Correction proposée par Eddie Saudrais e.saudrais@wanadoo.fr

Partie I Évolution de l'air contenu dans une bulle

I-1 Propagation du son dans l'air

❑ 1 – L'équation d'Euler s'écrit

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{v}\right]=-\overrightarrow{\text{grad}}\,p\,.$$

En se limitant aux termes du premier ordre (on se place dans le cadre de l'approximation acoustique), on obtient

$$\boxed{\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,p_1}\,. \qquad \text{(I.1)}$$

L'équation de conservation de la matière s'écrit

$$\text{div}(\rho\,\vec{v})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\,.$$

En se limitant aux termes du premier ordre, on obtient

$$\boxed{\rho_0\,\text{div}\,\vec{v}+\frac{\partial\rho_1}{\partial t}=0}\,. \qquad \text{(I.2)}$$

❑ 2 – Si le temps caractéristique de l'évolution de l'air est petit devant le temps caractéristique des échanges thermiques par diffusion au sein de l'air, on peut considérer l'évolution comme isentropique ; c'est le cas ici, si les grandeurs ne varient pas trop lentement.

Par définition, on a

$$\chi_0=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S\,.$$

Une masse m d'air a un volume $V=\frac{m}{\rho}$. On a donc

$$\chi_0=-\frac{\rho}{m}\frac{\partial V}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S=-\frac{\rho}{m}\left(-\frac{m}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S\,,$$

soit

$$\boxed{\chi_0=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S}\,. \qquad \text{(I.3)}$$

La variation de la masse volumique étant $\rho-\rho_0=\rho_1$ et celle de la pression $p-p_0=p_1$, on a

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S=\frac{\rho_1}{p_1}\,,$$

d'où au premier ordre

$$\boxed{\chi_0=\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_1}{p_1}}\,. \qquad \text{(I.4)}$$

Pour une transformation isentropique, la loi de Laplace s'écrit $pV^\gamma=$ cte, soit $p\rho^{-\gamma}=$ cte. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}-\gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0\,,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S=\frac{\rho}{\gamma p}\,.$$

D'après l'équation (I.3), on a donc

$$\boxed{\chi_0=\frac{1}{\gamma p}\approx\frac{1}{\gamma p_0}}\,.$$

❑ 3 – D'après les équations (I.1) et (I.2), on a

$$\rho\frac{\partial\,\text{div}\,\vec{v}}{\partial t}=-\,\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,p_1)=-\Delta p_1\,,$$

soit

$$-\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2}=-\Delta p_1\,.$$

D'après l'équation (I.4), on en déduit

$$\boxed{\rho_0\chi_0\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=\Delta p_1}\,. \qquad \text{(I.5)}$$

La surpression vérifie l'équation de d'Alembert $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \Delta p_1$, la vitesse caractéristique des solutions étant

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}}. \tag{I.6}$$

La forme générale des solutions en ondes planes se propageant selon $\overrightarrow{u}_x$ ou $-\overrightarrow{u}_x$ est

$$\boxed{p_1(x,t) = f(x-ct)} \quad \text{et} \quad \boxed{p_1(x,t) = g(x+ct)}.$$

❑ 4 – La célérité des ondes sonores dans l'air est donnée par $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi_0}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$, soit

$$\boxed{c = 329\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}.$$

La longueur d'onde est relié à la célérité et à la fréquence de l'onde par $\lambda = \frac{c}{f}$. Pour le domaine audio, on a donc

$$\boxed{3{,}3\ \mathrm{cm} \leqslant \lambda \leqslant 3{,}28\ \mathrm{m}}.$$

I-2 Étude d'une bulle d'air

❑ 5 – La dimension de la bulle est largement inférieur à la longueur d'onde des ondes sonores du domaine audio dans l'air ; on peut donc considérer que la pression à l'intérieur de la bulle est uniforme.

❑ 6 – Pour des oscillations isentropiques, la loi de Laplace s'écrit $p(t)V^\gamma(t) = \text{cte}$ soit, avec $V = \frac{4}{3}\pi R^3(t)$,

$$p(t)R^{3\gamma}(t) = \text{cte}.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}p}{p(t)} + 3\gamma\frac{\mathrm{d}R}{R(t)} = 0.$$

En considérant de faibles variations autour de p_0 et R_0, on a $\mathrm{d}p = p_\mathrm{B}(t) - p_0$ et $\mathrm{d}R = R(t) - R_0 = \xi(t)$, d'où au premier ordre

$$\boxed{\frac{p_\mathrm{B}(t) - p_0}{p_0} + 3\gamma\frac{\xi(t)}{R_0} = 0}. \tag{I.7}$$

Partie II Oscillations d'une bulle d'air dans l'eau

II-1 Oscillations dans un fluide parfait incompressible

❑ 7 – Le fluide étant incompressible, on a

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{v} = 0 = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\left(r^2 v(r,t)\right)}{\mathrm{d}r}.$$

On a donc $r^2 v(r,t) = \text{cte}$. La continuité de la composante normale de la vitesse du fluide sur la « paroi » de la bulle s'écrit $v(R,t) = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$, d'où $r^2 v(r,t) = R^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$. On a donc

$$\boxed{v(r,t) = \left(\frac{R(t)}{r}\right)^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}}. \tag{II.8}$$

❑ 8 – L'équation d'Euler s'écrit, en projection sur $\overrightarrow{u}_r$,

$$\rho_\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}v(r,t)}{\mathrm{d}t} + v(r,t)\frac{\mathrm{d}v(r,t)}{\mathrm{d}r}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r},$$

soit compte tenu de (II.8),

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho_\mathrm{E}\left[\frac{2R\dot{R}}{r^2}\dot{R} + \left(\frac{R}{r}\right)^2\ddot{R} - 2\frac{R^2}{r^3}\dot{R}\left(\frac{R}{r}\right)^2\dot{R}\right],$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho_\mathrm{E}}{r^2}\left[2\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)R\dot{R} + R^2\ddot{R}\right]}. \tag{II.9}$$

❑ 9 – On a

$$\boxed{\lim_{r\to\infty} p(r,t) = p_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{r\to R(t)} p(r,t) = p_\mathrm{B}(t)}.$$

❑ 10 – Avec $R(t) = R_0 + \xi(t)$, l'équation (II.9) s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -2\rho_\mathrm{E}\frac{(R_0+\xi)\dot{\xi}^2}{r^2} - \rho_\mathrm{E}\frac{(R_0+\xi)^2}{r^2}\ddot{\xi} + 2\rho_\mathrm{E}\frac{(R_0+\xi)^4}{r^5}\dot{\xi}^2,$$

soit au premier ordre en ξ/R_0

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho_\mathrm{E}R_0^2}{r^2}\ddot{\xi}.$$

On a donc

$$\int_{p_\mathrm{B}(t)}^{p_0}\mathrm{d}p = -\rho_\mathrm{E}R_0^2\ddot{\xi}\int_{R(t)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \rho_\mathrm{E}R_0^2\ddot{\xi}\left[\frac{1}{r}\right]_{R(t)}^{\infty}$$

soit

$$p_0 - p_B(t) = -\frac{\rho_E R_0^2}{R(t)}\ddot{\xi} = -\frac{\rho_E R_0^2}{R_0+\xi}\ddot{\xi} \approx -\rho_E R_0 \ddot{\xi}$$

au premier ordre en ξ/R_0.
Compte tenu de (I.7), on a

$$\frac{p_B(t)-p_0}{p_0} = \frac{\rho_E R_0}{p_0}\ddot{\xi} = -\frac{3\gamma}{R_0}\xi,$$

d'où

$$\ddot{\xi} + \frac{3\gamma p_0}{\rho_E R_0^2}\xi = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \omega_M^2 \xi(t) = 0},$$

en posant $\omega_M = \sqrt{3\gamma \frac{p_0}{R_0^2 \rho_E}}$.

❑ 11 – On calcule $\boxed{\omega_M = 2{,}0\cdot 10^4\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$ et $\boxed{f_M = 3{,}3\ \mathrm{kHz}}$.
La longueur d'onde des ondes sonores de fréquence f_M est $\lambda = c f_M = 10$ cm ; on a bien $\lambda \gg R_0$, ce qui valide l'hypothèse d'uniformité de la pression faite en I-2.

❑ 12 – La vitesse est donnée par

$$v(r,t) = \left(\frac{R_0+\xi(t)}{r}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t},$$

soit à l'ordre le plus bas en ξ/R_0

$$\boxed{v(r,t) = \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}}.$$

D'après l'intégrale établie à la question 10, on a

$$\int_{p_B(t)}^{p(r,t)} \mathrm{d}p = \rho_E R_0^2 \ddot{\xi}\left[\frac{1}{r}\right]_{R(t)}^{r} = \rho_E R_0^2\ddot{\xi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R(t)}\right],$$

soit

$$p(r,t) = p_B(t) + \rho_E R_0^2 \ddot{\xi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0+\xi}\right].$$

À l'ordre le plus bas en ξ/R_0, on a donc

$$\boxed{p(r,t) = p_B(t) + \frac{\rho_E R_0^2}{r}\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}}.$$

C'est l'hypothèse d'**incompressibilité du fluide** qui permet de considérer une transmission instantanée des variations de volume ou de pression.

II-2 Propagation d'ondes acoustiques dans l'eau

❑ 13 – On a

$$\Delta p(r,t) = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[r\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + 2\frac{\partial p}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}.$$

L'équation d'onde s'écrit alors

$$\frac{\partial^2(rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c_E^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2}.$$

En posant $p(r,t) = p_0 + \frac{\pi(r,t)}{r}$, on a donc

$$\boxed{\frac{\partial^2\pi(r,t)}{\partial r^2} = \frac{1}{c_E^2}\frac{\partial^2\pi(r,t)}{\partial t^2}}.$$

La variable $\pi(r,t)$ vérifie donc l'équation de d'Alembert à une dimension.
La solution générale de cette équation peut s'écrire comme combinaison linéaire d'ondes progressives dans le sens des r croissants et des r décroissants. Les ondes étant émises par les oscillations de la bulle, on cherche donc des ondes divergentes, progressives dans le sens des r croissants à la célérité c_E, soit

$$\pi(r,t) = \varphi\left(t - \frac{r-R_0}{c_E}\right) \quad \text{pour } r \geqslant R_0,$$

d'où la forme proposée pour $p(r,t)$.

❑ 14 – L'équation d'Euler s'écrit en projection sur $\vec{u}_r$:

$$\rho_E a(r,t) = -\frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\varphi = \frac{1}{rc_E}\varphi'(u) + \frac{1}{r^2}\varphi(u),$$

d'où

$$\boxed{\vec{a}(r,t) = \frac{1}{\rho_E r^2}\left[\frac{r}{c_E}\varphi'(u) + \varphi(u)\right]\vec{u}_r}.$$

L'accélération du fluide au niveau de la surface de la bulle est donnée par

$$a(R(t),t) = \frac{\mathrm{d}^2 R(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

On a de plus $\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}$ et de même $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\mathrm{d}^2 xi}{\mathrm{d}u^2}$. L'expression de $a(r,t)$ s'écrit alors, pour $r=R_0+\xi$ à l'ordre le plus bas en ξ/R_0 :

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}=\frac{1}{\rho_\mathrm{E}}\left[\frac{R_0}{c_\mathrm{E}}\varphi'(u)+\varphi(u)\right],$$

d'où

$$\boxed{\frac{R_0}{c_\mathrm{E}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}+\varphi(u)=\rho_\mathrm{E}R_0^2\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}u^2}}.$$

❑ 15 – L'expression proposée ne conserve que les deux premiers termes du développement de la solution. Elle pourra être choisie si les termes suivants sont négligeables ; le temps caractéristique de l'évolution de la surpression étant $1/\omega_\mathrm{M}$, il faut donc

$$\boxed{c_\mathrm{E}\gg\omega_\mathrm{M}R_0}.$$

❑ 16 – On garde pour la surpression la forme

$$p(r,t)=p_0+\frac{\rho_\mathrm{E}R_0^2}{r}\xi''\left(t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}\right).$$

La continuité de la pression à la surface de séparation de la bulle d'air et de l'eau s'écrit $p(R(t),t)=p_\mathrm{B}(t)$, soit en utilisant (I.7)

$$p_0+\frac{\rho_\mathrm{E}R_0^2}{R_0+\xi(t)}\xi''\left(t-\frac{\xi(t)}{c_\mathrm{E}}\right)=p_0-3\frac{\gamma p_0}{R_0}\xi(t).$$

En se limitant au premier ordre en ξ/R_0, on en déduit

$$\rho_\mathrm{E}R_0\xi''(t)=-3\frac{\gamma p_0}{R_0}\xi(t),$$

soit

$$\boxed{\xi''(t)+\omega_\mathrm{M}^2\xi(t)=0}, \qquad \text{(II.10)}$$

où $\omega_\mathrm{M}=\sqrt{3\gamma\frac{p_0}{R_0^2\rho_\mathrm{E}}}$ est la pulsation de Minnaert.

❑ 17 – La forme des solutions $\{\varphi(r,t),p(r,t),\overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t)\}$ est maintenant plus satisfaisante que celle de la solution établie à la question 10, car elle fait apparaître un terme de propagation (en $t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}$) à la vitesse finie c_E. Les variations du rayon de la bulle ne se répercutent plus instantanément dans tout le fluide.

❑ 18 – La pression est donnée par

$$p(r,t)=p_0+\rho_\mathrm{E}R_0^2\left[\frac{1}{r}\xi''\left(t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}\right)-\frac{1}{c_\mathrm{E}}\xi'''\left(t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}\right)\right].$$

D'après l'équation (II.10), on a par dérivation

$$\xi'''\left(t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}\right)=-\omega_\mathrm{M}^2\xi'\left(t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}\right),$$

d'où

$$p(r,t)=p_0+\rho_\mathrm{E}R_0^2\left[\frac{1}{r}\xi''\left(t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}\right)+\frac{\omega_\mathrm{M}^2}{c_\mathrm{E}}\xi'\left(t-\frac{r-R_0}{c_\mathrm{E}}\right)\right].$$

La continuité de la pression à la surface de séparation de la bulle s'écrit $p(R(t),t)=p_\mathrm{B}(t)$, soit en utilisant la relation (I.7) de la question 6, avec $R(t)=R_0+\xi(t)$,

$$p_0+\rho_\mathrm{E}R_0^2\left[\frac{1}{R_0+\xi(t)}\xi''\left(t-\frac{\xi(t)}{R_0}\right)+\frac{\omega_\mathrm{M}^2}{c_\mathrm{E}}\xi'\left(t-\frac{\xi(t)}{R_0}\right)\right]=p_0-3\frac{\gamma p_0}{R_0}\xi(t).$$

En se limitant au premier ordre en $\xi(t)/R_0$, on en déduit

$$\rho_\mathrm{E}R_0\xi''(t)+\frac{\rho_\mathrm{E}R_0^2\omega_\mathrm{M}^2}{c_\mathrm{E}}\xi'(t)+3\frac{\gamma p_0}{R_0}\xi(t)=0,$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R_0\omega_\mathrm{M}^2}{c_\mathrm{E}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\frac{3\gamma p_0}{\rho_\mathrm{E}R_0^2}\xi(t)=0}.$$

Comme $\omega_\mathrm{M}=\sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_\mathrm{E}R_0^2}}$, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+2\Gamma\omega_\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\omega_\mathrm{M}^2\xi(t)=0,$$

avec

$$\boxed{\Gamma=\sqrt{\frac{3\gamma p_0}{4c_\mathrm{E}^2\rho_\mathrm{E}}}}.$$

❑ 19 – Le liquide étant compressible, la bulle rayonne de l'énergie en émettant une onde acoustique ; cette perte d'énergie par rayonnement est à l'origine de l'amortissement des oscillations.

En ordre de grandeur, on a $3\gamma/4 \approx 1$, et $\Gamma \approx \frac{10}{c_E}$. Dans l'eau, $c_E \approx 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, d'où en ordre de grandeur $\Gamma \approx 10^{-2}$. L'amortissement est faible ; on a $\boxed{\Gamma \ll 1}$.

L'amortissement étant faible, la pseudo-période ces oscillations peut être confondue avec la période propre $T_M = \frac{2\pi}{\omega_M}$. On lit sur le graphe $T = 1$ ms ; le rayon moyen de la bulle est alors estimé par

$$R_0 = \frac{T_M}{2\pi}\sqrt{\frac{3\gamma p_0}{\rho_E}} = \frac{10^{-3}}{2\pi}\sqrt{\frac{3\times 1{,}40\times 10^5}{10^3}} = 3{,}3\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

On a donc $\boxed{R_0 \approx 3\ \mathrm{mm}}$, ordre de grandeur réaliste.

Partie III Couplage acoustique de bulles

III-1 Étude théorique du couplage

❑ 20 – Soit A_1 un point à la surface de la bulle 1. On peut écrire

$$p_1(A_1,t) + p_2(A_1,t) = -\frac{3\gamma p_0}{R_0}\xi_1(t). \qquad \text{(III.11)}$$

La surpression rayonnée par la bulle 1 en A_1 vaut

$$p_1(A_1,t) = \rho_E R_0^2\left[\frac{1}{r_1}\xi_1''\left(t - \frac{r_1 - R_0}{c_E}\right) + \frac{\omega_M^2}{c_E}\xi_1'\left(t - \frac{r_1 - R_0}{c_E}\right)\right].$$

Comme $c_E \gg \omega_M d$, on peut négliger le terme de propagation dans l'expression de $\xi_k(u_k)$ et écrire $\xi_k(t)$.

On a donc

$$p_1(A_1,t) = \rho_E R_0^2\left[\frac{1}{R_0}\xi_1''(t) + \frac{\omega_M^2}{c_E}\xi_1'(t)\right]. \qquad \text{(III.12)}$$

La surpression rayonnée par la bulle 2 en A_1 vaut, avec la même approximation,

$$p_2(A_1,t) = \rho_E R_0^2\left[\frac{1}{r_2}\xi_2''(t) + \frac{\omega_M^2}{c_E}\xi_2'(t)\right].$$

Comme $R_0 \ll d$, on a $r_2 \approx d$, d'où

$$p_2(A_1,t) = \rho_E R_0^2\left[\frac{1}{d}\xi_2''(t) + \frac{\omega_M^2}{c_E}\xi_2'(t)\right]. \qquad \text{(III.13)}$$

D'après (III.12) et (III.13), l'équation (III.11) s'écrit

$$\rho_E R_0^2\left[\frac{1}{R_0}\xi_1''(t) + \frac{1}{d}\xi_2''(t) + \frac{\omega_M}{c_E}\left[\xi_1'(t) + \xi_2'(t)\right]\right] = -\frac{3\gamma p_0}{R_0}\xi_1(t),$$

soit

$$\xi_1'' + \frac{R_0}{d}\xi_2'' + \frac{R_0\omega_M}{c_E}\left(\xi_1' + \xi_2'\right) + \frac{3\gamma p_0}{\rho_E R_0^2}\xi_1 = 0.$$

Compte tenu des expressions de ω_M et de Γ établies précédemment, on peut écrire

$$\xi_1'' + \alpha\xi_2'' + 2\Gamma\omega_M^2\left(\xi_1' + \xi_2'\right) + \omega_M^2\xi_1 = 0, \qquad \text{(III.14)}$$

avec

$$\boxed{\alpha = \frac{R_0}{d}}.$$

Considérons un point A_2 à la surface de la bulle 2. On a

$$p_1(A_2,t) + p_2(A_2,t) = -\frac{3\gamma p_0}{R_0}\xi_2(t).$$

Comme précédemment, on peut écrire la surpression créée par la bulle 1 en A_2 au premier ordre :

$$p_1(A_2,t) = \rho_E R_0^2\left[\frac{1}{d}\xi_1''(t) + \frac{\omega_M^2}{c_E}\xi_1'(t)\right].$$

La surpression créée par la bulle 2 en A_2 s'écrit de même au premier ordre

$$p_2(A_2,t) = \rho_E R_0^2\left[\frac{1}{R_0}\xi_2''(t) + \frac{\omega_M^2}{c_E}\xi_2'(t)\right].$$

On a donc

$$\rho_E R_0^2\left[\frac{1}{d}\xi_1''(t) + \frac{1}{R_0}\xi_2''(t) + \frac{\omega_M^2}{c_E}\left[\xi_1'(t) + \xi_2'(t)\right]\right] = -\frac{3\gamma p_0}{R_0}\xi_2(t),$$

d'où

$$\xi_2'' + \frac{R_0}{d}\xi_1'' + \frac{R_0\omega_M}{c_E}\left(\xi_1' + \xi_2'\right) + \omega_M^2\xi_2 = 0.$$

On a donc

$$\xi_2'' + \alpha\xi_1'' + 2\Gamma\omega_M\left(\xi_1' + \xi_2'\right) + \omega_M^2\xi_2 = 0.$$

❑ 21 – Le mode symétrique correspond à $\xi_1(t) = \xi_2(t)$; l'équation (III.14) s'écrit alors

$$(1+\alpha)\xi_1'' + 4\Gamma\omega_M\xi_1' + \omega_M^2\xi_1 = 0\,,$$

soit

$$\boxed{\xi_1'' + \frac{4\Gamma\omega_M}{1+\alpha}\xi_1' + \frac{\omega_M^2}{1+\alpha}\xi_1 = 0}\,.$$

Si $\Gamma \ll 1$, la pseudo-pulsation des oscillations symétriques est

$$\boxed{\omega_s \approx \frac{\omega_M}{\sqrt{1+\alpha}}}\,.$$

Leur pseudo-pulsation a donc pour expression

$$\boxed{T_s \approx \frac{2\pi\sqrt{1+\alpha}}{\omega_M}}\,.$$

L'équation des oscillations amorties peut s'écrire $\xi_1'' + 2\Gamma'\omega_s\xi_1' + \omega_s^2\xi_1 = 0$; le coefficient d'amortissement est donc donné par

$$\boxed{\Gamma' = \frac{2}{\sqrt{1+\alpha}}\Gamma}\,.$$

Comme $\alpha = \frac{R_0}{d} \ll 1$, on a $\Gamma' \approx 2\Gamma$: le coefficient d'amortissement du mode symétrique est deux fois plus élevé que pour une bulle unique.

❑ 22 – Le mode antisymétrique correspond à $\xi_1(t) = -\xi_2(t)$; l'équation (III.14) s'écrit alors $(1-\alpha)\xi_1'' + \omega_M^2\xi_1 = 0$, soit

$$\boxed{\xi_1'' + \frac{\omega_M^2}{1-\alpha}\xi_1 = 0}\,.$$

La mode antisymétrique n'est pas amorti : il est décrit par un oscillateur harmonique de pulsation

$$\boxed{\omega_a = \frac{\omega_M}{\sqrt{1-\alpha}}}\,.$$

❑ 23 – La solution générale du système d'équations différentielles couplées est une combinaison linéaire des modes symétrique et antisymétrique.

Le mode symétrique est amorti, avec une constante de temps

$$\tau_s = \frac{1+\alpha}{2\Gamma\omega_M} \approx \frac{1}{2\Gamma\omega_M} = \frac{c_E}{R_0\omega_M^2}\,.$$

Au bout d'un temps $t \gg \frac{c_E}{R_0\omega_M^2}$, le système évolue selon le mode antisymétrique, avec $\xi_1(t) = -\xi_2(t) = A\cos(\Omega t + \psi)$.

Les pulsations des modes symétrique et antisymétrique étant très proches ($\alpha \ll 1$), leur combinaison donnera lieu à un phénomène de battements durant la phase transitoire.

III-2 Discussion du couplage

❑ 24 – *Attention aux unités*, la valeur numérique de $1/f_{\text{moyen}}^2$ est donnée en kHz^{-2}, comme ne le précise pas l'énoncé… On calcule alors

$$(R_0)_{\text{moyen}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\gamma p_0}{f_{\text{moyen}}^2\rho_E}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{3\times 1{,}40\times 0{,}47\cdot 10^{-6}}1{,}0\cdot 10^3 = 2{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{m}\,,$$

soit $\boxed{(R_0)_{\text{moyen}} = 2{,}2\ \text{mm}}$.

❑ 25 – D'après les questions 21 et 22, on a $\omega_s = \frac{\omega_M}{\sqrt{1+\alpha}}$ et $\omega_a = \frac{\omega_M}{\sqrt{1-\alpha}}$, d'où

$$\frac{1}{f_s^2} = \frac{1}{f_M^2}(1+\alpha) = \frac{1}{f_M^2}\left(1 + \frac{R_0}{d}\right)$$

et

$$\frac{1}{f_a^2} = \frac{1}{f_M^2}(1-\alpha) = \frac{1}{f_M^2}\left(1 - \frac{R_0}{d}\right).$$

Les courbes théoriques représentatives de $1/f^2$ en fonction de R_0/d sont des droites, de pente $+1$ pour le mode symétrique et -1 pour le mode antisymétrique. Les courbes expérimentales sont, au jugé, en accord avec les prédictions théoriques.

❑ 26 – Les deux droites ne se coupent pas sur l'axe des abscisses comme la théorie le prévoit (pour $\alpha = 0$ on doit avoir $\omega_s = \omega_a = \omega_M$). On a considéré l'eau comme un fluide parfait illimité ; dans la pratique, il faut tenir compte de la présence de la surface libre de l'eau et des parois du récipient.

❑ 27 – On n'a considéré que l'amortissement par rayonnement. Il faudrait prendre en compte l'amortissement par viscosité, par effet thermique (l'évolution de la bulle n'est pas rigoureusement isentropique), ainsi que par effet de tension superficielle.

Dans la pratique, l'effet de la tension superficielle peut être négligé, ainsi que l'amortissement par viscosité ; par contre, l'amortissement thermique ne peut pas être négligé.

❑ 28 – En tombant dans l'eau, les gouttes donnent naissance à des bulles. Plus les gouttes sont grosses, plus les bulles sont grosses, et plus leur fréquence de Minnaert est basse. Une analyse spectrale du bruit ambiant permet d'obtenir des informations sur la pluviométrie.

Commentaires personnels

N'hésitez pas à me faire part de vos remarques, ou à critiques mes commentaires.

Partie I Évolution de l'air contenu dans une bulle

❑ 2 – Il serait plus juste de faire établir la relation $\chi_0 = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S$.

❑ 3 – La notation $\overrightarrow{r} = \pm x\overrightarrow{u}_x$ pour caractériser les ondes progressives $p_1(\overrightarrow{r}, t)$ dans le sens des x croissants ou décroissants est absurde.

Partie II Oscillations d'une bulle d'air dans l'eau

« On néglige [...] toute variation de la variation hydrostatique de la pression dans l'eau ». Les variations de la variation ne peuvent donc pas varier ?...

❑ 12 – « Donner, à l'ordre le plus bas par rapport à $\xi(t)$ ou à ses dérivées » ; il vaudrait mieux préciser à l'ordre le plus bas par rapport à $\frac{\xi(t)}{R_0}$: un développement en puissance se fait vis-à-vis d'une grandeur sans dimension (et petite devant 1 en l'occurrence).

❑ 19 – Il est étonnant d'observer des battements dans les oscillations représentées dans la figure 1 ; ne correspondrait-elle pas au signal produit par une bulle appartenant à un système de deux bulles couplées ?

Partie III Couplage acoustique de bulles

Erreur d'énoncé, page 6 ; il faut lire : « on suppose enfin vérifiée l'inégalité $c_E \gg \omega_M d$ ».

Page 7 : la valeur numérique de la grandeur $\left(\dfrac{1}{f^2_{\text{moyen}}}\right)$ est donnée sans unité ! C'est d'autant plus gênant qu'il faut lire

$$\left(\frac{1}{f^2_{\text{moyen}}}\right) = 0{,}47\ \text{kHz}^{-2}.$$

L'unité n'est précisée qu'à la question 26, mais on en a besoin dès la question 24...