JUEGOS MATEMÁTICOS Y ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS GANADORAS

CARLOS D'ANDREA

La matemática tiene una rama que se llama "Teoría de juegos". Sí: teoría de juegos. ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece juegos en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes en el colegio? [7]

Índice

1. Introducción

Jugar es una actividad típica no solamente del ser humano. Varias especies de animales enseñan a sus cachorros a comer, a moverse, a socializar, a cazar... a través del juego. Este forma parte de nuestra vida cotidiana, lo encontramos con frecuencia a nuestro alrededor: en el casino, las loterías, el mercado de valores,... Hay juegos individuales y juegos colectivos. Los hay físicos o más intelectuales. Juegos donde se juega "a ganar" y otros de tipo cooperativo. Están los crucigramas, el sudoku, el ajedrez, el cubo de Rubik, el "go"...

En matemática hay un espacio dedicado al estudio de la teoría de juegos, no solo por sus aspectos combinatorios y/o lógicos, sino porque también nos sirven para explicar mejor fenómenos económicos y sociales que ocurren a diario a nuestro alrededor, y también porque este estudio nos sirve para tomar decisiones de manera más acertada. No es casualidad que la teoría de juegos no se enseñe solamente en las facultades de matemáticas, sino que también forma parte del currículo obligatorio en academias militares y facultades de economía e informática.

Y, por supuesto, está el valor didáctico del juego. De pequeños jugábamos con piedras o bolillas, con papeles de periódico o cartón. La mayoría de las veces jugábamos para ganar. Y para ganar en un juego es necesario recurrir a habilidades que tienen mucho que ver con las matemáticas. Hay que observar las jugadas, contar, deducir, generalizar resultados, planificar con ello futuras jugadas, investigar posibles nuevos métodos o estrategias. Los expertos en determinados juegos tienen sus propios recursos, sus propios "trucos" que les sirven para garantizar que van a ser los vencedores de la partida.

En este curso pretendemos apuntar un poco en esta última dirección. Los juegos que presentamos aquí serán —en todos los casos— juegos para dos jugadores, y en la mayoría de ellos se tratará de juegos "con estrategia", es decir que las reglas del juego están dadas de tal manera que uno de los dos jugadores puede conseguir ganar siempre si juega de una determinada manera, independientemente de lo que el otro jugador pueda hacer.

Está claro que este tipo de juegos "con estrategia" no son los más comunes o los que el que sigue estas notas probablemente haya jugado en su vida, ya que un juego del cual ya se sabe quién va a ganar antes de jugarlo probablemente no tenga ningún tipo de interés desde un punto de vista lúdico. Pero es justamente por ello que estos juegos tienen un gran valor didáctico —más allá de toda la matemática que uno puede aprender con ellos— ya que permiten acercarnos con un ojo crítico a una situación en apariencia ingenua —un juego— pero que en el fondo esconde una situación de ventaja para uno de los jugadores. Nuestra vida cotidiana está rodeada de situaciones parecidas a éstas: hay leyes, contratos y acuerdos que si uno no mira "la letra chica" luego se puede encontrar con sorpresas.

Estas páginas están organizadas de la manera siguiente. Comenzamos en la sección 2 proponiendo unos problemas "para entrar en calor". El análisis de estos juegos se hará más adelante. Lo hacemos así ya que pensamos que la mejor manera de entender y aprender matemática a partir de estos juegos es justamente dedicándoles suficiente tiempo como para familiarizarse y jugar con cada uno de ellos. Así que recomendamos a quien siga este escrito que no solamente le dedique tiempo y paciencia a jugar los cinco juegos de esa sección, sino a cada uno de los que aparecerán en esta nota, que seguramente sacará mucho más provecho de lo que pueda aprender por sí mismo que de lo que le sea explicado después.

En la Sección 3 aprenderemos a confeccionar tablas de posiciones "ganadoras" y "perdedoras", que nos servirán para analizar varios juegos que se adaptan bien a este análisis, sobre todo los juegos "de tablero". Obviamente, no todo juego podrá ser abordado de esta manera, y a veces observar regularidades o patrones puede ayudar a la hora de diseñar una estrategia. Este es el contenido de la Sección 4. En la sección siguiente analizaremos el "Ta-Te-Ti", un juego popular y milenario donde no se gana ni se pierde si ambos jugadores lo hacen correctamente . Acabaremos con los juegos mostrando en la seccion 6 cómo algunas situaciones en apariencia "nuevas" pueden resolverse usando un análisis similar a lo hecho en las secciones anteriores. Y finalmente propondremos en la última sección más bibliografía sobre el tema, así como sitios de internet donde se puede encontrar más material para profundizar lo que proponemos aquí, y también sugerencias para llevar al aula.

Agradecimientos: Estas notas nacieron en las sesiones de preparación para la olimpiadas matemáticas organizadas por la Universidad de Barcelona. Buena parte del material es extraído del "folklore". Varios juegos los he aprendido leyendo los libros de la serie "Matemática, estás ahí?" y "¿Cómo, esto también es matemática" escritos por Adrián Paenza, además de varias conversaciones con él sobre estos temas. Le agradezco además los valiosos comentarios que ha hecho a este texto, y como también especialmente a José Ignacio Burgos, Lisi D'Alfonso, Emiliano Gomez, Gabriela Jerónimo, Pablo Mislej y

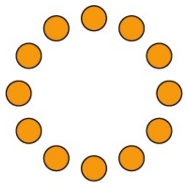

FIGURA 1. El círculo de monedas

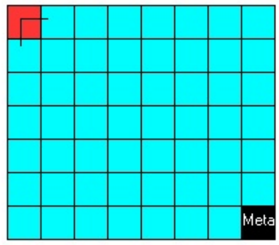

FIGURA 2. Tablero de "la torre" y "la reina"

Juan Pablo Pinasco por haberse leido pacientemente estas notas y realizado sugerencias para mejorar esta presentación.

2. Para "entrar en calor"

Para tener una mejor comprensión del análisis que haremos más adelante, proponemos los siguientes cinco juegos que esperamos que quien siga estas notas pueda experimentar con ellos jugando con otra persona. Al jugar, se debería intentar descubrir si existe alguna estrategia para ganar o al menos para no perder si es que uno juega correctamente.

Como parte de la comprensión del problema, también se sugiere ensayar con relajar las reglas del juego, ya sea olvidando alguna de ellas, o bien jugando con menos cantidad de elementos que los que el juego indica inicialmente.

Juego 2.1 (**El círculo de monedas**). *Se ponen* 12 *monedas en un círculo como se indica en la figura 1. Dos jugadores se turnan para sacar una o dos monedas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra moneda o espacio vacío. La persona que saca la/s última/s moneda/s es la ganadora.*

Juego 2.2 (**La torre**). *Se juega en un tablero como el del ajedrez, pero con* 7×8 *casillas. Una ficha (que llamaremos "la torre") se sitúa en el extremo superior izquierdo. La meta es la casilla del extremo inferior derecho.*

Cada jugador en su turno mueve la torre en uno de los dos sentidos: o bien horizontal-hacia la derecha, o bien vertical-hacia abajo, tantos espacios como se quiera, pero un espacio al menos. Gana el jugador que llega a la meta.

Juego 2.3 (**La Reina**). *Se juega en un tablero de* 7×8 *casillas como en el juego anterior y una ficha (que ahora llamaremos "la reina") en el extremo superior izquierdo. La meta está en el extremo inferior derecho.*

Cada jugador en su turno mueve la reina en uno de los tres sentidos: horizontal-hacia a la derecha, vertical-hacia abajo, y también diagonal-hacia abajo, tantos espacios como se quiera, pero un espacio al menos. Gana el jugador que llega a la meta.

Juego 2.4 (**El 1 y el 2**). *Se escriben diez números* $1's$ *y diez números* $2's$ *en el pizarrón. En cada turno, un jugador borra dos cualesquiera de los números que están escritos. Si los números borrados son idénticos, se los reemplaza con un* 2*. Si son diferentes, se reemplazan con un* 1*. La persona que comienza el juego gana si queda un* 1 *al final. El segundo jugador gana si queda un* 2 *al final.*

Juego 2.5 (**Sumar 15**). *Se tienen los números* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *y* 9*. Por turnos, cada uno de los jugadores elige un número de la lista, y se queda con él (el número se*

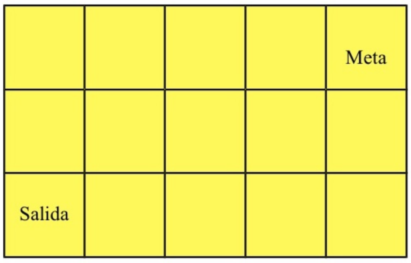

FIGURA 3. Tablero de la persecución cartesiana

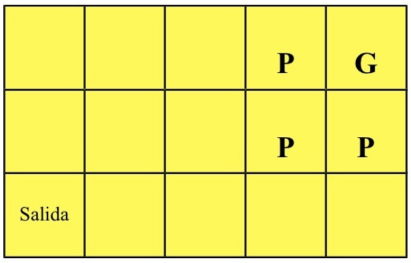

FIGURA 4. Casillas "perdedoras"

retira de la lista de disponibles). El primero que consigue sumar 15 *usando tres de los números que eligió, gana el juego.*

3. Análisis de posiciones "ganadoras" y "perdedoras"

Algunos juegos admiten un análisis "desde atrás hacia adelante", como si uno tomara una película y decidiera mirarla desde el final hacia el principio. En este caso, lo que haremos será comenzar suponiendo el juego terminado y con un ganador ya establecido. A partir de allí, intentaremos reconstruir cómo se llegó a esa posición y de qué manera pudo haber uno ganado o perdido. Este análisis hoy en día se puede realizar sobre cualquier juego con unas reglas coherentes y no contradictorias con ayuda de una computadora, de una manera "sencilla" (si uno tuviera infinita memoria en la máquina y además infinita paciencia, ya que analizar todos los casos de un posible juego puede ser un proceso muy largo, aún para un procesador de los más modernos), y de hecho no es un mal ejercicio intentar "programar" alguno de los juegos que aparecen en esta nota, para poder apreciar la gran capacidad computacional de la que disponemos actualmente.

Pero nosotros iremos en otra dirección, haremos ese análisis "a mano", que además de disfrutar del placer de entender cómo se estudia y encuentra una estrategia para jugar sin equivocarse, también podremos extender nuestro análisis de manera muy sencilla a juegos más generales.

Juego 3.1 (**Persecución cartesiana**). *Se juega sobre el tablero que se ve en la figura 3. El primer jugador hace una marca en la casilla de salida. En su turno cada jugador puede hacer una marca en una casilla situada*

- *directamente encima*
- *directamente a la derecha*
- *en diagonal (encima y a la derecha)*

de la última marca hecha por su oponente. Gana el primer jugador que consiga llegar a la meta.

Análisis del juego y solución. Veamos cómo un simple análisis "de atrás hacia adelante" nos permitirá decidir quién tiene estrategia ganadora y cómo ha de jugar.

Claramente, quien arribe a la "meta" ha ganado el juego, así que ésta es —por excelencia— la casilla "ganadora" y la denotaremos con una "**G**" (ver figura 4). ¿Cómo se llega a esta casilla? Se puede acceder a ella de tres maneras:

- o bien desde la casilla que está inmediatamente a la izquierda de la meta;
- o bien desde la casilla que está inmediatamente debajo de la meta;
- o bien desde la casilla que se encuentra "diagonalmente" debajo y a la izquierda de la meta.

A cualquiera de estas tres casillas la llamaremos “perdedora”. ¿Por qué? Pues porque si arribo a alguna de ellas, el jugador siguiente —si juega sin equivocarse, claro— llegará a la meta. Es decir, ganará. Por eso las denotaremos con una “**P**”, son casillas adonde si quiero ganar este juego, no debería poner mis fichas nunca. O dicho de otra manera más concreta, si arribo a alguna de estas casillas, es seguro que voy a perder si mi rival sabe jugar inteligentemente.

A partir de ahora el análisis se vuelve un poco más delicado, pero con un poco de paciencia y sin perder de vista las reglas del juego, podremos hacer un análisis global.

¿Cuándo puedo marcar una casilla como “ganadora”? Es fácil ver que las posiciones “**G**” son aquellas para las cuales el jugador siguiente —juegue como juegue— estará forzado a moverse a una posición “**P**”. Un simple análisis nos muestra que las posiciones ganadoras provienen de las siguientes situaciones “previas” (aquí el juego siempre se analiza desde el punto superior derecho —la meta— hacia “atrás”, es decir hacia la izquierda y hacia abajo), ver figura 5.

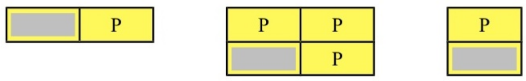

Figura 5. Posiciones que definen una casilla “ganadora” (el primer y el tercer grupo están sobre un “borde” del tablero)

Por otro lado, una situación “**P**” se puede marcar cada vez que tenga a mi derecha, o arriba, o arriba-a la derecha *alguna* (no necesariamente todas) posición ganadora. Es claro que esto es así ya que si mi rival conoce bien el juego, y yo arribo a una casilla “perdedora”, él se ocupará en su turno siguiente de mover la ficha a una posición ganadora (ver figura 6).

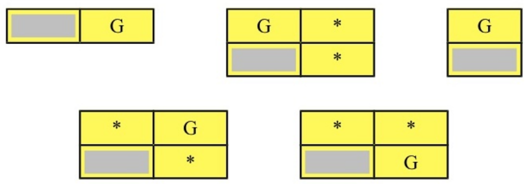

Figura 6. Posiciones que definen una casilla “perdedora”

Teniendo en cuenta estas reglas, es posible “llenar” el tablero de **G**’s y **P**’s que nos indicarán qué tipo de casilla es cada una de las 15 que hay en juego. A partir de la figura 4, y utilizando el análisis que aparece en la figura 6, vemos inmediatamente que las posiciones extremas (arriba a la izquierda y abajo a la derecha) de las que ya habíamos completado, son “ganadoras” (ver figura 7).

Sigamos un paso más, y veamos que se pueden completar también las dos casillas “del medio” que nos dejó el tablero en el análisis de la figura 7. En este caso, se tratarán de casillas “perdedoras” ya que de cada una de ellas mi rival —jugando inteligentemente— puede arribar a una casilla ganadora. Así que tenemos nuevamente una situación como la que se describe en la figura 8.

Analizamos un paso más para asegurarnos de haber comprendido las reglas de la resolución. La casilla que queda vacía en la fila y columna número 3 está en posición “ganadora”: desde allí, no importa lo que haga mi rival, irá a parar a una casilla **P** (ver figura 9).

		G	**P**	**G**
			P	**P**
Salida				**G**

Figura 7. Nuevas posiciones "ganadoras"

		G	**P**	**G**
		P	**P**	**P**
Salida			**P**	**G**

Figura 8

A partir de aquí ya podemos continuar el análisis, siempre "desde arriba hacia abajo" y "desde la derecha hacia la izquierda", utilizando las reglas mencionadas anteriormente. Si lo hacemos correctamente, arribaremos a un tablero como el de la figura 10.

¿Qué quiere decir la posición **G** al principio? Uno estaría tentado de decir que conviene ser el primero ya que uno arranca en una posición ganadora. Pero es fácil ver mirando ahora la figura 10, que cualquier movimiento que haga la persona que comienza, caerá en una posición "perdedora"! Así que, en este juego, tiene estrategia ganadora la persona que no empieza jugando. Esto es así pues hemos dado valor a las casillas como si hubiéramos arribado allí (la última casilla es "ganadora" para el que consiga poner su ficha allí), y como a la casilla inicial no no arriba nunca sino que se comienza de allí, podríamos pensar que el que juega segundo hace su primer movida poniendo la ficha en la casilla de salida, y eso le garantiza la victoria.

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el jugador que no comienza el juego. La estrategia viene dada por el tablero de la figura 10.

Ejercicio 3.2. Jugar con un compañero varias veces este juego, utilizando la tabla. Intercambiar las posiciones de primero y segundo entre los jugadores. El que juega primero, que intente "demorar" lo más posible la *agonía*. ¿Cuál es la mayor cantidad de "pasos" que puede durar una partida de este juego?

Ejercicio 3.3. Hacer el análisis equivalente al de la figura 10 para un tablero de 4 filas y 7 columnas. ¿Quién tiene estrategia ganadora ahora?

Ejercicio 3.4. Encontrar los valores de m y n para los cuales tiene estrategia ganadora el jugador que comienza jugando en un tablero de m filas y n columnas. Demostrar esta afirmación (el principio de inducción puede ser de utilidad en este caso).

Ejercicio 3.5. Hacer el análisis de los tableros de los juegos 2.2 y 2.3 de la sección 2.

No necesariamente los juegos que admiten un análisis de casillas "ganadoras" y "perdedoras" como el anterior y los de la sección 2 han de ser sobre un tablero donde las

		G	**P**	**G**
		P	**P**	**P**
Salida		**G**	**P**	**G**

Figura 9

G	**P**	**G**	**P**	**G**
P	**P**	**P**	**P**	**P**
G	**P**	**G**	**P**	**G**

Figura 10

casillas aparecen físicamente. El siguiente es un ejemplo de un juego que puede ser analizado de manera similar al anterior, aunque no involucra ningún tablero.

Juego 3.6 (**La carrera del cien**). *El que empieza dice un número cualquiera del* 1 *al* 10. *El otro jugador le suma al número que dijo su oponente un número del* 1 *al* 10 *y dice el resultado. Continúan jugando así, por turnos. Gana el que primero diga* 100.

Análisis del juego y solución. Para analizar este juego podemos construir un "tablero" como el de la figura 11 conteniendo los 100 números del 1 al 100. No hace falta que sea cuadrado el tablero, lo importante es que contenga los primeros cien números naturales.

Tal como hemos hecho en el juego anterior, indicaremos con **G** y **P** las casillas "ganadoras" y "perdedoras" respectivamente, y también haremos un análisis "de atrás hacia adelante". Con este criterio, está claro que quien arribe a conseguir el número 100 habrá ganado el juego, o sea que el 100 es **G**. También está claro que si uno de los dos jugadores arriba a cualquiera de los números 90, 91, 92, 93, ..., 99 sería el "perdedor". ¿Por qué? Pues porque desde cualquiera de estas posiciones —siempre siguiendo las reglas del juego— uno puede llegar al número 100 sumándole un número entre 1 y 10 según las reglas del juego. Luego, las "casillas" entre el 90 y el 99 son "perdedoras".

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90 P
91 P	92 P	93 P	94 P	95 P	96 P	97 P	98 P	99 P	100 G

FIGURA 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89 G	90 P
91 P	92 P	93 P	94 P	95 P	96 P	97 P	98 P	99 P	100 G

FIGURA 12

Y ahora haremos una observación importante, que será crucial para "resolver" todo el "tablero". Afirmamos que la "casilla" número 89 es "ganadora". En efecto, esto es así ya que si yo consigo llegar a este número, no importa lo que pueda hacer mi rival, él conseguirá en el paso siguiente uno de los números entre 90 y 99, que son todos números "perdedores". Luego, esta casilla me deja en posición de ganar (ver figura 12).

A partir de esta observación, es fácil ver que el análisis del juego "se repite" para atrás (como si reemplazara la casilla 100 por la 89). Notar que entonces las casillas del 78 al 88 serán "perdedoras", la número 77 entonces ganadora... y así sucesivamente se llena el tablero como indica la figura 13. Notar que el número 1 está en posición ganadora, y es uno de los diez primeros números que puede elegir la persona que juega primero, así que éste es un juego con "ventaja para el que juega primero"

1 G	2 P	3 P	4 P	5 P	6 P	7 P	8 P	9 P	10 P
11 P	12 G	13 P	14 P	15 P	16 P	17 P	18 P	19 P	20 P
21 P	22 P	23 G	24 P	25 P	26 P	27 P	28 P	29 P	30 P
31 P	32 P	33 P	34 G	35 P	36 P	37 P	38 P	39 P	40 P
41 P	42 P	43 P	44 P	45 G	46 P	47 P	48 P	49 P	50 P
51 P	52 P	53 P	54 P	55 P	56 G	57 P	58 P	59 P	60 P
61 P	62 P	63 P	64 P	65 P	66 P	67 G	68 P	69 P	70 P
71 P	72 P	73 P	74 P	75 P	76 P	77 P	78 G	79 P	80 P
81 P	82 P	83 P	84 P	85 P	86 P	87 P	88 P	89 G	90 P
91 P	92 P	93 P	94 P	95 P	96 P	97 P	98 P	99 P	100 G

FIGURA 13

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el jugador que comienza el juego. Debe elegir el número 1 en su primera jugada, y a partir de allí seguir la estrategia dada por la tabla de la figura 13.

Ejercicio 3.7. Hacer el análisis del juego si la "meta" es llegar al número 35 siguiendo las mismas reglas del juego. ¿Sigue teniendo estrategia ganadora el primer jugador? ¿Y si la meta fuera el 77?

Ejercicio 3.8. Mirando el tablero de la figura 13, uno podría conjeturar que las posiciones ganadoras son números congruentes entre sí módulo 11. ¿Es cierto esto? ¿Podrías demostrarlo?

Ejercicio 3.9. Resolver en función de $n < m$, el juego "general" donde se ha de arribar al número m eligiendo primero un número entre 1 y n, y a partir de allí sumando cualquier número entre 1 y n.

El juego anterior podría resolverse también analizando unos primeros casos (por ejemplo "jugando" solamente con los números del 1 al 20), e intentando deducir alguna regla general que nos sirva para tener que llegar al 100 sin tener que hacer todo el análisis de la figura 11. Veremos más de esto en la sección siguiente, donde la estrategia para analizar el juego viene de mirar algunas regularidades o patrones en el juego. De momento lo utilizaremos en la siguiente situación.

Juego 3.10 (**Descenso hacia el** 0). *Se comienza con el número* 1000 *escrito en el pizarrón. En cada turno, uno de los jugadores sustrae al número que está escrito, un* *número natural menor o igual que él, que sea potencia de* 2*. El resultado se escribe nuevamente en el pizarrón, y el número anterior es borrado. El jugador que llega a* 0 *gana.*

Análisis del juego y solución. Supongamos que el número más alto que estuviera escrito en la pizarra es el 10 y no el 1000. Entonces podremos hacer un análisis más sencillo de las posiciones "ganadoras" y "perdedoras" del juego. A primera vista, está claro que el 0 es **G** y que las potencias de 2 : $1, 2, 4$ y 8 son **P**'s:

0	**G**
1	**P**
2	**P**
3	?
4	**P**
5	?
6	?
7	?
8	**P**
9	?
10	?

Ahora continuamos el análisis en una segunda ronda: los números que serán "ganadores" serán aquellos a los que, sin importar lo que haga el jugador rival, arribará a una posición "perdedora". Por ejemplo, el 3 será **G** ya que las posibilidades para el rival cuando le toque jugar son

- $3 - 1 = 2$, que es **P**;
- $3 - 2 = 1$, que también es **P**.

Por otro lado, el 5 es **P**, porque si llego a ese número, el jugador rival puede restarle 2 y quedar en una casilla "ganadora".

Habiendo analizado qué tipo de posiciones les toca al 3 y al 5, podemos concluir que el 6 también es **G**. Esto es así ya que las posibles movidas del rival a partir del 6 son

- $6 - 1 = 5$, que es **P**,
- $6 - 2 = 4$, que es **P**,
- $6 - 4 = 2$, que también es **P**.

El análisis del juego queda —de momento— así:

0	**G**
1	**P**
2	**P**
3	**G**
4	**P**
5	**P**
6	**G**
7	?
8	**P**
9	?
10	?

Y aplicando el mismo análisis que hemos hecho anteriormente al 7, al 9 y al 10 *en ese orden*, llegamos a la siguiente tabla donde hemos resaltado las posiciones "ganadoras":

0	**G**
1	**P**
2	**P**
3	**G**
4	**P**
5	**P**
6	**G**
7	**P**
8	**P**
9	**G**
10	**P**

Uno podría ahora continuar con esta tabla hasta llegar al número 1000, que seguramente si lo hace con bastante paciencia arribará a responder la pregunta inicial de quién tiene estrategia ganadora. Pero a simple vista, conjeturamos que las posiciones "ganadoras" son aquellas que son múltiplos de 3, lo cual es verdad en general. Invitamos al lector a intentar demostrar este hecho antes de continuar leyendo lo que sigue.

Proposición: En este juego, las posiciones "ganadoras" son los números múltiplos de 3*, y el resto de los números es* **P***.*

Demostración: Obviamente ni 1, ni 2, ni 4, ni 8, . . . ninguna de las potencias de 2 puede ser un múltiplo de 3 ya que en su factorización solo aparecen múltiplos de 2. De hecho, algunas dejan resto 2 y otras dejan resto 1 en la división por 3. La posición "ganadora" (el 0) es un múltiplo de 3. Luego,

- Si estoy parado en una posición que sea un múltiplo de 3, haga lo que haga mi rival, acabará en una posición que NO es un múltiplo de 3.
- Por otro lado, si estoy en una posición que no es un múltiplo de 3, siempre puedo (restando 1 o 2 por ejemplo), arribar a una posición que sea múltiplo de 3.

En definitiva, si estoy parado en una posición de la forma $3k$ con $k > 0$ (múltiplo positivo de 3), haga lo que haga mi rival, yo podré nuevamente volver a otra posición de la forma $3k'$ con $k' < k$. Como "la" posición ganadora será $0 = 3 \times 0$, entonces si estoy parado en una posición de la forma $3k$ en algún momento, me puedo asegurar de mantenerme siempre en "múltiplos de 3" hasta arribar al 0. Así que los números de la forma $3k$ son **G**'s.

Por otro lado, si estoy en una posición que no es múltiplo de 3, como en el paso siguiente el jugador rival —si juega con este mismo esquema— podrá llevarme hasta una posición de la forma $3k$, se situará él en una posición **G**. De esto se deduce que los números que no son múltiplos de 3 son **P**, ya que a partir de cualquiera de ellos se puede arribar a una **G**. □

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el jugador que comienza el juego. La estrategia será la siguiente: primero le restará al 1000 una potencia de 2 que deje resto 1 en la división por 3 (como 1 o 4...), ya que al hacerlo le quedará un múltiplo de 3 en el pizarrón. Luego irá "bajando" en el juego forzando siempre la aparición de un múltiplo de 3 en su turno.

Ejercicio 3.11. Demostrar que si las reglas del juego se hubieran modificado de la manera siguiente, *"en cada paso restamos* 1 *o* 2 *del número que está escrito en la* *pizarra"*, habríamos arribado igualmente al mismo análisis y estrategia que en el juego original.

Ejercicio 3.12. Elegimos ahora un número $k < 1000$. Supongamos que el juego se acaba cuando uno "llega" a conseguir en la pizarra el número k. ¿Quién tiene estrategia ahora? ¿Y si en lugar de "conseguir el número k" cambiamos las reglas por "conseguir el número k o uno menor que él"? ¿Quién tiene estrategia ahora?

Ejercicio 3.13. Resolver el problema general: dados $k < n$, se comienza con el número n escrito en la pizarra y se acaba al arribar a k, bajando "en potencias de 2". Decidir en función del dato (k, n) qué jugador tiene estrategia ganadora.

Ejercicio 3.14. ¿Y si se *bajara* en potencias de 3? ¿Cómo sería el análisis del juego?

4. Búsqueda de regularidades y/o patrones

No todo juego admite una tabla de análisis como veníamos haciendo hasta ahora. En varios de ellos como el que vamos a ofrecer a continuación, la cantidad de configuraciones posibles es o bien muy grande o bien imposible de analizar "de atrás hacia adelante" como hicimos en la sección anterior. Y es por ello que otro tipo de estudio se hace necesario. El que presentamos aquí se basa en el hecho de que en algunas ocasiones, el planteo del juego esconde alguna simetría o regularidad (como el hecho de ser múltiplo de 3 que fue analizado en el juego 3.10) que puede ser utilizada para diseñar la estrategia. Estas regularidades pueden ser geométricas, aritméticas o de cualquier otra naturaleza. Veamos algunos ejemplos.

Juego 4.1 (**La mesa circular**). *Estás sentado frente a tu adversario, separados por una mesa redonda de aproximadamente* 1 *metro de diámetro. Cada uno tiene varias monedas del mismo tamaño, las suficientes como para cubrir toda la mesa. El juego consiste en ir colocando las monedas una a una, por turnos, sobre la mesa. Las monedas no pueden tocarse ni superponerse en lo más mínimo. Además, debe quedar toda la superficie de la moneda sobre la mesa. La primer persona que ya no pueda poner una moneda sobre la mesa, pierde. Al colocar nuevas monedas sobre la mesa, éstas no pueden desplazar las que están previamente colocadas.*

Análisis del juego y solución. Aquí claramente no existe una "meta" ni "posición ganadora" única como en los casos anteriores. De hecho, la cantidad posible de configuraciones es infinita e imposible de analizar de la manera en la que la veníamos haciendo.

Sin embargo, este juego tiene una regularidad muy notoria asociada al concepto de "simetría central". Notar que una vez "conquistado" el centro de la mesa circular (como en la figura 14), cada movimiento del rival podrá ser "simetrizado" respecto de este centro. De esta manera, si el primer jugador pone su primer moneda exactamente en el centro del círculo, cada vez que su rival pueda ubicar una moneda en algún sector de la mesa, él podrá hacer lo mismo, ubicándola en el sector opuesto de la mesa con respecto al centro (el punto simétrico respecto del centro, ver figura 15).

Es fácil ver entonces que —jugando de esta manera— si hay un lugar "vacío" donde el rival puede poner una moneda, entonces también habrá un espacio "vacío" del mismo tamaño en el otro extremo de la mesa, el simétrico respecto al centro. Y entonces la persona que no podrá colocar más monedas será la que no ha comenzado, si es que el primer jugador ha jugado siempre siguiendo esta estrategia.

Respuesta: Tiene estrategia ganadora la persona que comienza el juego. La estrategia consiste en colocar la primer moneda coincidiendo con el centro del círculo, y a partir de allí jugar "simétricamente" con respecto a este centro, por cada movida del rival.

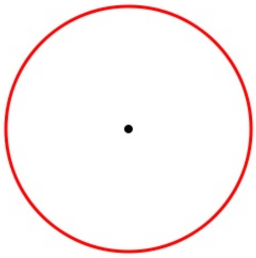

FIGURA 14. El centro de la mesa circular

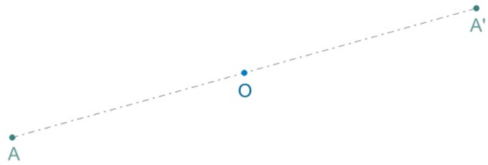

FIGURA 15. Simetría central

Observación 4.2. Notar que la única propiedad geométrica que hemos utilizado del círculo aquí es que tiene un centro de simetría. Si la mesa hubiera sido cuadrada, o rectangular u ovalada (o de cualquier otra forma que tuviera un centro de simetría), el análisis anterior también se aplicaría a esa mesa, y la misma estrategia serviría para ganar al primer jugador.

Ejercicio 4.3. El juego "el círculo de monedas" (juego 2.1) también tiene una cierta "simetría central". Analizarlo, decidir quién tiene una estrategia ganadora, y cuál es esa estrategia.

El siguiente es un juego muy popular que aparece como lo presentamos aquí en una de las obras de Martin Gardner [3].

Juego 4.4 (**El zorro y el ganso**). *Se juega en el tablero que muestra la figura 16.*

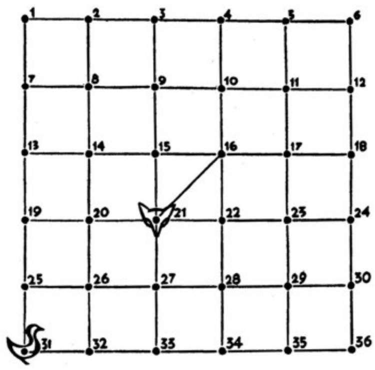

FIGURA 16. El zorro y el ganso

Hay que poner dos fichas distintas entre sí, una en el lugar donde está el retrato del zorro; y otra en donde está el retrato del ganso. Uno de los jugadores moverá al zorro, el otro moverá al ganso. Una "movida" consiste en deslizar la ficha desde un punto hasta otro adyacente, siguiendo una de las líneas negras trazadas en el tablero. El zorro intentará capturar al ganso desplazándose hacia el punto ocupado por el ganso. El ganso debe intentar impedir que esto suceda. Si el zorro captura al ganso en diez movimientos o menos (es decir, en diez movimientos del zorro), ganará el juego. Si no logra su objetivo, ganará el ganso. El primer movimiento del juego lo hace el zorro.

Análisis del juego y solución. Después de jugar un rato este juego, parecería ser una misión imposible atrapar al ganso. Y esto ocurre por la sencilla observación siguiente: al ser el zorro el primero en moverse, un primer instinto será acercarse al ganso, y luego se quedará —después de la primer movida— a 3 "pasos" de distancia del ganso.

El ganso se moverá un paso en alguna de sus direcciones permitidas, y luego el zorro intentará perseguirlo dando un paso más. Pero nuevamente quedará a una cantidad IMPAR de "pasos" del ganso, ya que cada uno ha dado un paso en alguna dirección. La posición "ganadora" en este juego para el zorro es cuando él se encuentra a 0 pasos del ganso, y 0 es un número par, o sea que la misión parece imposible.

A MENOS QUE el zorro utilice la diagonal que se encuentra en el centro del tablero, la paridad en la "distancia" entre el zorro y el ganso no cambiará. Notar que una vez atravesada esa diagonal (¡una sola vez!), podrá dedicarse a perseguir al ganso tranquilamente, que en menos de 10 movidas lo atrapará independientemente de lo que haga el ganso (y evitando —claro— que el ganso cruce la diagonal).

Respuesta: Tiene estrategia ganadora el zorro. En su primer movida debe cruzar la diagonal del centro del tablero, y luego perseguir al ganso sin volver a cruzar esa diagonal ni dejar que el ganso la cruce.

Ejercicio 4.5. ¿Y si el que comenzara el juego ahora fuera el ganso? ¿Sigue teniendo estrategia ganadora el zorro? ¿Cuál es esta estrategia?

Juego 4.6 (**Dividiendo**). *Sobre una mesa hay tres puñados de fósforos. Uno contiene* 10 *fósforos, un segundo grupo,* 15*, y el tercero,* 20 *fósforos. En cada turno uno de los dos jugadores elige uno de los puñados que hay sobre la mesa y lo divide en dos grupos más pequeños, sin importar la cantidad que haya en cada uno de ellos. Pierde el jugador que ya no puede dividir más.*

Análisis del juego y solución. Este juego es bastante simple de "resolver" si uno tiene en cuenta un par de hechos muy simples que se deducen directamente a partir de las reglas el juego:

- *Independientemente de cómo se haya jugado, la posición final del juego será de* 45 *grupos distintos conteniendo* 1 *fósforo cada uno.*

  En efecto, si no estuviéramos en esta situación (que uno podría llamar "ganadora"), es porque algún grupo tiene al menos 2 fósforos, y esto implica entonces que el juego no puede acabar allí ya que siempre el jugador cuyo turno es el próximo tiene al menos un grupo (el que tiene 2 o más fósforos) para dividir.

  O sea que en este juego —a diferencia de los anteriores— existe *"una"* sola posición ganadora. El otro invariante que nos interesa tener en cuenta es:
- *En cada paso, el número de puñados de fósforos aumenta en uno.*

  Efectivamente, las reglas del juego dicen que a cada paso hay que elegir uno de los grupos sobre la mesa y dividirlo en 2 montones más. Y un razonamiento muy sencillo demuestra que en cada paso, "pierdo" un grupo para "crear" dos mas. El número total de grupos naturalmente aumenta en uno.

Estas dos afirmaciones son suficientes para analizar el juego. Cada vez que haga su "movida" el primer jugador, se pasará de una cantidad impar (tres al principio) a una cantidad par de montones. Y cada vez que haga su movida el segundo jugador, se pasará de una cantidad par (cuatro al principio) a una cantidad impar de puñados. Como la jugada "ganadora" contiene 45 puñados, y este es un número impar, entonces ganará inexorablemente el segundo jugador. Notar que en este juego... ¡no hace falta hacer ningún tipo de análisis para buscar una estrategia ganadora! Hagan lo que hagan tanto el primer jugador como el segundo, habrá $42 = 45 - 3$ jugadas, y ganará la persona que no comience con el juego.

Respuesta: Gana el segundo jugador, independientemente de cómo se desarrolle el juego.

Ejercicio 4.7. Resolver el juego "generalizado" donde hay k puñados de fósforos con n_1, n_2, $\ldots, n_k$ fósforos cada uno, y las mismas reglas del juego de antes.

Ejercicio 4.8. Demostrar que en el juego "el 1 y el 2" (juego 2.4), la cantidad de 1's en el pizarrón siempre se mantiene par después de cada jugada. Usar este hecho para decidir quién es el ganador. ¿Hay alguna estrategia?

5. Estrategias para no perder

Uno podría creer a esta altura que todo juego admite una estrategia ganadora y solo es cuestión de encontrarla si es que uno quiere jugarlo bien. Lamentablemente, no es así en la mayoría de los casos. Por ejemplo, muchos de los juegos que involucran el azar (naipes, o lanzamiento de dados, o la lotería) no admiten un análisis como los que hemos venido realizando, y precisamente buena parte del interés en estos juegos es el hecho de que "la suerte" puede estar a favor de cualquiera, buenos o malos jugadores, principiantes o más "entrenados".

Sin embargo, hay una clase de juegos para los cuales alguno de los dos jugadores —o los dos— tiene una estrategia "para no perder", que esencialmente implica que —si juega bien— podrá ganar o "empatar", pero nunca perder. El Ta-Te-Ti (juego 5.1) es uno de ellos, y veremos su análisis en breve. Otro juego que sorprendentemente tiene estrategia para no perder —si ambos jugadores juegan "sin equivocarse"— es el de las damas ("checkers" en inglés), que en el año 2007 nos hemos enterado (ver [9], y también la nota sobre "el fin de las damas" en [8]) que tiene estrategia para no perder.

También hay una gran familia de juegos de los que no se conoce estrategia aún. El ajedrez es uno de ellos (aunque con la capacidad computacional de estos días es probable que se sepa tarde o temprano si hay o no una tal estrategia. De momento ya hemos llegado a una situación en la que las computadoras pueden jugar mejor que los seres humanos a fuerza de hacer una cantidad inmensa de "análisis locales" y estudios de miles de millones de "posiciones ganadoras"). Otro es el "Go", un juego de origen chino muy popular en estos días. De más está decir que la búsqueda de algoritmos y estrategias para resolver estos y otros juegos populares es un tema de investigación corriente en la rama de las matemáticas que se conoce como teoría de juegos.

En esta sección analizaremos solamente uno de los juegos más populares del planeta, el "Ta-Te-Ti" o "tres en línea" (Tic-Tac-Toe en inglés), del cual se cree que ya lo jugaban los antiguos egipcios [10].

Juego 5.1 (**Ta-Te-Ti**). *Se juega sobre un tablero de* 3×3 *como indica la figura 17. Por turnos dos jugadores van marcando o poniendo fichas en el tablero, el mismo tipo de marca o ficha para cada jugador. Gana el primero que consigue "tres en línea".*

Análisis del juego y solución. Después de jugar un rato pareciera quedar claro que tiene "ventaja" el que comienza, y que de alguna manera conviene poner la primer marca o ficha en el centro.

Sin embargo, esto no produce ninguna estrategia ganadora, y de hecho es fácil ver que si uno comienza sin ocupar la casilla del centro, igual puede conseguir "no perder". Y —obviamente— si comienza ocupando la casilla del centro tampoco es seguro que gane.

Lo que nos servirá para analizar este juego es algo que llamaremos "respuesta de bloqueo": tiene cierta ventaja el que hace la primera jugada, pero esta ventaja se verá anulada si el segundo jugador efectúa una respuesta de bloqueo.

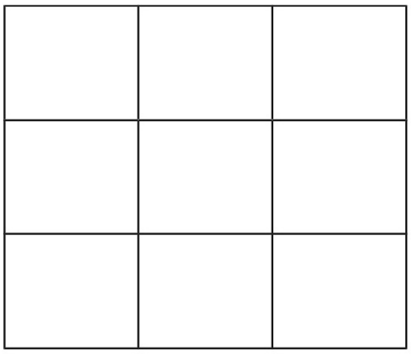

Figura 17. Ta-Te-Ti

Para la primera jugada hay esencialmente 3 posibilidades: al centro, en un vértice del cuadrado, o en uno de los cuatro costados que no es vértice. Para cada una de ellas el jugador siguiente tiene respuestas de bloqueo, que consisten en jugar en cualquiera de las posiciones pintadas en la figura 18.

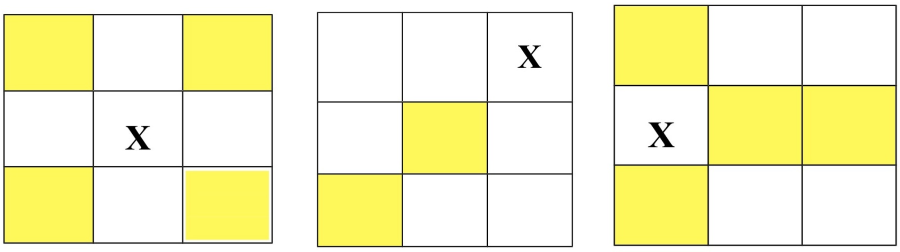

Figura 18. "Respuestas de bloqueo" en el Ta-Te-Ti

Se puede comprobar con un poco de paciencia pero sin ninguna dificultad, siguiendo las distintas jugadas con algún tipo de diagrama (de árbol por ejemplo), que a cada nueva jugada del primer jugador, el segundo tiene siempre disponible una respuesta de bloqueo. Recíprocamente, se puede ver también de una manera sencilla que por cada jugada de quien no haya empezado el juego, el primer jugador también tiene disponible una respuesta de bloqueo.

Respuesta: En este juego, si ambos jugadores juegan sin equivocarse, siempre se acaba en "empate".

Ejercicio 5.2. Analizar la variante del juego donde cada jugador solamente tiene 3 fichas, y es posible desplazarlas en el tablero ocupando las casillas vacías vecinas (vertical, horizontal y diagonalmente).

Ejercicio 5.3. Analizar el juego del "Ta-Te-Ti tridimensional" que se juega en un "tablero" de $3 \times 3 \times 3$ con la misma regla de que gana el primero que consigue "tres en línea". Demostrar que en esta variante, el que comienza tiene estrategia ganadora si ubica la primera marca o ficha en el centro.

6. Un mismo análisis para juegos en apariencia distintos

No pretendemos cubrir en estas páginas todas las posibles estrategias que existen para abordar todos los juegos que admiten alguna estrategia para ganar o para no perder. Eso sería una misión imposible, ya que hay miles de situaciones cuyo análisis puede ser complicadísimo. Sin embargo, conviene tener un ojo atento para poder detectar situaciones cuyo planteo en principio parece bastante extraño, pero en realidad admiten el mismo análisis que varios de los ya conocidos. En esta sección analizaremos algunos de ellos; el juego de "sumar 15" (juego 2.5) será uno de ellos.

Juego 6.1 (**Más fósforos**). *Sobre una mesa se colocan dos puñados de* 5 *fósforos cada uno. Cada jugador, por turno, puede sacar un solo fósforo de uno de los dos grupos, o* 1 *fósforo de cada puñado. Pierde el jugador que saca el último fósforo.*

Análisis del juego y solución. Este juego también admite un análisis "de tablero" tal como hicimos con la "persecución cartesiana" (juego 3.1). De hecho, si nos construimos un tablero de 6×6 como en la figura 19, donde numeramos las filas y las columnas desde el 0 hasta el 5 en el orden que se muestra allí. La posición (i, j) significará en el juego que hay i fósforos en uno de los puñados y j fósforos en el otro. Claramente, la posición "perdedora" es la $(0, 0)$, y a partir de allí se puede hacer el mismo análisis "hacia atrás" siguiendo exactamente las mismas reglas que se ilustran en la figura 5 para las posiciones "ganadoras" y en la figura 6 para las "perdedoras". Acabaremos con un tablero como el de la figura 19 De este análisis se desprende fácilmente que las

5	4	3	2	1	0	
G	P	G	P	G	P	0
P	P	P	P	P	G	1
P	G	P	G	P	P	2
P	P	P	P	P	G	3
P	G	P	G	P	P	4
P	P	P	P	P	G	5

FIGURA 19. Tabla de posiciones del Juego 6.1

posiciones "ganadoras" son muy pocas, y que la estrategia ganadora la tiene el primer jugador, que ha de quitar un fósforo de cada grupo para situarse en una posición ganadora.

Respuesta: La estrategia ganadora la tiene el primer jugador, quien debe en la primera jugada quitar un fósforo de cada puñado, y luego seguir jugando según indica la tabla de la figura 19.

Ejercicio 6.2. Hacer el análisis general, dados dos puñados con n y m fósforos respectivamente ¿Qué jugador tiene estrategia y cómo ha de jugar?

Ejercicio 6.3. ¿Y si hubieran 3 puñados con 5 fósforos cada uno? ¿Y si hubieran 3 puñados con n, m y k fósforos respectivamente? Analizar las variantes "sacando uno de cada grupo o uno de cada par de grupos", y después "sacando uno de cada grupo o uno de los tres grupos".

Ejercicio 6.4. ¿Cómo sería el análisis si el que gana es el que saca el último fósforo?

Juego 6.5 (**Ocho ciudades**). *Se tiene un mapa con 9 rutas conectando 8 ciudades como en la figura 20, y dos lápices: uno rojo y el otro azul. Por turnos cada jugador selecciona una carretera pintándola con su color. Gana el jugador que consigue pintar del mismo color tres carreteras que pasen por una misma ciudad.*

Como siempre, recomendamos al lector "jugar" previamente este juego para intentar encontrar alguna regularidad o similaridad con algún juego anterior.

Análisis del juego y solución. Insólitamente, este juego y el "Ta-Te-Ti" (juego 5.1) admiten el mismo análisis si uno enumera las rutas como en la figura 21, y observa la numeración de cada una de las carreteras y la correspondencia con la tabla de 3×3 que figura al lado. En esta correspondencia, seleccionar una carretera será equivalente a tachar una casilla del casillero. Luego, seleccionar todas las carreteras que pasan por una misma ciudad significará conseguir "tres en línea" en el casillero.

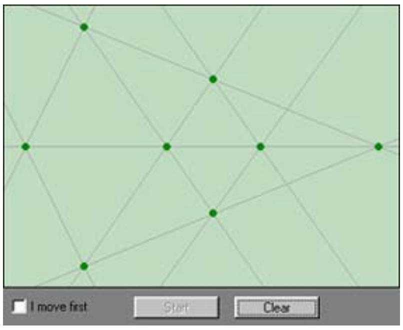

Figura 20. Las 8 ciudades

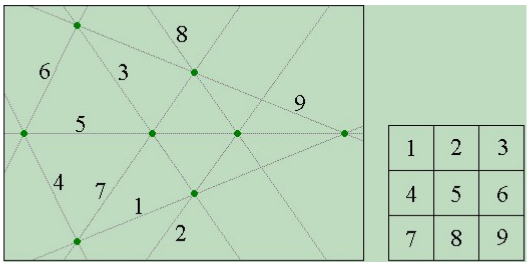

Figura 21. Las 8 ciudades y el Ta-Te-Ti

Respuesta: No hay estrategia ganadora, pero el que comienza tiene una estrategia "para no perder" si sigue la misma estrategia del Ta-Te-Ti aplicada a la numeración que se muestra en la figura 21.

Ejercicio 6.6. Mostrar que el juego de "sumar 15" (juego 2.5), puede ser analizado de la misma manera que el Ta-Te-Ti (y que el juego anterior) si uno utiliza el siguiente "tablero":

8	1	6
3	5	7
4	9	2

7. Para seguir jugando

Existe una vasta cantidad de material escrito disponible sobre temas como juegos matemáticos, estrategias, puzzles, sudokus, etc. Por citar un ejemplo, podemos mencionar la abundante obra de Martin Gardner que está publicada en varios libros, entre ellos [3, 4, 5]. De hecho, desde 1956 hasta 1981 Gardner escribió artículos mensuales sobre matemática recreativa para la prestigiosa revista Scientific American. Todos estos artículos fueron editados recientemente en formato de CD-Rom en [6] por la Sociedad Matemática Norteamericana.

Hemos puesto el ejemplo de Gardner por citar uno de ellos, quizás uno de los más prolíficos en el tema de la matemática recreativa. Pero hay mucho más material disponible no solo en forma de libro sino interactivamente, y en línea. La lista que aparece más abajo es una muy breve muestra de lo que se puede encontrar buscando por internet (en castellano) utilizando cualquier buscador de temas. Hay disponibles miles de juegos para jugar de a uno, de a dos, y también para jugar contra la computadora. También hay sugerencias para llevar al aula y jugar con los alumnos. En definitiva, hay una cantidad inmensa de material "libre" disponible sobre el tema en la red, solo cuestión de buscarla y aprovecharla.

Para aquéllos que quieran profundizar sus conocimientos con un enfoque más académico, recomendamos los libros [1] y [2], que contienen modelos matemáticos de juegos y aplicaciones más generales.

7.1. Recursos en línea.

"Matemática para Divertirse", juegos y problemas propuestos por Martin Gardner y recopilados por Patricio Ramos en
`http://www.librosmaravillosos.com/matematicaparadivertirse/seccion06.html`

"Taller de Juegos de Estrategia", puesto en línea por Benjamín Buriticá Trujillo de la Universidad de Antioquia:
`http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/curiosidad_05.html`

"Mueve Fichas". Juegos Matemáticos y Estrategias. Material elaborado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemática:
`http://venxmas.fespm.es/temas/mueve-ficha-juegos-matematicas-y.html?lang=es`

"Juegos de estrategia e ingenio: una experiencia temprana de investigación". Material interactivo elaborado por el Ministerio de Educación de España como actividad para desarrollar en el aula a nivel de educación secundaria:
`http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2002/estrategias/`

Referencias

[1] J. Beck. *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory.* Cambridge University Press, 2008.
[2] Thomas Ferguson. *Game Theory.* UCLA 2008, libro electrónico disponible en línea en `http://www.e-booksdirectory.com/details.php?ebook=2592`.
[3] Martin Gardner. *Entertaining Mathematical Puzzles.* Dover, 1961.
[4] *Aha! Insight.* W.H.Freeman and Company, New York, 1978.
[5] Martin Gardner. *My Best Mathematical and Logic Puzzles.* Dover, 1994. ISBN 0486281523.
[6] *Martin Gardner's Mathematical Games.* The Mathematical Association of America CD-ROM ISBN 0883855453.
[7] Adrián Paenza. *Matemática... ¿Estás ahí? Episodio 3,14.* 2007, Siglo Veintiuno Editores. Colección "Ciencia que Ladra..." ISBN 9789876290173.
[8] Adrián Paenza. *¿Cómo, esto también es matemática?* 2011, Editorial Sudamericana. ISBN 9789500736787
[9] Jonathan Schaeffer, Neil Burch, Yngvi Björnsson, Akihiro Kishimoto, Martin Müller, Robert Lake, Paul Lu, Steve Sutphen. *Checkers Is Solved.* Science, Vol. 317 no. 5844 pp. 1518–1522, 2007. DOI: 10.1126/science.1144079.
[10] Claudia Zaslavsky. *Tic Tac Toe: And Other Three-In-A Row Games from Ancient Egypt to the Modern Computer.* Crowell, 1982. ISBN 0690043163.

Departament d'Àlgebra i Geometria, Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona. Gran Via 505 , 08007, Barcelona. España
E-mail address: `cdandrea@ub.edu`