

# Aproximační křivky

---

## □ Trocha historie

- geometrické modelování – veliký pokrok v oblasti **letectví**

- **1944 – Roy Liming**

- analytik, North American Aviation (výrobce letadel)
- společně s konstruktérem a designérem Edgardem Schmuedem – **matematizace povrchu letounů**
- **poprvé klasické konstruování kombinované s výpočetními metodami**
- poprvé zavedl mnohem **účinnější metody** – jako první začal **popisovat křivky numericky** (konstruování křivek a ploch – v minulosti spočívalo na metodách DG)
- **nesporné výhody** – interpretace matematického popisu (na rozdíl od kresby) vždy správná
- **veliký ohlas** - brzy se rozšířilo do dalších amerických společností pro výrobu letadel

# Aproximační křivky

---

## □ Trocha historie

### □ v lodním i leteckém průmyslu

- postupně se začínaly využívat **kubiky** (do té doby kružnice, kuželosečky)
- **plochy se rozdělily na části** (tzv. pláty)
- vše definováno pomocí **matematických rovnic**

### □ 60. léta 20. století

#### ■ James C. Ferguson

- analytik u amerického výrobce letadel Boeing
- matematicky popsal plochu s kubickými parametrickými křivkami, na místo ploch vytvářených do té doby graficky na základě oblouků kuželoseček

# Aproximační křivky

---

## □ Trocha historie

### ■ Steven Anson Coons

- profesor na **Massachusetts Institute of Technology** (MIT) ve strojním inženýrství, zaměstnanec u amerického výrobce letadel Chance Vought
- **matematizace povrchů letounů**
- **popisy obecných plátů ploch** – zadávány libovolnými okrajovými křivkami
- jeho teorie – základ pro definice ploch, které se dnes běžně užívají – př. **B-spline** nebo **NURBS plochy**

## □ 60. léta 20. století

- výroba **prvních počítačů**, které se využívají ve strojírenství k řízení strojů, postupně se rozšiřují do dalších odvětví
- ještě však nejsou známy metody, jak počítačům předávat data v numerické podobě (Limingova metoda používána zpočátku jen v leteckém průmyslu)

# Aproximační křivky

---

## □ Trocha historie

- k rozvoji geometrického modelování (a to právě v předávání dat počítači) nezávisle na sobě přispěli Francouzi **Paul de Faget de Casteljaou** a **Pierre Etienne Bézier**
- většina významných objevů v oblasti **geometrického modelování** byla až **do 70. let 20. století izolována**
- nakonec tyto snahy vyvrcholily vznikem **nové vědní disciplíny CAGD** - Computer Aided Geometric Design (výpočetní geometrie)
  - bez zavedení počítačů do výroby by se ale tato disciplína jistě nemohla rozvinout

# Aproximační křivky

---

## □ Trocha historie

### ■ metody počítačového modelování

- velmi se zdokonalily
- dnes – k dispozici velmi kvalitní matematický aparát
- výraznou změnu přineslo používání - **racionálních Bézierových křivek a ploch a neuniformních racionálních B-spline křivek a ploch** tzv. **NURBS**
  - těmito metodami lze pomocí aproximace generovat klasické geometrické prvky – kuželosečky, kulové plochy

# Aproximační křivky

---

## □ Trocha historie

- v posledních letech vývoj v **oblasti geometrického modelování** přinesl mnoho dalších typů **křivek a ploch** zaváděných k různým speciálním účelům

## □ geometrické modelování

- obor, který se **neustále vyvíjí**
- v současné době využívá **počítačové modely** prakticky **každá oblast výroby**
- rozvoj grafických editorů, tzv. **CAD systémů**, umožnil projektování na počítači v různých odvětvích průmyslu

# Aproximační křivky

---

## □ Coonsovy kubiky

- uniformní neracionální B-spline
- určena čtyřmi řídicími body  $P_0, P_1, P_2, P_3$
- předpis pro výpočet Coonsovy kubiky

$$Q(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i(t), \text{ kde}$$

$$C_0(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1$$

$$C_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4$$

$$C_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$C_3(t) = t^3$$

$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$

# Aproximační křivky

---

## □ Coonsovy kubiky

- předpis - maticově

$$Q(t) = \frac{1}{6} T \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$t \in \langle 0, 1 \rangle$$



# Aproximační křivky

## □ Coonsovy kubiky

- položíme-li  $t = 0$  resp.  $t = 1$  ve vztahu

$$Q(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i(t)$$

- odvodíme

$$C_0(0) = 1$$

$$C_1(0) = 4$$

$$C_2(0) = 1$$

$$C_3(0) = 0$$



$$Q(0) = \frac{1}{6} \left( P_0 + \frac{1}{4} P_1 + P_2 \right)$$

**počáteční bod** křivky je tzv. **antitěžiště** trojúhelníka  $P_0P_1P_2$  pro vrchol  $P_1$  tj. leží na těžnici trojúhelníka procházející vrcholem a vzdálenost bodů  $P_1Q(0)$  se rovná jedné třetině délky těžnice

# Aproximační křivky

## □ Coonsovy kubiky

- položíme-li  $t = 0$  resp.  $t = 1$  ve vztahu

$$Q(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i(t)$$

- odvodíme

$$C_0(1) = 0$$

$$C_1(1) = 1$$

$$C_2(1) = 4$$

$$C_3(1) = 1$$



$$Q(1) = \frac{1}{6} \left( P_1 + \frac{1}{4} P_2 + P_3 \right)$$

**počáteční bod** křivky je tzv. **antitěžiště** trojúhelníka  $P_1P_2P_3$  pro vrchol  $P_2$  tj. leží na těžnici trojúhelníka procházející vrcholem a vzdálenost bodů  $P_2Q(1)$  se rovná jedné třetině délky těžnice

# Aproximační křivky

## □ Coonsovy kubiky

- dosadíme-li-li  $t = 0$  resp.  $t = 1$  do derivace vztahu  $Q(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i(t)$

$$Q'(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i'(t)$$

- odvodíme **tečné vektory v počátečním a koncovém bodě**  
Coonsovy kubiky

$$C_0'(t) = -3t^2 + 6t - 3$$

$$C_1'(t) = 9t^2 - 12t$$

$$C_2'(t) = -9t^2 + 6t + 3$$

$$C_3'(t) = 3t^2$$

$$C_0'(0) = -3$$

$$C_1'(0) = 0$$

$$C_2'(0) = 3$$

$$C_3'(0) = 0$$

$$Q'(0) = \frac{1}{6}(-3P_0 + 3P_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(P_2 - P_0)$$

# Aproximační křivky

## □ Coonsovy kubiky

- dosadíme-li-li  $t = 0$  resp.  $t = 1$  do derivace vztahu  $Q(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i(t)$

$$Q'(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 P_i C_i'(t)$$

- odvodíme **tečné vektory v počátečním a koncovém bodě**  
Coonsovy kubiky

$$C_0'(t) = -3t^2 + 6t - 3$$

$$C_1'(t) = 9t^2 - 12t$$

$$C_2'(t) = -9t^2 + 6t + 3$$

$$C_3'(t) = 3t^2$$

$$C_0'(1) = 0$$

$$C_1'(1) = -3$$

$$C_2'(1) = 0$$

$$C_3'(1) = 3$$

$$Q'(1) = \frac{1}{6}(-3P_1 + 3P_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$$

# Aproximační křivky

## □ Coonsovy kubiky

- tečné vektory

$$Q'(0) = \frac{1}{2}(P_2 - P_0)$$

$$Q'(1) = \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$$

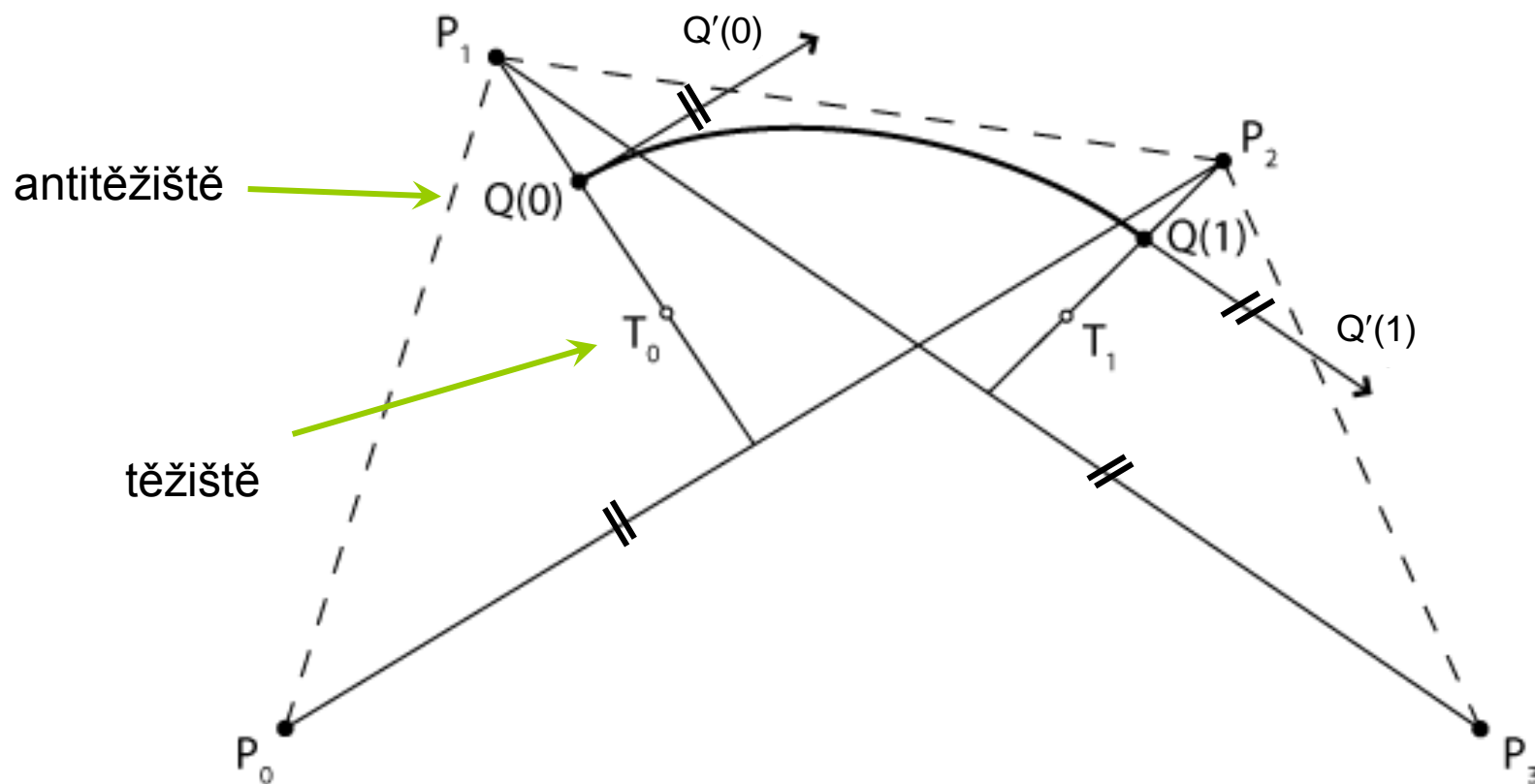
- tj. tečna Coonsovy kubiky v bodě  $Q(0)$  je rovnoběžná s přímkou  $P_0P_2$  a tečna v bodě  $Q(1)$  je rovnoběžná s přímkou  $P_1P_3$
- vzhledem k předchozí vlastnosti, jsme dokázali
  - **Coonsova kubika je Fergusonovou kubikou** pro body a tečné vektory:

$$\frac{1}{6}\left(P_0 + \frac{1}{4}P_1 + P_2\right) \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}(P_2 - P_0)$$
$$\frac{1}{6}\left(P_1 + \frac{1}{4}P_2 + P_3\right) \quad \frac{1}{2}(P_3 - P_1)$$

# Aproximační křivky

## □ Coonsovy kubiky

- příklad Coonsovy kubiky



# Aproximační křivky

## □ Coonsova kubika – vlastnosti

- kubika obecně **neprochází** krajními **body** svého **řídícího polygonu**
- kubika **leží v konvexním obalu** řídících bodů

□ důkaz plyne z:

$$\frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 C_i(t) = 1, \forall t$$

## ■ některé speciální případy zadávání Coonsovy kubiky

- leží-li řídící body  $P_0, P_1, P_2, P_3$  na **přímce**, pak je Coonsova kubika **úsečkou na této přímce**
- splynou-li body  $P_0 = P_1 (P_0 \neq P_2)$ , leží bod  $Q(0)$  na úsečce  $P_0P_2$  a platí

$$Q(0) = P_0 + \frac{1}{6}(P_2 - P_0)$$

- bod  $P_0 = P_1$  se nazývá **dvojnásobný bod** řídícího polygonu

# Aproximační křivky

---

## □ Coonsova kubika – vlastnosti

### ■ některé speciální případy zadávání Coonsovy kubiky

- splynou-li body  $P_0 = P_1 = P_2$  ( $P_0 \neq P_3$ ), pak  $Q(0) = P_0$   
a Coonsova kubika je úsečkou s druhým krajním bodem:

$$Q(1) = P_0 + \frac{1}{6}(P_3 - P_0)$$

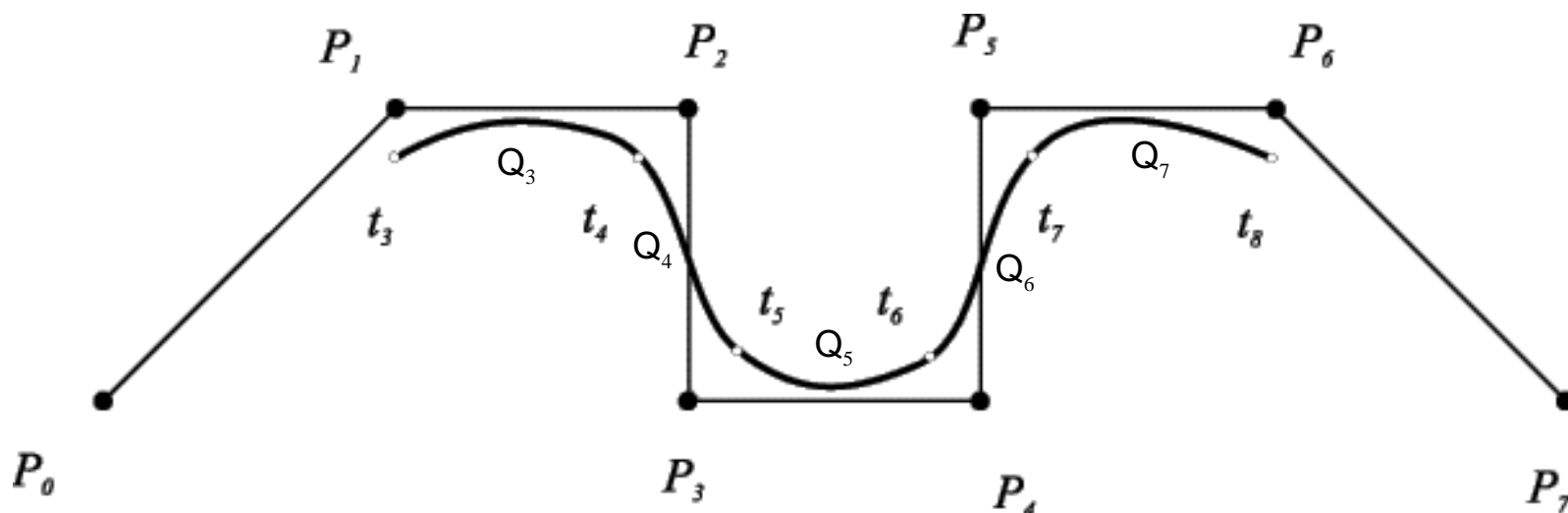
- bod  $P_0 = P_1 = P_2$  se nazývá **trojnásobný bod řídicího polygonu**



# Aproximační křivky

## □ Coonsova kubika – napojování

- navazování segmentů složených z Coonsových kubik



- segment  $Q_i$  je určen body  $P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$ , následující segment  $Q_{i+1}$  je definován body  $P_{i-2}, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$  - tedy třemi posledními body segmentu  $Q_i$  a jedním bodem segmentu následujícího

# Aproximační křivky

---

## □ Coonsova kubika – napojování

- **navazování segmentů** složených z Coonsových kubik
  - vzniká **tak uniformní kubický B-spline** (Coonsův kubický B-spline)
  - je určen  $n \geq 4$  body a skládá se z  $n - 3$  segmentů
- porovnáme-li vztahy pro tečné vektory a vektory druhých derivací dvou po sobě následujících segmentů  $Q_i$  a  $Q_{i+1}$



- **segment  $Q_{i+1}$  vychází z posledního bodu segmentu  $Q_i$**
- **první a druhé derivace jsou v bodě napojení identické**



- **křivka je v uzlech  $C^2$  spojitá**

# Aproximační křivky

## □ B-spline křivka

- přirozený kubický spline – interpolační křivka skládající se z polynomů stupně tři, ve svých uzlech  $C^2$  spojitá
- **B-spline křivka = křivka aproximační**
  - B-spline křivka stupně  $k$  je určena vztahem

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^k(t), \text{ kde } k < n$$

$N_i^k(t)$  -  $i$ -tá B-spline bázová funkce stupně  $k$

$k$  - stupeň B-spline

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \quad N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

# Aproximační křivky

---

## □ B-spline křivka

- uzlový vektor parametrů  $(t_0, t_1, \dots, t_m)$



- $n+1$  řídicích bodů

platí:

- $m+1$  uzlových bodů

$$m - k = n + 1$$

- $k$  stupeň křivky

- pokud platí  $t_{i+1} - t_i = konst.$ , potom hovoříme o **uniformní parametrizaci**

# Aproximační křivky

---

## □ B-spline křivka

- Coonsův kubický B-spline – **speciální případ B-spline křivky pro**

- **uzlový vektor**  $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4)$

- **stupeň  $k=3$**

- **počet řídicích bodů – 4**

na  $t \in \langle 0, 1 \rangle$

- **vlastnosti B-spline křivek**

- invariantní vůči otáčení , posunutí, změně měřítka

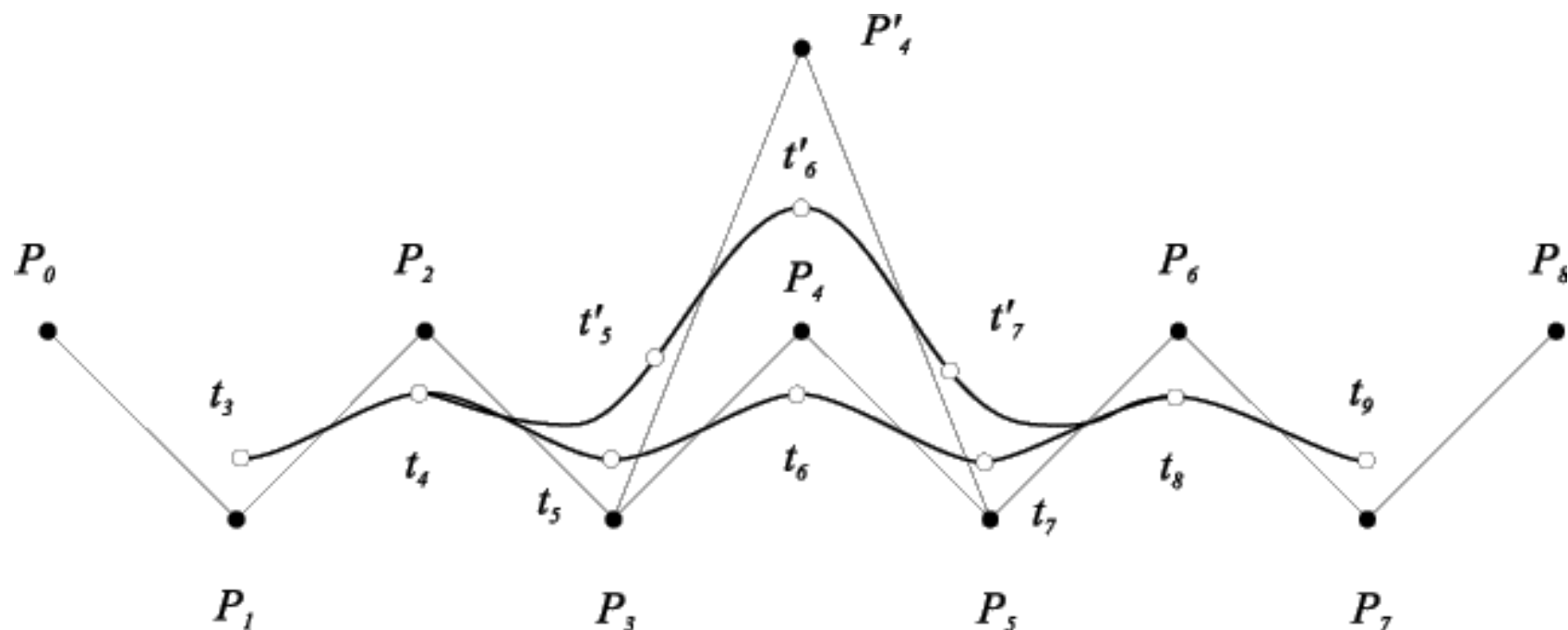
- jednotlivé segmenty leží v konvexních obálcích svých polygonů

- body řídicího polygonu mohou být vícenásobné

- **vliv změny polohy řídicího bodu je lokalizován, obecně nedochází ke změně celé křivky**

# Aproximační křivky

## □ B-spline křivka



Lokalita změny tvaru křivky při změně polohy bodu řídicího polygonu

# Aproximační křivky

## □ NURBS – neuniformní racionální B-spline křivka

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_i^k(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_i^k(t)}, \text{ kde}$$

$\omega_i$  - je váha bodu řídícího polygonu

$N_i^k(t)$  -  $i$ -tá B-spline bázová funkce stupně  $k$

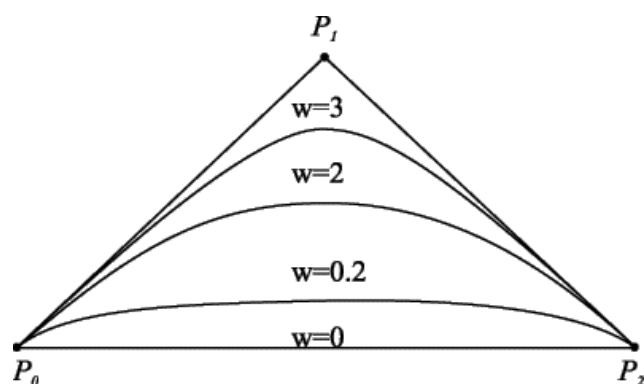
$k$  - stupeň B-spline

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \quad N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle t_i, t_{i+1} \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

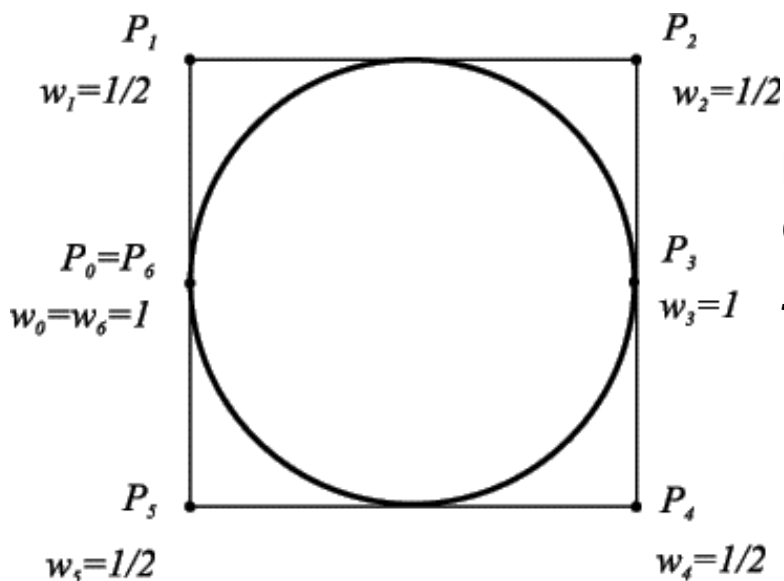
# Aproximační křivky

## □ NURBS – neuniformní racionální B-spline křivka

- umožňují přesné vyjádření kuželoseček – jako podíl polynomů
- jsou invariantní k rotaci, translaci, změně měřítka a navíc i k paralelnímu a středovému promítání



vliv váhy bodu



kružnice  
definovaná  
jako NURBS