CÁLCULO I

1^0 Grado Matemáticas y 1^0 Doble Grado Física y Matemáticas,
Curso 2019–2020, Primer cuatrimestre

IV. Ejercicios (Series de números reales. Temas 10 y 11.)

1. Da un ejemplo de dos series divergentes $\sum x_n$ y $\sum y_n$ tales que $\sum x_n y_n$ sea convergente.

2. Supongamos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(x_n+y_n)$ es convergente. ¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} y_n$?

3. Si $a_n \geq 0\ \forall n$ y $\sum a_n$ converge, ¿puede afirmarse algo sobre la serie $\sum \sqrt{a_n}$? ¿Y sobre $\sum a_n^2$?

4. Prueba que la sucesión $\displaystyle\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^2+3n+2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}\right\}$ es convergente y calcula su límite.

5. Supongamos que $\sum a_n$ es una serie convergente. Prueba que $\left\{\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right\}$ converge a cero.

6. Prueba que las siguientes series convergen y calcula sus sumas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{3n+1}{n!}$

7. Dados $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $x\in\mathbb{R}^*$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha\, x^{2n}+\beta}{x^n}$.

8. Dado $a\in\mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n$

9. Sea $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ una serie convergente de términos no negativos. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{1+a_n}$ también es convergente.

10. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales no negativos. Supongamos que las series $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^2$ y $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n^2$ son convergentes. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ también es convergente.

11. Sea $a_n\geq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y supongamos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^q a_n = 1$, donde $q\in\mathbb{N}$ y $q>1$. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

12. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n(n^2+1)}{n^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{2^n\, n!}$ (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{3^n\, n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\, n}{n^2+1}$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}$ (i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n},\ x\in\mathbb{R}$

(j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ (k) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n-10}{n^4+1}$

13. Prueba que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ también converge absolutamente. ¿Se verifica el mismo resultado si la primera serie converge, pero no converge absolutamente?

14. Prueba que si la serie $\sum a_n$ converge absolutamente y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada, entonces la serie $\sum a_n b_n$ converge absolutamente. ¿Es cierta la afirmación análoga para series convergentes en lugar de absolutamente convergentes?

15. Sea $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ una serie absolutamente convergente y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una subsucesión de $\{x_n\}$. Prueba que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ es convergente. Suponiendo sólo que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_n$ es convergente, ¿se puede asegurar que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x_{\sigma(n)}$ también converge?

16. Dado $x\in\mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{x^n+n^2}$