第9章

重　积　分

在科学技术中往往需要计算与多元函数及平面或空间区域有关的量，例如，物体的体积、质量、重心、转动惯量等，解决这类问题需要多元函数积分学的理论。多元函数积分学的思想方法与定积分类似，在第 8 章中我们已经给出了它们统一的定义——宏积分，并且知道闭区域上的连续函数一定可积。

本章所研究的对象是多元函数在平面区域 $\mathbf{R}^2$ 和空间区域 $\mathbf{R}^3$ 上的积分，统称为重积分。主要介绍重积分的相关概念、性质、计算方法，最后给出了重积分的一些应用。学习中要抓住重积分与定积分之间的联系，注意比较它们的异同之处。

内容初识

9.1　重积分的概念

早在 16 世纪中叶，英国数学家牛顿(1642—1727)为了研究球及球壳作用于质点上的万有引力，在他的著作《自然哲学的数学原理》中曾涉及到二重积分，但由于当时数学知识的局限性，只能用几何来描述。1771 年，欧拉(1707—1783)对重积分进行了系统的研究，首次给出了用二次积分计算二重积分的方法。与此同时，拉格朗日(1736—1813)在有关旋转椭球引力的研究中，用三重积分表示引力，采用了极坐标形式，解决了用直角坐标计算重积分带来的困难。为了克服计算中的困难，他转用球坐标，建立了有关的积分变换公式，开始了多重积分变换的研究。与此同时，拉普拉斯也使用了球坐标变换。将一元函数积分思想推广到多元函数。建立多重积分理论的主要是 18 世纪的数学家。1841 年，雅可比(1804—1851)研究了重积分的变量代换，使重积分的计算更加简便有效。

在第 8.5 节，我们给出了宏积分的概念，同时给出了二重积分和三重积分的定义。下面介绍重积分的相关概念及意义。

9.1.1　二重积分的相关概念

设 $\mathrm{d}\sigma$ 是有界闭区域 D 内的任意小区域，任取一点 $(x,y)\in\mathrm{d}\sigma$，对于定义在 D 上的连

续函数 $f(x,y)$，一定存在实数 I，使得函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分存在，即

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $f(x,y)$ 称为**被积函数**，D 称为**积分区域**，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为**被积表达式**，$\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积微元**，x 与 y 称为**积分变量**。

【注】 当 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续时，二重积分一定存在。

二重积分的几何意义——曲顶柱体的体积

设 $z=f(x,y)$ 是定义在 xOy 平面内的有界闭区域 D 上的连续函数，且 $f(x,y)\geqslant 0$。在空间直角坐标系中，$z=f(x,y)$ 表示曲面。所谓曲顶柱体是以 $z=f(x,y)$ 为曲顶，以有界闭区域 D 为底，以 D 的边界曲线为准线而母线平行于 z 轴的柱面为侧面的立体，如图 9.1 所示。

按照核元素的定义，对于任意小区域 $\mathrm{d}\sigma\subset D$，任取 $(x,y)\in\mathrm{d}\sigma$，体积核元素 $\mathrm{d}V=f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，如图 9.2 所示，则体积核元素的二重积分

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

即为曲顶柱体的体积。

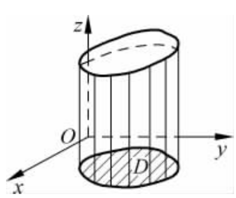

图　9.1

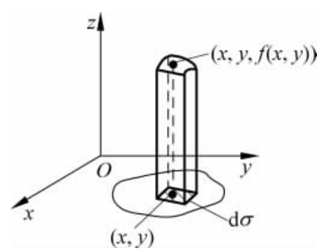

图　9.2

也就是说，二重积分在几何上表示曲顶柱体的体积。

特别地，当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以区域 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。当 $f(x,y)\leqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以区域 D 为底，以 $z=-f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体体积的负值。如果 $f(x,y)$ 在 D 的若干部分区域上是正的，而在其他的部分区域上是负的，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 就等于这些部分区域上的柱体体积的代数和。

在许多实际问题中，凡是计算在平面有界闭区域上非均匀分布的量的总和，如某区域 G 上渗出强度不均匀的渗出水量问题、非均匀薄片的质量等许多物理量或几何量，都可以依据核元素的思想表示成二重积分的形式。

二重积分的物理意义——平面薄片的质量

设一平面薄片占有 xOy 平面内的闭区域 D，它在点 (x,y) 的面密度 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 且连

续，$d\sigma$是D内的任意小区域，任取$(x,y)\in d\sigma$，质量核元素$dM=\rho(x,y)d\sigma$，如图9.3所示，则质量核元素的二重积分

$$M=\iint_D \rho(x,y)d\sigma$$

即为平面薄片的质量。

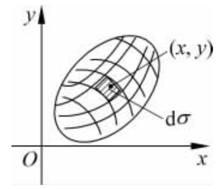

图 9.3

也就是说，二重积分在物理上可以表示平面非均匀薄片的质量。

【注】

(1) 此处仅以平面薄片的质量为例，说明二重积分具有物理意义，如果在二重积分中赋予$f(x,y)$其他不同的意义，则可用于解决其他一些物理量或几何量的计算，二重积分也就具有相应的物理意义。

(2) 二重积分是一个确定的数，这个数的大小与被积函数$f(x,y)$及积分区域D有关，而与积分变量的记号无关，即

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(u,v)d\sigma$$

9.1.2 三重积分的相关概念

二重积分是二元函数在平面闭区域上的积分，三重积分则是三元函数在空间闭区域上的积分。

设dV是空间有界闭区域Ω内的任意小区域，任取一点$(x,y,z)\in dV$，对于定义在Ω上的连续函数$f(x,y,z)$，一定存在实数I，使得函数$f(x,y,z)$在区域D上的三重积分存在，即

$$I=\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$$

其中$f(x,y,z)$称为**被积函数**，Ω称为积分区域，$f(x,y,z)dV$称为**被积表达式**，dV称为**体积微元**，x,y,z称为**积分变量**。

【注】 当$f(x,y,z)$在空间有界闭区域Ω上连续时，三重积分一定存在。

三重积分的物理意义——非均匀物体的质量

设一非均匀物体所占空间为有界闭区域Ω，它在点(x,y,z)处的体密度$\rho(x,y,z)>0$，且在Ω上连续，dV是Ω内的任意小区域，任取$(x,y,z)\in dV$，质量核元素$dM=\rho(x,y,z)dV$，如图9.4所示，则质量核元素的三重积分

$$M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dV$$

即为立体Ω的质量。

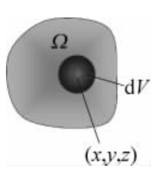

图 9.4

也就是说，三重积分在物理上可以表示空间非均匀物体的质量。

【注】

(1) 在物理、几何及工程技术中，有许多物理量或几何量都可以归结为三重积分的形式，三重积分也就具有相应的物理意义。

(2) 与二重积分一样，三重积分也是一个确定的数，这个数的大小与被积函数 $f(x,y,z)$ 及积分区域 Ω 有关，而与积分变量的记号无关，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} f(u,v,w)\mathrm{d}V$$

(3) 定积分与二重积分均有几何意义，一般地三重积分无法给出几何解释。但是，当被积函数 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时，$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$ 有明确的几何意义，它表示积分区域 Ω 的体积。

9.1.3 重积分的性质

二重积分的性质

二重积分的定义与定积分的定义类似，所以二重积分与定积分具有类似的性质，这里只给出结论，有兴趣的读者可自证。

设二元函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上都可积，二重积分的性质如下。

性质 9.1（线性性） 设 k_1，k_2 为任意常数，则有

$$\iint\limits_{D}[k_1 f(x,y) \pm k_2 g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = k_1\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm k_2\iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 9.2（可加性） 如果区域 D 被连续曲线分为 D_1 与 D_2，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 9.3（单位性） 如果在区域 D 上 $f(x,y)\equiv 1$，σ 为区域 D 的面积，那么

$$\iint\limits_{D} 1\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma = \sigma$$

【注】 $\iint\limits_{D} 1\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma = \sigma$，这里只是说积分值在数值上等于积分区域 D 的面积，但是实质上，$\iint\limits_{D} 1\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义仍然表示以区域 D 为底，高为 1 的平顶柱体的体积。

根据单位性可立得结论：

若 D：$x^2+y^2 \leqslant R^2$，则 $\iint\limits_{D} 1\mathrm{d}\sigma = \pi R^2$。

性质 9.4（保号性） 若在区域 D 上 $f(x,y)\geqslant 0$，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geqslant 0$$

性质 9.5（保序性） 若在区域 D 上，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_{D} g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

该性质说明： 当两个相同区域上的二重积分比较大小时，可以由它们的被积函数在积分区域上的大小而确定。

推论 1 二重积分的绝对值小于等于函数绝对值的二重积分

$$\left|\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_{D} |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

性质 9.6(有界性—估值定理) 设 M 与 m 是 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上的最大值和最小值,则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma$$

其中 σ 为区域 D 的面积,该不等式称为二重积分的估值不等式。

性质 9.7(中值定理) 设函数 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续,σ 为区域 D 的面积,则在 D 上至少存在一点(ξ,η),使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

中值定理几何解释:如果 $f(x,y)\geqslant 0$,曲顶柱体体积等于与它同底而高为曲顶上某点的竖坐标的平顶柱体的体积。

性质 9.8(奇偶对称性) 记 $I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,$I_1=\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=D_1\cup D_2$,$D_1\cap D_2=\phi$,结论如表 9.1 所示。

表 9.1

积分类型	积分区域对称性	被积函数的奇偶性	简化结果
二重积分	D_1 和 D_2 关于 $y=0$(x 轴)对称	$f(x,-y)=f(x,y)$	$I=2I_1$
		$f(x,-y)=-f(x,y)$	$I=0$
	D_1 和 D_2 关于 $x=0$(y 轴)对称	$f(-x,y)=f(x,y)$	$I=2I_1$
		$f(-x,y)=-f(x,y)$	$I=0$

三重积分的奇偶对称性

三重积分的性质与二重积分完全类似,其他性质这里就不再赘述,只给出三重积分计算的奇偶对称性。

奇偶对称性:记 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$,$I_1=\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$,其中 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$,$\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$,结论如表 9.2 所示。

表 9.2

积分类型	积分区域对称性	被积函数的奇偶性	简化结果
三重积分	Ω_1 和 Ω_2 关于 $z=0$(即 xOy 面)平面对称	$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$	$I=2I_1$
		$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$	$I=0$
	Ω_1 和 Ω_2 关于 $y=0$(即 zOx 面)平面对称	$f(x,-y,z)=f(x,y,z)$	$I=2I_1$
		$f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$	$I=0$
	Ω_1 和 Ω_2 关于 $x=0$(即 yOz 面)平面对称	$f(-x,y,z)=f(x,y,z)$	$I=2I_1$
		$f(-x,y,z)=-f(x,y,z)$	$I=0$

经典解析

9.2　二重积分的计算

在一般情形下，单纯依靠定义或者性质来计算重积分的值是极其困难的，所以也要像定积分那样寻求实际可行的计算方法。通常的方法是化重积分为累次积分。

重积分的计算主要是根据积分区域选择积分次序，然后确定变量的积分上下限，将重积分转化为累次积分。并且，当积分区域或被积函数具有某种对称性时，若利用对称性进行合理地搭配，就能变难为易，简化解题过程，提高解题效率。重积分的对称性有两种：变量轮换对称性和奇偶对称性。

9.2.1　直角坐标系下二重积分的计算

为了将二重积分化为二次积分，首先将平面积分区域进行划分。

（一）X-型区域

若 D 可以用不等式

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

来表示，如图 9.5 所示，其中 $y_1(x)$，$y_2(x)$在$[a,b]$上连续，则称 D 是 X-型区域。

（二）Y-型区域

若 D 可以用不等式

$$x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

来表示，如图 9.6 所示，其中 $x_1(y)$，$x_2(y)$在区间$[c,d]$上连续，则称 D 是 Y-型区域。

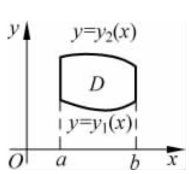

图　9.5

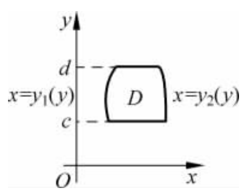

图　9.6

【练习】 判断下列区域的类型，并用不等式表示。

（1）区域 D 由半圆 $y=\sqrt{4-x^2}$ 及 x 轴所围成。

（2）区域 D 由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $x-y=2$ 所围成。

在直角坐标系中计算二重积分，可取面积微元为 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故二重积分可以记为

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据二重积分的几何意义，当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值等于以 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。而此曲顶柱体的体积也可用“平行截面面积已知的立体体积”的方法来计算。

当 D 是 X-型区域时，如果取体积微元是以 $\mathrm{d}x$ 为高，$A(x)$ 为底的体积，就是 $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x$，又由微元法有

$$A(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$$

如图 9.7 所示。从而得到

$$V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{记作}}\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{9.1}$$

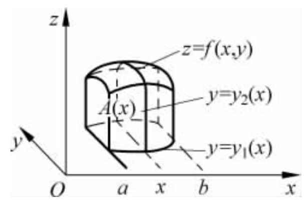

图 9.7

称式(9.1)为把二重积分化为了先对 y 后对 x 的二次积分，也叫累次积分。

【注】 在式(9.1)第一个积分$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 中把 x 看作常数，对 y 计算从 $y_1(x)$ 到 $y_2(x)$ 的定积分，这时计算结果是一个 x 的函数；然后再计算第二次积分时，x 是积分变量，对 x 计算在$[a,b]$上的定积分，计算结果是一个定值。

在上述讨论中，我们假定曲顶柱体的曲顶 $f(x,y)\geqslant 0$，但在一般情况下，$f(x,y)$取值任意时，式(9.1)同样成立。

类似地，如果区域 D 是 Y-型区域，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{9.2}$$

称为先对 x 后对 y 的二次积分。

【注】 二重积分化为二次积分时，两次积分的下限必须不大于上限，先对 y 积分的积分限中不能含有积分变量 y，后对 x 积分的积分限必定是常数。

注意：

(1) 若积分区域 D 既是 X-型又是 Y-型，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$$

这说明二次积分可交换积分次序。

(2) 若积分区域 D 是矩形：$a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

此时交换积分次序，积分限不变。

(3) 若积分区域 D 既不是 X-型又不是 Y-型，可用平行于坐标轴的直线将 D 分成几个部分区域，使得每部分都属于 X-型或 Y-型，如此，D 上的积分就可化成各部分区域上积分的和，如图 9.8 所示。

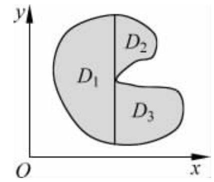

图　9.8

例 9.1　求二重积分 $\iint\limits_{D}(1-x-y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$-2\leqslant y\leqslant 2$。

【解】　积分区域是矩形，积分变量 x,y 之间没有依赖关系，则先对 y 后对 x 积分，有

$$\iint\limits_{D}(1-x-y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-2}^{2}(1-x-y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}4(1-x)\mathrm{d}x=8$$

先对 x 后对 y 积分，有

$$\iint\limits_{D}(1-x-y)\mathrm{d}\sigma=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}(1-x-y)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}2(1-y)\mathrm{d}y=8$$

例 9.2　计算 $\iint\limits_{D}x\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=1$，$x=2$，$y=2x$ 所围成的区域。

【分析】　二重积分化为二次积分的关键是根据区域确定二次积分的积分限。确定积分限时，请记住定限口诀：

后积先定限，域内划条线，先交是下限，后交是上限。

【解】　如图 9.9 所示，积分区域 D 是三角形，先对 y 后对 x 积分或者先对 x 后对 y 积分都是比较容易的。若将 D 表示成 X-型域，则 D：$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$，$1\leqslant y\leqslant 2x$，于是有

$$\iint\limits_{D}x\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{1}^{2x}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x(2x-1)\mathrm{d}x=\frac{27}{8}$$

若将 D 表示成 Y-型域，则 D：$1\leqslant y\leqslant 4$，$\frac{y}{2}\leqslant x\leqslant 2$，于是有

$$\iint\limits_{D}x\,\mathrm{d}\sigma=\int_{1}^{4}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{2}x\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{4}\left(2-\frac{y^2}{8}\right)\mathrm{d}y=\frac{27}{8}$$

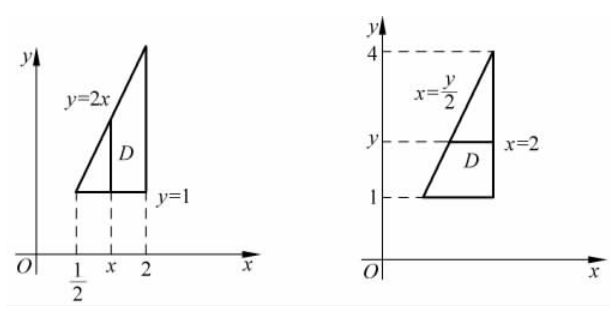

图　9.9

【练习】　计算 $\iint\limits_{D}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$。

例 9.3　计算 $\iint\limits_{D}2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭

区域。

【分析】 积分区域如图 9.10(a)所示，本题若按 X-型积分区域计算(即先对 y 积分后对 x 积分)，就必须用线段将区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分，同时积分要分成两部分进行，这样计算起来要比较麻烦。如果按 Y-型积分区域计算(即先对 x 积分后对 y 积分)，则计算会相对简单。

【解】 如图 9.10(b)所示，求出抛物线 $y^2=x$ 与直线 $y=x-2$ 的交点 $A(1,-1)$ 和 $B(4,2)$，积分区域 D 可表示为

$$D:\begin{cases} y^2 \leqslant x \leqslant y+2 \\ -1 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

所以

$$\iint\limits_D 2xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}2xy\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}(x^2y)\Big|_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]\mathrm{d}y = \frac{45}{4}$$

【注】 积分次序选择的依据之一是积分区域分割越少越好，这样化成的二次积分部分也就越少，计算越简单。

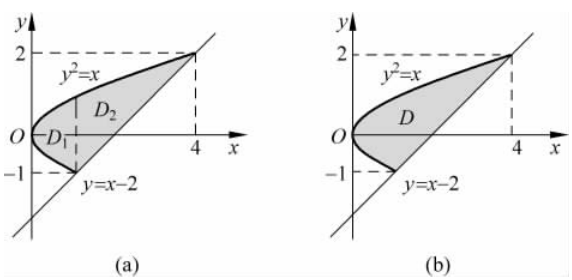

图 9.10

9.2.2 极坐标系下二重积分的计算

对于二重积分的积分区域为圆形、扇形、环形等情况，有时表示成 X-型域或者 Y-型域是比较复杂的，而在极坐标系下表示则比较简单。下面介绍这种计算方法。

在极坐标系中，积分区域 D 的分割可用下述两族曲线：一族是以极点为顶点的射线，一族是以极点为中心的同心圆，如图 9.11 所示。此时 $\mathrm{d}\sigma$ 是半径为 ρ 和 $\rho+\mathrm{d}\rho$ 的两圆弧与极角等于 θ 和 $\theta+\mathrm{d}\theta$ 的两条射线所形成的小区域，其面积(也用 $\mathrm{d}\sigma$ 来表示)近似于边长为 $\rho\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}\rho$ 的小矩形的面积，如图 9.12 所示，于是在极坐标中面积元素为 $\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$，再分别用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代替被积函数 $f(x,y)$ 中的 x 和 y，便得到二重积分在极坐标系下的表达式

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

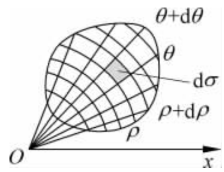

图 9.11

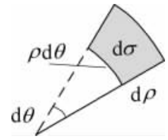

图 9.12

【注】 面积元素的极坐标形式中有一个因子ρ,运用时切勿遗漏!

实际计算时,极坐标系下的二重积分,同样可以化成二次积分来计算,下面分三种情况讨论。

(1) 极点O在区域D之外,如图9.13所示。

设区域D:$\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)$,$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,$\rho_1(\theta)$,$\rho_2(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续。先在$[\alpha,\beta]$上任意取定一个$\theta$,对应于这个$\theta$值,区域$D$上点$\rho$坐标从$\rho_1(\theta)$变到$\rho_2(\theta)$,则有

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

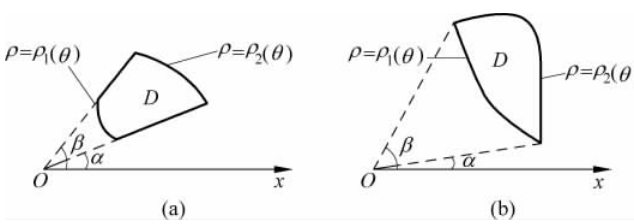

图 9.13

(2) 极点O在区域D的边界上,如图9.14所示。

此时D:$0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)$,$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,则有

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

(3) 极点O在区域D的内部,如图9.15所示。

此时D:$0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,则有

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

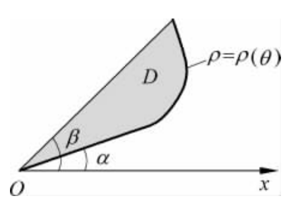

图 9.14

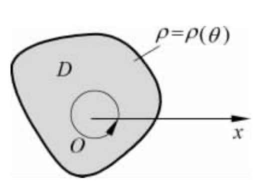

图 9.15

【注】 因为在极坐标系中，区域 D 的边界曲线方程通常总是用 $\rho=\rho(\theta)$ 来表示，即区域 D：$\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，所以一般是选择先积 ρ 后积 θ 的次序。先积 θ 后积 ρ 的次序不太常用。

例 9.4 计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 所围成的环形区域在第一象限的部分。

【解】 极坐标系下 $x^2+y^2=\rho^2$，且 D 可表示为：$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$1\leqslant\rho\leqslant 2$，所以

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{7}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{7}{6}\pi$$

例 9.5 计算 $\iint\limits_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，$D$ 为圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$。

【解】 采用极坐标，则积分区域 D：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\rho\leqslant a$，故有

$$\iint\limits_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\rho^2}\right)\Big|_0^a\mathrm{d}\theta=\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2})$$

【思考】 读者不妨用直角坐标来计算一下，看看运算过程将会变得怎样，并思考一下为什么本题适合用极坐标进行计算。

【练习】

(1) 计算二重积分 $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是单位圆在第一象限的部分。

(2) 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 和 $x^2+y^2=1$ 所围成的环形区域。

【思考】 在极坐标系下，积分区域有什么特点时两次积分的积分限都是常数？

由上述例题分析可见，能否成功地完成二重积分的计算，关键在于掌握以下计算二重积分的步骤：

(1) 作出积分区域 D 的图形，借助积分区域图可以选定合适的坐标系、积分顺序，明确是否使用对称性，更重要的是积分区域图有助于准确确定积分限。

(2) 充分利用奇偶对称性。

(3) 选择适当的坐标系。一般地，当积分区域 D 是圆域、圆环域或圆域、环域的一部分(例如扇形区域)，而被积函数形如 $f(x,y)=f(x^2+y^2)$ 或 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 时，采用极坐标系较为简单，其余多采用直角坐标系。

(4) 选择恰当的积分次序。一般地，在直角坐标系，X-型域先积 y，Y-型域先积 x；在极坐标下，先积 ρ。选择积分次序的原则是使计算尽量简单，积分区域分块要少，累次积分好算为妙。

(5) 确定正确的积分限。请牢记定限口诀：后积先定限，域内划条线，先交是下限，

后交是上限。

特别注意，先积分变量的积分上下限通常是后积分的变量的函数（个别情况为常数），而后积分的变量的积分上下限一定是常数，二重积分最后的结果是一个数值。

9.2.3 利用对称性计算二重积分

当积分区域或被积函数具有某种对称性时，利用对称性计算二重积分，能够极大地减少计算量。对称性包括奇偶对称性和轮换对称性。

例 9.6 计算二重积分 $\iint\limits_D (xe^{\cos x}+x^2y^3)\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D：$|x|+|y|\leqslant 1$。

【解】 积分区域如图 9.16 所示，由于积分区域关于 y 轴对称，而被积函数 $xe^{\cos x}$ 关于 x 是奇函数，又 D 关于 x 轴对称，x^2y^3 关于 y 是奇函数，利用奇偶对称性可知，原积分 $I=0$。

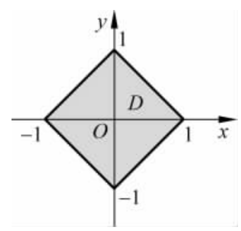

图 9.16

【练习】 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^3-2x+y^5+3y+2)\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D：$x^2+y^2\leqslant 4$。

坐标的轮换对称性，简单的说就是将坐标轴重新命名，如果积分区域的函数表达式不变，则被积函数中的 x,y,z 也同样作变化后，积分值保持不变。

例 9.7 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$。

【解】 积分区域 D 关于变量 x,y 具有轮换对称性，因此

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

原积分

$$I=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\frac{\pi}{2}$$

9.3 三重积分的计算

9.3.1 直角坐标系下三重积分的计算

与二重积分计算类似，三重积分的计算是化三重积分为定积分与二重积分，从而进一步将三重积分化为三次定积分。关键是根据积分区域 Ω 来确定三次积分的积分次序与积分上、下限。

（一）投影法（“先一后二”法）

三重积分的计算主要是找体积微元 $\mathrm{d}V$。如果积分和的极限存在，在直角坐标系下，用平行于坐标面的三组平面来分割区域 Ω，于是在直角坐标系下体积元素可取为 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，故

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

二重积分化为二次积分来计算，并且根据积分区域(平面区域)来确定二次积分的上、下限。同样三重积分化为三次积分来计算，并且根据积分区域(空间区域)来确定三次积分的上、下限。下面介绍把三重积分化为三次积分的方法，关键是确定三次积分的积分次序与积分上、下限。

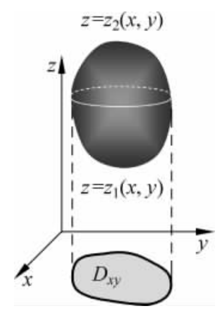

图 9.17

设函数 $f(x,y,z)$在空间区域 Ω 上连续。如图 9.17 所示，平行于 z 轴的任何直线与 Ω 的边界曲面的交点不多于两个，且 Ω 在 xOy 面上的投影 D_{xy} 是一个有界闭区域。以 D_{xy} 的边界曲线为准线作母线平行于 z 轴的柱面，此柱面与区域 Ω 的交线将 Ω 的边界曲面分为上、下两部分，设其方程分别为 $z=z_1(x,y)$，$z=z_2(x,y)$，z_1，z_2 都在 D_{xy} 上连续，且 $z_1(x,y)\leqslant z_2(x,y)$。先将 x，y 看作常数，函数 $f(x,y,z)$在$[z_1(x,y),z_2(x,y)]$上对 z 积分，其结果为 x，y 的函数，记为

$$F(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

然后再按二重积分的计算方法计算 $F(x,y)$在 D_{xy} 上的二重积分，则

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_{D_{xy}} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (9.3)\end{aligned}$$

这种方法是将三重积分化为先定积分后二重积分来进行计算，因此叫做“先一后二”法也称为“投影法”。

如果 D_{xy} 可以用不等式组 $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 来表示，则可将二重积分化为先 y 后 x 的二次积分，于是得到三重积分的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \qquad (9.4)$$

这样，就把三重积分化为先对 z 积分，后对 y 积分，最后对 x 的三次积分。

如果 D_{xy} 可以用不等式组 $x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$ 来表示，则可将二重积分化为先 x 后 y 的二次积分，于是得到三重积分的计算公式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\mathrm{d}x\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \qquad (9.5)$$

这样，就把三重积分化为先对 z 积分，后对 x 积分，最后对 y 的三次积分。

【注】 有时为了计算方便，也可以将 Ω 投影到 xoz 面或 yoz 面上，计算方法与上述类似，不再重述。

例 9.8 计算 $\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由三个坐标平面及平面 $x+y+z=1$ 所围成。

【解】 首先画出积分区域 Ω，如图 9.18 所示。显然，Ω 可以看作是一个上曲面为 $z=1-x-y$，下曲面为 $z=0$ 的柱体，Ω 在 xOy 面的投影区域 D_{xy} 可表示为 $0\leqslant y\leqslant 1-x$，

$0\leqslant x\leqslant 1$,所以

$$\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}x(1-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{24}$$

例 9.9　计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是上半球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2, z\geqslant 0$。

【解】　如图 9.19 所示,积分区域在 xOy 平面的投影区域 D：$x^2+y^2\leqslant a^2$。Ω 由曲面 $z=0$ 与 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 围成,因此有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}z\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\frac{1}{2}(a^2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

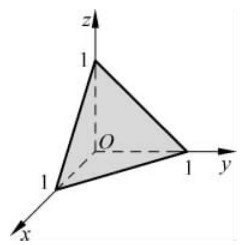

图　9.18

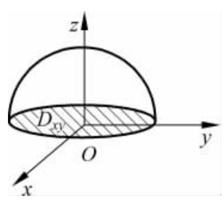

图　9.19

再利用极坐标计算此二重积分得

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a^2-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=\pi\left(\frac{1}{2}a^2\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^a=\frac{1}{4}\pi a^4$$

(二) 截面法("先二后一"法)

截面法与投影法的计算顺序恰好相反,即先二重积分再定积分,简称"先二后一"法。

假设积分区域 Ω 如图 9.20 所示,Ω 由两平面 $z=c$,$z=d$ 夹住,截面法的具体步骤为：

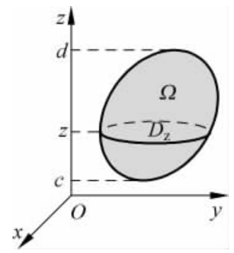

图　9.20

第一步：作积分区域 Ω 的图形,把 Ω 投影到 z 轴上,得到一个投影区间$[c,d]$。

第二步：在区间$[c,d]$内任意一点 z 处,作平行于 xOy 面的平面,截区域 Ω 得一平面截面 $D(z)$。固定 z,先求 $D(z)$上的二重积分

$$\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

得到结果为 z 的函数。

第三步：在区间$[c,d]$上对 z 求定积分,

$$\int_c^d\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这样就将三重积分化为先二重积分后定积分的方法来进行计算，即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \mathrm{d}z \iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9.6}$$

这种方法称为“先二后一”法也称为“截面法”。

【注】 对被积函数只含变量z的积分$\iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$或者二重积分$\iint_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$容易积分，并且截面面积易求时使用截面法。利用截面法可直接将三重积分化为定积分，因而计算十分简便。

例 9.10 用“截面法”计算例 9.12。

【解】 如图 9.21 所示，积分区域Ω在z轴上的投影区间为$[0,a]$，对于$[0,a]$中任一点z，做平面$z=z$与球面的截面$D(z)$为圆域$x^2+y^2\leqslant a^2-z^2$，则

$$\iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi(a^2-z^2)$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^a z\mathrm{d}z \iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \pi z(a^2-z^2)\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\pi a^4$$

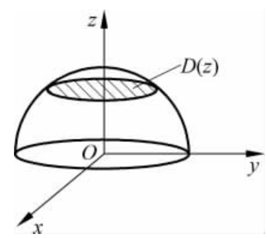

图 9.21

例 9.11 计算$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z$。

【解】 根据三次积分的上下限找出积分区域Ω，它是由$z=x+y$，$x=0$，$y=0$和$z=1$所围成的区域，如图 9.22 所示。Ω在z轴上的投影区间为$[0,1]$，对$[0,1]$上的任一点，区域Ω内相应的截面$D(z)$为一个三角形区域，其斜边为$z=x+y$，面积为$\frac{1}{2}z^2$。于是可得

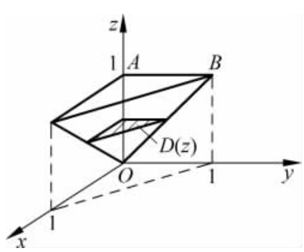

图 9.22

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z &= \int_0^1 \frac{\sin z}{z}\mathrm{d}z \iint_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}z\sin z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1)\end{aligned}$$

【练习】 计算三重积分$I=\iiint_{\Omega}(1+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由曲面$z^2=x^2+y^2$，$z=1$，$z=2$围成。

9.3.2 柱坐标系下三重积分的计算

利用极坐标可以简化一些二重积分的计算，同样，三重积分也可以用柱坐标(如图 9.23 所示)和球坐标来简化计算。

在计算三重积分时，当被积函数具有特点：

$$f(x,y,z) = F(x^2+y^2,z) \quad f(x,y,z) = F\left(\arctan\frac{y}{x},z\right)$$

并且积分区域Ω的投影区域是圆形、圆柱形、扇形、弓形时，一般使用柱坐标相对简便。

下面介绍在柱坐标下如何计算三重积分。

用柱坐标计算三重积分，关键是求柱坐标中的体积微元 $\mathrm{d}V$。用三组坐标面(如图 9.24 所示)$\rho=$常数、$\theta=$常数、$z=$常数，把 Ω 分成许多小闭区域，除了靠近 Ω 的边界曲面的一些不规则小闭区域外，这种小区域都是柱体，如图 9.25 所示。

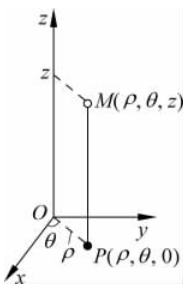

图　9.23

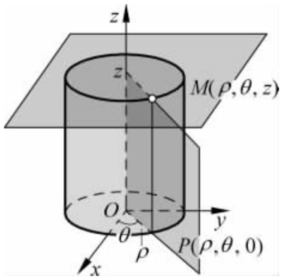

图　9.24

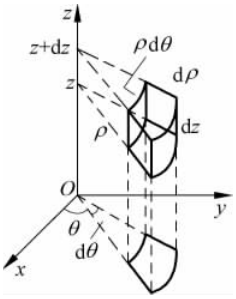

图　9.25

现考虑由 ρ,θ,z 各取得微小增量 $\mathrm{d}\rho,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z$ 所成的柱体的体积，这个体积等于高与底面积的乘积，现在高为 $\mathrm{d}z$，底面积在不计高阶无穷小时为 $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$(即极坐标中的面积元素)，于是得 $\mathrm{d}V=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，从而有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

按照直角坐标系中化三重积分为三次积分的方法，可将上式化为对 ρ,θ,z 的三次积分。

【注】 柱坐标下三重积分化为三次积分的次序一般是：先对 z 积分，再对 ρ 积分，最后对 θ 积分。

此外，用柱面坐标进行计算时，应将 Ω 的边界曲面的直角坐标系下的方程转化为柱面坐标下的方程。例如，下列曲面的直角方程在柱坐标系中对应的方程为

(1) $x^2+y^2=a^2\Leftrightarrow\rho=a$　(圆柱面)

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2\Leftrightarrow\rho^2+z^2=a^2$　(球面)

(3) $x^2+y^2=z\Leftrightarrow z=\rho^2$　(旋转抛物面)

(4) $x^2+(y-a)^2+z^2=a^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2ay\Leftrightarrow\rho^2+z^2=2a\rho\sin\theta$　(球面)

如图 9.26～图 9.29 所示。

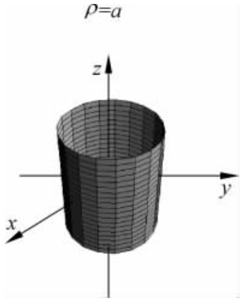

图　9.26

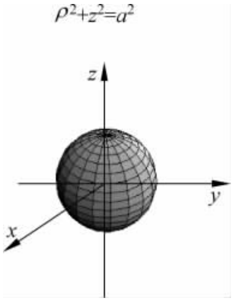

图　9.27

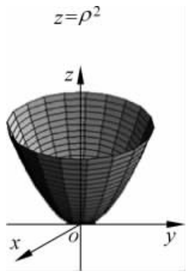

图 9.28

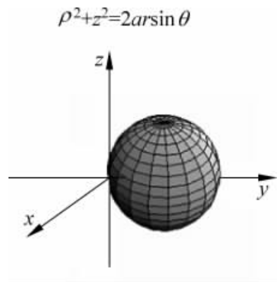

图 9.29

例 9.12 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(h>0)$ 所围成的区域。

【解】 积分区域如图 9.30 所示。采用柱坐标，则圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的柱面方程为 $z=\rho$，积分区域 Ω 可用不等式组

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant h,\quad \rho\leqslant z\leqslant h$$

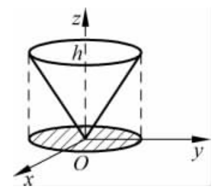

图 9.30

表示，所以

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho^2\mathrm{d}\rho\int_\rho^h\mathrm{d}z=2\pi\int_0^h\rho^2(h-\rho)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}h^4。$$

例 9.13 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的立体。

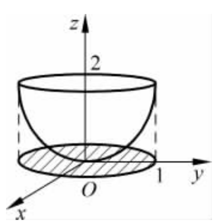

图 9.31

【解】 积分区域如图 9.31 所示，在柱坐标下，积分区域 Ω 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1,\quad \rho^2\leqslant z\leqslant 1$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1\rho^3(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{6}$$

【练习】

(1) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$，$z=2$ 所围成的区域。

(2) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 是曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的区域。

9.3.3　利用对称性计算三重积分

三重积分的对称性有**变量轮换对称性**和**奇偶对称性**。在三重积分计算中，当积分区域或被积函数具有某种对称性时，若利用对称性进行合理地搭配，就能变难为易，简化解题过程，提高解题效率。

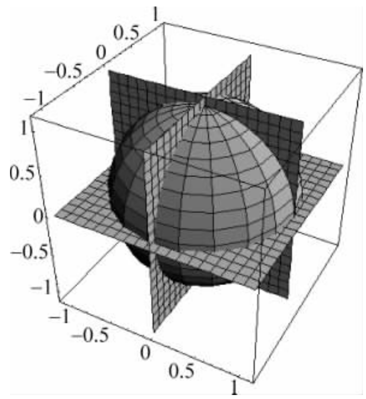

图　9.32

例 9.14　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^3+y^2z+y^7+z^5)\mathrm{d}V$，其中积分区域为球体 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$。

【解】　如图 9.32 所示，由于积分区域关于 xOy 面对称，而被积函数 y^2z+z^5 关于 z 是奇函数，又 Ω 关于 yOz 面对称，x^3 关于 x 是奇函数，Ω 关于 xOz 面对称，y^7 关于 y 是奇函数，故原积分 $I=0$。

例 9.15　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}V$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$。

【解】　因为积分区域关于 xOy 面对称，而被积函数关于变量 z 为奇函数，根据奇偶对称性可得 $I=0$。

例 9.16　计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(ax+by+cz)\mathrm{d}V$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$。

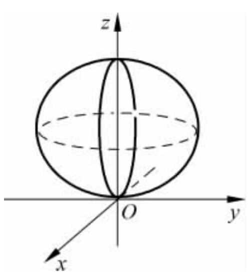

图　9.33

【解】　如图 9.33 所示，因为 Ω 关于平面 $x=0$，$y=0$ 都对称，函数 ax，by 分别关于 x 和 y 为奇函数，则 $\iiint\limits_{\Omega}ax\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}by\,\mathrm{d}V=0$，于是

$$I=c\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=c\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=c\pi\int_0^2(2z^2-z^3)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}c\pi$$

例 9.17　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V$，其中 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$。

【解】　根据变量轮换对称性，有

$$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V$$

设 $D(z)$：$x^2+y^2\leqslant R^2-z^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}V=3\int_0^R z\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^R z\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{3}{16}\pi R^4$$

【注】　使用对称性来简化重积分的计算，能够使重积分计算过程更方便，更简单，在重积分计算中具有很好的应用价值。

方法纵横

9.4 二重积分的计算方法拓展

(一) 利用性质计算二重积分

在二重积分的计算过程中,巧妙的利用性质进行计算常能化难为易,简化计算。

例 9.18 比较下列积分的大小

$$I_1=\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$$

其中积分区域 D:$(x-2)^2+(y-1)^2\leqslant 2$。

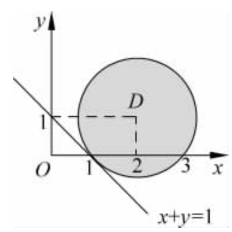

图 9.34

【解】 利用保序性进行比较,无需计算积分的值,简单易行。如图 9.34 所示,积分域 D 的边界为圆周$(x-2)^2+(y-1)^2=2$,它与 x 轴交于点 (1,0)与直线 $x+y=1$ 相切,而区域 D 位于直线的上方,故在 D 上 $x+y\geqslant 1$,从而$(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$,故有

$$\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$$

【练习】 (1) 比较二重积分$\iint_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$与$\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}\sigma$的大小,其中积分区域 D: $x^2+y^2\leqslant 1$。

(2) 二重积分

$$I_1=\iint_D \ln^3(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint_D (x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint_D[\sin(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 由 $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}$ 和 $x+y=1$ 围成,试比较 I_1, I_2, I_3 之间的大小顺序。

例 9.19 估计积分$\iint_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值,其中 D 是正方形$[0,1]\times[0,1]$。

【解】 区域 D 具有轮换对称性,故有

$$\iint_D \cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \cos x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\iint_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\cos x^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $\cos x^2+\sin x^2=\sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)$, $0\leqslant x^2\leqslant 1$,所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$$

从而 $1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，因此

$$1\leqslant\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\sqrt{2}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}$$

例 9.20 设 $f(x,y)$ 在区域 D：$x^2+y^2\leqslant t^2$ 上连续，则当 $t\to 0$ 时，求

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

【解】 利用积分中值定理：$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi t^2 f(\xi,\eta)$，其中 (ξ,η) 为 D 内一点，显然，当 $t\to 0$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$。由 $f(x,y)$ 的连续性得

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{t\to 0}f(\xi,\eta)=f(0,0)$$

例 9.21 计算 $I=\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 所围成，f 是 D 上的连续函数。

【解】 积分区域本身不具有对称性，但若添加辅助线 $y=-x^3$，将区域 D 分成两部分 D_1 和 D_2，如图 9.35 所示，则

$$I=\iint\limits_{D_1}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

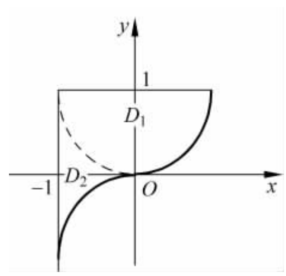

图 9.35

其中 D_1：关于 y 轴对称，故

$$\iint\limits_{D_1}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

D_2：关于 x 轴对称，故

$$\iint\limits_{D_2}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{-x^3}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}$$

【注】 利用对称性计算二重积分，要同时考虑被积函数的奇偶性和积分区域的对称性，不能只注意积分区域关于坐标轴的对称性，而忽视了被积函数应具有相应的奇偶性。

（二）积分次序的选取问题

有时为了计算简便，需要将一种二次积分的积分次序更换为另一种积分次序，其关键步骤为：

(1) 由所给累次积分的积分限画出积分区域 D 的图形；

(2) 交换积分次序，按照新积分次序重新将积分区域 D 表示成另一种联立不等式。

例 9.22 交换积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y^2}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序。

【解】 观察两个积分的上、下限，它们的积分区域可分别用联立不等式表示为

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant y^2\end{cases}\quad 和 \quad D_2:\begin{cases}1\leqslant y\leqslant 2\\0\leqslant x\leqslant \sqrt{1-(y-1)^2}\end{cases}$$

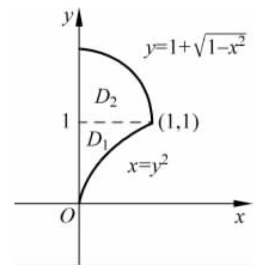

图 9.36

由此可知,$D=D_1\cup D_2$ 是由曲线 $y^2=x,x^2+(y-1)^2=1$ 及 $x=0$ 所围成的,如图 9.36 所示。D 可表示为 X-型域

$$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

于是

$$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx$$
$$=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

在二重积分的计算中,选择恰当的积分次序能够简化计算量。有时被积函数对某个变量的积分的原函数可能不是初等函数,因此积分次序的选取在二重积分化为二次积分时是关键的。选择积分先后顺序的依据有两条:一是积分区域被分割得越少越好;二是看被积函数先对哪个自变量的积分比较简单、容易。

一般地,遇到如下形式的积分:$\int\frac{\sin x}{x}dx,\int\sin x^2dx,\int\cos x^2dx,\int e^{\frac{y}{x}}dx,\int e^{x^2}dx,\int\frac{1}{\ln x}dx$ 等,一定要将其放在后面积分。

例 9.23 计算$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy$,$D$ 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $x=y^2$ 所围成的区域。

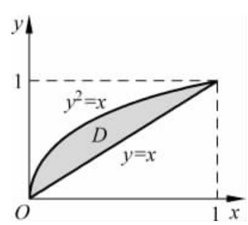

图 9.37

【分析】 如图 9.37 所示,若按 X-型区域计算,此时区域 D 可表示成

$$D: x\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

则有

$$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$$

由于被积函数$\frac{\sin y}{y}$的原函数不能用初等函数表示,积分无法进行。

【解】 由上述分析可知,只能选择按 Y-型域进行计算,则

$$D: y^2\leqslant x\leqslant y,\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

故

$$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$$
$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$$
$$=\int_0^1\sin y dy-\int_0^1 y\sin y dy$$

$$= (-\cos y)\Big|_0^1 - (-y\cos y + \sin y)\Big|_0^1 = 1 - \sin 1$$

【练习】 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}\,dx\,dy$,其中 D 由直线 $y = x, y = 1$ 与 y 轴所围成。

【注】 选择积分顺序应充分考虑积分区域的形状和被积函数的形式。积分顺序选择不当,有时会导致计算复杂或无法进行。

例 9.24 计算积分$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\,dx\,dy$,其中 D 是以$(0,0)$,$(1,1)$,$(0,1)$为顶点的三角形。

【解】 因为$\int e^{-y^2}\,dy$ 不能用有限形式表示出其结果,所以不能先积分,故

$$\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 e^{-y^2}\,dy\int_0^y x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 y^3 e^{-y^2}\,dy$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 y^2\,d(e^{-y^2}) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{2}{e}\right)$$

(三)坐标系的选取问题

例 9.25 计算$\int_0^a dx\int_{-x}^{-a+\sqrt{a^2-x^2}} \dfrac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}(a > 0)$。

【解】 该二次积分直接计算较复杂,交换积分次序之后仍然比较复杂。根据被积函数和积分区域的特点,可以考虑化为极坐标下的二次积分来计算。如图 9.38 所示,所给积分区域 D 可表示为

$$D:\begin{cases} 0 \leqslant \rho \leqslant -2a\sin\theta \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 0 \end{cases}$$

于是

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta\int_0^{-2a\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\,d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \arcsin\frac{\rho}{2a}\Big|_0^{-2a\sin\theta}\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (-\theta)\,d\theta = \frac{\pi^2}{32}$$

例 9.26 计算广义积分 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$。

【解】 本题若用直角坐标计算,这个积分是"积不出"的。如图 9.39 所示,根据积分的变量不变性,利用二重积分,并选择极坐标进行计算,有

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

故

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\text{(概率积分)}$$

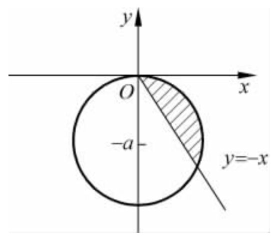

图 9.38

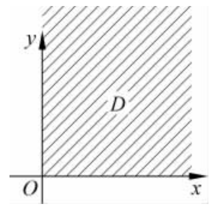

图 9.39

（四）几种特殊积分区域下的二重积分

对于某些形式的二重积分，其积分区域的边界曲线用直角坐标方程表示比较复杂，例如双纽线、心脏线等，而在极坐标系下的方程则相对简单。或者被积函数用极坐标表示能使计算简便，因此选用极坐标系进行计算。

例 9.27 求曲线 $\rho=2\sin\theta$ 与直线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 及 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 所围成平面图形的面积。

【解】 设所求图形的面积为 A，所占区域为 D，如图 9.40 所示，则

$$A=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$$

区域 D 在极坐标下可表示为

$$D:\quad 0\leqslant\rho\leqslant 2\sin\theta,\quad \frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$$

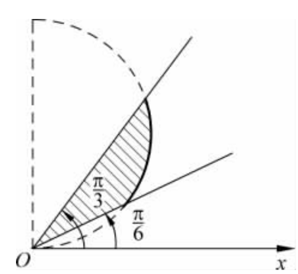

图 9.40

于是

$$A=\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho\mathrm{d}\rho=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{6}$$

【注】 积分区域虽然是圆，但圆心不在原点，用直角坐标表示方程较复杂。

【练习】 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\geqslant a^2$ 所围成的图形的面积。

例 9.28 计算 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由心脏线 $\rho=1+\cos\theta$ 和圆 $\rho\geqslant 1$ 所围成。

【解】 积分区域如图 9.41 所示，故有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{1+\cos\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\\&=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos\theta)^3-1]\mathrm{d}\theta\\&=\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

【注】 心脏线方程 $x^2+y^2=a(x+\sqrt{x^2+y^2})$ 在直角坐标系下表示比较复杂，但若用极坐标表示则相对简单。

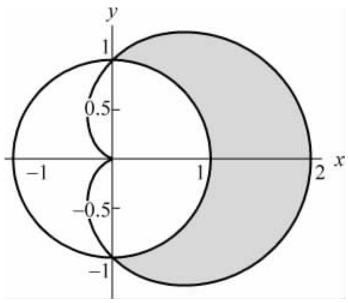

图 9.41

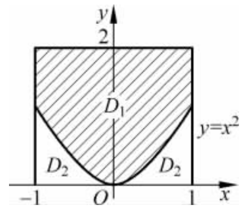

图 9.42

（五）分段函数的二重积分

被积函数是绝对值的重积分，需要借助积分区域将被积函数表示成分段函数，然后根据几何图形的性质分区域进行积分。

例 9.29 计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2$。

【解】 $\sqrt{|y-x^2|}=\begin{cases}\sqrt{y-x^2} & y\geqslant x^2\\ \sqrt{x^2-y} & y<x^2\end{cases}$，如图 9.42 所示，

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^{0}\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2-(\sqrt{2}\sin t)^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t+\frac{1}{3}\\&=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\mathrm{d}t+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

（六）二重积分不等式的证明

在证明二重积分的不等式时，通常会用到重积分的保序性和估值性质以及公式

$$f^2(x)+g^2(x)\geqslant 2f(x)g(x)$$

常用的方法有估值法、判别式法、辅助函数法。

例 9.30 设 $f(x)$ 为$[0,1]$上的单调增加的连续函数，证明

$$\frac{\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}$$

【证】 令

$$I=\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\iint_D xf^3(x)f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D f^3(x)yf^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D f^3(x)f^2(y)(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9.7}$$

类似地,有

$$I=\iint_D f^3(y)f^2(x)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9.8}$$

将式(9.7)、式(9.8)相加,得

$$2I=\iint_D [f^3(x)f^2(y)(x-y)+f^3(y)f^2(x)(y-x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D f^2(x)f^2(y)[f(x)(x-y)+f(y)(y-x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D f^2(x)f^2(y)(x-y)(f(x)-f(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到 $f(x)$ 为单调增加的,故有

$$(x-y)(f(x)-f(y))\geqslant 0$$

即 $I\geqslant 0$,所以

$$\frac{\int_0^1 xf^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}$$

例 9.31 设在区间$[a,b]$上 $f(x)$连续且大于零,试用二重积分证明不等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geqslant(b-a)^2$$

【解】 设 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b\}$则

$$\iint_D f(x)\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$\iint_D f(y)\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\iint_D 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)}{f(x)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=(b-a)^2$$

9.5　三重积分的计算方法拓展

（一）球坐标系下三重积分的计算

前面已经介绍了在直角坐标系和柱坐标系下计算三重积分的方法，但是当被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$，积分区域为球、半球、球锥或两球面围成的立体时，使用球坐标(如图 9.43 所示)计算相对简便。下面介绍在球坐标下如何计算三重积分。

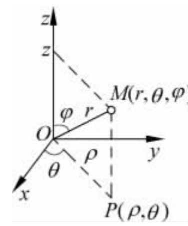

图　9.43

用三组坐标面(如图 9.44 所示)$r=$常数，$\theta=$常数，$\varphi=$常数，把积分区域 Ω 分成许多小闭区域。考虑由 r,θ,φ 各取得微小增量 $\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}\varphi$ 所成的六面体的体积，如图 9.45 所示。不计高阶无穷小，可把六面体看作以 $r\sin\varphi\mathrm{d}\theta, r\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}r$ 为棱长的长方体，于是，在球坐标系中的体积微元为

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

从而得到三重积分在球坐标系中的表达式

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

计算时，再进一步将上式化为三次积分即可。

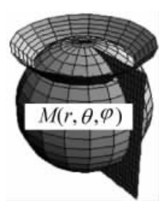

图　9.44

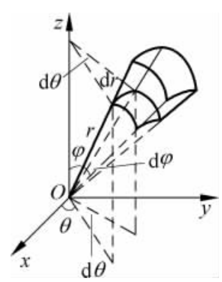

图　9.45

【注】　用球坐标进行计算时，应将 Ω 的边界曲面的直角坐标系下的方程转化为球坐标系下的方程。

此外，用球坐标系进行计算时，应将 Ω 的边界曲面的直角坐标系下的方程转化为球坐标系下的方程。例如下列曲面的直角方程在球坐标系中对应的方程为

(1) $x^2+y^2+z^2=a^2\Leftrightarrow r=a$　(球面见图 9.46)

(2) $x^2+y^2=z\Leftrightarrow r^2\sin^2\varphi=r\cos\varphi\Leftrightarrow r=\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$　(旋转抛物面，见图 9.47)

(3) $x^2+(y-a)^2+z^2=a^2\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2ay\Leftrightarrow r=2a\sin\varphi\sin\theta$　(球面，见图 9.48)

(4) $x^2+y^2=z^2\Leftrightarrow r^2\sin^2\varphi=r^2\cos^2\varphi\Leftrightarrow\tan\varphi=\pm1\Leftrightarrow\varphi=\pm\dfrac{\pi}{4}$　(圆锥面，见图 9.49)

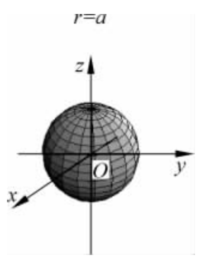

图 9.46

图 9.47

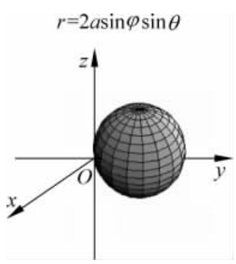

图 9.48

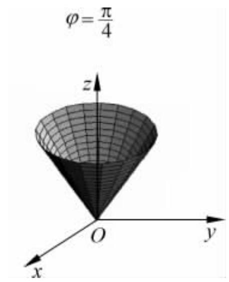

图 9.49

例 9.32 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$,其中 Ω 是:$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$。

【解】 如图 9.50 所示,在球坐标下,此球面方程为 $r=2\cos\varphi$,Ω 在球坐标下表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V&=\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{64}{5}\pi\left(-\frac{1}{6}\cos^6\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{15}\pi\end{aligned}$$

例 9.33 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的区域。

【分析】 球面与锥面方程的公共部分构成了球锥,积分区域为球锥时用球坐标计算简便。

【解】 如图 9.51 所示,球面坐标系下,锥面方程可化为

$$r\cos\varphi=r\sin\varphi,\quad 即\quad \varphi=\frac{\pi}{4},$$

球面方程可化为 $r=1$。故 Ω 可用不等式组表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},\quad 0\leqslant r\leqslant 1$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\sin\varphi=\frac{\pi}{8}$$

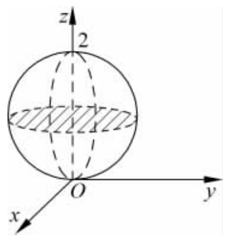

图　9.50

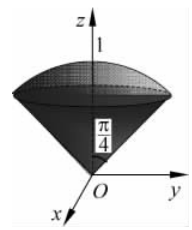

图　9.51

（二）三重积分的计算方法拓展

三重积分的计算是化为三次积分进行的。直角坐标系下有“先一后二”的投影法和“先二后一”的截面法。当被积函数 $f(z)$ 仅为 z 的函数(与 x,y 无关)，且 D_z 的面积 $\sigma(z)$ 容易求出时，“截面法”尤为方便。另外还有柱坐标系和球坐标系。为了简化积分的计算，需要选择适当的坐标系进行计算。将积分区域 Ω 投影到 xOy 面，得到投影区域 D，可以考虑以下几点：

(1) D 是 X-型域或 Y-型域，可选择直角坐标系计算(当 Ω 的边界曲面中有较多的平面时，常用直角坐标系计算)。

(2) D 是圆域(或其部分)，且被积函数形如 $f(x^2+y^2)$，$f\left(\frac{y}{x}\right)$ 时，可选择柱面坐标系计算(当 Ω 为圆柱体或圆锥体时，常用柱面坐标计算)。

(3) Ω 是球体或球顶锥体，且被积函数形如 $f(x^2+y^2+z^2)$ 时，可选择球坐标系计算。

以上是一般常见的三重积分的计算方法。对 Ω 向其他坐标面投影的情形类似。

对于某些形式的三重积分，有时为了计算方便，也可以将 Ω 投影到 xOz 面或 yOz 面上。下面通过例子来简单介绍利用柱坐标计算的情形。

例9.34　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 xOy 平面上曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域。

【解】　被积函数中含有 y^2+z^2，投影区域是圆，用柱坐标计算较简单。积分区域如图 9.52 所示，根据区域的特点，应向 yOz 面投影计算比较简单。利用柱坐标

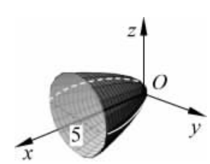

图　9.52

$$\begin{cases}x=x\\ y=\rho\cos\theta\\ z=\rho\sin\theta\end{cases}$$

区域 Ω 可表示为

$$\Omega:\begin{cases}\dfrac{1}{2}\rho^2\leqslant x\leqslant 5\\ 0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{10}\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{cases}$$

因此

$$\iiint_\Omega(y^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{5}\mathrm{d}x=\frac{250}{3}\pi$$

例 9.35 计算 $I=\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间区域。

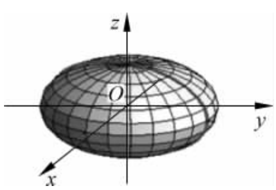

图 9.53

【解】 积分区域如图 9.53 所示，引入广义球坐标：

$$\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta\\ y=br\sin\varphi\sin\theta\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$$

广义球坐标系下的体积元素：

$$\mathrm{d}V=abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

代入计算得

$$I=abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi abc^3$$

例 9.36 设 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成，计算三重积分 $I=\iiint_\Omega(x+z)\mathrm{d}V$。

【解】

$$I=\iiint_\Omega(x+z)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega x\mathrm{d}V+\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=I_1+I_2$$

考虑 I_1：因为被积函数是关于 x 的奇函数，且 Ω 关于 $x=0$(yOz 面) 对称，所以 $I_1=\iiint_\Omega x\mathrm{d}V=0$。

考虑 I_2：用球坐标

$$I_2=\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$$

【思考】 这里，虽然积分区域是球体，但是请思考是否可以用截面法计算积分 $I=c\iiint_\Omega z\mathrm{d}V$，与球坐标相比，哪个计算简单些？

例 9.37 已知 Ω 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 围成，计算下列积分。

(1) $I_1=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

(2) $I_2=\iiint_\Omega\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

(3) $I_3=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

【解】

(1) 直接选取球坐标进行计算

$$I_1=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi$$

(2) $I_2=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{b^2}\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{c^2}\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

由积分区域 Ω 的轮换对称性,可得

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_2=\left(\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{3b^2}+\frac{1}{3c^2}\right)I_1=\frac{4}{15}\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)。$$

(3) $I_3=\iiint\limits_{\Omega}\frac{x}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}\frac{y}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}\frac{z}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

根据奇偶对称性可知,$I_3=0$。

例 9.38 计算 Ω 的体积 V,其中 Ω 是由 $z=R$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体。

【解】 根据三重积分的性质可知,所求体积为

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V$$

如图 9.54 所示,两曲面的交线为

$$\begin{cases}z=R\\z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

得 Ω 在 xOy 面的投影域为

$$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant R^2$$

方法一:按直角坐标(二重)计算 $V=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}(R-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$。

方法二:按直角坐标(三重)计算 $V=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R}\mathrm{d}z$。

方法三:按柱坐标计算 $V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{R}\mathrm{d}z$。

方法四:按极坐标计算:$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R(R-\rho)\rho\mathrm{d}\rho$。

方法五:按球坐标计算,如图 9.55 所示,$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R/\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r$。

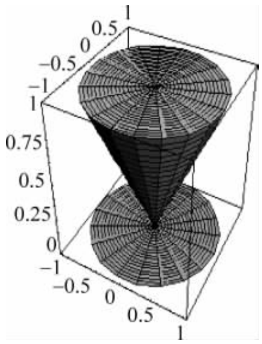

图 9.54

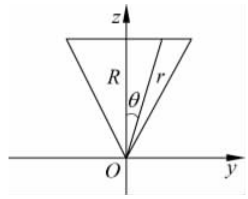

图 9.55

方法六：按先二后一法计算 $V=\int_0^R dz\iint\limits_{D_z} dxdy=\int_0^R \pi z^2 dz$。

方法七：按定积分计算 $V=\pi\int_0^R z^2 dz$。

最终结果都为 $V=\dfrac{\pi R^3}{3}$。

例 9.39 求由曲面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$，$4z=x^2+y^2$ 围成的立体 Ω 的体积。

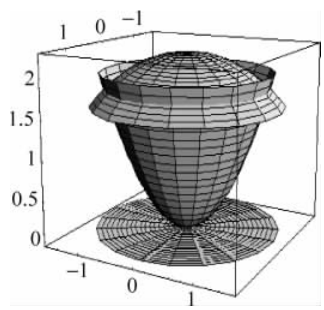

图 9.56

【解】 如图 9.56 所示，区域为球顶抛物底。

方法一：按直角坐标计算

$$V=4\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} dz=\frac{2\pi(5\sqrt{5}-4)}{3}$$

方法二：按柱坐标计算

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 \rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}} dz=\frac{2\pi(5\sqrt{5}-4)}{3}$$

方法三：按球坐标计算

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\arctan 2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{5}} r^2 dr+\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}} r^2 dr=\frac{2\pi(5\sqrt{5}-4)}{3}$$

方法四：按定积分计算，因为该立体是旋转体，可以利用旋转体的体积公式

$$V=\pi\int_0^1 4z dz+\pi\int_1^{\sqrt{5}}(5-z^2)dz=\frac{2\pi(5\sqrt{5}-4)}{3}$$

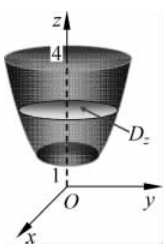

图 9.57

方法五：按二重积分计算

$$V=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 \rho\left(\sqrt{5-\rho^2}-\frac{\rho^2}{4}\right)d\rho=\frac{2\pi(5\sqrt{5}-4)}{3}$$

例 9.40 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2})dxdydz$，其中 Ω 由 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，$z=1$，$z=4$ 围成。

【解】 如图 9.57 所示，

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 5\iiint_{\Omega} xy^2 \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0 \\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \mathrm{d}z \iint_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_1^4 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 \mathrm{d}r = 21\pi
\end{aligned}
$$

【思考】 本题如果用柱坐标系如何计算？与直角坐标系比较，哪种方法更简单？

例 9.41 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲面 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成。

【解】 如图 9.58 所示，Ω 在 xoz 平面的投影 D_{xz}：$x^2+z^2\leqslant 1$，先对 y 积分，再求 D_{xz} 上二重积分，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{x^2+z^2}{2}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\sqrt{1-x^2}\left(x^2z+\frac{z^3}{3}\right)\right]\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{1}{3}(1+x^2-2x^4)\mathrm{d}x = \frac{28}{45}
\end{aligned}
$$

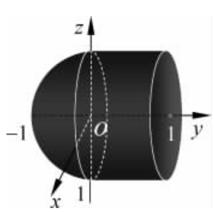

图 9.58

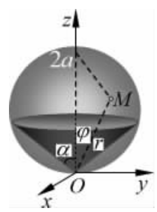

图 9.59

例 9.42 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积。

【解】 如图 9.59 所示，在球坐标系下空间立体所占区域为

$$
\Omega:\begin{cases} 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}
$$

则立体体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^2\mathrm{d}r \\
&= \frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha)
\end{aligned}
$$

例 9.43 计算 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是曲线 $y^2=2z$，$x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2$，$z=8$ 所围的立体。

【解一】 由$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转得,旋转面方程为 $x^2+y^2=2z$,所围成立体的投影区域如图 9.60 所示,

$$D_1: x^2+y^2=16,\quad \Omega_1: \begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant r\leqslant 4 \\ \dfrac{\rho^2}{2}\leqslant z\leqslant 8 \end{cases}$$

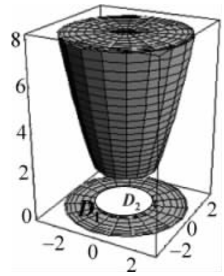

图 9.60

$$D_2: x^2+y^2=4,\quad \Omega_2: \begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ 0\leqslant r\leqslant 2 \\ \dfrac{\rho^2}{2}\leqslant z\leqslant 2 \end{cases}$$

$$I=I_1-I_2=\iiint\limits_{\Omega_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_{\Omega_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho\cdot\rho^2\mathrm{d}z=\frac{4^5}{3}\pi$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_{\frac{r^2}{2}}^2\rho\cdot\rho^2\mathrm{d}z=\frac{2^5}{6}\pi$$

原式 $I=\dfrac{4^5}{3}\pi-\dfrac{2^5}{6}\pi=336\pi$

【解二】

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_2^8\rho^2\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^8\rho^2\mathrm{d}z=336\pi$$

应用欣赏

9.6 重积分的应用

二重积分除了可以应用于计算曲顶柱体体积外,在物理、经济等其他方面也有广泛的应用,下面简单介绍其应用。

9.6.1 平均利润问题

经济数学中的平均利润就是计算利润函数的平均值,其实质就是利用积分中值定理。

例 9.44 某公司销售 A 商品 x 个单位,B 商品 y 个单位的利润为

$$P(x,y)=-(x-200)^2-(y-100)^2+5000$$

现已知一周内 A 商品的销售数量在 150—200 个单位之间变化,一周内 B 商品的销售数

量在 80—100 个单位之间变化。求销售这两种商品一周的平均利润。

【解】 由于 x,y 的变化范围 $D=\{(x,y)\mid 150\leqslant x\leqslant 200,80\leqslant y\leqslant 100\}$，所以 D 的面积 $\sigma=50\times 20=1000$。由二重积分的中值定理，该公司销售这两种商品一周的平均利润为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma}\iint\limits_D P(x,y)\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{1000}\iint\limits_D [-(x-200)^2-(y-100)^2+5000]\mathrm{d}\sigma\\ &=\frac{1}{1000}\int_{150}^{200}\mathrm{d}x\int_{80}^{100}[-(x-200)^2-(y-100)^2+5000]\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{1000}\int_{150}^{200}[-(x-200)^2-(y-100)^2+5000]\Big|_{80}^{100}\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{3000}\int_{150}^{200}\left[-20(x-200)^2+\frac{292\,000}{3}x\right]\mathrm{d}x\\ &=4033(\text{元})\end{aligned}$$

9.6.2 质量问题

根据二重积分的物理意义可知平面薄片的质量公式

$$M=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 为非均匀薄片所占的区域，$f(x,y)$ 为薄片面密度。

例 9.45 设一薄板占有的区域为中心在坐标原点，半径为 a 的圆域，其面密度 $\mu=x^2+y^2$，求薄板的质量。

【解】 根据二重积分物理意义可得质量公式

$$M=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\pi a^4$$

9.6.3 质心问题

（一）平面薄片的质心

在物理学上，研究质点系或刚体的运动时，常常用到质心的概念，质心是质点系或刚体的质量中心简称。设 xOy 平面上有一质点系，有 n 个质点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，则该质点系的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^n m_i},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum\limits_{i=1}^n m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^n m_i}$$

其中 $M=\sum\limits_{i=1}^n m_i$ 为质点系统的总质量，M_y、M_x 分别为该质点系对 y 轴、x 轴的静力矩。

利用广义微元法可以把质点系的转动惯量公式推广到平面薄片或空间物体的情形。

设有一平面薄板，在 xOy 平面上占有区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，且 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，则平面薄片的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}$$

$\mathrm{d}\sigma$ 关于 x 轴、y 轴的静力矩为

$$\mathrm{d}M_x = y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad \mathrm{d}M_y = x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

所以此薄板关于 x 轴、y 轴的静力矩为

$$M_x=\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\quad M_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

特别地,如果平面薄片是均匀的,即面密度是常数,则

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma,\quad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 A 为区域 D 的面积。

(二)空间立体的质心

设物体占有空间闭区域 Ω,其体密度 $\rho(x,y,z)$ 是 Ω 上的连续函数,则物体的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

其中 $M=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}V$ 是物体的质量。

特别地,如果物体是均匀的,则物体体积 $V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V$,

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega x\,\mathrm{d}V,\quad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega y\,\mathrm{d}V,\quad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}V$$

例 9.46 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间的均匀薄片的质心。

【解】 因为薄片均匀,故用简化的质心公式。如图 9.61 所示,因为闭区域 D 关于 y 轴对称,所以质心 $C(\bar{x},\bar{y})$ 必位于 y 轴上,于是 $\bar{x}=0$。

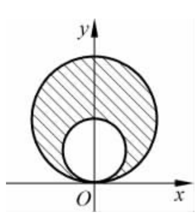

图 9.61

由于闭区域 D 的面积 $A=3\pi$,则

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\frac{1}{A}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{3\pi}\iint\limits_D r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{3\pi}\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r\\&=\frac{56}{3}\,\frac{1}{3\pi}\int_0^\pi\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

因此，所求质心为 $C\left(0,\dfrac{7}{3}\right)$。

9.6.4 转动惯量问题

（一）平面薄片的转动惯量

设 xOy 面上有 n 个质点，其质量分别为 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$，坐标为 $(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,n)$，该质点系对于 x 轴以及 y 轴的转动惯量分别为

$$I_x=\sum_{i=1}^{n}y_i^2m_i,\quad I_y=\sum_{i=1}^{n}x_i^2m_i$$

对于原点的转动惯量为 $I_0=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)m_i$。

与求质心时的方法类似，用广义微元法可以把质点系的转动惯量公式推广到平面薄片或空间物体的情形。

设有一平面薄片，占有 xOy 平面上的区域 D，点 (x,y) 处的面密度为 D 上的连续函数 $\rho(x,y)$，则该薄片对 x 轴、y 轴及原点的转动惯量为

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

（二）空间立体的转动惯量

给定物体 Ω 对于 xOy 平面，对于 x 轴以及对于原点 O 的转动惯量分别是

$$I_{xOy}=\iiint_\Omega z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$I_0=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V$$

【注】 物体对于 xOz 平面，yOz 平面以及对于 y 轴，z 轴的转动惯量与此类似，读者可自己试着将其写出。

例 9.47 设一高为 h，底边长为 $2b$ 的等腰三角形均匀薄片的密度是 ρ，求它对底边的转动惯量。

【解】 如图 9.62 所示建立坐标系，等腰三角形薄片关于高 AC 对称，并且是均匀的，所以所求转动惯量等于薄片 OAC 的两倍，

$$I=2\iint_D\rho y^2\mathrm{d}\sigma$$

直线 OA 的方程为

$$y=\frac{h}{b}x$$

所以

$$I=2\rho\int_0^b\mathrm{d}x\int_0^{\frac{h}{b}x}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\rho h^3b$$

例 9.48 求半径为 a 的均匀薄片(面密度为常量 μ)对于其直径边的转动惯量。

【解】 如图 9.63 所示建立坐标系,则薄片所占闭区域 D 可表示为

$$x^2+y^2\leqslant a^2,\quad y\geqslant 0$$

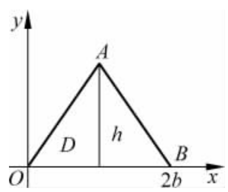

图 9.62

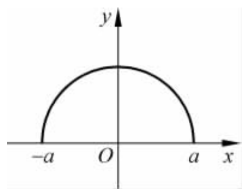

图 9.63

而所求转动惯量即半圆薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x 为

$$\begin{aligned}I_x&=\iint_D\mu y^2\mathrm{d}\sigma\\&=\mu\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r\\&=\mu\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}\mu a^4\end{aligned}$$

9.6.5 引力问题

(一)平面薄片对质点的引力

设有一平面薄片,占有 xOy 平面上的闭区域 D,在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$,假定 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续。现在要求该薄片对位于 z 轴上的点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处的单位质量的质点的引力。

我们还是利用广义微元法来分析:在 D 上任取一块闭区域 $\mathrm{d}\sigma$(其面积也记作 $\mathrm{d}\sigma$)。薄片中相应于 $\mathrm{d}\sigma$ 部分的质量可看作集中于某一点 (x,y) 处,近似等于 $\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$。由两质点间的引力公式可得出这部分薄片对该质点的引力为 $G\frac{\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{r^2}$,方向与 $\{x,y,0-a\}$ 一致,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,G 为引力常数。于是薄片对该质点的引力在三个坐标轴上的投影 F_x,F_y,F_z 的元素分别为

$$\mathrm{d}F_x=G\frac{\rho(x,y)x\mathrm{d}\sigma}{r^3}$$

$$\mathrm{d}F_y=G\frac{\rho(x,y)y\mathrm{d}\sigma}{r^3}$$

$$dF_z = G\frac{\rho(x,y)(0-a)d\sigma}{r^3}$$

以这些元素为被积表达式，在闭区域 D 上积分，便有

$$F_x = G\iint_D \frac{\rho(x,y)x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$F_y = G\iint_D \frac{\rho(x,y)y}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$F_z = -Ga\iint_D \frac{\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

（二）空间物体的引力

设有一物体，占有空间闭区域 Ω，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$，假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，现在要计算该物体对于其外部一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力。

我们像前面那样，把物体近似地看作是由 n 个质点组成的质点系，这个质点系对质点 m 的引力为 $\sum_{i=1}^{n}\Delta F_i$，它在三个坐标轴上的分量为

$$Gm\sum_{i=1}^{n}\frac{x^i-x_0}{r_i^3}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

$$Gm\sum_{i=1}^{n}\frac{y^i-y_0}{r_i^3}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

$$Gm\sum_{i=1}^{n}\frac{z^i-z_0}{r_i^3}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

取极限后，得到引力 F 在三个坐标轴上的分量

$$F_x = Gm\iiint_\Omega \frac{x-x_0}{r^3}\rho(x,y,z)dV$$

$$F_y = Gm\iiint_\Omega \frac{y-y_0}{r^3}\rho(x,y,z)dV$$

$$F_z = Gm\iiint_\Omega \frac{z-z_0}{r^3}\rho(x,y,z)dV$$

其中 G 为引力常数。

例 9.49 求半径为 R 的均匀球体：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 对位于点 $A(0,0,a)$ 处的单位质量的质点的引力。

【解】 设均匀球体的密度为 ρ，由球体的对称性有，$F_x=F_y=0$。而

$$\begin{aligned}F_z &= G\iiint_\Omega \frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\rho dV \\ &= G\rho\int_{-\pi}^{\pi}(z-a)dz\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2}\frac{1}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}dxdy\end{aligned}$$

$$=G\rho\int_{-\pi}^{\pi}(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{1}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}r\mathrm{d}r$$

$$=-G\,\frac{4\pi R^3}{3}\rho\,\frac{1}{a^2}=-G\,\frac{M}{a^2}$$

其中 $M=\frac{4\pi R^3}{3}\rho$ 为球体的质量。

习题 9

第一空间

1. 利用二重积分的几何意义计算下列二重积分。

(1) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$　　D：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1$

(2) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$　　D：$x^2+y^2\leqslant R^2$

2. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小。

(1) $\iint\limits_D P(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D Q(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 $P(x,y)=x^2y$，$Q(x,y)=x^3y^2$，积分区域 D：$0<x<1$，$0<y<1$。

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 x 轴，y 轴以及直线 $x+y=1$ 所围成。

3. 利用二重积分性质，估计积分 $I=\iint\limits_D (2x^2+2y^2+9)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 D 是圆形闭区域 $x^2+y^2\leqslant 4$。

4. 不计算，求积分值 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(xy+y^3\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

5. 选择题：

(1) 设 Ω 是球域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}V=$（　　）。

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) 0

(2) 设 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，在下列三重积分为零的是（　　）。

(A) $\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　　(B) $\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega}x\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(3) 设 Ω 是立方体区域：$-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$，$-1\leqslant z\leqslant 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$（　　）。

(A) $4\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x^2+2y^2+3z^2)dz$　　(B) $48\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 z^2 dz$

(C) $24\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 z^2 dz$　　(D) $64\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 z^2 dz$

6. 利用直角坐标计算下列二重积分。

(1) 计算$\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$,其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域。

(2) 计算$\iint\limits_D x\cos(x+y)d\sigma$,其中 D 是顶点分别为 $(0,0)$,$(\pi,0)$ 和 (π,π) 的三角形区域。

(3) 计算$\iint\limits_D dxdy$,其中区域 D 由曲线 $y=1-x^2$ 与 $y=x^2-1$ 围成。

(4) 计算$\iint\limits_D xy^2 d\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域。

(5) 计算$\iint\limits_D (x^2+y^2-x)d\sigma$,其中 D 是由直线 $y=2$,$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域。

(6) 计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$,其中 D:$y=x$,$y=x+1$,$y=1$,$y=3$ 所围成的区域。

7. 利用极坐标计算下列二重积分。

(1) 计算$\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}}$,其中 D 是圆环域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$;

(2) 计算$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$,$D$:$x^2+y^2\leqslant 1$,$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$;

(3) 计算二重积分$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,其中 D:$x^2+y^2\leqslant 2x$;

(4) 计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid R^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4R^2\}$。

8. 利用对称性计算下列二重积分。

(1) 计算$\iint\limits_D (x^2-2x+3y+2)dxdy$,其中 D:$x^2+y^2\leqslant a^2$;

(2) 计算$\iint\limits_D |xy|dxdy$,其中 D:$x^2+y^2\leqslant a^2$。

9. 求二重积分$\iint\limits_D (|x|+y)dxdy$,其中 D 是由 $|x|+|y|\leqslant 1$ 所围成的区域。

10. 计算$\iiint\limits_\Omega \frac{1}{x^2+y^2}dxdydz$,其中 Ω 为由平面 $x=1$,$x=2$,$z=0$,$y=x$ 与 $z=y$ 所围的区域。

11. 用两种方法计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z\,dxdydz$,其中 Ω 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面 $x=0$,$y=0$,$z=0$ 围成的闭区域。

12. 利用柱坐标系计算下列三重积分。

(1) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$为第一卦限中由旋转抛物面$z=x^2+y^2$与圆柱面$x^2+y^2=1$所围成的部分。

(2) $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V$,其中$\Omega$是由$z=x^2+y^2,z=4$所围成的立体。

13. 计算$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$在第一卦限的部分。

14. 将下列二重积分$I=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$化为累次积分(两种形式),其中$D$给定如下。

(1) D:由$y^2=8x$与$x^2=8y$所围成的区域;

(2) D:由$x=3,x=5,x-2y+1=0$及$x-2y+7=0$所围成的区域;

(3) D:由$y\geqslant x$及$x>0$所围成的区域。

15. 将二重积分$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$化为直角坐标系下的二次积分,积分区域$D$如下。

(1) 由直线$y=x$及抛物线$y^2=4x$所围成的区域;

(2) 由直线$y=x,x=2$及双曲线$y=\dfrac{1}{x}(x>0)$所围成的区域;

(3) 由直线$y=x,y=3x,x=1,x=3$所围成的区域;

(4) 由$x=0,y=2,y=\mathrm{e}^x$所围成的区域。

16. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+z^2=1$所围成的区域。

第二空间

1. 改变下列积分次序

(1) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(2) $\int_0^a\mathrm{d}x\int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(3) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(4) $\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$

2. 化二重积分$I=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$为二次积分,其中$D$:由$|x|+|y|\leqslant 1$所围成的区域。

3. 计算二重积分$\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma$,其中$D$是由直线$y=2x,x=2y$及$x+y=3$围成的三角形区域。

4. 计算$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由曲线 $y=x^2$，$y=0$，$x=1$ 所围成的区域。

5. 计算二重积分$\iint\limits_D y e^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=1$，$x=2$，$y=2$ 及双曲线 $xy=1$ 所围成的区域。

6. 若区域 D 由 $x^2+y^2=-2x$ 所围成，则$\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）。

(A) $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(B) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

(C) $2\int_{\pi/2}^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

(D) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

7. 若区域 D 由 $x^2+y^2=2y$ 所围成，则$\iint\limits_D (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）。

(A) $\int_0^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

(B) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

(C) $2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

(D) $\iint\limits_D (x+y)\sqrt{2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

8. 设 D：$y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成的有限区域，而 D_1 为 D 的第一象限部分，则$\iint\limits_D (xy+e^{-x^2}\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）。

(A) $2\iint\limits_{D_1} e^{-x^2}\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+e^{-x^2}\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

9. 选择适当的坐标系计算下列二重积分

(1) $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$y\geqslant x$，$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$；

(2) $\iint\limits_D |x|\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 2y$；

(3) $\iint\limits_D x(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\geqslant 1$，$x^2+y^2\leqslant 2x$；

(4) $\iint\limits_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$，$x+y\geqslant 1$。

10. 求 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

11. 计算二重积分$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$。

12. $\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+2y^3)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和$(x-1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域。

13. 设函数 $f(x)$连续,$f(0)=0$,且在 $x=0$ 处可导,求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

14. 计算下列三重积分。

(1) $\iiint\limits_\Omega x\,\mathrm{d}V$,其中 Ω 由三个坐标面与平面 $2x+y+z=1$ 所围成;

(2) $\iiint\limits_\Omega \sin(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是平面 $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ 和三个坐标平面所围成的区域。

15. 计算三重积分$\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围成的区域。

16. 计算三重积分:$\iiint\limits_\Omega(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2$,$z=4$ 所围成的立体。

17. 计算积分 $\iiint\limits_\Omega(x+y+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为立体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 的上半部。

18. 计算 $I=\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega$ 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的闭区域。

19. 设空间区域 Ω:$z\geqslant\sqrt{3(x^2+y^2)}$,$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,则$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}V=$( )。

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$

(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho$

(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho$

20. 设空间区域 Ω_1:$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,$z\geqslant 0$,Ω_2:$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,$z\geqslant 0$,则( )。

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}V$ (B) $\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}V=4\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}V$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 2\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}V$　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} \mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}V$

21. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是球$x^2+y^2+z^2\leqslant 4$。

22. Ω由$z=x^2+y^2$与$z=1$围成的闭区域，计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+2z)\mathrm{d}V$。

23. 计算$\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$是球$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$。

24. 利用三重积分求各曲面所为立体的体积。

(1) 由$z=x+y, z=xy, x+y=1, x=0, y=0$所围成的立体体积。

(2) 由曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$与曲面$x^2+y^2+z^2=4R^2$所围成的立体体积。

(3) 由椭圆抛物面$z=4-x^2-\dfrac{y^2}{4}$与平面$z=0$所围成的立体体积。

25. 求由$y=2x, y=\dfrac{x}{2}, xy=2$围成的平面图形的面积。

第三空间

1. 根据二重积分性质，比较$\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\mathrm{d}\sigma$的大小，其中$D$是三角形区域，三顶点分别为(1,0)，(1,1)，(2,0)。

2. 估计积分$I=\iint\limits_D (x+y+10)\mathrm{d}\sigma$的值，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=4$所围成的区域。

3. 改变积分次序$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$。

4. 计算下列二重积分

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y$　　(2) $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 x^2\sin xy\,\mathrm{d}x$

5. 计算$\iint\limits_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} |y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

6. 求$\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域。

7. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$：$x^2+y^2\leqslant ax, x^2+y^2\leqslant ay\ (a>0)$的公共部分。

8. 设$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，求证

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

9. 设函数 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的单调减少且大于 0 的连续函数，求证：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

10. 曲线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周生成的曲面与 $z=1, z=2$ 所围成的立体区域为 Ω。

(1) 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

(2) 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

11. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的椭球的体积。

12. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$。

13. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，其中 Ω 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$。

14. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 与 $z\geqslant 0$ 所围区域。

15. 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $f(u)$ 为连续函数，$f'(0)$ 存在，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}$。

16. 设平面薄片所占的闭区域 D 是由螺线 $\gamma=2\theta$ 上一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量。

17. 求密度均匀半球体的质心。

18. 求质量为 M，长和宽分别为 a,b 的长方形均匀薄板对长边的转动惯量。

19. 求密度为 ρ 的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量。

20. 设面密度为 μ，半径为 R 的圆形薄片 $x^2+y^2\leqslant R^2, z=0$，求它对位于 $M_0(0,0,a)$ $(a>0)$ 处的单位质量的质点的引力。