarrow 0 ; \Delta t \rightarrow 0 ;$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = - \frac{1}{v_1} \frac{\partial I}{\partial t}$$

che può essere facilmente estesa al caso 2D.

$$\vec{v} \cdot \nabla I = -I_t$$

Quest'ultima relazione rappresenta il "Vincolo del gradiente" (componendo il moto nelle due direzioni).

2) Caso Formale:

Considero

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

(per Hp la *derivata totale* della luminosità è nulla)

$$\frac{dx}{dt} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

Definiamo le componenti di velocità sui due assi coordinati $\vec{v} = (v_1, v_2)$, è possibile imporre

$$v_1 I_x + v_2 I_y + I_t = 0$$

o anche in forma vettoriale

$$\vec{v} \cdot \nabla I = -I_t$$

Ritroviamo il "vincolo del gradiente".

3) Caso dell'approssimazione di Taylor:

Consideriamo

$$I(x, y, t,) = I(x + v_1 \Delta t, y + v_2 \Delta t, t + \Delta t) \quad (1)$$

approssimiamo con Taylor al primo ordine la variazione di intensità con l'ipotesi $v = \text{costante}$

$$I(x + v_1 \Delta t, y + v_2 \Delta t, t + \Delta t) \simeq I(x, y, t) + v_1 I_x(x, y, t) + v_2 I_y(x, y, t) + I_t(x, y, t)$$

sostituendo in (1):

$$v_1 I_x(x, y, t) + v_2 I_y(x, y, t) + I_t(x, y, t) = 0$$

Anche in questo ultimo caso (come nei due precedenti) si giunge all'equazione del vincolo del gradiente che risulta essere una equazione che possiede due incognite.

Per ricavare informazioni riguardanti le due incognite v_1 e v_2 , avendo a disposizione una sola equazione, si possono utilizzare due metodi risolutivi:

1) Esplicitiamo l'espressione del vincolo del gradiente vista precedentemente otteniamo:

$$|v| |\nabla I| \cos \gamma = -I_t$$

noti $|\nabla I|$ e I_t

possiamo calcolare $\cos \gamma |v| = \frac{-I_t}{|\nabla I|}$,

γ =angolo con il gradiente perpendicolare alla superficie.

Questo approccio da la componente di velocità perpendicolare al *Fronte dello spostamento* (vedi fig: 2).

Infatti avendo due incognite v_1 e v_2 e una sola equazione non si può fare meglio.

$|\vec{v}| \cos \gamma$ e la proiezione di \vec{v} lungo la perpendicolare alla superficie.

$v_{\perp} = \text{Componente ortogonale della velocità}$

$$v_{\perp} = -\frac{(I_t)}{(|\nabla I|)} \text{ dove } |\nabla I| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$

- I_t la possiamo determinare applicando un filtro lungo la direzione temporale, considerando una sequenza di immagini e mantenendo (x,y) *costanti*

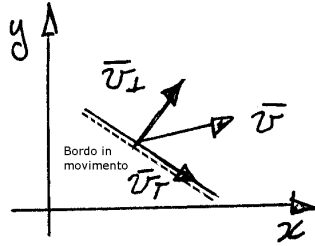


Figura 2: Esempio di acquisizione per la percezione del movimento

- le due derivate spaziali si ottengono agevolmente facendo variare la posizione (x,y)

Le *misure* locali sulle variazioni di luminanza forniscono solo una componente della velocità. Nel caso specifico *ortogonale al contorno* (lasciando l'altra componente, quella tangenziale, *indeterminata*).

\vec{v} si determina:

- Combinando le informazioni su una regione di spazio.
 - Imponendo dei vincoli di continuità alla soluzione.
- 2) Combinazione di due punti vicini:

$$(x_1, y_1)$$

$$(x_2, y_2)$$

N.B. v_1 e v_2 sono le componenti del vettore di velocità \vec{v}

Impongo per i due punti considerati la condizione di derivata totale nulla:

$$\begin{bmatrix} I_x(x_1, y_1, t) & I_y(x_1, y_1, t) \\ I_x(x_2, y_2, t) & I_y(x_2, y_2, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_t(x_1, y_1, t) \\ I_t(x_2, y_2, t) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Risolvendo simultaneamente le equazioni otteniamo una \vec{v} consistente con entrambi i vincoli.

Avendo considerato due punti vicini esiste la possibilità che uno dei due possieda rumore, in tal caso la soluzione risulta alterata.

Generalizzando l'approccio si possono combinare le informazioni su una regione più estesa considerando il funzionale di costo, il quale ci consente di considerare un intorno circolare di punti.

$$E(v_1, v_2) = \sum_{x,y} [v_1 I_x(x, y, t) + v_2 I_y(x, y, t) + I_t(x, y, t)]^2 \quad \text{MINIMO}$$

La somma potrebbe anche essere presa su una regione circolare e *pesata per una gaussiana*.

Abbiamo più equazioni (vincoli) che incognite per cui è ragionevole che non possono essere soddisfatte tutte contemporaneamente le equazioni. Ecco il motivo del funzionale di costo che dovrà essere minimo, segue che la (v_1, v_2) che $\min E$ coincide con la *stima ai minimi quadrati della velocità*.

Ricordiamo i problemi variazionali
trovare \vec{v} t.c. $\min E = F(\vec{v})$
per le equazioni di Eulero-Lagrange

$$F_{\vec{v}} = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial E(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 0 \\ \frac{\partial E(v_1, v_2)}{\partial v_2} = 0 \end{cases}$$

Risolvendo quest'ultimo si risolve il problema originale. Esplicitamente significa trattare

$$\begin{cases} \frac{\partial E(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 2 \sum_{x,y} [v_1(I_x) + v_2 I_y + I_t] I_x = 0 \\ \frac{\partial E(v_1, v_2)}{\partial v_2} = 2 \sum_{x,y} [v_1 I_x + v_2 I_y + I_t] I_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{x,y} (v_1 I_x^2 + v_2 I_y I_x + I_x I_t) = 0 \\ \sum_{x,y} (v_2 I_y^2 + v_1 I_y I_x + I_y I_t) = 0 \end{cases}$$

Possiamo descrivere il sistema in maniera compatta definendo $\vec{I}_s = (I_x, I_y)$, nel caso $E = (v_1 I_x + v_2 I_y + I_t)^2$ MINIMO

$$M \cdot \vec{v} + \vec{b} = 0$$

dove

$$M = \vec{I}_s \vec{I}_s^T = \begin{bmatrix} I_x^2 & I_y I_x \\ I_x I_y & I_y^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} I_x & I_t \\ I_y & I_t \end{bmatrix}$$

L'equazione del gradiente diventa

$$M \cdot \vec{v} + \vec{b} = \vec{0}$$

dove

$$M = \vec{I}_s \vec{I}_s^T = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{I}_s \vec{I}_s^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$m_{12} = m_{21}$$

$$m_{11} = \sum_{x,y} (I_x)^2$$

$$m_{22} = \sum_{x,y} (I_y)^2$$

$$m_{12} = \sum_{x,y} I_x I_y$$

$$b_1 = \sum_{x,y} I_x I_t \quad e \quad b_2 = \sum_{x,y} I_y I_t$$

Formulazione del problema dell'apertura

Riguarda l'impossibilità di determinare in modo certo la componente traslazionale di un oggetto in movimento osservandolo da un foro.

Supponendo di osservare da un foro una barretta che si sposta, non siamo in grado di determinarne la lunghezza (a meno che essa non sia più piccola dell'apertura stessa) e conseguentemente la componente traslazionale, riusciamo a determinare solo la componente ortogonale.

- Formulazione "debole":

è impossibile determinare la componente di velocità (Tangenziale) lungo una linea in movimento.

- Formulazione "forte"

è importante determinare la componente di velocità lungo qualunque contorno con caratteristiche di isoluminosità.

Se M fosse invertibile

$$\hat{v} = -M^{-1}\vec{b}$$

Il problema è che M è praticamente sempre singolare (o mal condizionato) $\det M=0$

Questo fatto è legato al problema dell'apertura. Si sta considerando una *finestra* su cui consideriamo la sommatoria. È improponibile valutare univocamente la direzione del moto di un pattern osservandolo attraverso un'apertura più piccola del pattern stesso.

Approfondimento

La matrice M non è invertibile, il problema è mal condizionato in relazione al **problema dell'apertura**. Supponiamo di osservare una scena attraverso un foro circolare: ciò che non possiamo determinare è la

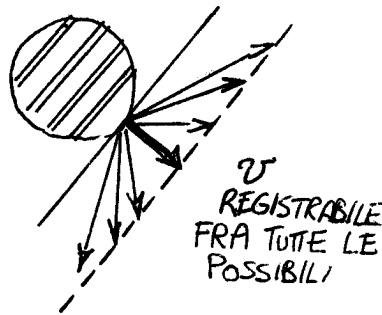


Figura 3: Figura inerente all'approfondimento

componente tangenziale del moto (vedi fig: 3). Al di là del graticcio si presenta tale problema per qualunque immagine. Nella formulazione debole tale problema si traduce in : è impossibile determinare la componente di velocità (tangenziale) lungo una linea in movimento. Nella formulazione forte invece affermiamo: è impossibile determinare la componente di velocità lungo qualunque contorno di isoluminosità (vedi fig: 4).

Esempio:

$$\det M = 0 = \left(\sum_{x,y} [I_x^2] \right) \left(\sum_{x,y} [I_y^2] \right) - \left(\sum_{x,y} [I_x I_y] \right)^2$$

Il problema si può risolvere solo con tecniche di *minimizzazione*.

Interpretazione geometrica della combinazione dei vincoli.

Hp

$$\begin{bmatrix} I_x(x_1, y_1, t) & I_y(x_1, y_1, t) \\ I_x(x_2, y_2, t) & I_y(x_2, y_2, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_t(x_1, y_1, t) \\ I_t(x_2, y_2, t) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

misurate I_x, I_y e I_t in una posizione (x_1, y_1) esiste una *linea di soluzioni* per \vec{v} .

Altro criterio, precedentemente citato per risolvere l'ambiguità, era il *vicolo di continuità*

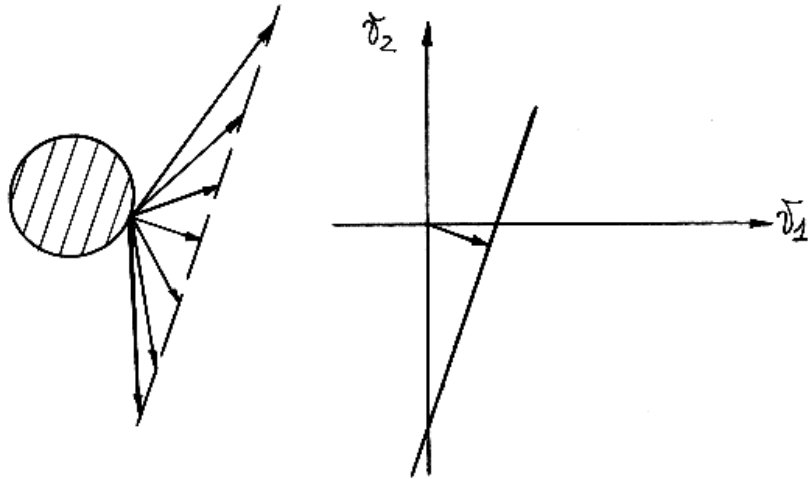


Figura 4: Moto di un graticcio uniforme osservato da una apertura circolare

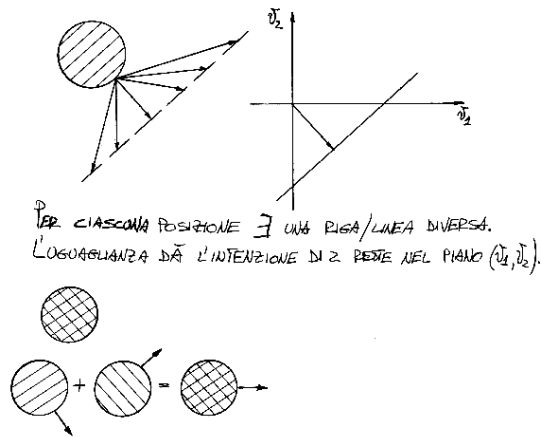


Figura 5:

Smoothness Constraint (Horn&Schunck)

Per calcolare la componente tangenziale della velocità è necessario introdurre il *vincolo di continuità* del F.O.

Se si tratta di moto puramente *traslazionale*, imporre la continuità del flusso ottico equivale ad imporre che tutte le (derivate spaziali) variazioni spaziali della velocità siano *nulle*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

In generale questa condizione è difficile da verificarsi (ad esempio se esistono delle componenti di moto rotazionale).

Allora la condizione si tramuta in una condizione di *minimo*.

Solito problema di minimizzazione:

$$P(v_1, v_2) \equiv \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 \rightarrow \text{MINIMO}$$

→ costituiscono il *Funzionale Di Costo*

$$\min_{\vec{v}} E(v_1, v_2) = \int [(\nabla I \cdot \vec{v} + \frac{\partial I}{\partial t})^2 + \lambda P(v_1, v_2)] d\vec{v}$$

Per determinare la soluzione generalmente si utilizzano *metodi numerici*.

Ad esempio una soluzione numerica iterativa *diventa*

$$v_1^{(n+1)} = v_1^{(n)} - \frac{i_x v_1^{(n)} + I_y v_2^{(n)} + I_t}{1 + \lambda^2 (I_x^2 + I_y^2)} I_y$$

$$v_2^{(n+1)} = v_2^{(n)} - \frac{i_x v_1^{(n)} + I_y v_2^{(n)} + I_t}{1 + \lambda^2 (I_x^2 + I_y^2)} I_y$$

$n = 1, \dots, N$

Come valori iniziali vengono utilizzati i valori di v_1 e v_2 lungo la direzione *gradiente*.
svantaggi:

1. tempo di convergenza (criterio di stop)
2. scelta dei valori iniziali.

Si basa sul concetto di Hessiana della distribuzione della luminosità.

Partendo da $\frac{dI}{dt} = 0$ e da $F(v_1, v_2) = I_x v_1 + I_y v_2 + I_t = 0$, si può imporre di voler trovare

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}$$

cioè una variazione spaziale nulla, in particolare lungo certe direzioni. Assumendo che la \vec{v} sia almeno localmente costante possiamo esplicitare le derivate

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = I_{xx} v_1 + I_{xy} v_2 + I_{xt} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = I_{xy} v_1 + I_{yy} v_2 + I_{yt} = 0 \end{cases}$$

Passando alla notazione vettoriale esprimiamo sinteticamente

$$H \cdot \vec{v} - \vec{c} = 0$$

dove H è la *hessiana* delle distribuzioni di luminosità

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix} = H$$

La condizione importante è che la H non deve essere singolare.

OSS

L'ipotesi di $\vec{v} = COST$ è verificata solo nel caso di moto *Fronto – Parallelo* (vedi fig: 6)(cioè un moto che avviene su un piano parallelo all'osservatore).

Tuttavia si può osservare che l'ipotesi $\vec{v} = COST$ è valida sempre "localmente" al punto di interesse (anche nel caso di moto rotatorio, purchè il Δt sia piccolo).

Questo metodo presenta principalmente due vantaggi che sono:

1. non è un metodo iterativo
2. basta risolvere un sistema di equazioni algebriche



Figura 6:

Altri vincoli che potrebbero essere importanti sono:

1. la direzione in cui va l'oggetto e.g. il caso dell'Egomotion (è l'osservatore che si muove)
- 2.

$$\frac{d}{dt} \nabla I = 0$$

$$\nabla I = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y} \right)$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial I}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Se viene cambiato l'ordine di derivazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dI}{dt} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases}$$

Alcune applicazioni di interesse dell'analisi del moto

1. *segmentazione*: Se abbiamo diversi movimenti in una scena possiamo segmentare e quindi identificare le parti della scena che si muovono in modo "corente" o "incoerente".

È necessario *differenziale* il flusso ottico per rilevare delle discontinuità. È una operazione complessa in quanto la differenziazione esalta il *rumore*.

2. *tracking*: Si tratta di inseguire delle "mire" visive. Esiste il problema che nell'immagine spesso il bersaglio *non* è l'unico oggetto in movimento.

Occorre isolare il movimento del bersaglio da altri movimenti. Prima di tutto *identifico* il mio *Target*.

Poi identifico il flusso ottico per vedere se localmente ci sono delle discontinuità.

Se anche la telecamera si muove di moto proprio (*Egomotion*) il problema si complica ulteriormente:

In ciascun istante la velocità dell'oggetto sarà data da:

$$(\text{velocità dell'oggetto}) + (\text{velocità telecamera}) = \vec{v}_o + \vec{v}_c.$$

3. *Tempo all'impatto*.

Alcune considerazioni geometriche per il calcolo del fuoco di espansione

Immaginiamo una telecamera che acquisisca delle immagini, come mostrato in figura: 7. Proiettiamo su un piano le scene tridimensionali e ricaviamo le relazioni tra le coordinate. La notazione è chiarita da quanto segue:

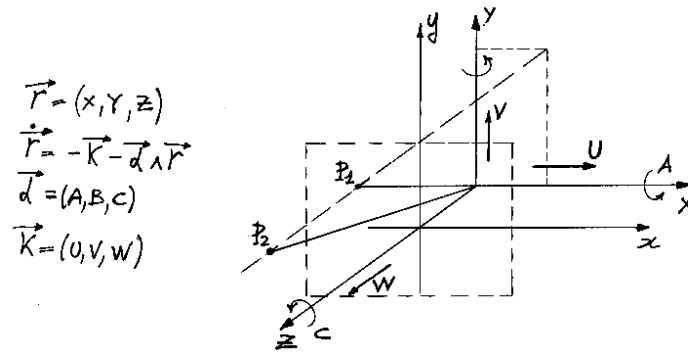


Figura 7: Sistemi di riferimento nell'acquisizione di un'immagine

$X, Y, Z \rightarrow$ assi di riferimento della telecamera

(x, y) coordinate immagine

Esiste una relazione tra queste coordinate e precisamente

$$(x, y) = \left(\frac{X}{Y}, \frac{Y}{Z} \right)$$

Aggiungendo la possibilità di spostarci rispetto alla scena introducendo così le traslazioni V, U, W . Non escludiamo nemmeno l'eventualità di considerare delle rotazioni (A, B, C) . Il quadro che così si viene a creare è riassunto nella relazione complessiva che esprime la legge oraria di un punto P .

$$\dot{X} = -U - BZ + CY$$

$$\dot{Y} = -V - CX + AZ$$

$$\dot{Z} = -W - AY + BX$$

$U, V, W \rightarrow$ moto traslazionale velocità di avvicinamento [m/s]

$A, B, C \rightarrow$ moto rotazionale velocità rotazionale [rad/s]

$(v_1, v_2) = (\dot{x}, \dot{y})$ componenti di velocità del F.O.

Vediamo come si ripercuote sul piano immagine, a livello di coordinate x e y , una tale evoluzione.

$$(v_1, v_2) \equiv (\dot{x}, \dot{y}) \rightarrow$$

$$v_1 = \frac{\dot{X}}{Z} - \frac{\dot{Z}X}{Z^2} = \left(-\frac{W}{Z} - B + Cy \right) - x \left(-\frac{W}{Z} - Ay + Bx \right)$$

e anche

$$v_2 = \frac{\dot{Y}}{Z} - \frac{\dot{Z}Y}{Z^2} = \left(-\frac{W}{Z} - Cx + A \right) - y \left(-\frac{W}{Z} - Ay + Bx \right)$$

Possiamo distinguere termini di traslazione da termini di rotazione.

$$\vec{v} = v^T + v^l$$

$$v_1 = v_1^T + v_1^R$$

$$v_2 = v_2^T + v_2^R$$

e per la precisione

$$v_1^T = (-U + Wx)/Z$$

$$v_2^T = (-V - Wy)/z$$

$$v_1^R = -B + Cy + Axy - Bx^2$$

$$v_2^R = -Cx + A + Ay^2 - Bxy$$

Fuoco di espansione (FOE: vanishing point)

Noto il campo di velocità "tramite i metodi del gradiente" sul piano 2 - D della retina, siamo interessati ad una analisi di una struttura di questo campo, ovvero, vogliamo caratterizzare (studiare) i punti di esso.

Per spigare il concetto di FOE ci serviamo di un esempio pratico:

Si consideri il solo moto traslazionale "relativo" di una telecamera verso un punto fermo della scena 3 - D.

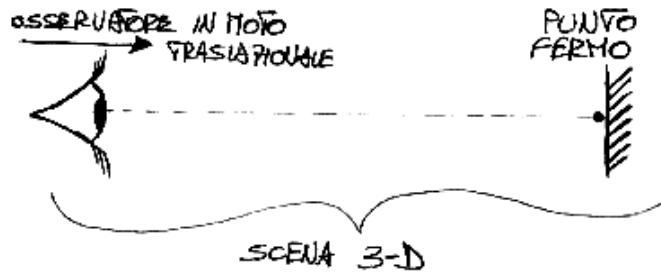


Figura 8: Moto esclusivamente traslazionale di un osservatore verso un punto fermo della scena.

Il punto presente nella scena 3 - D viene rappresentato nel piano della retina (piano 2 - D) come in figura : 11 a.

Nota: Esiste anche il cosiddetto Fuoco di Contrazione (in questo caso l'osservatore è fermo e il punto è in moto traslazionale verso l'osservatore (es. proiettile in moto verso il bersaglio)).

Il punto presente nella scena 3 - D viene questa volta rappresentato nel piano della retina (piano 2 - D) come in figura : 9 .

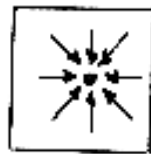


Figura 9: Moto esclusivamente traslazionale di un punto verso un osservatore fermo della scena.

Data una serie di vettori velocità nel piano della retina emersi da una scena reale 3 - D o 2 - D. Se disegno la direzione dei vettori in gioco, il punto in cui tutte le direzioni si incontrano è il FOE vedi figura: 10.

Definiamo per comodità le quantità

$$x_0 = \frac{U}{W}$$

$$y_0 = \frac{V}{W}$$

Riscriviamo le componenti traslazionali di velocità come

$$v_1^T = (x - x_o) \frac{W}{Z}$$

$$v_2^T = (y - y_o) \frac{W}{Z}$$

$$\frac{v_2^T}{v_1^T} = \frac{y - y_o}{x - x_o}$$

Il punto del flusso ottico da cui partono o convergono tutte le linee definite da queste formule definisce il FOE (vedi fig: 10).

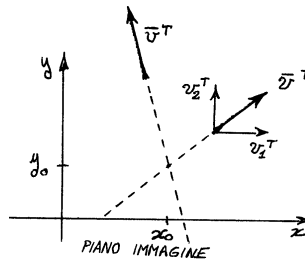
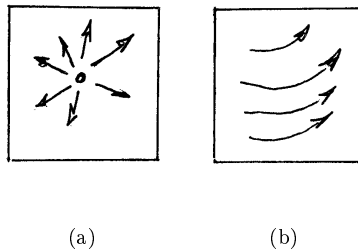


Figura 10: Definizione di fuoco di espansione (FOE)

Per quel che riguarda il tipo di figure che si possono osservare un esempio è dato dalla (figura: 10).



(a)

(b)

Figura 11: Fuoco di espansione: (a) Caso di moto traslazionale; (b) Caso di moto traslazionale.

Nel caso di moto traslazionale invece osserviamo quanto in figura 11.b. Si definisce *profondità relativa* il rapporto Z/W . Misurata la componente di velocità vale l'uguaglianza

$$\frac{Z}{W} = \frac{x - x_o}{v_1^T} = \frac{y - y_o}{v_2^T} = \frac{\Delta_{foe}}{|\vec{v}_T^T|}$$

Tutto questo vale il moto relativo ed è comunque sempre ricavabile per decomposizione.

Calcolo del fuoco di espansione dal moto sul parallasse (vedi fig: 12)

P_1 e P_2 avranno la stessa (v_1^R, v_2^R) ma diverso (v_1^T, v_2^T) e

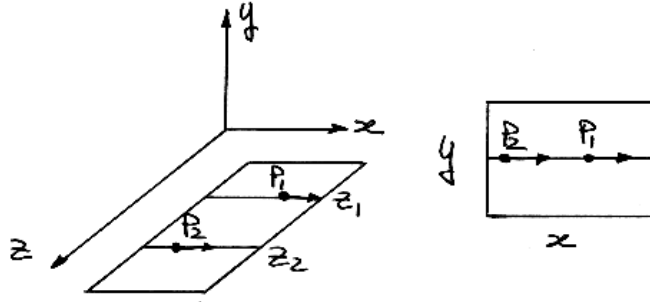


Figura 12: Sistemi di riferimento nell'acquisizione di un'immagine

$$v_1^{P_1} - v_1^{P_2} = (-U + W_x) \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right)$$

$$v_2^{P_1} - v_2^{P_2} = (-U + W_y) \left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} \right)$$

Ancora

$$\frac{v_2^{P_1} - v_2^{P_2}}{v_1^{P_1} - v_1^{P_2}} = \frac{-V + W_y}{-U + W_x} = \frac{(y - y_o)W}{(x - x_o)W}$$

- la velocità relativa di P_1 e P_2 punta o proviene dal Fuoco di Espansione.
- è possibile usare il parallasse in diverse posizione retiniche per focalizzare il Fuoco di Espansione.

4 Analisi lineare filtraggio spazio temporale

Immaginiamo un edge o una barra, in movimento con una certa velocità, attraversare il campo visivo (figura : 13)

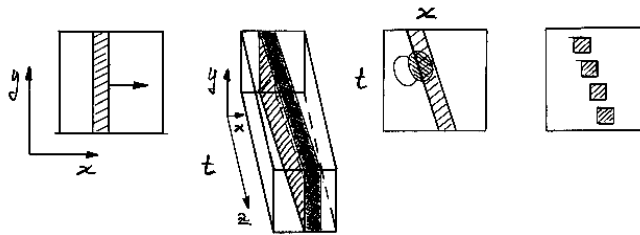


Figura 13: Scomposizione del moto di una barra su diversi piani cartesiani

Partiamo dalla distribuzione di densità

$$I(x, y, t) = I(x - v_1 t, y - v_2 t, t)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = |v| e^{j\phi}$$

$$v_1 = v \cos \phi$$

$$v_2 = v \sin \phi$$

ϕ o *Direzione del moto*.

Come si traduce questa informazione in frequenza? $\tilde{I} = (f_x, f_y, f_t)$. Per semplicità riduciamoci a un caso a due variabili, studiamo $I(x, t) = I(x - v_1 t, t)$.

Definiamo un vettore

$$\vec{a} \hat{=} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

e un

$$\vec{b} \hat{=} \begin{pmatrix} f_x \\ f_t \end{pmatrix}$$

chiariamo ora come $I(\vec{a}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{I}(\vec{b})$. Vediamo di esprimere questa trasformazione in termini di trasformazione lineare.

$$\vec{a}' \hat{=} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}' \hat{=} \begin{pmatrix} x + v_1 t \\ t \end{pmatrix} = A \vec{a}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & +v_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \vec{a}$$

Per una proprietà delle trasformate di \mathfrak{F} in $1D$

$$I(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{|\alpha|} \tilde{I}\left(\frac{f t}{\alpha}\right)$$

$$I(\vec{a}') \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{I}[(A^{-1})^T \vec{b}]$$

dove

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v_1 & 1 \end{bmatrix} = A \vec{a}$$

Per cui

$$I(x + v_1 t, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{I}(f_x, f_t - v_1 f_x)$$

a livello grafico ciò si può interpretare come una traslazione (vedi fig : 14)

Occorre un chiarimento sulle unità di misura:

$$[f_x] = \frac{\text{cicli}}{\text{pixel}} ; [f_t] = \frac{\text{cicli}}{\text{frame}}$$

$$[v] = \frac{\text{pixel}}{\text{frame}} = \frac{f_t}{f_x}$$

Generalizzando al caso $3D$:

$$I(x + v_1 t, y + v_2 t, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{I}(f_x, f_y, f_t - v_1 f_x - v_2 f_y)$$

Ragionando a livello vettoriale con $\vec{v} = (v_1, v_2)$

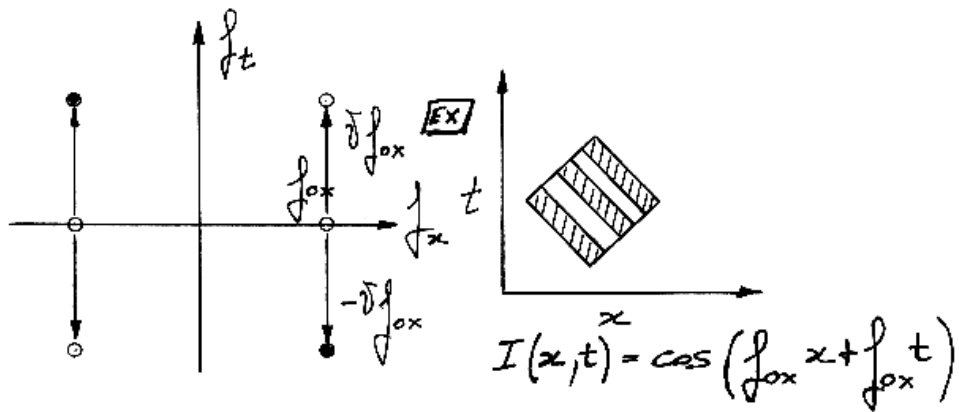


Figura 14: Esempio di traslazione in frequenza legata al moto

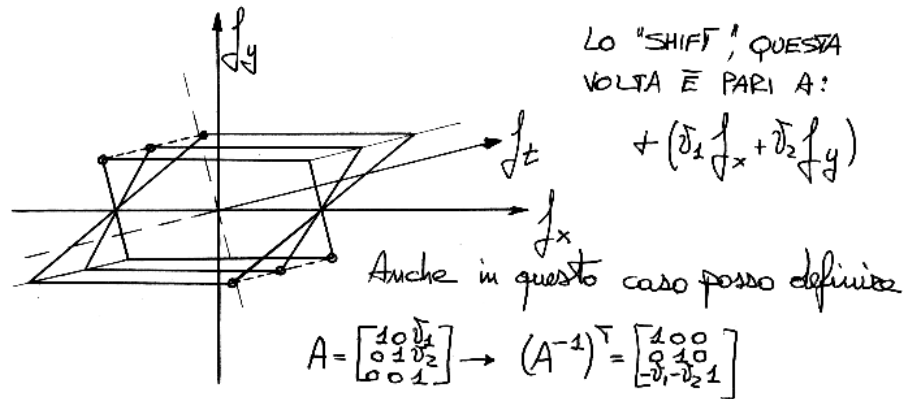


Figura 15:

$$\vec{f}_s \hat{=} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Frequenza spaziale del graticcio

Della frequenza temporale possiamo dire $f_t = \vec{v} \cdot \vec{f}_s$ e, se volessimo ulteriormente specificare che

$$\vec{v} = |v| e^{j\phi}$$

$$\vec{f}_s = |f_s| e^{j\alpha}$$

ϕ = Direzione del moto dell'immagine.

α = Orientamento della componente di frequenza spaziale \rightarrow orientamento del graticcio nello spazio.

si espliciterebbe

$$f_t = +\vec{v} \cdot \vec{f}_s = +(v_1 f_x + v_2 f_y) = + |v| |f_s| \cos(\phi - \alpha)$$

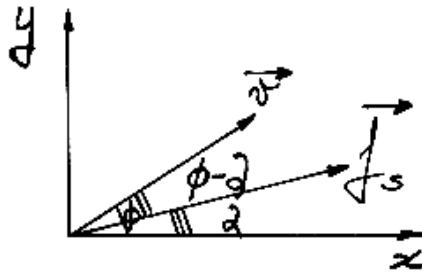


Figura 16:

Qui si vede come la velocità influenzi la variazione di frequenza temporale.

Interessiamoci di come ricavare tale valore. Partiamo da $e(x, y, t) = h(x, y, t) * I(x, y, t)$ e immaginiamo di avere un array di filtri tutti uguali, ciascuno con una frequenza $f_m = f_m e^{i\phi_m}$. Tale filtro "pulisce" tutte le frequenze meno quella a cui è selettivo. La risposta sarà una sinusoide a frequenza temporale f_t che misureremo come $f_t = f_m v \cos(\phi - \phi_m)$

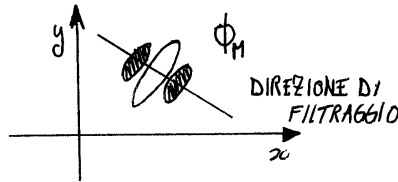


Figura 17: Esempio di filtro per la percezione del moto

4.1 Sensore di movimento e filtraggio spazio - temporale

Parliamo di operatori lineari "Spazio"- "Tempo"

La risposta di un operatore si esprime come somma pesata su regioni di spazio vicine e nella recente storia temporale della distribuzione I.

In un punto del campo visivo ho:

$$e(t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(x, y, t) I(x, y, \tau - t) dx dy d\tau$$

La formula esprime il prodotto scalare nello spazio e la convoluzione nel tempo.

$e(t)=0$ se $I=\text{cost}$

Se consideriamo un array di operatori identici che compongono tutta la I allora l'operazione può essere pensata come una convoluzione con un **FILTRO LINEARE**.

$$e(x, y, t) = h(x, y, t) * I(x, y, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \eta, \tau) I(\xi - x, \eta - y, \tau - t) d\xi d\eta d\tau$$

OSS

Supponiamo di avere un filtro caratterizzato da un andamento:

$$f_M = f_M e^{j\phi_M}$$

Il filtro rimuove le componenti frequenziali fatta eccezione per quelle in un intorno di f_M = frequenza di selettività.

Applicato all'ingresso si otterrà quindi una componente frequenziale dell'immagine f_M .

$$f_t \propto |v| |f_m| \cos(\phi - \phi_M)$$

Hp $f_{ot} = 0$
 f_M noto
 f_t misurato
 $v = \cos t$

5 Calcolo del flusso ottico con filtri S-T (è legato ai metodi del gradiente)

Le soluzioni del metodo del gradiente possono essere espresse in termini delle uscite di un insieme di filtri orientati nello spazio/tempo.

OSS

L'operatore differenziale (su cui si basano i metodi del gradiente) può essere descritto in termini di convoluzione. Per meglio dire è possibile prefiltrare la $I(x, y, t)$ e considerare l'analisi differenziale in una sottobanda ST.

Abuso notazionale

$$I_x(x, y, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y, t) * I(x, y, t)] = h_x(x, y, t) * I$$

Analogo $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t}$

OSS

Anche le derivate "diagonali" si possono esprimere come

$$h_{\vec{p}} \sim h_x + h_y$$

Per meglio dire se l'angolo è $\pi/4$

$$h_{\vec{p}} = \frac{dh}{d\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_x + h_y)$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

inoltre il prodotto di derivate nelle direzioni x, y, t può essere scritto come combinazioni di derivate orientate

$$4I_x I_y = (I_x + I_y)^2 - (I_x - I_y)^2 = [(h_x + h_y) * I]^2 - [(h_x - h_y) * I]^2$$

Ricordando che avevamo scritto $M\vec{v} + \vec{b} = 0$, sfruttiamo quanto sopra ed esprimiamo i vari termini attraverso

$$m_{11} = \sum (I_x)^2$$

$$m_{22} = \sum (I_y)^2$$

$$m_{12} = \frac{1}{4} \sum [(I_x + I_y)^2 - (I_x - I_y)^2]$$

$$b_1 = \frac{1}{4} \sum [(I_x + I_t)^2 - (I_x - I_t)^2]$$

$$b_2 = \frac{1}{4} \sum [(I_y + I_t)^2 - (I_y - I_t)^2]$$

Una volta definito \vec{b} possiamo ricavare v attraverso la M .

OSS

Questa volta $I_x \hat{=} h_x * I$

Quattro di questi filtri sono anche selettivi alla direzione con profilo orientato nello ST.

$$(h_x + h_t) \quad W \quad SINISTRA \quad (h_y + h_t) \quad SOTTO \quad S$$

$$(h_x - h_t) \quad E \quad DESTRA \quad (h_y - h_t) \quad SOPRA \quad N$$

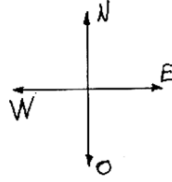


Figura 18:

OSS

Questi operatori sono simili ai campi recettivi corticali. Anche se modelli più accurati riguardano derivate di ordine superiore.

In alternativa: si possono considerare operatori differenziali di ordine superiore.

Esercizio

Partendo da

$$v_1 I_x + v_2 I_y + I_t = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow v_1 I_{xxx} + v_2 I_{xxy} + I_{xxt} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow v_1 I_{xyx} + v_2 I_{xyy} + I_{xyt} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow v_1 I_{yyx} + v_2 I_{yyy} + I_{yyt} = 0$$

dove ad esempio:

$$I_{xxx} \hat{=} I * h_{xxx}$$

Conservazione della derivata seconda dell'intensità.

Tuttavia esiste la necessità di combinare più vincoli su una regione spaziale:

$$E(v_1, v_2) = \sum_{x,y} [v_1 I_{xxx} + v_2 I_{xxy} + I_{xxt}]^2 +$$

$$+ [v_1 I_{xyx} + v_2 I_{xyy} + I_{xyt}]^2 +$$

$$+ [v_1 I_{yyx} + v_2 I_{yyy} + I_{yyt}]^2$$

Anche in questo caso potremmo quindi scrivere il problema come:

$$M \cdot \vec{v} = \vec{b} \quad \hat{v} = -M^{-1}\vec{b}$$

\hat{v} = Least-square estimate of \vec{v}

Dove:

$$m_{11} = \sum [(I_{xxx})^2 + (I_{xxy})^2 + (I_{xyy})^2]$$

$$m_{22} = \sum [(I_{xxy})^2 + (I_{xyy})^2 + (I_{yyy})^2]$$

$$m_{11} = \sum [(I_{xxx})(I_{xxy}) + (I_{xxy})(I_{xyy}) + (I_{xyy})(I_{yyy})]$$

$$b_1 = \sum [(I_{xxx})(I_{xxt}) + (I_{xxy})(I_{xyt}) + (I_{xyy})(I_{yyt})]$$

$$b_2 = \sum [(I_{xxy})(I_{xxt}) + (I_{xyy})(I_{xyt}) + (I_{yyy})(I_{yyt})]$$

OSS1

Si ha un maggior numero di operatori.

OSS2

Gli operatori di terzo ordine sono più selettivi in frequenza.

OSS3

Come prima i prodotti delle derivate sono

$$(I_{xxx})(I_{xxt}) = \frac{1}{4} [(I_{xxx} + I_{xxt})^2 - (I_{xxx} - I_{xxt})^2]$$

analogamente per derivate direzionali

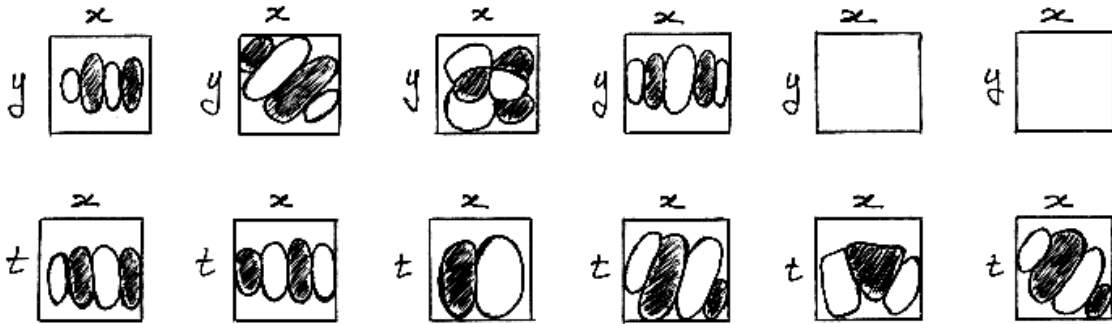


Figura 19: Esempi di operatori

Osservazioni generali

Il filtraggio spazio tempo ha due problemi per il calcolo del Flusso Ottico.

1. problema dell'apertura
2. dipendenza dalla frequenza spaziale e temporale dello stimolo

Le uscite del filtro *non* dipendono solo dalla velocità dello stimolo, ma dalla frequenza spazio tempo dello stimolo.

OSS

Problema dell'aliasing

Componenti frequenziali \rightarrow frequenza di Nyquist risultano sottocampionate.

Se un pattern sinusoidale viene traslato più di metà del suo periodo da Frame a Frame segue che il graticcio sembrerà che si muova in senso opposto, quindi l'intervallo di velocità possibili è limitato dalla frequenza spaziale.

6 Elaborazione corticale del moto e modelli neuromorfi

Generalità

Negli animali inferiori (insetti, invertebrati) l'elaborazione avviene nei primi strati del Sistema Visivo. Negli animali superiori l'elaborazione viene "rimandata" ai centri superiori della corteccia. I primi stadi si preoccupano solo di mettere a disposizione una efficiente rappresentazione (questa è una regola generale).

Studiamo un modello basato sull'apparato visivo della mosca, frutto degli studi di REICHARDT.

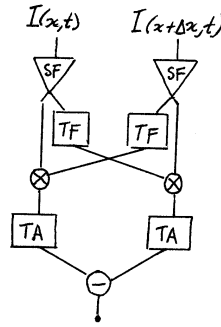


Figura 20: Modello di REICHARDT

TF = filtro "ritardatore"

TA = integrazione temporale

- Richiami sulla dualità spazio-tempo.
- Esistenza percorsi paralleli (M P)
- Esistenza di strutture specifiche per l'analisi dell'informazione di movimento.
- Ricordiamo C.R. sensibile alla direzione dello spostamento. (cellule semplici & complesse)

NOTA

Strutture dei C.R. DINAMICI

Definizione di selettività alla direzione

$$DI = \frac{(R_p - R_{np})}{(R_p + R_{np})}$$

Diagrammi polari

- Aree coinvolte
 - area striata V_1 (V_2)
 - aree extra-striata MT, MST
 - MT → Medio Temporale
 - MST → Medio Temporale Superiore

Si può affermare che la progressione $V_1 \rightarrow MT \rightarrow MST$ rispecchia la presenza di 3 strati di elaborazione distinti.

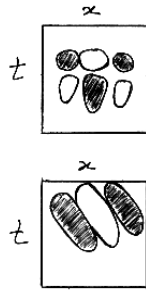


Figura 21: Pulsar \rightarrow separabili Sono caratterizzati da un cambiamento di segno al variare del tempo, ma non ad un cambiamento del loro profilo spaziale. Selettive alla direzione \rightarrow non separabili. Risultano selettivi al movimento in una particolare direzione piuttosto che in quella opposta. Si possono riscontrare in questi sia con comportamenti lineari sia non lineari (Emerson et al 87)

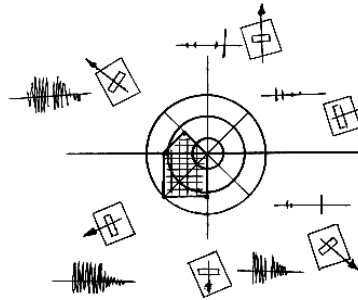


Figura 22:

1. V_1 : i campi recettivi operano su valori di luminosità dell'immagine rilevando la direzione del moto di contorni mono-dimensionali lungo una direzione particolare e lungo un particolare asse \rightarrow filtraggio lineare più eventuali operatori non lineari in cascata (cellule semplici e complesse in V_1).
2. Combinare le uscite dello stadio 1 per ottenere informazioni sul moto bidimensionale \rightarrow MT.
3. Associare un'informazione di movimento globale a oggetti la cui estensione è maggiore di quella dei campi recettivi.

Riassumendo

V_1 : campi recettivi relativi alla direzione di spostamento di un edge con un particolare orientamento.

Selettivi alla componente di velocità e perpendicolari all'orientamento.

Infatti se testati con stimoli e PLAID

MT: in contrapposizione alle cellule di V_1 sono più sensibili alla velocità e direzione del moto che all'orientamento dello stimolo.

MST: sensibili a configurazioni del campo di velocità (flusso ottico).

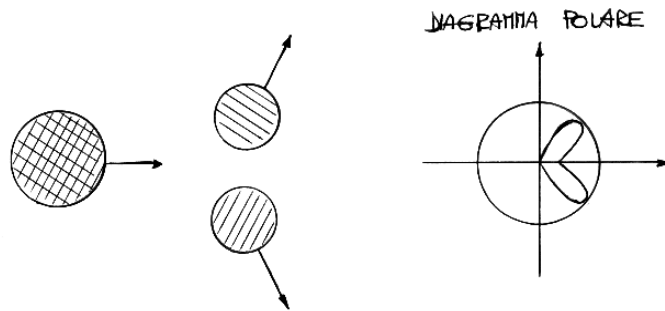


Figura 23:

Configurazioni

- Planari → moto fronto parallelo o traslatorio
- Circolari → moto rotazionale
- Radiali → moto di avvicinamento/allontanamento

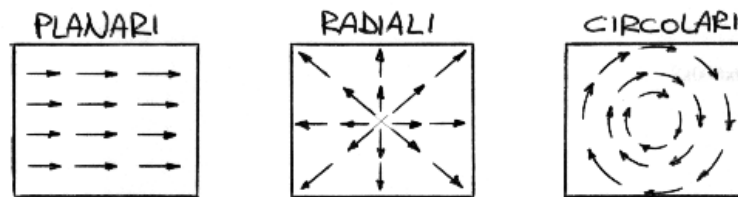


Figura 24:

7 Modelli Neuromorfi

- Calcolo distribuito
- Celle e canali

NOTA

Analisi multicanale

- più frequenze spaziali (per localizzazioni spaziali)
- più direzioni per individuare la direzione ottimale dello spazio)
- più frequenze temporali per *canali* di velocità
- Scelta del vettore velocità con massima risposta
- UNITÀ → una singola "cellula" che ritrae una proprietà / caratteristica elementare in una posizione del campo visivo.
- CANALE → un insieme di unità con proprietà *simili* distribuite sul campo visivo.

In generale:

1. problema dell'origine della selettività alla direzione
 2. problema della stima di velocità da informazioni distribuite
 3. problema di riconoscere configurazioni nel Flusso Ottico
- Campi recettivi orientati Come costruire un C.R. orientato nello spazio-tempo?

In pratica non è semplice ottenerlo direttamente perchè richiederebbe una diversa risposta all'impulso nel tempo per ogni posizione del campo recettivo.

Modello comportamentale → "facile"

$$h(x, y, t) = f(x, y)g(t)$$

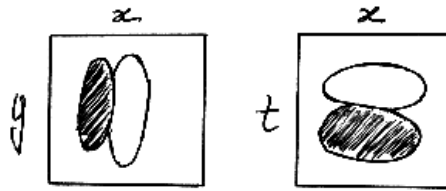


Figura 25:

Parametri di *traslazione*:

x_o, y_o, t_o

θ → Orientamento nello spazio

ϕ → orientamento nello *spazio - tempo* (direzione del moto lungo l'asse perpendicolare all'orientamento θ)

Direzione moto: $v = \pm \tan \phi$

Il gioco è fatto con trasformazioni di coordinate

$$\begin{cases} x_1 = (x - x_o) \\ y_1 = (y - y_o) \\ t_1 = (t - t_o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (\cos \theta)x_1 + (\sin \theta)y_1 \\ y_2 = -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \\ t_2 = t_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 \cos \phi - t_2 \sin \phi \\ y_3 = -y_2 \\ t_3 = x_2 \sin \phi + t_2 \cos \phi \end{cases}$$

8 Appendice

8.1 Filtro "direzionale" di Watson & Ahumida

Premessa

Se l'obiettivo è quello di costruire un filtro

$$h(x, y, t) = G(x, y, t) \cos(f_x x + f_t t)$$

può essere così decomposto

$$G(x, y, t) [\cos(f_x x) \cos(f_t t) - \sin(f_x x) \sin(f_t t)]$$

In base a questa osservazione si possono considerare somme o differenze di *filtri in quadratura*

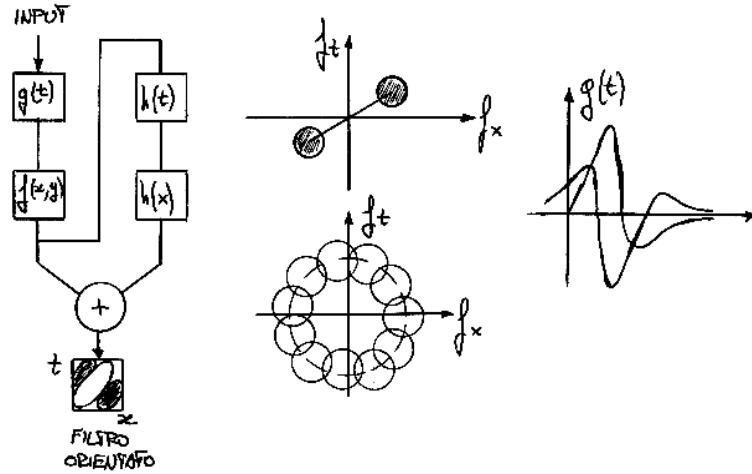


Figura 26: Modello di WATSON & AHUMIDA

$$f(x, y) = a(x)b(y)$$

$$a(x) = \exp \left[-\left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 \right] \cos(2\pi f_x x)$$

$$b(y) = \exp \left[-\left(\frac{y}{\sigma} \right)^2 \right]$$

OSS

Si possono considerare anche diversi canali per la frequenza spaziale $f_x^{(1)}, f_x^{(2)}, \dots$

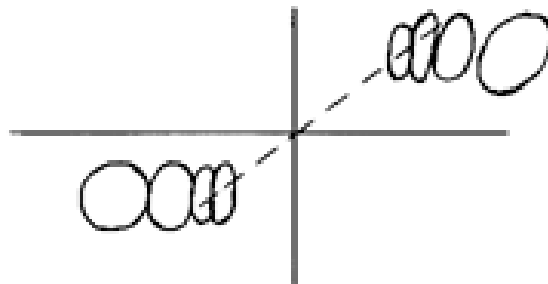


Figura 27:

OSS2 Cambia anche la pendenza.

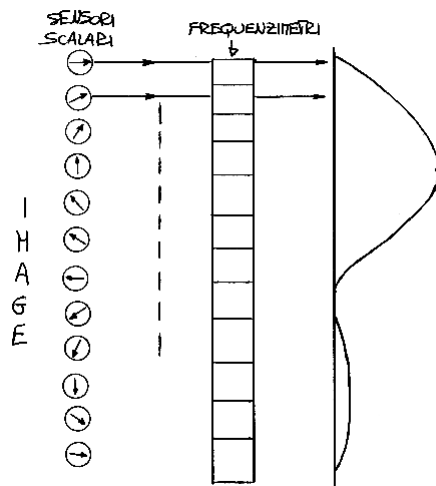
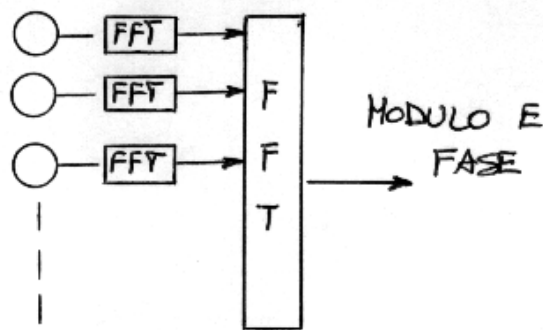


Figura 28: Sensore vettoriale di velocità

8.2 Sensore vettoriale di velocità

1. per ogni sensore scalare ottengo una risposta approssimativamente sinusoidale con una componente f_t legata alla velocità
2. una volta misurata f_t SO dalla teoria (per come sono costruite le cose) che $f_t = |v| f_M \cos(\phi - \phi_M)$
3. mi basta quindi ricavare *modulo* e *fase* della sinusoide per trovare il vettore $\vec{v} = v \exp j\Phi_M$
 f_M e ϕ_M sono noti.

Generalizzazione e implementazione pratica (vedi fig: 29)



↳ Ragionamenti nelle
PRIME ARTICOLE

Figura 29: Implementazione pratica

8.3 Filtro direzionale di Adelson & Bergen 1985 (vedi fig: 30)

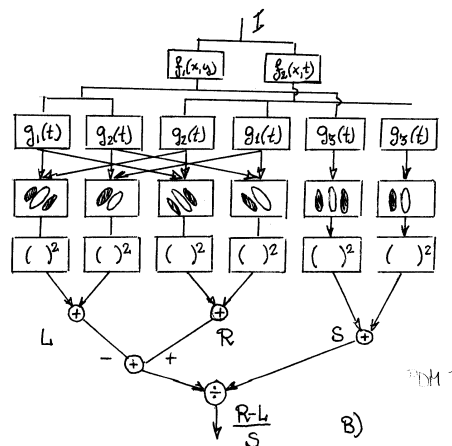


Figura 30: Modello di Adelson-Bergen

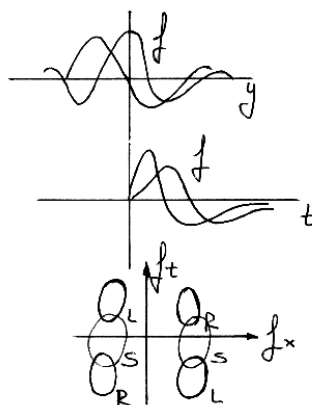


Figura 31: Grafici relativi a fig: 30

- Energia: ST
per evitare di avere un'uscita il cui segno cambia nel tempo.
Ad esempio un graticcio in moto produrrà un'uscita oscillatoria che assumerà valori positivi, negativi e nulli.
Sarebbe meglio quindi avere una risposta che abbia un valore costante per un moto costante.
Inoltre si vuole indipendenza dalla polarità (o "direzione" del *contrasto*)
- *Filtri Opponenti* (vedi fig: 32)
- *normalizzazione* (vedi fig: 33)
Risolto il problema della polarità (risposte stimoli scuri = risposte stimoli chiari)
Resta il problema del *contrasto globale*.



Figura 32: Filtri oppONENTI

Se lo stimolo in movimento è poco contrastato rischia di produrre delle risposte BASSE all'uscita del filtraggio che potrebbe essere confusa con una velocità errata.

Per rimediare a questo inconveniente si può pensare di *normalizzare* con il contrasto (misure relative all'uscita statica) → con un filtro "stazionario"

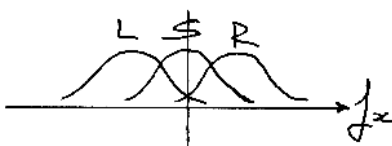


Figura 33: Normalizzazione

L'uscita normalizzata per il moto verso sinistra è la seguente

$$L = \frac{e|_{LEFT}}{e|_{STATO}}$$

mentre l'uscita normalizzata per quello verso destra si esprime

$$R = \frac{e|_{RIGHT}}{e|_{STATO}}$$

Se cambia il contrasto globale i *rapporti* non cambiano.

OSS1

Il modello "energia" di A & B è stato presentato come un modello 1D e per un piccolo range di frequenze. Non è stato discusso

- nè il problema di selezione della \vec{v}
- nè l'interazione tra più frequenze

Si può comunque pensare di generalizzarlo secondo considerazioni simili a quelle di W & A.

OSS2

Confronto tra "modello energia" e "modello di Reichardt".

Modello Energia: (vedi fig: 34)

Modello di Reichardt (modificato): (vedi fig: 35)

f_1 e f_2 possono essere filtri passa banda che differiscono in posizione o fase.

OSS3

Cancellazione degli spettri (vedi fig: 36)

È interessante esaminare cosa accade in frequenza nei modelli di A & B o (W & A) durante la formazione del filtro direzionale.

RICORDIAMO CHE

$$h(x, y, t) = G(x, y, t) \cos(f_x x + f_y y + f_t t) = G(\cos \cos - \sin \sin)$$

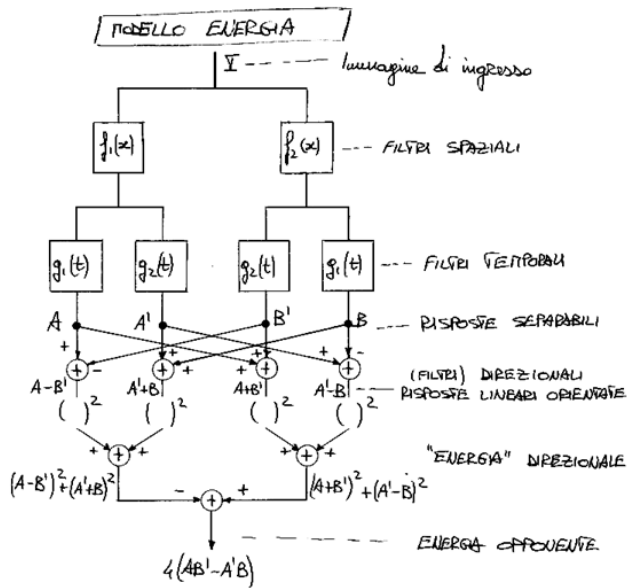


Figura 34: Modello di energia

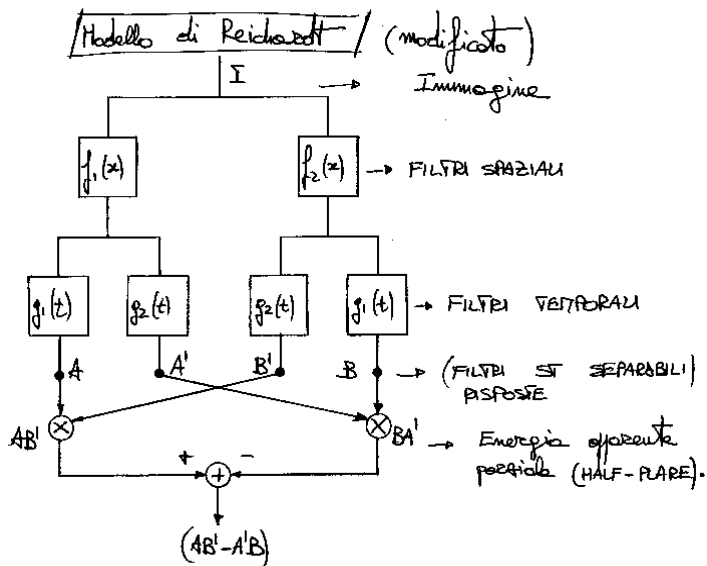


Figura 35: Modello di Reichardt

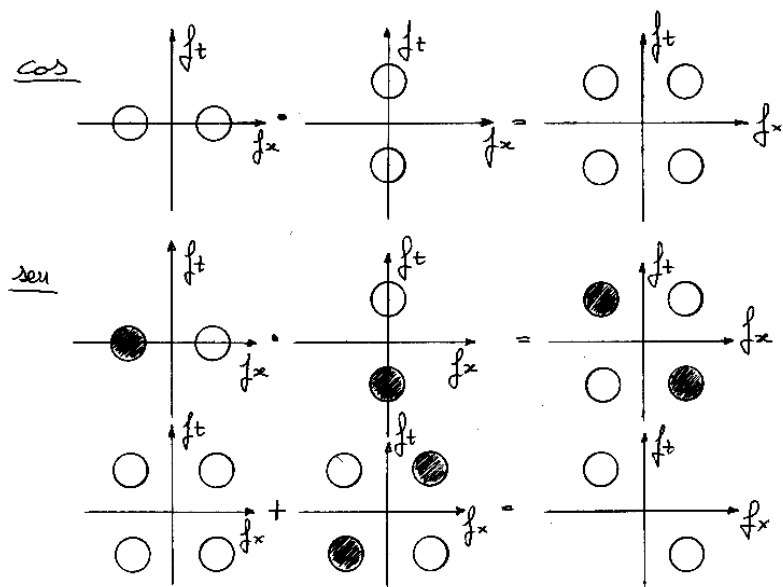


Figura 36: Cancellazione degli spettri. Le porzioni dello spettro indicate in nero sono porzioni negative