Joaquín Pérez Muñoz

Geometría y Topología

Introducción

Estos son los apuntes de la asignatura **Geometría y Topología,** obligatoria de cuarto curso de la Licenciatura de Matematicas de la Universidad de Granada. Son de libre distribución, y pueden bajarse de la página web
`http://www.ugr.es/local/jperez/`
Están basados en apuntes previos del profesor Francisco Urbano, y en ellos encontrarás los enunciados y demostraciones de los resultados contenidos en el programa de la asignatura, distribuidos por temas tal y como ésta se estructuró y aprobó en Consejo de Departamento. Algunas veces, las demostraciones están resumidas y dejan que el lector compruebe los detalles como ejercicio. Además de éstos, al final de cada tema hay una relación de ejercicios propuestos.

Como siempre en estos casos, los apuntes no estarán libres de errores, y es labor conjunta del autor y de los lectores mejorarlos, un trabajo que nunca se termina. Si encuentras algún error, por favor envía un e-mail a la dirección de correo electrónico `jperez@ugr.es`
Todo lo que se dice en los apuntes puede encontrarse, a menudo explicado con más profundidad, en numerosos textos básicos. Son recomendables los siguientes:

- G. E. Bredon, TOPOLOGY AND GEOMETRY, Springer-Verlag 1993.
- C. Godbillon, ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE, Hermann 1971.
- J. Lafontaine, INTRODUCTION AUX VARIETES DIFFERENTIELLES, Presses Universitaires de Grenoble 1996.
- G. L. Naber, TOPOLOGY, GEOMETRY, AND GAUGE THEORY, Springer-Verlag 2000.
- M. Spivak, A COMPREHENSIVE INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL GEOMETRY I-V, Publish or Perish (1979).
- F. Warner, FOUNDATIONS OF DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND LIE GROUPS, Scott-Foresman (1971).

GRANADA, SEPTIEMBRE DE 2007
Joaquín Pérez Muñoz

Índice general

Capítulo 1

VARIEDADES DIFERENCIABLES

1.1. Subvariedades del espacio Euclídeo.

Recordemos de cursos anteriores el concepto de superficie:

Definición 1.1.1 Una *superficie* (regular) es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$ existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación $X : U \to \mathbb{R}^3$ diferenciable (en el sentido del Análisis) verificando:

1. $X : U \to V \cap S$ es un homeomorfismo.

2. La diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.

Recordemos que el cambio de parámetros en una superficie es de clase C^∞ en una superficie de $\mathbb{R}^3$, como consecuencia del Teorema de la Función Inversa. Esta "ventaja" procede de que las superficies viven en un ambiente euclídeo; sin embargo cuando estudiemos variedades diferenciables sin apoyarnos en espacios ambientes mayores, no contaremos con esta ventaja y tendremos de imponer la diferenciabilidad del cambio de cartas.

Generalizamos lo anterior a cualquier dimensión y codimensión en un ambiente euclídeo:

Definición 1.1.2 Una *subvariedad de dimensión n de* $\mathbb{R}^k$ es un subconjunto $M \subseteq \mathbb{R}^k$ tal que para cada $p \in M$ existen un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^k$ y una aplicación diferenciable $X : U \to \mathbb{R}^k$ verificando:

1. $X : U \to V \cap M$ es un homeomorfismo.

2. $dX_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es inyectiva para todo $q \in U$.

A la aplicación X anterior se la llama *parametrización* local de M alrededor de p.

Usaremos la notación M^n para indicar que la dimensión de M es n. Observemos que la condición 2 anterior dice que $n \leq k$. Al entero no negativo $k-n$ se le llama la *codimensión* de la subvariedad. Cuando $n = k-1$, llamamos a M una *hipersuperficie* de $\mathbb{R}^k$. También conviene poner de manifiesto que todo abierto de una subvariedad M^n de $\mathbb{R}^k$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^k$ de la misma dimensión n.

Ejemplo 1.1.1 GRAFO DE UNA APLICACIÓN DIFERENCIABLE.
Sea $F : O \to \mathbb{R}^{k-n}$ una aplicación diferenciable definida en un abierto O de $\mathbb{R}^n$. Entonces, el *grafo* de F definido por

$$G(F) = \Big\{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} \equiv \mathbb{R}^k \mid x \in O\Big\}$$

es una subvariedad de dimensión n de $\mathbb{R}^k$.

Una sencilla utilización del teorema de la función inversa nos permite probar el siguiente resultado (ya conocido para superficies), el cual nos proporcionará gran cantidad de ejemplos de subvariedades.

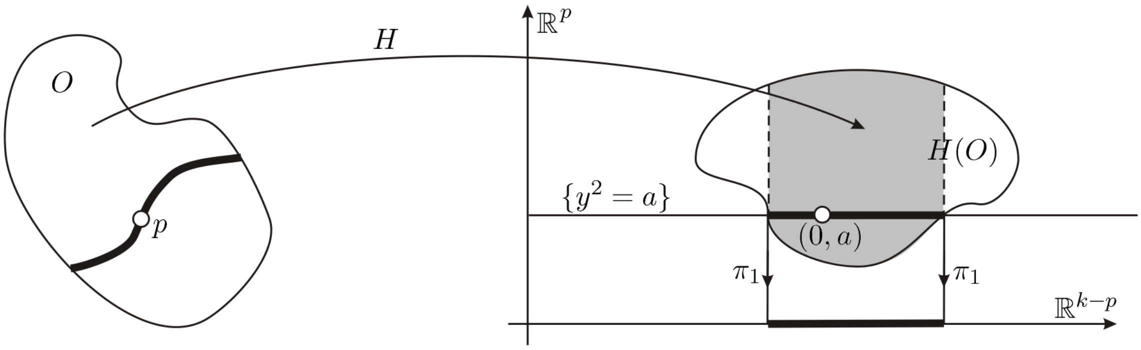
Proposición 1.1.1 *Sea $F : O \to \mathbb{R}^p$ $(k > p)$ una aplicación diferenciable definida en un abierto O de $\mathbb{R}^k$, y sea $a \in \mathbb{R}^p$ un valor regular de F (esto es, para todo $x \in F^{-1}(a)$, la diferencial $dF_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ es sobreyectiva). Si $F^{-1}(a) \neq \emptyset$, entonces $M := F^{-1}(a)$ es una subvariedad de dimensión $n = k-p$ de $\mathbb{R}^k$.*

Demostración. Fijemos un punto $p \in F^{-1}(a)$, y vamos a encontrar una parametrización de $F^{-1}(a)$ alrededor de p. Sean $y = (y^1, y^2) = (y_1, \ldots, y_{k-p}, y_{k-p+1}, \ldots, y_k)$ las coordenadas afines respecto a un sistema de referencia afín de $\mathbb{R}^k$ centrado en p. Definimos $H(y^1, y^2) = (y^1, F(y)) \in \mathbb{R}^{k-p} \times \mathbb{R}^p$ en un entorno de $(0,0) \equiv p$ en $\mathbb{R}^k$. Entonces, $H(0,0) = (0,a) \in \mathbb{R}^{k-p} \times \mathbb{R}^p$ y

$$dH_{(0,0)} = \left(\begin{array}{c|c} I_{k-p} & A_{(k-p)\times p} \\ \hline 0_{p\times(k-p)} & B_{p\times p} \end{array}\right),$$

donde $dF_p = \left(\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}\right)$. Como dF_p es sobreyectiva, el rango de esta última matriz es p luego en dF_p hay p filas linealmente independientes. Salvo una permutación de las veriables $y_1, \ldots, y_k$, podemos suponer que las p últimas filas de dF_p son linealmente independientes, luego B es una matriz regular. Por tanto, el rango de $dH_{(0,0)}$ es k, y $dH_{(0,0)}$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existen entornos abiertos de O de p en $\mathbb{R}^k$ y $H(O)$ de $(0,a) \in \mathbb{R}^{k-p} \times \mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^k$ tales que $H|_O : O \to H(O)$ es un difeomorfismo. Geométricamente, H "rectifica" $O \cap F^{-1}(a)$ llevándolo en puntos del subespacio afín

$\{y^2 = a\}$ de $\mathbb{R}^k$. Más concretamente, si $y = (y^1, y^2) \in O \cap F^{-1}(a)$ entonces $H(y) = (y^1, a)$ y además, $y^1 \in \pi_1(H(O))$ donde $\pi_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-p}$ la proyección sobre las primeras $k - p$ componentes. Nótese que $\pi_1(H(O))$ es abierto de $\mathbb{R}^{k-p}$, ya que π_1 es una aplicación abierta. Sin embargo, el recíproco no tiene porqué ser cierto, ya que si $y^1 \in \pi_1(H(O))$ entonces no tenemos asegurado que $(y^1, a) \in H(O)$, como puede verse en el dibujo siguiente:



Este problema técnico puede solucionarse tomando $H(O)$ más pequeño: cambiamos $H(O)$ por $H(O) \cap \pi_1^{-1}\left[\pi_1(H(O) \cap \{y^2 = a\})\right]$ (que es abierto de $\mathbb{R}^k$ porque $H(O) \cap \{y^2 = a\}$ es abierto en la topología inducida en $\{y^2 = a\}$, donde π_1 se restringe como difeomorfismo a $\mathbb{R}^{k-p}$), y después cambiamos O por la imagen inversa mediante H del "nuevo" $H(O)$. Consideremos el abierto $U := \pi_1(H(O)) \subset \mathbb{R}^{k-p}$. Definiendo $y^1 \mapsto X(y^1) = H^{-1}(y^1, a)$, tendremos la parametrización que buscamos. $\square$

Ejemplo 1.1.2 Esferas.
Sea $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y $r > 0$. Entonces, el conjunto

$$\mathbb{S}^n(a, r) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\}$$

es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{n+1}$, a la que se llamaremos *esfera de dimensión n, centro a y radio r* de $\mathbb{R}^{n+1}$.

En efecto, basta aplicar la Proposición 1.1.1 a la aplicación $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a_i)^2$.

Ejemplo 1.1.3 Toros n-dimensionales.
Sean $r_1, \dots, r_n > 0$. Entonces, el conjunto

$$\mathbb{T}^n = \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n} \mid |z_i|^2 = r_i^2, \ i = 1, \dots, n \right\}$$

es una subvariedad de dimensión n de $\mathbb{R}^{2n}$, a la que llamamos toro n-dimensional.

En este caso aplicaremos la Proposición 1.1.1 a la aplicación $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(z_1, \dots, z_n) = (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$.

Ejemplo 1.1.4 Grupo ortogonal.
Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, y $\mathcal{S}_n(R) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el subespacio vectorial de las matrices simétricas ($\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$). Entonces, la aplicación $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dada por $F(A) = A \cdot A^t$ es diferenciable (identificamos $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$) y la matriz identidad I_n es un valor regular de F (ejercicio 5). Por tanto, el conjunto

$$O(n) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\right\}$$

es una subvariedad de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a la que llamamos el *grupo ortogonal de orden n*. Cada matriz ortogonal se corresponde con una isometría vectorial del espacio vectorial métrico $(\mathbb{R}^n, g_0)$ en sí mismo. Estas isometrías vectoriales tienen determinante ± 1, y las que corresponden a rotaciones forman un subgrupo de índice 2 (el *grupo especial ortogonal*):

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}.$$

La continuidad de la aplicación determinante nos dice que $SO(n)$ es abierto y cerrado de $O(n)$. Por tanto, $SO(n)$ es también una subvariedad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ejemplo 1.1.5 Grupo especial lineal.
Sea $Gl(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ el *grupo lineal* de orden n, formado por las matrices de automorfismos vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Como $Gl(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$, deducimos que $Gl(n,\mathbb{R})$ es un abierto del espacio euclídeo $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y por tanto es una subvariedad n^2-dimensional. Consideremos la aplicación diferenciable $\det : Gl(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} - \{0\}$, cuya diferencial es $d\det_A(B) = \det A \cdot \mathrm{Traza}(BA^{-1})$ (ejercicio 10). Por tanto, 1 es un valor regular de F y la Proposición 1.1.1 nos dice que el *grupo especial lineal de orden n*

$$Sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \subset Gl(n,\mathbb{R})$$

es una subvariedad de dimensión $n^2 - 1$ de $Gl(n,\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.1.6 Grupo Unitario.
Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^{n^2} \equiv \mathbb{R}^{2n^2}$ el espacio vectorial complejo de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes complejos. Entonces, el conjunto

$$U(n) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = I_n\right\}$$

es una subvariedad de dimensión n^2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ejercicio 11), a la que llamamos el *grupo unitario* de orden n.

Ejemplo 1.1.7 Grupo especial unitario.
El determinante de cada matriz $A \in U(n)$ es un número complejo unitario. Dentro de $U(n)$ podemos considerar las matrices con determinante 1:

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\},$$

que forma un subgrupo de $U(n)$. Entonces, $SU(n)$ es una subvariedad de dimensión $n^2 - 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, a la que llamamos el *grupo especial unitario* de orden n. Quizás valga la pena exponer algunos detalles de la demostración de esta propiedad. Mucho de lo que viene a continuación está contenido en el ejercicio 11.

Llamamos $\mathcal{SC}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^t = \overline{A}\}$, $\mathcal{AC}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^t = -\overline{A}\}$. Entonces, $\mathcal{SC}_n(\mathbb{C}), \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ son subespacios vectoriales reales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimensión n^2 y $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{SC}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ como espacios vectoriales reales. Así, el grupo unitario es $U(n) = F^{-1}(I_n)$ donde I_n es la matriz identidad de orden n, y F es la aplicación diferenciable dada por

$$F : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{SC}(\mathbb{C}), \quad F(A) = A \cdot \overline{A}^t.$$

Entonces, dada $A \in U(n)$ (grupo unitario), se tiene $\ker(dF_A) = A \cdot \ker(dF_{I_n})$, de donde se deduce fácilmente que I_n es un valor regular de F, y por tanto $U(n)$ es una subvariedad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimensión (real) n^2.

Si queremos repetir los argumentos para dotar de estructura de subvariedad a $SU(n)$, consideraremos la aplicación $\widehat{F} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{SC}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ dada por

$$\widehat{F}(A) = (A\overline{A}^t, \Im(\det A)), \tag{1.1}$$

donde $\Im(z)$ denota la parte imaginaria de $z \in \mathbb{C}$. Es fácil comprobar que $\widehat{F}^{-1}(I_n, 0) = SU(n) \cup SU_-(n)$, donde $SU_-(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = -1\}$ y que $SU(n), SU_-(n)$ son abiertos disjuntos de $\widehat{F}^{-1}(I_n, 0)$. Si dotamos a $\widehat{F}^{-1}(I_n, 0)$ de estructura de subvariedad $(n^2 - 1)$-dimensional de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces tendremos que $SU(n)$ también es una subvariedad $(n^2 - 1)$-dimensional de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que es lo que queríamos demostrar. Y para comprobar que $\widehat{F}^{-1}(I_n, 0)$ es una subvariedad $(n^2 - 1)$-dimensional de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sólo tenemos que probar que $(I_n, 0)$ es un valor regular de $\widehat{F}$. Tomemos $A \in \widehat{F}^{-1}(I_n, 0)$. Entonces, $d\widehat{F}_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{SC}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}$ viene dada por

$$d\widehat{F}_A(B) = \left(dF_A(B), \Im\left(d(\det)_A(B)\right)\right),$$

donde $F(A) = A\overline{A}^t$. La diferencial de la aplicación determinante anterior se obtiene pasando a matrices complejas regulares la fórmula del ejercicio 10:

$$d(\det)_A(B) = \det A \ \mathrm{Traza}(BA^{-1}) = \pm\mathrm{Traza}(BA^{-1}),$$

donde hemos usado que $\widehat{F}(A) = (I_n, 0)$. Así que hay que probar que la aplicación $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \left(dF_A(B), \pm\Im\left(\text{Traza}(BA^{-1})\right)\right)$ es sobreyectiva sobre $\mathcal{SC}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}$. Probaremos esta sobreyectividad cuando $\det A = 1$ (es decir, cuando el $\pm$ anterior es $+$), ya que el caso $\det A = -1$ es similar.

Dada $(C, \lambda) \in \mathcal{SC}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}$, la sobreyectividad de dF_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a $\mathcal{SC}_n(\mathbb{C})$ nos proporciona una martiz $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $dF_A(B_1) = C$. Ahora hay que comprobar que se puede elegir tal matriz B_1 de forma que $\Im\left(\text{Traza}(B_1A^{-1})\right) = \lambda$. Toda matriz $B \in B_1 + \ker(dF_A) = B_1 + A \cdot \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ también cumple $dF_A(B) = C$ (y así son todas las soluciones B de la ecuación $dF_A(B) = C$), luego la cuestión se reduce a encontrar $D \in \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ tal que

$$\Im\left[\text{Traza}\left((B_1 + AD)A^{-1}\right)\right] = \lambda. \tag{1.2}$$

Tomemos $D \in \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ a determinar. Entonces,

$$\Im\left[\text{Traza}\left((B_1 + AD)A^{-1}\right)\right] = \Im\left[\text{Traza}\left((B_1A^{-1}\right)\right] + \Im\left[\text{Traza}\,(D)\right].$$

El primer sumando del miembro de la derecha anterior es un número real δ que no depende de D. Por otro lado, el que $D \in \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ implica que Traza$(D) = \mu i$ para algún $\mu \in \mathbb{R}$, luego hay que resolver la ecuación $\lambda = \delta + \mu$ con $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$ dados, en la incógnita μ, y con este $\mu = \lambda - \delta$ definiremos la matriz $D \in \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ que haga cierta la ecuación (1.2). Por ejemplo, tomaremos D como la matriz diagonal compleja de orden n con diagonal $(\mu i, 0, \ldots, 0)$. Esto prueba que $SU(n)$ es una subvariedad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimensión $n^2 - 1$.

Proposición 1.1.2 *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una subvariedad de dimensión n. Para cada $i = 1, 2$ tomemos una parametrización $X_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ de M tal que $O = X_1(U_1) \cap X_2(U_2) \neq \emptyset$. Entonces,*

$$X_2^{-1} \circ X_1 : X_1^{-1}(O) \to X_2^{-1}(O)$$

es un difeomorfismo al que se llama cambio de parámetros.

Definición 1.1.3 Sea $M \subseteq \mathbb{R}^k$ una subvariedad de dimensión n, y $p \in M$. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se llama *diferenciable en* p si existe una parametrización $X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $p \in X(U)$ tal que $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $X^{-1}(p)$.

La independencia de la parametrización en la definición anterior es consecuencia del cambio de parámetros (Proposición 1.1.2).

1.2. Concepto de variedad diferenciable.

Definición 1.2.1 Sea M un espacio topológico. Una *estructura diferenciable* sobre M es una familia $\mathcal{D} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ (aquí I es cualquier conjunto de índices) verificando

1. $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento por abiertos de M.

2. Existe un entero $n \geq 1$ tal que para todo $i \in I$, ϕ_i es un homeomorfismo de U_i sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$.

3. Si $i, j \in I$ cumplen $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la aplicación

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

   es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

4. La familia $\mathcal{D}$ es *maximal*, en el sentido de que $\mathcal{D}$ contiene a todos los pares (U, ϕ) cumpliendo:

   a) U es un abierto de M y ϕ un homeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^n$.
   b) Para todo $i \in I$ tal que $U \cap U_i \neq \emptyset$, $\phi \circ \phi_i^{-1}$ es un difeomorfismo.

Diremos que $M \equiv (M, \mathcal{D})$ es una *variedad diferenciable* de dimensión n. A cada par $(U, \phi) \in \mathcal{D}$ se le llama *entorno coordenado* o *carta* de la variedad y a cada recubrimiento (no necesariamente maximal) $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de M por cartas de $\mathcal{D}$, *atlas* de M. Si a los cambios de coordenadas, esto es a los difeomorfismos del punto 3 anterior, sólo le exigimos que sean difeomorfismos de clase C^k (resp. analíticos), a la estructura diferenciable se le llama de clase C^k (resp. analítica). Como el cambio de cartas es un difeomorfismo entre abiertos del euclídeo, el teorema de la función inversa nos dice que la dimensión de una variedad está bien definida (no depende de la carta ni del atlas diferenciable[1]).

Nota 1.2.1 *No hemos impuesto a nuestras variedades condiciones topológicas naturales, como ser Hausdorff. La razón es que esto crea algunos problemas con cocientes (por ejemplo, en la Proposición 1.3.3). De todas formas, a partir de cierto momento supondremos que todas las variedades que consideremos serán Hausdorff y ANII (al probar la existencia de particiones de la unidad).*

Las siguientes afirmaciones son fáciles de probar:

Lema 1.2.1

(i) *Sea M un espacio topológico y $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un atlas sobre M. Entonces, existe una única estructura de variedad diferenciable sobre M que contiene al atlas $\mathcal{A}$. Representaremos a dicha estructura diferenciable por $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (estructura diferenciable generada por $\mathcal{A}$).*

[1] Aquí usamos que las variedades son de clase C^r, $r \geq 1$. Si estudiamos variedades C^0 (topológicas), no podremos hacer uso del teorema de la función inversa, sino del teorema de invarianza del dominio de Brouwer, para concluir que la dimensión de una variedad de clase C^0 está bien definida.

(ii) *Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son dos atlas sobre el mismo espacio topológico, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ si y sólo si para todo $(U_1, \phi_1) \in \mathcal{A}_1$ y $(U_2, \phi_2) \in \mathcal{A}_2$ con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ es un difeomorfismo.*

(iii) *Toda subvariedad n-dimensional de $\mathbb{R}^k$ es una variedad diferenciable de dimensión n.*

(iv) *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con estructura diferenciable $\mathcal{D}$, y sea O un abierto de M. Entonces*

$$\mathcal{D}_O = \{(V \cap O, \phi|_{V \cap O}) \mid (V, \phi) \in \mathcal{D}\}$$

define una estructura de variedad diferenciable de dimensión n en O. En este caso, decimos que O es una subvariedad abierta de M.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ podemos considerar los atlas $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, t^3)\}$. Cada uno de ellos genera una estructura diferenciable sobre $\mathbb{R}$, pero el cambio de cartas entre $1_{\mathbb{R}^3}$ y t^3 no es diferenciable. Por tanto, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \neq \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ (ver ejercicio 1).

Ejemplo 1.2.1 Según el punto **(iii)** anterior, todos los ejemplos anteriormente vistos de subvariedades del euclídeo son variedades diferenciables. Esto se aplica a la esfera $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. A continuación presentamos un atlas sobre la esfera: Para cada $i = 1, \ldots, n+1$, sean

$$U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_i < 0\}.$$

Claramente, U_i^+, U_i^- son abiertos de $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{S}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1}(U_i^+ \cup U_i^-)$. Si $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ es el disco abierto centrado en el origen y de radio 1, consideramos las aplicaciones

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{D}^n, \quad \varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots x_{n+1}),$$

donde $\widehat{x_i}$ significa que omitimos esa coordenada. $\varphi_i^\pm$ es claramente continua, con inversa

$$(\varphi_i)^\pm(y_1, \ldots, y_n) = \left(y_1, \ldots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n y_i^2}, y_i, \ldots, y_n \right), \ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{D}^n.$$

Como $(\varphi_i)^\pm$ también es continua, deducimos que $\varphi_i^\pm$ es un homeomorfismo. Es fácil comprobar que el cambio de cartas es diferenciable, y por tanto $\mathcal{A} = \{(U_i^\pm, \varphi_i^{pm})\}_{i=1}^{n+1}$ es un atlas diferenciable sobre $\mathbb{S}^n$, que genera la estructura diferenciable estándar sobre ésta. En el ejercicio 17 se define otro atlas diferenciable sobre $\mathbb{S}^n$ que genera la misma estructura diferenciable, esta vez basado en proyecciones estereográficas.

Ejemplo 1.2.2 VARIEDADES PRODUCTO.
Sean M^n, N^m variedades diferenciables. Si $\mathcal{A}_M, \mathcal{A}_N$ son atlas diferenciables sobre M, N, entonces podemos construir un atlas diferenciable sobre $M \times N$ mediante las *cartas producto:* Dadas $(U, \psi) \in \mathcal{A}_M$, $(V, \varphi) \in \mathcal{A}_N$, consideramos el homeomorfismo (tomamos en $M \times N$ la topología producto)

$$\psi \times \varphi : U \times V \to \psi(U) \times \varphi(V) \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Los cambios de cartas son diferenciables, y $\mathcal{A} = \{(U \times V, \psi \times \varphi) \mid (U, \psi) \in \mathcal{A}_M, (V, \varphi) \in \mathcal{A}_N\}$ forman un atlas diferenciable (no maximal) sobre $M \times N$. A la estructura diferenciable generada por $\mathcal{A}$ sobre $M \times N$ se le llama *estructura producto.*

Ejemplo 1.2.3 ESPACIO PROYECTIVO REAL (modelo de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$).
En $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ se considera la relación de equivalencia R dada por

$$xRy \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tal que } y = \lambda x.$$

Al espacio cociente $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/R$ se le llama *espacio proyectivo real* de dimensión n. En $\mathbb{RP}^n$ consideramos la topología cociente, que hace de la proyección natural $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ una identificación (es la mayor topología en $\mathbb{RP}^n$ que hace continua a Π).

Para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ sea O_i el abierto de $R^{n+1} - \{0\}$ definido por

$$O_i = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}.$$

Como $\Pi^{-1}(\Pi(O_i)) = O_i$ (es decir, O_i es un abierto *saturado*), el conjunto $V_i = \Pi(O_i)$ es un abierto de $\mathbb{RP}^n$. Consideremos la aplicación $\phi_i : V_i \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi_i\left(\Pi(x_1, \ldots, x_{n+1})\right) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right).$$

Entonces, $\{(V_i, \phi_i)\}_{1 \leq i \leq n+1}$ define un atlas sobre $\mathbb{RP}^n$ que lo convierte en una variedad diferenciable de dimensión n.

Si $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ representa la inclusión y $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ es la aplicación dada por $\pi = \Pi \circ i$, entonces $\pi(\mathbb{S}^n) = \mathbb{RP}^n$. En particular, $\mathbb{RP}^n$ es una variedad compacta. Más adelante veremos cómo describir $\mathbb{RP}^n$ a partir de $\mathbb{S}^n$, mediante la acción del grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Ejemplo 1.2.4 ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO.
El espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ se define de forma análoga al caso real, tomando en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} = \mathbb{R}^{2n+2} - \{0\}$ la relación de equivalencia

$$zRz' \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ tal que } z' = \lambda z.$$

Al espacio cociente $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/R$ se le llama *espacio proyectivo complejo.* Las cartas de un atlas diferenciable sobre $\mathbb{CP}^n$ se definen de forma similar al caso real: primero consideramos en $\mathbb{CP}^n$ consideramos la topología cociente, que convierte a la proyección $\Pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ en una identificación. Para cada $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ se define

$$O_i = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_i \neq 0\}.$$

Entonces, $V_i = \Pi(O_i)$ es un abierto de $\mathbb{CP}^n$, y la aplicación $\phi_i : V_i \to \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\phi_i\left(\Pi(z_1, \ldots, z_{n+1})\right) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

define un atlas $\{(V_i, \phi_i)\}_{1 \leq i \leq n+1}$ sobre $\mathbb{CP}^n$, que lo convierte en una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Los cambios de carta no son sólo difeormorfismos de clase C^∞, sino difeomorfismos analíticos (holomorfos) en el sentido de la variable compleja, lo que hace que $\mathbb{CP}^n$ tenga una estructura de *variedad compleja* de dimensión n, aunque no estudiaremos variedades complejas en este curso.

1.3. Aplicaciones diferenciables. Difeomorfismos.

Definición 1.3.1 Sean M^n y N^m dos variedades diferenciables y $p \in M$. Una aplicación $F : M \to N$ se dice *diferenciable en* p si para cualquier carta (V, ϕ) de N con $F(p) \in V$, existe una carta (U, ψ) de M con $p \in U$ tal que $F(U) \subseteq V$ y

$$\phi \circ F \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \phi(V),$$

es diferenciable en $\psi(p)$ como aplicación entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. F se dice *diferenciable en* M si es diferenciable en todo punto de M. Al conjunto de aplicaciones diferenciables de M en N lo representaremos por $C^\infty(M, N)$ (simplificaremos $C^\infty(M, \mathbb{R})$ por $C^\infty(M)$).

Nota 1.3.1

(i) La definición anterior no depende de las cartas alrededor de p y $F(p)$, porque el cambio de cartas es diferenciable como aplicación entre abiertos del espacio euclídeo. De hecho, podemos cambiar "$\forall(V, \phi) \ldots \exists(U, \psi)$" por "$\forall(V, \phi), \forall(U, \psi) \ldots$" o bien por "$\exists(V, \phi), \exists(U, \psi) \ldots$" con los cambios obvios.

(ii) No hemos impuesto que F sea, *a priori,* continua. Sin embargo, es fácil ver que si $F : M \to N$ es diferenciable, entonces F es continua (ejercicio).

(iii) Si M o N son abiertos de $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^m$ entonces, para cualquier punto $p \in M$, las cartas pueden ser tomadas así: $(U, \psi) = (\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ o $(V, \phi) = (\mathbb{R}^m, 1_{\mathbb{R}^m})$. En particular, cuando M y N son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, el nuevo concepto de diferenciablidad coincide con el del Análisis.

Definición 1.3.2 Un *difeomorfismo* entre dos variedades diferenciables M y N es una aplicación biyectiva $F : M \to N$ tal que F y F^{-1} son aplicaciones diferenciables. En tal caso, M, N se dicen *variedades difeomorfas*. Claramente, las dimensiones de dos variedades difeomorfas coinciden. Un *difeomorfismo local* es una aplicación diferenciable $F : M \to N$ tal que $\forall p \in M$, existen entornos abiertos U de p en M y V de $F(p)$ en N tales que $F|_U : U \to V$ es un difeomorfismo.

Dos ejemplos: Si (U, ϕ) es una carta de una variedad diferenciable M, entonces ϕ es un difeomorfismo de U en $\phi(U)$, ambos con la estructura diferenciable inducida como abiertos de M y $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Por otro lado, las variedades $(\mathbb{R}, \mathcal{D}(\{(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})\})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{D}(\{(\mathbb{R}, t^3)\})$ son difeomorfas, aunque ambas estructuras diferenciables son distintas. En Geometría Diferencial, identificamos variedades diferenciables que sean difeomorfas, así que los dos ejemplos anteriores de estructuras diferenciables sobre $\mathbb{R}$ son consideradas idénticas desde este punto de vista.

Otro problema, mucho más complejo, es determinar cuántas estructuras diferenciables distintas (no difeomorfas) admite una variedad topológica dada, si es que admite alguna. A nivel informativo:

- Toda variedad C^k admite una única estructura diferenciable (C^∞) que es compatible con la estructura C^k, en el sentido de que los cambios de cartas entre ambas estructuras son difeomorfismos de clase C^k (Whitney).

- Existen variedades topológicas (C^0) que no admiten ninguna estructura diferenciable (Donaldson).

- Cada variedad topológica M^n con $\dim M \leq 3$ admite una única estructura diferenciable (salvo difeomorfismos).

- Cada variedad diferenciable compacta M^n con $\dim M \geq 5$ admite una cantidad finita de estructuras diferenciables (salvo difeomorfismos).

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 4$, $\mathbb{R}^n$ admite una única estructura diferenciable (salvo difeomorfismos).

- $\mathbb{R}^4$ admite una cantidad infinita no numerable de estructuras diferenciables.

- Una *esfera exótica* es una variedad diferenciable M^n homemorfa a $\mathbb{S}^n$ pero no difeomorfa a $\mathbb{S}^n$. La tabla siguiente muestra la cantidad de estructuras diferenciables en una esfera (salvo difeomorfismos) para dimensiones bajas:

$\dim M$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
#estr. dif.	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	

En particular, para $n = 4$ se desconoce si existen esferas exóticas. La *conjetura de Poincaré diferenciable* dice que no existen esferas exóticas 4-dimensionales, pero ese problema está aún abierto (incluso podrían existir infinitas).

Proposición 1.3.1

(i) *La aplicaciones constantes entre variedades diferenciables son diferenciables.*

(ii) *La identidad de una variedad diferenciable en sí misma es un difeomorfismo.*

(iii) *La composición de aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables es diferenciable. En particular, la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.*

(iv) *Si O es un abierto de una variedad diferenciable M, entonces la inclusión $i : O \to M$ es diferenciable. Además, si $F : M \to N$ es diferenciable entonces $F|_O : O \to N$ también es diferenciable.*

(v) *Si (V, ϕ) es una carta de una variedad diferenciable M^n, entonces $\phi : V \to \phi(V)$ es un difeomorfismo. Llamaremos* funciones coordenadas *de la carta (V, ϕ) a las componentes $x_i = p_i \circ \phi : V \to \mathbb{R}$, donde $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son las proyecciones.*

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 1.3.2 *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^k$ una subvariedad. Entonces:*

1. *La inclusión $i : M \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable.*
2. *Una aplicación $F : N \to M$ es diferenciable si y sólo si $i \circ F : N \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable.*
3. *Si O es un abierto de $\mathbb{R}^k$ con $M \subseteq O$ y $F : O \to N$ es una aplicación diferenciable, entonces $F|_M : M \to N$ es diferenciable.*

Demostración.

Para probar que i es diferenciable en $p \in M$, basta elegir una carta (U, ψ) para M alrededor de p que sea "la inversa de una parametrización X". La carta elegida para $\mathbb{R}^k$ será $(\mathbb{R}^k, 1_{\mathbb{R}^k})$, luego la versión de i en coordenadas locales respecto a ambas cartas es la parametrización X de M, que es diferenciable. Esto prueba el apartado *1.* El apartado *3* es consecuencia de *1* ya que $F|_M = F \circ i$ siendo i la inclusión de M en O. Por último, veamos el apartado *2:*

La implicación necesaria se deduce de que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable. Veamos la implicación suficiente:

Primero notemos que $F \in C^0(N, M)$, ya que M tiene la topología inducida (es decir, la topología inicial para la inclusión) e $i \circ F$ es continua de N a $\mathbb{R}^k$.

Fijemos un punto $p \in N$. Basta probar que $F : N \to M$ es diferenciable en p. Usando el Lema 1.3.1 en $F(p)$ (que probaremos después), tenemos que existen cartas (U, ψ) para M y (V, φ) para $\mathbb{R}^k$ tales que $F(p) \in U$, $\psi(F(p)) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $i(F(p)) \in V$, $\varphi(i(F(p))) = 0 \in \mathbb{R}^k$, $U \subset V$ y $\left(\varphi \circ i \circ \psi^{-|}\right)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

Usando la continuidad de $F : N \to M$ y el abierto U de M, encontramos una carta (W, χ) en N tal que $p \in W$ y $F(W) \subset U$. Si vemos que $\psi \circ F \circ \chi^{-1}$ es diferenciable en $\chi(W)$ podremos concluir que F es diferenciable en p y habremos terminado. Llamando π_1 a la proyección de $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n}$ sobre su primer factor, tenemos

$$\psi \circ F \circ \chi^{-1} = 1_{\psi(U)} \circ \left(\psi \circ F \circ \chi^{-1}\right) = \left(\pi_1 \circ \varphi \circ i \circ \psi^{-1}\right) \circ \left(\psi \circ F \circ \chi^{-1}\right) = \pi_1 \circ \left[\varphi \circ (i \circ F) \circ \chi^{-1}\right],$$

que es diferenciable por ser composición de aplicaciones diferenciables. □

Lema 1.3.1 *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^k$ una subvariedad, y $p \in M$. Entonces, existen cartas (U, ψ) para M y (V, φ) para $\mathbb{R}^k$ tales que $p \in U$, $\psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, $i(p) \in V$, $\varphi(i(p)) = 0 \in \mathbb{R}^k$, $U \subset V$ y*

$$\left(\varphi \circ i \circ \psi^{-|}\right)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Demostración. Tomemos una carta $(\widetilde{U}, \widetilde{\psi})$ para M alrededor de p, del tipo "inversa de una parametrización", i.e. existe una parametrización $X : \widetilde{\psi}(\widetilde{U}) \to \mathbb{R}^k$ de M alrededor de p, tal que $\widetilde{\psi}$ es la inversa del homeomorfismo obtenido restringiendo X a su imagen. No perdemos generalidad suponiendo $0 \in \widetilde{\psi}(\widetilde{U})$ y $X(0) = p$.

Por definición de parametrización, la diferencial $dX_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es inyectiva. Podemos suponer, tras posiblemente una permutación de las componentes de X (que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^k$ y por tanto una carta de éste) que la matriz Jacobiana dX_0 es del tipo

$$dX_0 = \left(\begin{array}{c} A_{n\times n} \\ \hline B_{(k-n)\times n} \end{array}\right)$$

con A regular. Consideremos la aplicación diferenciable $H : \widetilde{\psi}(\widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{k-n} \to \mathbb{R}^k$ dada por $H(x, y) = X(x) + (0, y)$, donde $x \in \widetilde{\psi}(\widetilde{U})$, $y \in \mathbb{R}^{k-n}$. Así, $H(0, 0) = p$ y la matriz Jacobiana de H en $(0, 0)$ es

$$dH_{(0,0)} = \left(\begin{array}{c|c} A_{n\times n} & 0 \\ \hline B & I_{k-n} \end{array}\right),$$

que es una matriz regular. Por el Teorema de la Función Inversa, existen abiertos $\widetilde{O} \subset \widetilde{\psi}(\widetilde{U})$ y $W \subset \mathbb{R}^{k-n}$,ambos conteniendo a los respectivos orígenes, tales que

$$H|_{\widetilde{O}\times W} : \widetilde{O} \times W \to H(\widetilde{O} \times W)$$

es un difeomorfismo, y $H(\widetilde{O} \times W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^k$ que contiene a p. Finalmente, definimos la cartas (U, ψ) de M y (V, φ) de $\mathbb{R}^k$ mediante

$$U = \widetilde{\psi}^{-1}(\widetilde{O}) \subset \widetilde{U}, \quad \psi = \widetilde{\psi}|_U, \quad V = H(\widetilde{O} \times W) \subset \mathbb{R}^k, \quad \varphi = (H|_{\widetilde{O}\times W})^{-1}.$$

Nótese que la inclusión $U \subset V$ se traduce en $\widetilde{\psi}^{-1}(\widetilde{O}) \subset H(\widetilde{O}\times W)$, inclusión que se cumple ya que dado $q \in \widetilde{\psi}^{-1}(\widetilde{O})$, tenemos $q = X(\widetilde{\psi}(q))$ luego $q = H(\widetilde{\psi}(q), 0) \in H(\widetilde{O} \times W)$. Sólo queda comprobar que $(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})(x) = (x, 0)$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{O}$. Pero

$$(\varphi \circ i \circ \psi^{-1})(x) = \left[(H|_{\widetilde{O}\times W})^{-1} \circ i \circ \left(\widetilde{\psi}|_U\right)^{-1}\right](x) = \left[(H|_{\widetilde{O}\times W})^{-1} \circ X\right](x),$$

luego la igualdad que queremos se deduce de que $X(x) = (H|_{\widetilde{O}\times W})(x, 0)$. □

A continuación tenemos ejemplos de aplicaciones diferenciables. La demostración de la diferenciabilidad se deja como ejercicio.

Ejemplo 1.3.1

(i) Dado $q \in \mathbb{S}^n(1)$, la *función altura* $f_q : \mathbb{S}^n(1) \to \mathbb{R}$ dada por $f_q(p) = \langle p, q\rangle$, es diferenciable.

(ii) La proyección canónica $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ es diferenciable, y una aplicación $F : \mathbb{RP}^n \to M$ es diferenciable si y sólo si $F \circ \Pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to M$ es diferenciable.

Una forma sencilla de producir gran cantidad de variedades diferenciables es como cocientes de otras variedades mediante acciones de grupos con ciertas condiciones, como veremos a continuación.

Definición 1.3.3 Sea M^n una variedad diferenciable y G un grupo algebraico. Una *acción* es una aplicación $\lambda : G \times M \to M$ tal que $\forall g, g_1, g_2 \in G$, $\forall p \in M$,

1. $e \cdot p = p$,
2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 \cdot g_2) \cdot p$.

Dado $g \in G$, se define $\lambda_g : M \to M$ por $\lambda_g(p) = g \cdot p$. Entonces, λ_g es una biyección, con inversa $\lambda_{g^{-1}}$.

La acción λ se dice *diferenciable* cuando $\forall g \in G$, λ_g es un difeomorfismo de M en sí misma (equivalentemente, cuando λ_g es diferenciable $\forall g \in G$). Además, λ se dice *propiamente discontinua* cuando $\forall p \in M$, $\exists U \subset M$ abierto conteniendo a p tal que $U \cap \lambda_g(U) = \emptyset$ $\forall g \in G - \{e\}$.

Toda acción λ sobre M define una relación de equivalencia sobre M:

$$p \sim_G q \;\Leftrightarrow\; \exists g \in G \mid g \cdot p = q.$$

Llamemos $\pi : M \to M/G = M/\sim_G$ a la proyección canónica de M en su cociente. π es continua si en M/G consideramos la topología cociente, y abierta (porque $\pi^{-1}(\pi(O)) = \cup_{g\in G}\lambda_g(O)$, $\forall O \subset M$).

Proposición 1.3.3 *Si $\lambda : G \times M \to M$ es una acción diferenciable y propiamente discontinua de un grupo algebraico G sobre una variedad diferenciable M, entonces existe una única estructura diferenciable $\mathcal{D}$ sobre M/G que convierte a π en difeomorfismo local. Además, la topología subyacente a $\mathcal{D}$ es la topología cociente.*

Demostración. EXISTENCIA.
Consideremos en M/G la topología cociente $\mathcal{T}/G$ de la topología $\mathcal{T}$ de M. Dado $p \in M$, sea U un abierto de M conteniendo a p dado por la discontinuidad de la acción λ. Entonces, $\pi|_U : U \to \pi(U)$ es un homeomorfismo (es continua, sobreyectiva, inyectiva y abierta). Ahora podemos definir las cartas de M/G como la composición de $\pi|_U$ con cartas de M cuyo abierto coordenado esté contenido en U. Variando U y aplicando este procedimiento, se obtiene un atlas diferenciable sobre M/G, que genera una estructura diferenciable $\mathcal{D}$ que hace a π difeomorfismo local (ejercicio).

UNICIDAD.
Si M/G admite una estructura diferenciable $\mathcal{D}'$ que hace de π un difeomorfismo local y llamamos $\mathcal{T}'$ a la topología subyacente a $\mathcal{D}'$, entonces $\pi : (M, \mathcal{T}) \to (M/G, \mathcal{T}')$ es continua, sobreyectiva y abierta, luego identificación. Por tanto, $\mathcal{T}' = \mathcal{T}/G$. Ahora consideramos las aplicaciones $M \xrightarrow{\pi} (M/G, \mathcal{D}) \xrightarrow{1_{M/G}} (M/G, \mathcal{D}')$, cuya composición es π. Como las dos π son difeomorfismos locales, concluímos que $1_{M/G}$ es diferenciable de $(M/G, \mathcal{D})$ en $(M/G, \mathcal{D}')$. El recíproco es igual, con lo que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. $\square$

Podríamos haber definido variedad diferenciable añadiendo a la definición 1.2.1 la condición de que el espacio topológico subyacente sea Hausdorff (todos los ejemplos presentados hasta ahora lo son, y también los que veremos en este curso). Sin embargo, añadir T_2 a la definición de variedad exige que se añada también una condición adicional a la Proposición 1.3.3 para que siga siendo cierta: necesitamos que dados $p, q \in M$ que no se relacionen mediante G, existan $U_p, U_q \subset M$ abiertos conteniendo a p, q respectivamente, tales que $U_p \cap \lambda_g(U_q) = \emptyset$ para todo $g \in G$ (de hecho, esta última propiedad caracteriza cuándo M/G es Hausdorff). En esta línea, debemos recordar las siguientes observaciones topológicas sobre separación del cociente $(X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ por una relación de equivalencia:

- Si la proyección canónica $\pi : X \to X/\sim$ es abierta y $R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ es cerrado (en la topolgía producto), entonces $X/\sim$ es Hausdorff.

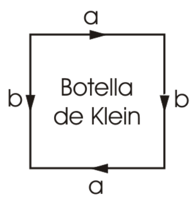
- Si π es cerrada, entonces R es cerrado en $X \times X$.

En el caso de una acción diferenciable y propiamente discontinua λ de un grupo G sobre una variedad M^n, sabemos que la proyección $\pi\colon M \to M/G$ es abierta, luego una forma de tener que M/G es Hausdorff es probar que π es cerrada. Dado $F \subset M$ cerrado, $\pi(F)$ es cerrado en la topología cociente si y sólo si $\pi^{-1}(\pi(F))$ es cerrado en M. Pero $\pi^{-1}(\pi(F)) = \cup_{g\in G}\lambda_g(F)$, que es unión de cerrados. Esto nos dice que si G es finito, entonces π es cerrada y por tanto, M/G es Hausdorff. Sin embargo, este método no puede usarse en el Ejemplo 1.3.3, donde G es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ (en ese caso es fácil probar directamente que $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \sim y\}$ es cerrado de $\mathbb{R}^{2n}$, y por tanto el cociente $\mathbb{T}^n$ es Hausdorff).

Ejemplo 1.3.2 Espacio Proyectivo Real (modelo de $\mathbb{S}^n$)
Si A es la aplicación antípoda sobre $\mathbb{S}^n(1)$, entonces el grupo $G = \{1_{\mathbb{S}^n(1)}, A\}$ actúa diferenciable, propia y discontinuamente sobre $\mathbb{S}^n(1)$, luego existe una única estructura diferenciable sobre $\mathbb{S}^n(1)/G = \mathbb{RP}^n$ que convierte a π en difeomorfismo local. En particular, una aplicación $F : \mathbb{RP}^n \to M$ es diferenciable si y sólo si $F \circ \pi : \mathbb{S}^n \to M$ es diferenciable (siendo M cualquier variedad diferenciable).

Ejemplo 1.3.3 Toros n-dimensionales.
Dada una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, el grupo de traslaciones $G = \{T_v \mid v \in \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_n\}$ actúa diferenciable, propia y discontinuamente sobre $\mathbb{R}^n$, donde T_v es la traslación de vector v. El cociente $\mathbb{R}^n/G = \mathbb{T}^n_B$ es un toro n-dimensional, difeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \overset{n)}{\dots} \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 1.3.4 Botella de Klein.



Se considera la grupo G generado por los movimientos rígidos del plano

$$\phi_1(x, y) = (x + 1, y), \qquad \phi_2(x, y) = (1 - x, y - 1).$$

G actúa de forma natural sobre $\mathbb{R}^2$, de forma diferenciable, propia y discontinua. La actuación de G sobre el cuadrado unidad $[0, 1]^2$ se representa mediante la figura de arriba. El cociente $\mathbb{R}^2/G$ es la *botella de Klein* $\mathbb{BK}$. La proyección natural $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{BK}$ es un difeomorfismo local, y una aplicación $F : \mathbb{BK} \to M^n$ valuada en una variedad diferenciable M es diferenciable si y sólo si $F \circ \pi : \mathbb{R}^2 \to M$ es diferenciable.

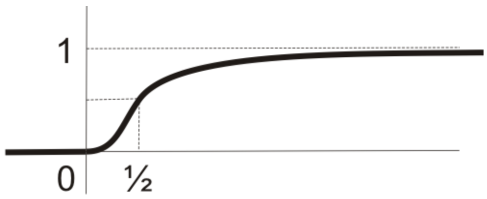
A continuación probaremos la existencia de funciones meseta y particiones de la unidad en cualquier variedad con ciertas hipótesis topológicas. Las funciones meseta permiten construir particiones de la unidad, que a su vez trasladan conceptos y cuestiones locales a otras globales (por ejemplo, en la Sección 1.4 podremos tratar indistintamente vectores tangentes en un punto p a una variedad como derivaciones sobre funciones globalmente definidas o como gérmenes de funciones alrededor de p).

Lema 1.3.2 (Existencia de funciones diferenciables no constantes)
Sea M^n una variedad diferenciable, $U \subseteq M$ un abierto y p un punto de U. Entonces, existe una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ verificando:

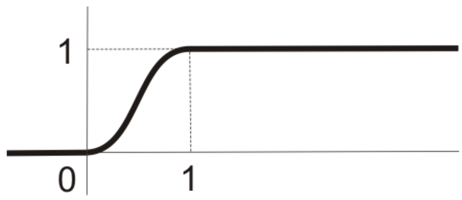
1. *$f = 1$ sobre un entorno abierto relativamente compacto V de p con $\overline{V} \subset U$.*
2. $\text{soporte}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$ *es un compacto contenido en U y $f \geq 0$ en M.*

A una tal función f la llamaremos función meseta.

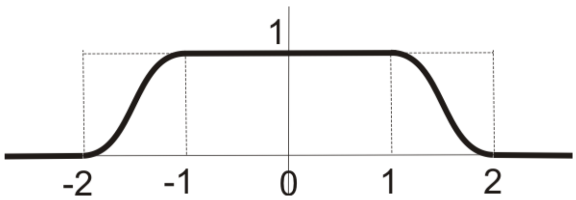
Demostración. Empezaremos produciendo una función similar a la que buscamos, pero definida sobre $\mathbb{R}$. Definimos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $u(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$



u es de clase C^∞, estrictamente creciente, tiene límite 1 cuando $t \to \infty$ y un punto de inflexión en $t = 1/2$. Con esta u definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \frac{u(t)}{u(t)+u(1-t)}$:



Es fácil comprobar que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g \geq 0$, $g(0) = 0$, $g(t) = 1$ si $t \geq 1$ y $g(t) = 0$ si $t \leq 0$. Por último, definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = g(t+2)\, g(2-t)$:



Es fácil comprobar que $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h \geq 0$, $h(t) = 0$ si $|t| \geq 2$ y $h(t) = 1$ si $|t| \leq 1$. Esta es la función meseta que buscamos sobre $\mathbb{R}$. Con la notación del lema, tenemos $V = (-1, 1)$ y U podemos tomarlo como cualquier abierto que contenga a $[-2, 2]$.

En la segunda parte de la prueba, encontraremos la función meseta sobre la variedad M. Es claro que no perdemos generalidad suponiendo que U es el abierto coordenado de una carta (U, ψ) centrada en p (es decir, $\psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$). Como $\psi(U)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene a 0, existe $\rho > 0$ tal que $\overline{\mathbb{B}}(0, 2\rho) \subset \psi(U)$. Definimos $V := \psi^{-1}(\mathbb{B}(0, \rho))$, abierto de M que contiene a p, y $f : M \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(q) = \begin{cases} h\left(\frac{\|\psi(q)\|^2}{\rho^2}\right) & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \notin U, \end{cases}$$

donde h es la función meseta en $\mathbb{R}$ que acabamos de construir. Entonces, f es C^∞ en M (la diferenciabilidad de f en U se deduce de la de h, y $M - \psi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}(0, 2\rho))$ es un abierto que contiene a $M - U$, donde f es idénticamente cero). Además, $\overline{V} = \psi^{-1}(\overline{\mathbb{B}}(0, \rho))$ es compacto por ser imagen continua de un compacto, y está contenido en U. Es fácil comprobar que $f = 1$ en $\overline{V}$ y que $\{q \in M \mid f(q) \neq 0\} \subset \psi^{-1}(\mathbb{B}(0, 2\rho))$, luego tomando clausuras deducimos que soporte(f) es un compacto contenido en U. □

Definición 1.3.4 Un espacio topológico cumple el *segundo axioma de numerabilidad* (ANII) si admite una base numerable de topología.

Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es ANII. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$ es un subconjunto suyo, entonces A es ANII con la topología inducida . Ser ANII también se hereda a los productos cartesianos, y la imagen por una aplicación continua, sobreyectiva y abierta de un espacio topológico ANII sigue siendo ANII. A partir de estas propiedades, es fácil comprobar que todos los ejemplos de variedades vistas hasta ahora son ANII. De ahora en adelante, *supondremos que todas nuestras variedades diferenciables son* ANII y Hausdorff.

Definición 1.3.5 Sea M una variedad diferenciable y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de M. Una *partición de la unidad subordinada a* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia numerable $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(M)$ cumpliendo las siguientes propiedades:

1. $0 \leq \varphi_i \leq 1$ en M y soporte(φ_i) es compacto, $\forall i \in \mathbb{N}$.
2. $\forall p \in M$, $\exists U$ entorno abierto de p en M tal que soporte$(\varphi_i) \cap U = \emptyset$ para todo i salvo para una cantidad finita de índices (la familia $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es *localmente finita*).
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_i = 1$ (la serie tiene sentido por 2).
4. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha = \alpha(i) \in \Lambda$ tal que soporte$(\varphi_i) \subset U_{\alpha(i)}$.

Nuestro siguiente objetivo es probar que toda variedad diferenciable (ANII) admite una partición de la unidad subordinada a cualquier recubrimiento por abiertos prescrito. Empezaremos con un resultado topológico.

Lema 1.3.3 *Sea X un espacio topológico conexo, localmente compacto*[2] *, T_2 y ANII. Entonces, existe una sucesión $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos de X cumpliendo las siguientes propiedades:*

1. $\cup_{i=1}^{\infty} G_i = M$.
2. $\overline{G_i}$ *es compacto y* $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

Demostración. Primero veamos que existe una base de topología $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{U_i}$ es compacto $\forall i \in \mathbb{N}$. En efecto, por ser X ANII admite una base numerable de topología $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Veamos que $\mathcal{B}' := \{B_i \in \mathcal{B} \mid \overline{B_i} \text{ es compacto}\}$ es una base de topología y tendremos este primer paso probado. Dado $p \in X$ y dado $O \subset X$ abierto de X con $p \in O$, basta comprobar que existe $B_i \in \mathcal{B}'$ tal que $p \in B_i \subset O$. Por ser X localmente compacto, existe un entorno compacto V de p tal que $p \in V \subset O$. Como $\mathcal{B}$ es base de topología, existe $B_i \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_i \subset V$. Tomando adherencias y usando que $\overline{V} = V$ (porque un compacto en un espacio T_2 es siempre cerrado), deducimos que $B_i \in \mathcal{B}'$, como queríamos.

En segundo lugar, definimos $G_1 = U_1$ (no vacío[3], abierto y con cierre compacto). Como $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por abiertos del compacto $\overline{G_1}$, podemos extraer un subrrecubrimiento finito. En particular, existe un menor número natural j_1 tal que

$$\overline{G_1} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{j_1} := G_2.$$

Entonces $\overline{G_2} = \cup_{i=1}^{j_1} \overline{U_i}$, que es compacto por ser unión finita de compactos. Cambiando G_1 por G_2 en el razonamiento anterior, existe un menor número natural j_2 (podemos suponer $j_2 \geq j_1$) tal que

$$\overline{G_2} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{j_2} := G_3.$$

Reiterando el proceso definimos una sucesión de números naturales j_k y abiertos $G_k \subset X$ tales que j_k es el menor número natural cumpliendo $\overline{G_k} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{j_k}$ y $G_{k+1} := U_1 \cup \ldots \cup U_{j_k}$. Es claro que $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cumple al punto 2 del enunciado. Queda comprobar que el punto 1 también se cumple. Notemos que la sucesión $\{j_k\}_k \subset \mathbb{N}$ es no decreciente, y lo mismo le pasa a $\{G_k\}_k$ (respecto a la inclusión). Razonando por reducción al absurdo, como los U_i recubren a X, si suponemos $\cup_{k\in\mathbb{N}} G_k \neq X$ entonces la sucesión $\{j_k\}_k$ es constante a partir de un natural k. Por tanto, $\overline{G_k} \subset G_{k+1} = G_k$ luego G_k es abierto y cerrado de X, pero $G_k \neq X$. Como G_k es no vacío, contradecimos que X es conexo. □

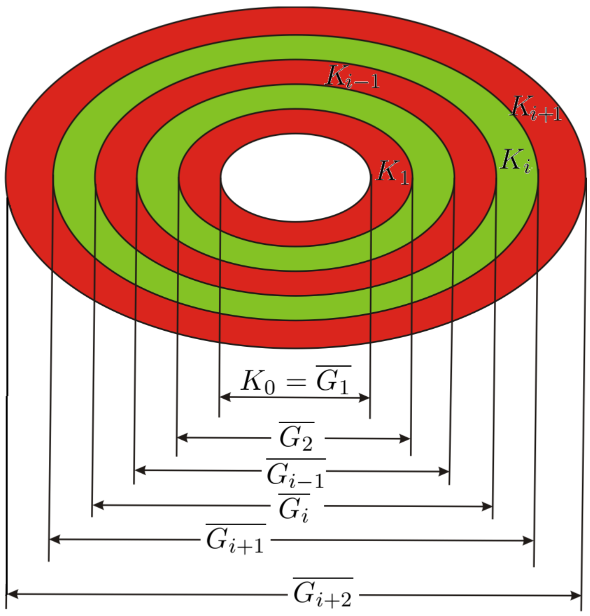
[2]Es decir, cada punto de X admite una base de entornos compactos.

[3]No perdemos generalidad suponiendo que U_1 es no vacío.

Teorema 1.3.1 (Existencia de particiones de la unidad) *Sea M una variedad diferenciable (ANII) y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de M. Entonces, existe una partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

Demostración. Supongamos que el teorema es cierto cuando M es conexa (este caso particular lo probaremos después), y veamos el caso general. Primero notemos que como M es ANII, entonces M tiene una cantidad numerable de componentes conexas (ejercicio 12), a las que llamamos C_j, $j \in A \subset \mathbb{N}$. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un recubrimiento por abiertos de M, entonces para cada $j \in A$ fijo $\{U_\alpha \cap C_j\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un recubrimiento por abiertos de la variedad diferenciable conexa C_j. Por el Teorema en el caso conexo, existe una partición de la unidad $\{\varphi_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N}}$ subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha \cap C_j\}_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces, $\{\varphi_{i,j} \mid i \in \mathbb{N},\ j \in A\}$ es una partición de la unidad de M subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, lo que prueba el Teorema en el caso general, suponiéndolo cierto en el caso conexo.

Ahora supondremos que M es conexa y probaremos el Teorema: Tomemos la familia $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ del Lema 1.3.3. Definimos $G_0 = \emptyset$, $K_0 = \overline{G_1}$, $K_i = \overline{G_{i+1}} - G_i$, $\forall i \geq 1$. Así, K_i es compacto, $K_i \subset G_{i+2} - \overline{G_{i-1}}$ $\forall i$, y $\cup_{i\in\mathbb{N}} K_i = M$.



Dado $p \in K_i$ existe $\alpha(p) \in \Lambda$ tal que $p \in U_{\alpha(p)}$ (porque $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de M). En particular $p \in K_i \cap U_{\alpha(p)} \subset (G_{i+2} - \overline{G_{i-1}}) \cap U_{\alpha(p)}$. Aplicando al punto p y al abierto $(G_{i+2} - \overline{G_{i-1}}) \cap U_{\alpha(p)}$ el Lema 1.3.2, existen $f_p \in C^\infty(M)$ y $V_p \subset M$ abierto relativamente compacto tales que $p \in V_p$, $\overline{V_p} \subset (G_{i+2} - \overline{G_{i-1}}) \cap U_{\alpha(p)}$, $f_p = 1$ en V_p, $f_p \geq 0$ en M, y soporte(f_p) es un compacto contenido en $(G_{i+2} - \overline{G_{i-1}}) \cap U_{\alpha(p)}$. Por tanto, $\{V_p\}_{p\in K_i}$ es un recubrimiento por abiertos del compacto K_i, luego podemos extraer un subrrecubrimiento finito. Haciendo esto $\forall K_i$ obtendremos una sucesión de puntos $\{p_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset M$, abiertos $V_{p_j} \subset M$ y funciones $f_{p_j} \in C^\infty(M)$ tales que

- soporte(f_{p_j}) es compacto y está contenido en algún U_α (concretamente, en $U_{\alpha(p_j)}$) y en algún $G_{i+2} - \overline{G_{i-1}}$.
- $f_{p_j} = 1$ en $\overline{V_{p_j}}$, $f_{p_j} \geq 0$ en M.
- Cada abierto G_k sólo puede cortar a una cantidad finita de soportes de las f_{p_j} (como cada f_{p_j} tiene soporte contenido en alguna "franja" $G_{i+2} - \overline{G_{i-1}}$, G_k sólo podrá cortar a aquellos soportes de f_{p_j} que estén contenidos en una "franja" que corte a G_k; pero "franjas" de éstas solo hay una cantidad finita (k es fijo), y cada "franja" sólo corta a una cantidad finita de soportes de las $f(p_j)$).

Consideremos ahora la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} f_{p_j}$. Dado $x \in M$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in G_k$. Como G_k sólo corta a una cantidad finita de soportes de las f_{p_j}, concluímos que $(\sum_j f_{p_j})(x)$ es finita y que $\left(\sum_j f_{p_j}\right)|_{G_k} \in C^\infty(G_k)$. Como esto es cierto $\forall x \in M$, tenemos que $\sum_j f_{p_j} \in C^\infty(M)$. Además, dado $x \in M$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_i$, y por tanto x está en algún $V_{p_{j_0}}$ de los que recubren a K_i. Así, $(\sum_j f_{p_j})(x) \geq f_{p_{j_0}}(x) > 0$.

Dado $i \in \mathbb{N}$, definimos $\varphi_i : M \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_i = \frac{f_{p_i}}{\sum_{j\in\mathbb{N}} f_{p_j}} \in C^\infty(M).$$

Entonces, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ en M, soporte(φ_i) =soporte(f_{p_i}) es compacto y $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i = 1$ en M. Además, $\{\varphi_i\}_i$ es una familia localmente finita (porque dado $x \in M$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in G_k$ y G_k es un abierto que sólo corta a una cantidad finita de soportes de las φ_i). Por último, soporte(φ_i) = soporte$(f_{p_i}) \subset U_{\alpha(p_i)}$, con lo que hemos probado el teorema cuando M es conexa. □

Recordemos el siguiente resultado topológico:

Lema 1.3.4 (Urysohn) *Un espacio topológico X es normal*[4] *si y sólo si para todo par de cerrados disjuntos $F_1, F_2 \subset X$, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f = 0$ en F_1 y $f = 1$ en F_2.*

Veamos la versión diferenciable del Lema de Urysohn:

Corolario 1.3.1 *Sean F y O un cerrado y un abierto de una variedad diferenciable M con $F \subset O$. Entonces, existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $f = 1$ en F y $f = 0$ en $M - O$. En particular, M es un espacio topológico normal.*

[4] Todo par de cerrados disjuntos puede separarse por abiertos disjuntos.

Demostración. Aplicando el Teorema 1.3.1 al recubrimiento de M por abiertos $\{O, M-F\}$, obtenemos una partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ subordinada a dicho recubrimiento. Entonces, la función $f = \sum_{i\in A}\varphi_i$ donde $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{soporte}(\varphi_i) \not\subset M - F\}$ es una función diferenciable en M (porque la suma es localmente finita) que cumple las condiciones pedidas. $\square$

Corolario 1.3.2 *Sea M una variedad diferenciable, U un abierto de M y K un compacto de M con $K \subset U$. Entonces, existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $f|_K = 1$ y* soporte$(f) \subset U$.

Otro resultado clásico de Topología es el siguiente.

Lema 1.3.5 (Teorema de extensión de Tietze) *Un espacio topológico es normal si y sólo si dado cualquier cerrado $F \subset X$ y cualquier función continua $f : F \to \mathbb{R}$, existe $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $\widetilde{f}|_F = f$.*

A continuación veremos la versión diferenciable del último enunciado.

Corolario 1.3.3 (Teorema de extensión de Tietze diferenciable) *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^k$ una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^k$. Dada $f \in C^\infty(M)$, existe $\widetilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ tal que $\widetilde{f}|_M = f$.*

Demostración. En primer lugar veamos que dado $p \in M$, existe W_p abierto de $\mathbb{R}^k$ con $p \in W_p$ y existe $f_p \in C^\infty(W_p)$ tal que $f_p|_{W_p\cap M} = f|_{W_p\cap M}$: En efecto, aplicando el Lema 1.3.1 en $p \in M$, existe una carta $(W_p, \varphi = (y_1, \ldots, y_k))$ de $\mathbb{R}^k$ tal que

$$M \cap W_p = \{(y_1, \ldots, y_k) \in V \mid y_{n+1} = \ldots = y_k = 0\}.$$

Ahora definimos $f_p \in C^\infty(W_p)$ por $f_p(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_k) = f(y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0)$ (o sea, extendemos f como constante a lo largo de las direcciones $y_{n+1}, \ldots, y_k$), y tenemos la función deseada.

El segundo paso en la demostración consiste en "pegar" todas las extensiones locales f_p anteriores para conseguir una extensión global $\widetilde{f}$ de f. Consideremos el recubrimiento de $\mathbb{R}^k$ por abiertos $\{W_p\}_{p\in M} \cup \{\mathbb{R}^k - M\}$ (aquí usamos que M es cerrada en $\mathbb{R}^k$). Por el Teorema 1.3.1, existe una partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^k)$ subordinada a dicho recubrimiento. Sea

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{soporte}(\varphi_i) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Dado $i \in A$ existe $p(i) \in M$ tal que soporte$(\varphi_i) \subset W_{p(i)}$. Definimos $g_{p(i)} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mediante

$$g_{p(i)}(x) = \begin{cases} f_{p(i)}(x)\varphi_i(x) & \text{si } x \in W_{p(i)}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^k - W_{p(i)}. \end{cases}$$

Así $g_{p(i)} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Además, la familia $\{g_{p(i)}\}_{i\in A}$ es localmente finita, luego la serie $\widetilde{f} := \sum_{i\in A} g_{p(i)}$ define una función en $C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Sólo queda probar que $\widetilde{f}|_M = f$. Dado $x \in M$,

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i\in A} g_{p(i)}(x) = \sum_{\substack{i\in A\\ x\in W_{p(i)}}} g_{p(i)}(x) = \sum_{\substack{i\in A\\ x\in W_{p(i)}}} f_{p(i)}(x)\varphi_i(x) \overset{(x\in M)}{=} \sum_{\substack{i\in A\\ x\in W_{p(i)}}} f(x)\varphi_i(x)$$

$$= f(x) \sum_{\substack{i\in A\\ x\in W_{p(i)}}} \varphi_i(x) = f(x) \left[\sum_{\substack{i\in A\\ x\in W_{p(i)}}} \varphi_i(x) + \sum_{\substack{i\in A\\ x\notin W_{p(i)}}} \varphi_i(x) + \sum_{i\in \mathbb{N}-A} \varphi_i(x) \right] = f(x).$$

□

1.4. Espacio Tangente. Diferencial de una aplicación.

A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^n$, las variedades diferenciables no tienen en general una estructura de espacio vectorial. Esto impide que el concepto de diferencial del Análisis pueda trasladarse dirctamente a una variedad abstracta M. Necesitaremos ver los vectores de $\mathbb{R}^n$ (en general, del espacio tangente a una variedad diferenciable) como un tipo de operadores diferenciales, llamados *derivaciones.*

Sea M^n una variedad diferenciable. Dadas $f, g \in C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces definiendo $af + bg, fg : M \to \mathbb{R}$ por

$$(af + bg)(p) = af(p) + bg(p), \quad (fg)(p) = f(p)g(p), \quad \forall p \in M,$$

es claro que $af + bg, fg \in C^\infty(M)$, y así $C^\infty(M)$ tiene estructura de álgebra, siendo el neutro del producto la función constantemente 1.

En el siguiente resultado veremos una primera aproximación del concepto de espacio tangente en un punto p a una variedad diferenciable. Empezaremos con el caso $M = \mathbb{R}^n$, ya que usaremos la regla de la cadena y el desarrollo en serie del Análisis. Posteriormente extenderemos el concepto de espacio tangente en un punto de una variedad abstracta.

Proposición 1.4.1 *Dado $p \in \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{V}_p$ el espacio de derivaciones en p de funciones globalmente definidas, es decir:*

$$\mathcal{V}_p = \{w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \mid w \text{ es lineal y } w(fg) = w(f)g(p) + f(p)w(g), \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

Entonces, $\mathcal{V}_p$ es un espacio vectorial real, y la aplicación $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}_p$ dada por

$$v \in \mathbb{R}^n \mapsto [\lambda(v)](f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 f(p + tv), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1.3}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Definiendo $aw_1 + bw_2 : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ mediante $(aw_1+bw_2)(f) = aw_1(f) + bw_2(f)$, es un ejercicio sencillo comprobar que $\mathcal{V}_p$ se convierte en un espacio vectorial real. Si $v \in \mathbb{R}^n$, la aplicación $\lambda(v)$ definida en (1.3) es lineal en f (por la linealidad de la derivada respecto a t) y cumple $[\lambda(v)](fg) = [\lambda(v)](f)g(p) + f(p)[\lambda(v)]w(g)\ \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (por la regla del producto para la derivada respecto a t). Por tanto, $\lambda(v)$ es una derivación, y λ es una aplicación valuada en $\mathcal{V}_p$. La linealidad de λ es consecuencia de la regla de la cadena para funciones reales de una variable real. λ es inyectiva, ya que si $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ entonces $\exists i = 1, \ldots, n$ tal que $v_i \neq 0$. Entonces, tomando $f = x_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (i-ésima proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$), tenemos $[\lambda(v)](f) = \frac{d}{dt}\big|_0 x_i(p+tv) = v_i \neq 0$. Por último, veamos la sobreyectividad de λ:

Dada $w \in \mathcal{V}_p$, definimos $v = (w(x_1), \ldots, w(x_n)) \in \mathbb{R}^n$. Si vemos que $\lambda(v) = w$ habremos terminado. Para ello, tomemos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y probemos que $[\lambda(v)](f) = w(f)$. Desarrollando f en serie alrededor de p tenemos

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - p_i)f_i(x),$$

donde f_i es cierta función diferenciable en un entorno de p. Por la linealidad de $\lambda(v)$ y de w, y por la regla del producto, basta probar que se cumplen

$$\begin{cases} [\lambda(v)](f(p)) = w(f(p)), \\ [\lambda(v)](x_i - p_i) = w(x_i - p_i). \end{cases} \tag{1.4}$$

La primera igualdad de (1.4) estará probada si vemos que $w(c) = 0$ para toda función constante c. Esto último es consecuencia de lo siguiente: por ser w lineal, dada $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tenemos $c\,w(g) = w(c\,g) = w(c)\,g(p) + c\,w(g)$ luego $w(c)\,g(p) = 0$, $\forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tomando ahora g tal que $g(p) \neq 0$, tendremos $w(c) = 0$.

En cuanto a la segunda igualdad de (1.4):

$$[\lambda(v)](x_i - p_i) = [\lambda(v)](x_i) - [\lambda(v)](p_i) = [\lambda(v)](x_i) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 x_i(p+tv)$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (p_i + tv_i) = v_i = w(x_i) = w(x_i) - w(p_i) = w(x_i - p_i).$$

□

Generalizamos lo anterior a variedades diferenciables.

Definición 1.4.1 Sea p un punto en una variedad diferenciable M^n. Un *vector tangente a M en p* es una función $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ satisfaciendo

1. (Linealidad) $\quad v(a\,f + b\,g) = a\,v(f) + b\,v(g)$, y

2. (Regla del producto) $v(f\,g) = v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g)$,

para todo $f, g \in C^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Razonando como en la demostración de la Proposición 1.4.1 deducimos que si v es un vector tangente a M en p, entonces $v(c) = 0$ para toda función constante c sobre M.

Lema 1.4.1

(i) *Si v es un vector tangente a M en p y $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en algún entorno de p, entonces $v(f) = v(g)$.*

(ii) *Si v es un vector tangente a M en p y $f \in C^\infty(M)$ es constante en algún entorno de p, entonces $v(f) = 0$.*

Demostración. Las dos afirmaciones son equivalentes, y por linealidad podemos reducirnos a probar que si $f = 0$ en un entorno U de p, entonces $v(f) = 0$. Para ello, tomemos un compacto $K \subset M$ con $p \in K \subset U$. Usando el Corolario 1.3.2, encontramos una función $h \in C^\infty(M)$ tal que $h = 1$ en K y $h = 0$ en $M - U$. Entonces, $f\,h = 0$ en M (razonar separadamente en U y en $M - U$) luego $v(f\,h) = 0$. Pero $v(f\,h) = v(f)h(p) + f(p)v(h) = v(f)$, luego $v(f) = 0$. □

Definición 1.4.2 Si $U \subseteq M$ es un abierto y $f \in C^\infty(M)$, entonces $f|_U \in C^\infty(U)$. Dado un punto $p \in M$, representaremos por $C^\infty(p)$ al conjunto de funciones diferenciables valuadas en $\mathbb{R}$ que están definidas en *algún* entorno abierto de p (funciones diferentes pueden tener dominios de definición diferentes). A los elementos de $C^\infty(p)$ se les llama *gérmenes de funciones diferenciables alrededor de p*). La estructura algebráica de $C^\infty(p)$ es la misma que la de $C^\infty(M)$, con la salvedad de que si $f, g \in C^\infty(p)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ con f definida en un entorno abierto U_1 de p y g definida en un entorno abierto U_2 de p, entonces $af + bg$ y fg están definidas en $U_1 \cap U_2$.

Es claro que $C^\infty(M) \subseteq C^\infty(p)$. De aquí deducimos que si un operador $v : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ satisface las condiciones 1 y 2 de la Definición 1.4.1, entonces v es un vector tangente a M en p. El siguiente resultado nos dice que el recíproco también es cierto.

Lema 1.4.2 *v es un vector tangente a M en p si y sólo si v es una función de $C^\infty(p)$ en $\mathbb{R}$ verificando las propiedades 1 y 2 de la Definición 1.4.1.*

Demostración. Supongamos que $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es un vector tangente. Se trata de definir una derivación lineal $\widetilde{v} : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{v}|_{C^\infty(M)} = v$. Para ello, tomemos $f \in C^\infty(p)$

definida en un entorno abierto U de p. Aplicando el Lema 1.3.2 de existencia de funciones meseta, encontramos una función $h \in C^\infty(M)$ y un un entorno abierto V de p tales que

$$h|_V = 1, \quad p \in V \subset \overline{V} \subset \text{soporte}(h) \subset U, \quad \text{soporte}(h) \text{ compacto.}$$

Extendiendo fh por cero de U a M obtenemos una función $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$ que coincide con f en un entorno abierto de p (concretamente, en V). Entonces, definimos $\widetilde{v}(f) = v(\widetilde{f})$. Esta definición es independiente de $\widetilde{f}$ por el apartado **(i)** del Lema 1.4.1. La independencia de $\widetilde{v}(f)$ respecto de $\widetilde{f}$ prueba que

$$\widetilde{v}(f_1 f_2) = v(\widetilde{f_1 f_2}) = v(\widetilde{f}_1 \widetilde{f}_2) = v(\widetilde{f}_1)\widetilde{f}_2(p) + \widetilde{f}_1(p)v(\widetilde{f}_2) = \widetilde{v}(f_1)f_2(p) + f_1(p)\widetilde{v}(f_2),$$

y análogamente $\widetilde{v}$ es lineal. Por tanto, $\widetilde{v}$ es una derivación lineal sobre $C^\infty(p)$. Tenemos entonces una aplicación

$$H : \{\text{derivaciones en } C^\infty(M)\} \to \{\text{derivaciones en } C^\infty(p)\}, \quad H(v) = \widetilde{v},$$

Claramente, $\widetilde{v}|_{C^\infty(M)} = v$, lo que nos dice que H es inyectiva. Veamos que H es sobreyectiva: Sea $\widehat{v} : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ una derivación, y $v := \widehat{v}|_{C^\infty(M)}$. Debemos probar que $H(v) = \widehat{v}$. Para ello, tomemos $f \in C^\infty(p)$, definida en un abierto U de M que contiene a p. Por un lado,

$$[H(v)](f) = v(\widetilde{f}) = \left(\widehat{v}|_{C^\infty(M)}\right)(\widetilde{f}) = \widehat{v}(\widetilde{f}),$$

luego todo se reduce a probar que $\widehat{v}(\widetilde{f}) = \widehat{v}(f)$. Esto se deduce de aplicar el Lema 1.4.1-**(i)** a la variedad U, a la derivación $\widehat{v}|_{C^\infty(U)}$ y a las funciones $f, \widetilde{f}|_U$. Así, H es biyectiva. $\square$

Por tanto, podemos ver los vectores tangentes a una variedad M en un punto p como operadores lineales verificando la regla del producto, definidos sobre $C^\infty(M)$ o bien sobre $C^\infty(p)$.

Definición 1.4.3 El *espacio tangente a M en p*, que se representará por T_pM, se define como el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p. T_pM tiene una estructura natural de espacio vectorial real sin más que definir $v + w$ y av por

$$(v + w)(f) = v(f) + v(g) \qquad (av)(f) = av(f),$$

para $v, w \in T_pM$, $a \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$ o $f \in C^\infty(p)$.

Nota 1.4.1 Sea $O \subseteq M$ un abierto de una variedad diferenciable M y $p \in O$ un punto de M. Entonces T_pO es isomorfo a T_pM de manera natural.

Definición 1.4.4 Sea $\alpha : I \to M$ una aplicación diferenciable de un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, a la que llamaremos *curva diferenciable* en M. Sea $t_0 \in I$ y $p = \alpha(t_0)$. Definimos la aplicación $\alpha'(t_0) : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha'(t_0)(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (f \circ \alpha)(t).$$

Entonces $\alpha'(t_0)$ es un vector tangente a M en $\alpha(t_0) = p$, esto es $\alpha'(t_0) \in T_pM$, al que llamamos el *vector tangente o velocidad de α en t_0.*

Lema 1.4.3 *T_pM coincide con el conjunto de vectores tangentes a curvas diferenciables en M pasando por p.*

Demostración. Basta probar que todo vector tangente $v \in T_pM$ (es decir, $v : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ es una derivación) es la velocidad de una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$. Tomemos una carta $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ con $p \in U$ y $\psi(p) = 0$. La curva $\alpha(t) = \psi^{-1}(tv(x_1), \dots, tv(x_n))$ (definida alrededor de $0 \in \mathbb{R}$) es C^∞, cumple $\alpha(0) = p$ y

$$[\alpha'(0)](x_i) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (x_i \circ \psi^{-1})(tv(x_1), \dots, tv(x_n)) = v(x_i), \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Sea $f \in C^\infty(p)$. Si vemos que $[\alpha'(0)](f) = v(f)$ habremos terminado. Viendo $\alpha'(0), v$ como derivaciones sobre gérmenes de funciones en p, podemos suponer que $\psi(U)$ convexo y usar la Afirmación 1.4.1 (que probaremos a continuación). Así, existen $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$ tales que $f|_U = f(p) + \sum_{i=1}^n x_i f_i$ luego

$$\begin{aligned}
[\alpha'(0)](f) &= [\alpha'(0)]\left(f(p) + \sum_{i=1}^n x_i f_i\right) = \sum_{i=1}^n [\alpha'(0)](x_i) f_i(p) + \sum_{i=1}^n x_i(p)[\alpha'(0)](f_i) \\
&= \sum_{i=1}^n v(x_i) f_i(p).
\end{aligned}$$

Deshaciendo los pasos anteriores cambiendo $\alpha'(0)$ por v, tendremos $[\alpha'(0)](f) = v(f)$. $\square$

Afirmación 1.4.1 *Sea p un punto en una variedad diferenciable M y $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ una carta de tal que $p \in U$, $\psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y $\psi(U)$ es convexo. Entonces, dada $f \in C^\infty(U)$ existen $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$ tales que*

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

Demostración. Sea $q \in U$ y $F(t) = (f \circ \psi^{-1})(tx_1(q), \ldots, tx_n(q))$, definida en $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ para cierto $\varepsilon > 0$ por la convexidad de $\psi(U)$. Usando la regla de Barrow,

$$f(q) = F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(t)\, dt = f(p) + \int_0^1 \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (f \circ \psi^{-1})(tx_1(q), \ldots, tx_n(q))\, dt.$$

Usando la regla de la cadena para $f \circ \psi^{-1} \in C^\infty(\psi(U))$, lo anterior se escribe

$$f(p) + \sum_{i=1}^n x_i(q) \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial r_i}(tx_1(q), \ldots, tx_n(q))\, dt = f(p) + \sum_{i=1}^n x_i(q) f_i(q),$$

donde $f_i \in C^\infty(U)$ viene dada por

$$f_i(q) = \int_0^1 \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial r_i}(tx_1(q), \ldots, tx_n(q))\, dt.$$

$\square$

Definición 1.4.5 Sea $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de una variedad M. Definimos $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) \overset{\text{(notación)}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \left.\frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial r_i}\right|_{\psi(p)},$$

siendo $r_1, \ldots, r_n$ las coordenadas en $\mathbb{R}^n$.

Así, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ es el vector tangente en $t = 0$ a la curva $\alpha_i(t) = \psi^{-1}(r_1^0, \ldots, r_i^0 + t, \ldots, r_n^0)$, donde $(r_1^0, \ldots, r_n^0) = \psi(p)$. En particular, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pM$. Conviene notar que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}$.

Teorema 1.4.1 *Sea p un punto de una variedad diferenciable M^n, y $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de M con $p \in U$. Entonces, $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mid i = 1, \ldots, n\}$ es una base de T_pM. Además para cada vector $v \in T_pM$, se tiene*

$$v = \sum_{i=1}^n v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p . \tag{1.5}$$

En particular, T_pM es un espacio vectorial real de dimensión n.

Demostración. Dado $v \in T_pM$, sea $\alpha \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon),M)$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$, que existe por el Lema 1.4.3. Dada $f \in C^\infty(p)$,

$$v(f) = [\alpha'(0)](f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (f \circ \alpha)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (f \circ \psi^{-1})[(\psi \circ \alpha)(t)].$$

Usando la regla de la cadena para aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, lo anterior se escribe

$$\sum_{i=1}^n \left.\frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial r_i}\right|_{\psi(p)} (\psi\circ\alpha)_i'(0) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f)[\alpha'(0)](x_i) = \sum_{i=1}^n \left[[\alpha'(0)](x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right](f).$$

Como lo anterior es válido $\forall f \in C^\infty(p)$, deducimos la ecuación (1.5). Así, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ forman un sistema de generadores de T_pM. De la ecuación $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}$ deducimos que $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ son linealmente independientes, y por tanto forman base de T_pM. $\square$

Ejemplo 1.4.1 Dado $p \in \mathbb{R}^n$, podemos identificar canónicamente $T_p\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$, mediante el isomorfismo de espacios vectoriales $\lambda : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\lambda(v) = (v(x_1), \ldots, v(x_n)). \tag{1.6}$$

Así, λ identifica un vector tangente a $\mathbb{R}^n$ en p (como derivación) con la lista de coordenadas de v respecto a la base de T_pM asociada a la carta $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$.

Proposición 1.4.2 (Cambio de base) *Sea M una variedad, $p \in M$ y $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$, $(V, \phi = (y_1, \ldots, y_n))$ dos cartas de M con $p \in U \cap V$. Entonces,*

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

Definición 1.4.6 Sea $F \in C^\infty(M,N)$ y $p \in M$. Se define la *diferencial de F en p* como la aplicación $dF_p = F_{*_p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ dada por

$$[dF_p(v)]\,(f) = v(f \circ F), \quad \forall v \in T_pM,\ \forall f \in C^\infty(F(p)).$$

Es claro que $dF_p(v) \in T_{F(p)}N$ y que dF_p es una aplicación lineal.

Proposición 1.4.3

(i) *Sea* $F \in C^\infty(M,N)$ *y* $p \in M$. *Si* $v \in T_pM$ *es el vector tangente a una curva diferenciable* $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *con* $\alpha(0) = p$, *entonces* $dF_p(v) = (F \circ \alpha)'(0)$.

(ii) *Si* $F : M \to N$ *es constante, entonces* $dF_p = 0\ \forall p \in M$.

(iii) $d(1_M)_p = 1_{T_pM}$, $\forall p \in M$.

(iv) Regla de la cadena. *Si* $F \in C^\infty(M,N)$ *y* $G \in C^\infty(N,P)$, *entonces*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p, \qquad \forall p \in M.$$

(v) *Si* $F : M \to N$ *es un difeomorfismo, entonces* dF_p *es un isomorfismo y* $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$, $\forall p \in M$.

(vi) *Si* $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *es una curva diferenciable, entonces* $d\alpha_0 \left(\frac{d}{dt}\big|_0 \right) = \alpha'(0)$.

(vii) *Si* $F \in C^\infty(M,N)$, $p \in M$ *y* $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$, $(V, \phi = (y_1, \ldots, y_m))$ *son cartas de* M *y* N *alrededor de* p *y* $F(p)$ *respectivamente, entonces la expresión matricial de* dF_p *respecto a las bases* $B_1 = \{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\}_{j=1}^n$ *de* T_pM *y* $B_2 = \{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{F(p)}\}_{i=1}^m$ *de* $T_{F(p)}N$ *es*

$$dF_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{F(p)}, \quad \forall j = 1\ldots, n.$$

Así, la matriz $M(dF_p, B_1, B_2)$ *es la matriz Jacobiana de* $\phi \circ F \circ \psi^{-1}$ *en* $\psi(p)$.

Demostración. Ejercicio. □

Ejemplo 1.4.2 En el caso particular $f \in C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, dado $p \in M$ podemos considerar la composición

$$T_pM \xrightarrow{df_p} T_{f(p)}\mathbb{R} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}$$

(λ es el isomorfismo de espacios vectoriales dado en (1.6)). Entonces, si $v \in T_pM$ y t representa la función identidad de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,

$$df_p(v) \equiv \lambda[df_p(v)] = [df_p(v)](t) = v(t \circ f) = v(f),$$

luego $df_p \in (T_pM)^*$ (espacio dual). A $(T_pM)^* := T_p^*M$ se le llama el *espacio cotangente de* M *en* p. Así, $df_p \in T_p^*M\ \forall f \in C^\infty(M)$ (esto puede hacerse $\forall f \in C^\infty(p)$). Como caso particular, tomando como $f = x_i$ la i-ésima función coordenada de una carta (U, ψ) alrededor de p, es fácil comprobar que $\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ es la base dual de $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \right\}$.

Proposición 1.4.4 *Si $M^n \subset \mathbb{R}^k$ una subvariedad e $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ la correspondiente inclusión, entonces $di_p : T_pM \to T_p\mathbb{R}^k$ es un monomorfismo para todo $p \in M$. Consideremos la composición*

$$T_pM \xrightarrow{di_p} T_p\mathbb{R}^k \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}^k$$

donde λ es el isomorfismo de espacios vectoriales dado en (1.6). En adelante, se identificará T_pM con $(\lambda \circ di_p)(T_pM) \subseteq \mathbb{R}^k$ para todo $p \in M$.

Además, un vector $v \in \mathbb{R}^k$ pertenece al subespacio vectorial $(\lambda \circ di_p)(T_pM)$ sí y solo si $v = (\alpha_1'(0), \ldots, \alpha_k'(0))$, donde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \subset \mathbb{R}^k$ es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$.

Demostración. Para que di_p sea un monomorfismo de espacios vectoriales, basta ver que $\ker(di_p) = \{0\}$. Si $v \in T_pM$ cumple $di_p(v) = 0$, entonces $v(f \circ i) = 0$ para toda función diferenciable definida en un entorno de p en $\mathbb{R}^k$. Usando el Teorema de extensión de Tietze en su versión diferenciable (Corolario 1.3.3[5]), toda función diferenciable definida en un entorno de p en M es restricción de una función definida en un entorno de p en $\mathbb{R}^k$, con lo que $v = 0$ como vector de T_pM.

Sea $v \in \mathbb{R}^k$. Si $v \in (\lambda \circ di_p)(T_pM)$, entonces existe $w \in T_pM$ tal que

$$v = \lambda(di_p(w)) = ([di_p(w)](x_1), \ldots, [di_p(w)](x_k)) = (w(x_1 \circ i), \ldots, w(x_k \circ i)) .$$

Por otro lado, el Lema 1.4.3 implica que existe $\alpha \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$ y por tanto,

$$\begin{aligned} v &= \big([\alpha'(0)](x_1 \circ i), \ldots, [\alpha'(0)](x_k \circ i)\big) \\ &= \big((x_1 \circ i \circ \alpha)'(0), \ldots, (x_k \circ i \circ \alpha)'(0)\big) = \big(\alpha_1'(0), \ldots, \alpha_k'(0)\big) . \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $v = (\alpha_1'(0), \ldots, \alpha_k'(0)) \in \mathbb{R}^k$ con $\alpha \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), M)$, $\alpha(0) = p$. Así, la derivación $\alpha'(0)$ está en T_pM. Como $\lambda(\alpha'(0)) = v$, tenemos $v \in (\lambda \circ di_p)(T_pM)$. □

Ejemplo 1.4.3

1. Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, bajo la identificación dada en la Proposición 1.4.4,

$$T_p\mathbb{S}^n \equiv \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, p\rangle = 0\} = \langle p\rangle^\perp, \quad \forall p \in \mathbb{S}^n.$$

2. Si $A \in O(n)$ (grupo ortogonal), entonces:

$$T_AO(n) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ antisimétrica}\}.$$

[5]En rigor, el Corolario 1.3.3 se enunció para una subvariedad *cerrada* de $\mathbb{R}^k$. En esta aplicación del mismo no tenemos M cerrada, pero sólo nos interesa el comportamiento local de f alrededor de p. Podemos entonces suponer que $M \cap \mathbb{B}(p, \delta)$ es un cerrado de $\mathbb{B}(p, \delta)$ para cierto $\delta > 0$ y rehacer la demostración del Corolario 1.3.3 cambiando $\mathbb{R}^k$ por $\mathbb{B}(p, \delta)$.

3. Si $A \in Sl(n, \mathbb{R})$ (grupo especial unitario), entonces:

$$\begin{aligned} T_A Sl(n\,\mathbb{R}) &= \{XA \mid X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Traza}(X) = 0\} \\ &= \{AX \mid X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Traza}(X) = 0\}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.4 Teníamos dos modelos para el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{RP}_1 = \tfrac{\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}}{R}, \text{ donde } xRy \text{ siempre que } y = \lambda x \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ &\mathbb{RP}_2 = \tfrac{\mathbb{S}^n(1)}{\sim}, \text{ donde } p \sim q \text{ siempre que } q = \pm p. \end{aligned}$$

Veamos cómo identificar el espacio tangente a $\mathbb{RP}^n$ en un punto, siguiendo ambos modelos. Empezamos con $\mathbb{RP}^n_2$: Dado $p \in \mathbb{S}^n(1)$ y $[p] = \pi_2(p) \in \mathbb{RP}^n_2$ (aquí $\pi_2 : \mathbb{S}^n(1) \to \mathbb{RP}^n_2$ es la proyección canónica), la diferencial

$$(d\pi_2)_p : T_p\mathbb{S}^n(1) \to T_{[p]}\mathbb{RP}^n_2$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. En efecto, contando dimensiones basta comprobar que $\ker(d\pi_2)_p = \{0\}$; si $v \in \ker(d\pi_2)_p$ entonces $v(f \circ \pi_2) = 0\ \forall f \in C^\infty([p])$. Por otro lado, como $v \in T_p\mathbb{S}^n(1)$ entonces $v = \sum_{i=1}^n v(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ donde $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta para $\mathbb{S}^n(1)$ alrededor de p. Si probamos que podemos elegir estas funciones coordenadas x_i de forma que

$$x_i = f_i \circ \pi_2$$

para ciertas $f_i \in C^\infty([p])$, habremos terminado. Y esto es fácil de probar, usando cómo se dotó de estructura diferenciable a $\mathbb{RP}^n_2$. Por tanto:

Podemos identificar $T_{[p]}\mathbb{RP}^n_2$ con $T_p\mathbb{S}^n(1)$ vía $d(\pi_2)_p$ (y por tanto, con $\langle p\rangle^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$).

Desde luego, podemos hacer la identificación anterior de $T_{[p]}\mathbb{RP}^n_2$ con $T_{-p}\mathbb{S}^n(1)$ vía $d(\pi_2)_{-p}$. Así, a cada $w \in T_{[p]}\mathbb{RP}^n_2$ le corresponden unicos $v_1 \in T_p\mathbb{S}^n(1)$, $v_2 \in T_{-p}\mathbb{S}^n(1)$ tales que $d(\pi_2)_p(v_1) = w = d(\pi_2)_{-p}(v_2)$. Pasando a diferenciales la igualdad $\pi_2 \circ A = \pi_2$ donde $A : \mathbb{S}^n(1) \to \mathbb{S}^n(1)$ es la aplicación antípoda, concluiremos que $v_2 = dA_p(v_1)$. Si ahora identificamos v_1, v_2 con vectores de $\langle p\rangle^\perp$, podemos ver $v_i = \alpha_i'(0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ para $i = 1, 2$, donde $\alpha_i \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{S}^n(1))$, $\alpha_1(0) = p$, $\alpha_2(0) = -p$. Entonces,

$$dA_p(v_1) = dA_p(\alpha_1'(0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (A \circ \alpha_1)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (-\alpha_1(t)) = -\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \alpha_1(t) = -v_1,$$

luego $v_2 = -v_1$ como vectores de $\langle p\rangle^\perp$. En resumen:

Podemos identificar cada vector tangente en $T_{[p]}\mathbb{RP}^n_2$ como un par de vectores tangentes a $\mathbb{S}^n(1)$ en puntos antípodas, siendo estos vectores opuestos.

¿Qué tiene que ver $w \in T_{[p]}\mathbb{RP}^n_2$ como derivación sobre $C^\infty([p])$ con $v = (d\pi_2)_p^{-1}(w) \in T_p\mathbb{S}^n(1)$ como derivación sobre $C^\infty(p)$? Es fácil probar que w deriva a cada función $f \in C^\infty([p])$ como $v = (d\pi_2)_p^{-1}(w) \in T_p\mathbb{S}^n(1)$ deriva a f "vista desde la esfera", es decir, a $f \circ \pi_2$. Nótese que podemos subir a $\mathbb{S}^n(1)$ cada función de $C^\infty([p])$, pero el recíproco no es cierto. En este sentido, la aplicación

$$C^\infty(\mathbb{RP}^n_2) \to \{h \in C^\infty(\mathbb{S}^n(1)) \mid h \circ A = h\}, \qquad f \mapsto f \circ \pi_2,$$

es biyectiva.

Ahora hacemos lo análogo con $\mathbb{RP}^n_1$. Consideremos la aplicación diferenciable

$$f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^n(1), \qquad f(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

f induce un difeomorfismo $\widetilde{f} : \mathbb{RP}^n_1 \to \mathbb{RP}^n_2$ tal que $\widetilde{f} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$, donde $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n_1$ es la proyección canónica. Pasando a diferenciales en un punto $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ la última igualdad y usando que $d\widetilde{f}_{\pi_1(x)}, (d\pi_2)_{f(x)}$ son isomorfismos de espacios vectoriales, deducimos que $\ker(d\pi_1)_x = \ker(df_x)$. Por otro lado, un cálculo sencillo nos dice que dado $v \in T_x(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \equiv \mathbb{R}^{n+1}$,

$$df_x(v) = \frac{v}{\|x\|} - \frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|^3} x.$$

Por tanto, $\ker(df_x) \subseteq \mathrm{Span}(x)$. Contando dimensiones, tenemos $\dim \ker(df_x) \geq 1$, luego $\ker(df_x) = \mathrm{Span}(x)$. En particular, concluímos:

- $(df_x)|_{\langle x\rangle^\perp} : \langle x\rangle^\perp \to T_{f(x)}\mathbb{S}^n(1)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.
- $\ker(d\pi_1)_x = \mathrm{Span}(x)$.
- $(d\pi_1)_x|_{\langle x\rangle^\perp} : \langle x\rangle^\perp \to T_{\pi_1(x)}\mathbb{RP}^n_1$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.
- *Podemos identificar $T_{\overline{x}}\mathbb{RP}^n_1$ con $\langle x\rangle^\perp$, siendo $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ cualquier elemento en $\pi_1^{-1}(\overline{x})$.*

También podemos preguntarnos qué tiene que ver $w \in T_{\overline{x}}\mathbb{RP}^n_1$ como derivación sobre $C^\infty(\overline{x})$ con $v \in \langle x\rangle^\perp$ con $(d\pi_1)_x(v) = w$, como derivación sobre $C^\infty(x)$. La respuesta es que w deriva a cada función $f \in C^\infty(\overline{x})$ como $v \in \langle x\rangle^\perp$ deriva a $f \circ \pi_1$. Nótese que podemos subir a $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ cada función de $C^\infty(\mathbb{RP}^n_1)$ (y obtenemos una función invariante por homotecias), pero el recíproco no es cierto: la aplicación $h \mapsto h \circ \pi_1$ de $C^\infty(\mathbb{RP}^n_1)$ en $\{\widehat{h} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \mid \widehat{h}(\lambda x) = \widehat{h}(x),\ \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\}$, es biyectiva.

1.5. Difeomorfismos locales.

Teorema 1.5.1 (Teorema de la función inversa) *Sea $F : M^n \to N^n$ una aplicación diferenciable y $p \in M$. Supongamos que $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Entonces, existen abiertos $U \subset M$, $V \subset N$, con $p \in U$ y $F(U) = V$ tales que $F|_U : U \to V$ es un difeomorfismo (y el recíproco es cierto).*

Demostración. Ejercicio. □

Definición 1.5.1 Un *difeomorfismo local* entre dos variedades diferenciables M, N es una aplicación $F \in C^\infty(M, N)$ tal que $\forall p \in M$, la diferencial $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Equivalentemente, F es un difeomorfismo en un entorno de cada punto de M. Nótese que F no tiene porqué ser sobreyectiva ni inyectiva.

EJERCICIOS.

1. En $\mathbb{R}$ se consideran los atlas $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, t^3)\}$. Demostrar que el cambio de cartas entre $1_{\mathbb{R}^3}$ y t^3 no es diferenciable. Deducir que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ definen estructuras diferenciables distintas sobre $\mathbb{R}$. Probar que ambas estructuras diferenciables son difeomorfas.

2. Probar que toda variedad diferenciable conexa es arco-conexa.

3. ¿Existe un atlas de $\mathbb{S}^2$ formado por una sola carta?

4. Sea V un espacio vectorial real, B una base ordenada de V y $F_B : V \to \mathbb{R}^n$ el isomorfismo de espacios vectoriales que lleva cada $x \in V$ en sus coordenadas respecto a B. Probar que la estructura diferenciable generada por el atlas $\{(V, F_B)\}$ no depende de la base B (estructura diferenciable canónica en un espacio vectorial).

5. Probar que I_n es un valor regular de $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $F(A) = A \cdot A^t$.

6. Sean M, N variedades diferenciables, y $\pi_1 : M \times N \to M$, $\pi_2 : M \times N \to N$ las proyecciones canónicas a los factores.

   a) Probar que π_1, π_2 son diferenciables.

   b) Dada una variedad P y una aplicación $f : P \to M \times N$, demostrar que f es diferenciable si y sólo si $\pi_i \circ f$ es diferenciable, $i = 1, 2$.

   c) Probar que la inyecciones $i_p : N \to M \times N$, $j_q : M \to M \times N$ dadas por $i_p(q) = j_q(p) = (p, q)$, son diferenciables.

7. Sean $f_1 \in C^\infty(M_1, N_1)$, $f_2 \in C^\infty(M_2, N_2)$. Probar que $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ es diferenciable.

8. Sean $a, r > 0$ con $a > r$. Encontrar un difeomorfismo entre el toro de revolución
$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\},$$
y la variedad producto $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)$.

9. Probar que la aplicación $f : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^n(1)$ dada por $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$, induce un difeomorfismo entre los modelos del espacio proyectivo como cociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ por coordenadas homogéneas y como cociente de $\mathbb{S}^n(1)$ por la aplicación antípoda.

10. DERIVADA DE UN DETERMINANTE.

    a) Sea $A \in C^\infty(]a, b[, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ una familia de matrices tal que $\exists t_0 \in]a, b[$ con $A(t_0) = I_n$. Probar que $(\det A)'(t_0) = \mathrm{Traza}(A'(t_0))$ (indicación: usar la tensorialidad del determinante sobre las columnas de $A(t)$ para calcular $(\det A)'(t)$).

b) Sea $A \in C^\infty(]a,b[, Gl(n,\mathbb{R}))$. Demostrar que

$$(\det A)' = \det A \cdot \mathrm{Traza}(A'A^{-1}) \quad \text{en }]a,b[.$$

(Indicación: Fijado $t_0 \in]a,b[$, aplicar el apartado anterior a $B(t) = A(t)A(t_0)^{-1}$).

11. Probar que

$$\mathcal{SC}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^t = \overline{A}\}, \quad \mathcal{AC}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^t = -\overline{A}\}$$

son subespacios vectoriales reales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimensión n^2, y que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{SC}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$ (como espacios vectoriales reales). Se considera la aplicación

$$F : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{SC}(\mathbb{C}), \quad F(A) = A \cdot \overline{A}^t.$$

Probar que $\ker(dF_{I_n}) = \mathcal{AC}_n(\mathbb{C})$, y deducir que dF_{I_n} es sobreyectiva. Probar que dada $A \in U(n)$ (grupo unitario), se tiene $\ker(dF_A) = A \cdot \ker(dF_{I_n})$. Deducir de aquí que I_n es un valor regular de F, y por tanto $U(n)$ es una subvariedad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimensión (real) n^2.

12. Probar que toda variedad diferenciable ANII tiene una cantidad numerable de componentes conexas.

13. Probar las Proposiciones 1.4.2 y 1.4.3.

14. Sea p un punto en una variedad diferenciable M. Probar que todo elemento de T_p^*M es la diferencial en p de cierta función $f \in C^\infty(p)$.

15. Sea O un abierto no vacío de una variedad diferenciable M. Probar que dado $p \in O$, la diferencial $di_p : T_pO = T_pM \to T_pM$ es la identidad.

16. Sean M^n, N^m variedades diferenciables, y $(p,q) \in M \times N$.

    a) Probar que la aplicación

    $$\lambda : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN, \quad v \mapsto \left((d\pi_1)_{(p,q)}(v), (d\pi_2)_{(p,q)}(v)\right),$$

    es un isomorfismo de espacios vectoriales, donde π_1, π_2 son las proyecciones de $M \times N$ sobre sus factores. Demostrar que su inversa viene dada por

    $$\lambda^{-1}(v_1, v_2) = (di_q)_p(v_1) + (dj_p)_q(v_2), \quad \forall (v_1, v_2) \in T_pM \times T_qN.$$

    De esta forma, identificaremos $T_{(p,q)}(M \times N)$ con $T_pM \times T_qN$.

b) Demostrar que a nivel de vectores tangentes a curvas, la identificación anterior asocia $(\alpha_1, \alpha_2)'(0)$ con $(\alpha_1'(0), \alpha_2'(0))$, donde α_1, α_2 son curvas diferenciables valuadas en M y N, respectivamente.

c) Sea P una variedad diferenciable y $F \in C^\infty(P, M \times N)$, con componentes $F = (F_1, F_2)$ a cada uno de los factores. Probar que dado $x \in P$, se tiene $\lambda \circ dF_x = ((dF_1)_x, (dF_2)_x)$. Identificaremos

$$dF_x \equiv ((dF_1)_x, (dF_2)_x) .$$

d) Sea $F \in C^\infty(M \times N, P)$. Probar que dados $(p, q) \in M \times N$ y $(v_1, v_2) \in T_pM \times T_qN$, se tiene $dF_{(p,q)} \left(\lambda^{-1}(v_1, v_2)\right) = (dF \circ i_q)_p(v_1) + (dF \circ j_p)_q(v_2)$, donde i_p, j_q son las inyecciones definidas en el ejercicio 6. Identificaremos

$$dF_{(p,q)}(v) \equiv (dF \circ i_q)_p(v_1) + (dF \circ j_p)_q(v_2) \quad \text{si } v \equiv (v_1, v_2).$$

e) Sean $F_i \in C^\infty(M_i, N_i)$, $i = 1, 2$. Probar que $\lambda \left[d(F_1 \times F_2)_{(p,q)}(\lambda^{-1}(v_1, v_2))\right] = ((dF_1)_p(v_1), (dF_2)_q(v_2))$. Identificaremos

$$d(F_1 \times F_2)_{(p,q)} \equiv ((dF_1)_p, (dF_2)_q) .$$

17. En la esfera unidad $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, se consideran los abiertos $U_N = \mathbb{S}^n - \{p_N\}$, $U_S = \mathbb{S}^n - \{p_S\}$, donde p_N, p_S son los polos norte y sur, respectivamente. Se consideran las *proyecciones estereográficas*

$$\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_N(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_N(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Interpretar geométricamente φ_N y φ_S. Probar que las inversas de estas aplicaciones son $\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_N$, $\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_S$,

$$\varphi_N^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \left(2y_1, \ldots, 2y_n, \|y\|^2 - 1\right) ,$$

$$\varphi_S^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} \left(2y_1, \ldots, 2y_n, 1 - \|y\|^2\right) ,$$

y que $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ es un atlas sobre la esfera.

18. Sea $F : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades, tal que $dF_p = 0 \ \forall p \in M$. Probar que F es constante en cada componente conexa de M (suponemos que N es Hausdorff).

19. Dada una variedad diferenciable M y una función $f \in C^\infty(M)$, un punto $p \in M$ se dice un *punto crítico de f* si $df_p = 0$. Estudiar los puntos críticos de las siguientes funciones.

    a) Función altura: Fijado $a \in \mathbb{S}^n(1)$, $f : \mathbb{S}^n(1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \langle p, a \rangle$.

    b) Función distancia al cuadrado: Fijado $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f : \mathbb{S}^n(1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \|p - p_0\|^2$.

20. Demostrar que la función $f : \mathbb{S}^n(1) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} i x_i^2,$$

induce una aplicación diferenciable $\overline{f} : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Calcular los puntos críticos de $\overline{f}$.

21. Sea $F : \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Probar que existe $\overline{F} \in C^\infty(\mathbb{RP}^2, \mathbb{R}^4)$ tal que $\overline{F} \circ \pi = F$, donde $\pi : \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{RP}^2$ es la proyección canónica. Demostrar que $d\overline{F}_{[p]}$ es inyectiva $\forall [p] \in \mathbb{RP}^2$, y que $\overline{F}$ es un embebimiento topológico de $\mathbb{RP}^2$ en $\mathbb{R}^4$ (esto es lo que se llama un *embebimiento diferenciable,* y a su imagen se le llama una *subvariedad* de $\mathbb{R}^4$). Ver gráficos en
`http://www.ugr.es/~jperez/docencia/geotop/RP2_en_R4.html`

22. Probar que $SO(2)$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1(1)$ mediante la aplicación $F : \mathbb{S}^1(1) \to SO(2)$ dada por $F(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

23. Probar que la aplicación $F : \mathbb{S}^3(1) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dada por

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2(x_1^2 + x_2^2) - 1 & 2(x_1x_4 + x_2x_3) & 2(x_2x_4 - x_1x_3) \\ 2(x_2x_3 - x_1x_4) & 2(x_1^2 + x_3^2) - 1 & 2(x_1x_2 + x_3x_4) \\ 2(x_1x_3 + x_2x_4) & 2(x_3x_4 - x_1x_2) & 2(x_1^2 + x_4^2) - 1 \end{pmatrix}$$

está valuada en $SO(3)$, y que induce un difeomorfismo de $\mathbb{RP}^3$ en $SO(3)$.

24. El toro de Clifford.
Sea $F : \mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1) \to \mathbb{R}^4$ la aplicación dada por $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

    (A) Probar que $F(\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)) \subset \mathbb{S}^3(1)$ es diferenciable, con diferencial inyectiva en cada punto, y que $F : \mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1) \to \mathbb{S}^3(1)$ es un embebimiento topológico de $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)$ en $\mathbb{S}^3(1)$ (decimos que F es un *embebimiento diferenciable,* y su imagen, una *subvariedad* de $\mathbb{S}^3(1)$). A $F(\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1))$ se la llama el *toro de Clifford.*

(B) Demostrar que la proyección estereográfica del toro de Clifford en $\mathbb{R}^3$ desde el punto $(0,0,0,1) \in \mathbb{S}^3(1)$ es el toro de revolución obtenido al rotar alrededor del eje z la circunferencia de radio 1 centrada en $(\sqrt{2},0,0)$.

25. El toro equilátero. (Subvariedad de $\mathbb{S}^5(1)$ difeomorfa al toro de revolución). Consideremos la aplicación $F : \mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1) \to \mathbb{R}^6$ dada por

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_1x_4 - x_2x_3, x_2x_4 + x_1x_3).$$

Probar que F produce un embebimiento diferenciable de $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)$ en $\mathbb{S}^5(1)$. A su imagen (subvariedad de $\mathbb{S}^5(1)$) se le llama el *toro equilátero.*

26. Embebimiento de Veronese.
Consideremos la aplicación $F : \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{R}^5$ dada por

$$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}(x^2-y^2), xz, yz, xy, \frac{\sqrt{3}}{6}(x^2+y^2-2z^2)\right).$$

Probar que F induce un embebimiento diferenciable $\overline{F} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{S}^4(1/\sqrt{3})$ (llamado *embebimiento de Veronese*).

27. Probar que si $B = \{v_1,\dots,v_n\}$, $B' = \{v_1',\dots,v_n'\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^n$, entonces los toros $\mathbb{T}^n_B$, $\mathbb{T}^n_{B'}$ asociados a B, B' son difeomorfos.

28. Probar que la aplicación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^1(1) \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{S}^1(1)$ dada por

$$F(x_1,\dots,x_n) = \left(e^{2\pi i x_1},\dots,e^{2\pi i x_n}\right), \qquad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

induce un difeomorfismo del toro n-dimensional $\mathbb{T}_{B_u}$ en $\mathbb{S}^1(1) \times \overset{n)}{\cdots} \times \mathbb{S}^1(1)$, donde B_u es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

29. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con su estructura diferenciable usual. Fijado un vector no nulo $a \in \mathbb{R}^2$, sea $\Gamma_a = \{ka \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$ el grupo cíclico generado por a. Definimos una acción de Γ_a sobre $\mathbb{R}^2$ por

$$\lambda : \Gamma_a \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ / \ \lambda(ka,p) = p + ka.$$

(A) Probar que la acción λ es diferenciable y propiamente discontinua. Así, $\mathbb{R}^2/\Gamma_a$ tiene estructura de variedad diferenciable, a la que llamaremos C_a. Demostrar que dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ no nulos, C_a es siempre difeomorfa a C_b.

(B) Dado $a \in \mathbb{R}^2$ no nulo, demostrar que existe un embebimiento diferenciable de C_a en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es el cilindro circular recto $\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

30. Probar que $\mathbb{RP}^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1$, y que $\mathbb{CP}^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

31. GRUPOS DE LIE.

    Un grupo de Lie es un grupo algebraico $(G, \cdot)$ junto con una estructura de variedad diferenciable que hace diferenciables a las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1 \cdot g_2 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

    a) Probar que dado cualquier $g \in G$, la *traslación a izquierda* $l_g : G \longrightarrow G \;/\; l_g(x) = g \cdot x$ y la *traslación a derecha* $r_g : G \longrightarrow G \;/\; r_g(x) = x \cdot g$ son difeomorfismos de G en sí mismo.

    b) Demostrar que el producto de dos grupos de Lie, con la estructura algebraica producto y la estructura diferenciable producto, vuelve a ser un grupo de Lie.

    c) Probar que si G es un grupo de Lie y $H \subset G$ es un subgrupo algebraico de G que además es subvariedad de G, entonces H también es un grupo de Lie.

    d) Demostrar que $Gl(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R}), \mathbb{S}^1(1)$ y $\mathbb{S}^1(1) \times \mathbb{S}^1(1)$ son grupos de Lie.

32. EL ESPACIO CUATERNIÓNICO Y EL PROYECTIVO CUATERNIÓNICO.
    A mediados del siglo XIX, Hamilton buscaba formas de generalizar el cuerpo de los números complejos a dimensiones superiores, y encontró una generalización natural de $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ en dimensión 4, es decir, una estructura de cuerpo no conmutativo en $\mathbb{R}^4$ que extiende de forma natural a $\mathbb{C}$. En honor a Hamilton, suele denotarse al cuerpo de cuaternios por $\mathbb{H}$. Nosotros usamos en este curso esta misma notación para el espacio hiperbólico, pero no produciremos confusión ya que sólo dedicaremos este ejercicio a estudiar algunos aspectos curiosos del espacio de cuaternios $\mathbb{H}$ y su proyectivización, $\mathbb{HP}^n$; dejaremos la notación $\mathbb{H}$ fuera de este ejercicio para el espacio hiperbólico.

    Sea $\mathbb{H}$ el espacio de los cuaternios,

$$\mathbb{H} = \{a + b\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + d\hat{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

    dotado de la suma y el producto habituales: la suma se efectúa componente a componente, y el producto extiende por multilinealidad a partir de la tabla

$\cdot$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{k}$
$\hat{\imath}$	-1	$\hat{k}$	$-\hat{\jmath}$
$\hat{\jmath}$	$-\hat{k}$	-1	$\hat{\imath}$
$\hat{k}$	$\hat{\jmath}$	$-\hat{\imath}$	-1

Probar que $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^4$ como espacio vectorial real (basta identificar $a+b\hat{\imath}+c\hat{\jmath}+d\hat{k} \in \mathbb{H}$ con $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$). Probar que el producto de cuaternios no es conmutativo, aunque admite un elemento neutro ($1 = 1 + 0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 0\hat{k}$) y cada elemento tiene un único inverso (el mismo por ambos lados).

El conjugado de $q = a + b\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + d\hat{k} \in \mathbb{H}$ se define como $\overline{q} = a - b\hat{\imath} - c\hat{\jmath} - d\hat{k}$, y la norma como

$$|q| = \sqrt{q\,\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}\,q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Probar que dados $q, q' \in \mathbb{H}$, se tiene:

- Si $q \neq 0$, entonces el inverso de q es $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$.
- $|q \cdot q'| = |q| \cdot |q'|$.
- Si $q = a + b\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + d\hat{k}$, entonces $q^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2ab\hat{\imath} + 2ac\hat{\jmath} + 2ad\hat{k}$.

El conjunto de cuaternios de norma 1 se identifica de forma natural con la esfera $\mathbb{S}^3(1)$, lo que dota a esta última de estructura de grupo multiplicativo[6].

Existe una curiosa relación entre $\mathbb{C}$, $\mathbb{S}^2(1)$, $\mathbb{S}^3(1)$ y $\mathbb{H}$: Consideremos la aplicación

$$\phi : \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}, \qquad \phi(b,c,d) = 0 + b\hat{\imath} + c\hat{\jmath} + d\hat{k}.$$

Probar que $\phi(\mathbb{S}^2(1)) = \{q \in \mathbb{S}^3 \mid q^2 = -1\}$. Fijado $q \in \phi(\mathbb{S}^2(1))$, llamemos $\mathbb{C}(q) = \{\lambda + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que la aplicación

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}(q), \qquad h(\lambda + \mu i) = \lambda + \mu q.$$

es un isomorfismo de cuerpos, y por tanto $\mathbb{C}(q)$ puede verse como una copia de $\mathbb{C}$ (y q hace el papel de una nueva unidad imaginaria). De esta forma, $\mathbb{H}$ puede verse como una unión de infinitas copias de $\mathbb{C}$, todas compartiendo el eje real, pero cada una con un eje imaginario, parametrizados éstos en los puntos de $\phi(\mathbb{S}^2(1))$.

Si consideramos es producto cartesiano de n copias del espacio de cuaternios, tendremos $\mathbb{H}^n \equiv \mathbb{R}^{4n}$ (no confundir con el espacio hiperbólico n-dimensional).

A continuación construiremos el espacio proyectivo cuaterniónico: sobre $\mathbb{H}^{n+1} - \{0\}$ se considera la relación de equivalencia que identifica puntos dentro de la misma recta cuaterniónica pasando por el origen de $\mathbb{H}^{n+1}$ (nótese que una recta cuaterniónica es un plano 4-dimensional real):

$$qRq' \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{H} - \{0\} \text{ tal que } q' = \lambda\, q,$$

[6] Lo mismo pasa con $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ y con $\mathbb{S}^1$. De hecho, éstas son las únicas esferas $\mathbb{S}^n$ con estructura de grupo de Lie. $\mathbb{S}^7$ admite una visión "similar" a $\mathbb{S}^3$ cambiando los cuaternios por otro tipo de números, llamados *octonios,* pero el producto de octonios no es asociativo).

donde el producto $\lambda\, q$ se entiende componente a componente, es decir

$$\lambda\, q = (\lambda\, q_1, \ldots, \lambda\, q_{n+1}) \ \text{ si } q = (q_1, \ldots, q_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1} - \{0\}.$$

Al espacio cociente $\mathbb{HP}^n = (\mathbb{H}^{n+1} - \{0\})/R$ se le llama *espacio proyectivo cuaternónico.* Las cartas de un atlas diferenciable sobre $\mathbb{HP}^n$ se definen de forma similar al caso real ($\mathbb{RP}^n$) o al complejo ($\mathbb{CP}^n$). Construir un atlas diferenciable sobre $\mathbb{HP}^n$ siguiendo los esquemas de $\mathbb{RP}^n$ y $\mathbb{CP}^n$.

Probar que cada recta cuaterniónica pasando por el origen de $\mathbb{H}^{n+1}$ corta a la esfera unitaria $\mathbb{S}^{4n+3} \subset \mathbb{R}^{4n+4} \equiv \mathbb{H}^{n+1}$ en una esfera 3-dimensional $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^{4n+3}$. Concluir que la restricción de la relación de equivalencia anterior de $\mathbb{H}^{n+1} - \{0\}$ a $\mathbb{S}^{4n+3}$ es

$$\text{Dados } q, q' \in \mathbb{S}^{4n+3}, \quad qRq' \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{S}^3 \text{ (cuaternios unitarios) tal que } q' = \lambda\, q,$$

Y por tanto, $\mathbb{HP}^n = \mathbb{S}^{4n+3}/R \equiv \mathbb{S}^{4n+3}/\mathbb{S}^3$ es un espacio compacto. Probar que $\mathbb{HP}^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^4$.

Capítulo 2

CAMPOS Y FORMAS DIFERENCIABLES

2.1. Campos de Vectores. Álgebra de Lie de los campos de vectores.

A lo largo de esta sección, M denotará una variedad diferenciable de dimensión n.

Definición 2.1.1 El *fibrado tangente a M* es el conjunto

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

A los elementos de TM los representaremos indistintamente por $v \in T_pM$ o (p, v). Representaremos por $\pi : TM \to M$ a la proyección natural, esto es $\pi(v) = p$ si $v \in T_pM$. Es posible dotar a TM de estructura de variedad diferenciable $2n$-dimensional (ejercicio 1).

Un *campo de vectores* en M es una aplicación $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = 1_M$ (en principio, no exigimos ninguna regularidad a X). A la imagen de un punto $p \in M$ por X se le representará por X_p.

Si X, Y son campos de vectores en M, $f : M \to \mathbb{R}$ una función (no necesariamente diferenciable) y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $X + Y$, λX y fX son los campos de vectores dados por

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p, \quad (\lambda X)_p = \lambda X_p, \quad (fX)_p = f(p)X_p, \qquad \forall p \in M.$$

Nota 2.1.1 Sea $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta en M.

- La aplicación $\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TU \subset TM$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad \forall p \in U,$$

es un campo de vectores en U para cada $i = 1, \ldots, n$.

- Dado un campo X en M, existen funciones $a_i : U \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que

$$X|_U = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.1}$$

Definición 2.1.2 Un campo de vectores X sobre M se dice *diferenciable* si existe un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha))\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ en M tal que las funciones $a_i^\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ dadas por (2.1) para $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n)) = (U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha))$ son diferenciables para todo $i = 1, \ldots, n$ y todo $\alpha \in \mathcal{A}$ (la definición es correcta, ya que no depende del atlas escogido en M). Al conjunto de campos diferenciables sobre M lo denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$.

Nota 2.1.2

- La definición anterior de diferenciabilidad de un campo X sobre M es equivalente a que $X \in C^\infty(M, TM)$, con la estructura diferenciable en TM dada por el ejercicio 1. Sin embargo, evitaremos este punto de vista para prescindir de la estructura diferenciable sobre TM.
- Si $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta en M, entonces $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$, $\forall i = 1, \ldots, n$.
- Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces $X + Y, \lambda X, fX \in \mathfrak{X}(M)$. Es claro que $\mathfrak{X}(M)$ tiene estructura de espacio vectorial real y de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$.

Habíamos definido los vectores tangentes en un punto $p \in M$ como derivaciones sobre funciones definidas alrededor de p. Ahora estudiamos los campos como derivaciones sobre funciones globalmente definidas. Recordemos que una *derivación* sobre $C^\infty(M)$ es una aplicación $F : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ que es lineal y cumple la regla del producto.

Proposición 2.1.1

1. *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos $F_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mediante $[F_X(f)](p) = X_p(f)$. Entonces, F_X es una derivación sobre $C^\infty(M)$.*
2. *Reciprocamente: si $F : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ es una derivación, entonces definiendo $X : M \to TM$ por $X_p(f) = [F(f)](p)$ para todo $p \in M$, tenemos que X es un campo diferenciable de vectores (a partir de ahora identificaremos X y F_X).*

Demostración. El apartado *1* es consecuencia de las propiedades de derivación de $X_p \in T_pM$ sobre $C^\infty(p)$ y de la diferenciabilidad de la función $X(f)$ $\forall f \in C^\infty(M)$; esta última se deduce de su expresión en cualquier carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ de M, ya que si $X|_U = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $a_i \in C^\infty(U)$, entonces

$$X(f) \circ \psi^{-1} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \circ \psi^{-1}) \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial r_i},$$

que es una función diferenciable en $\psi(U)$.

Veamos el apartado *2*: Que $X_p \in T_pM$ es porque X_p es una derivación sobre $C^\infty(p)$ (no olvidemos que toda función diferenciable alrededor de p puede extenderse a una función globalmente definida en M, gracias al Lema 1.3.2). Queda ver la diferenciabilidad de X.

Sea $X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ la expresión local de $X|_U$ en combinación de los campos básicos asociados a una carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ en M. Como $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kroneck-er), entonces $(X|_U)(x_j) = a_j$. Por tanto, si vemos que $(X|_U)(x_j) \in C^\infty(U)$ $\forall j$ habremos terminado.

La diferenciabilidad de $(X|_U)(x_j)$ en un punto arbitrario $q \in U$ se deduce de que x_j coincide en un entorno abierto V de q con cierta función globalmente definida $\widetilde{x_j} \in C^\infty(M)$ (de nuevo por el Lema 1.3.2), ahora sólo hay que aplicar que $X(\widetilde{x_j}) = F(\widetilde{x_j}) \in C^\infty(M)$ y que $[X(\widetilde{x_j})]|_V = [(X|_U)(x_j)]|_V$. Veamos que esta última igualdad es cierta:

Sea $q_1 \in V$. Como $X_{q_1} \in T_{q_1}M$, existe $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ diferenciable con $\alpha(0) = q_1$, $\alpha'(0) = X_{q_1}$. Entonces, $[X(\widetilde{x_j})](q_1) = X_{q_1}(\widetilde{x_j}) = (\widetilde{x_j} \circ \alpha)'(0) \overset{(\star)}{=} (x_j \circ \alpha)'(0) = X_{q_1}(x_j) = (X|_U)_{q_1}(x_j) = [(X|_U)](x_j)](q_1)$, donde en $(\star)$ hemos usado que α puede suponerse valuada en V. $\square$

Usando la identificación anterior se puede dotar a $\mathfrak{X}(M)$ de una estructura de álgebra de Lie[1] mediante el *corchete de Lie:*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \mapsto & [X, Y], \end{array}$$

donde

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Este producto tiene las siguientes propiedades (probarlas como ejercicio).

1. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$
2. $[X, Y] = -[Y, X]$,
3. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$,

[1]Un álgebra de Lie es un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (en nuestro caso, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) junto con una operación binaria $[\cdot, \cdot]$ que cumple las propiedades $1, 2, 3$ de arriba para f, g constantes y también cumple la identidad de Jacobi.

4. $[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]+[[Y,Z],X]=0$ (IDENTIDAD DE JACOBI),

$\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $f,g\in C^\infty(M)$.

La regla de Schwarz para funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ nos dice que dada una carta $(U,\psi=(x_1,\ldots,x_n))$ en M y una función $f\in C^\infty(U)$, se tiene $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\right)$, y por tanto

$$[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}]=0, \quad \forall i,j=1,\ldots,n.$$

Sin embargo, en general no es cierto que $X(Y(f))=Y(X(f))$. Por ejemplo, consideremos los campos $X,Y\in\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2(1))$ dados por $X_p=e_1\times p$, $Y_p=\langle p,e_3\rangle p-e_3$ (es claro que $X_p,Y_p\in T_p\mathbb{S}^2(1)$ $\forall p$ y que $X,Y\in C^\infty(\mathbb{S}^2(1),\mathbb{R}^3)$; como veremos más abajo, esto será suficiente para que X,Y sean campos diferenciables sobre $\mathbb{S}^2(1)$). Dado $p\in\mathbb{S}^2(1)$,

$$[X(x_2)](p)=(dx_2)_p(e_1\times p)=x_2(e_1\times p)=-x_3(p),$$

$$[Y(x_2)](p)=(dx_2)_p(x_3p-e_3)=x_3(p)(dx_2)_p(p)=x_3(p)x_2(p)$$

luego

$$\begin{array}{rcl}[Y(X(x_2))](p) & = & Y_p(-x_3)=(x_3(p)p-e_3)(-x_3)=x_3(p)d(-x_3)_p(p)-d(-x_3)_p(e_3)\\ & = & -x_3^2(p)+1,\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}[X(Y(x_2))](p) & = & X_p(x_2x_3)=x_2(p)X_p(x_3)+x_3(p)X_p(x_2)\\ & = & x_2(p)(dx_3)_p(e_1\times p)+x_3(p)(dx_2)_p(e_1\times p)\\ & = & x_2(p)x_3(e_1\times p)+x_3(p)x_2(e_1\times p)\\ & = & x_2^2(p)-x_3^2(p).\end{array}$$

Proposición 2.1.2 *Sea $F: M_1^n\to M_2^n$ un difeomorfismo. Consideremos la aplicación $F_*:\mathfrak{X}(M_1)\to\mathfrak{X}(M_2)$ dada por*

$$(F_*X)_{F(p)}:=dF_p(X_p), \quad \forall\, X\in\mathfrak{X}(M_1), \quad \forall\, p\in M_1.$$

Entonces:

1. $(F_*X)(h)=X(h\circ F)\circ F^{-1}$, $\forall h\in C^\infty(M_2)$.
2. $F_*(aX+bY)=aF_*X+bF_*Y$, $\quad F_*(fX)=(f\circ F^{-1})F_*X$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $X,Y\in\mathfrak{X}(M_1)$, $f\in C^\infty(M_1)$.
3. $[F_*X,F_*Y]=F_*[X,Y]$, $\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M_1)$.
4. *Si* $M_1\xrightarrow{F_1}M_2\xrightarrow{F_2}M_3$ *son difeomorfismos, entonces* $(F_2\circ F_1)_*=(F_2)_*\circ(F_1)_*$.
5. $(F^{-1})_*=(F_*)^{-1}$, $(1_M)_*=1_{\mathfrak{X}(M)}$.

Demostración. Ejercicio. □

Por ejemplo, consideremos el difeomorfismo de $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n(1)$ dado por la aplicación antípoda, $A(p) = -p$, $p \in \mathbb{S}^n$. Como $A \circ A = 1_{\mathbb{S}^n}$, entonces el automorfismo A_* de $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ cumple $A_* \circ A_* = 1_{\mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)}$. Por tanto,

$$\mathfrak{X}(\mathbb{S}^n) = \mathfrak{X}_+(\mathbb{S}^n) \oplus \mathfrak{X}_-(\mathbb{S}^n),$$

siendo $\mathfrak{X}_\pm(\mathbb{S}^n) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n) \mid A_* X = \pm X\}$.

En estas condiciones, es posible probar que si $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ es la proyección canónica, entonces existe un isomorfismo de álgebras

$$\pi_* : \mathfrak{X}_+(\mathbb{S}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{RP}^n),$$

definido por $(\pi_* X)_{\pi(p)} = d\pi_p(X_p)$, $\forall\, p \in \mathbb{S}^n$. Nótese que la definición de π_* es formalmente la misma que hemos hecho para un difeomorfismo, aunque $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ no es un difeomorfismo. El concepto que extiende esta situación es el de campos relacionados por una aplicación diferenciable.

Definición 2.1.3 Sea $\phi \in C^\infty(M, N)$, siendo M, N variedades diferenciables. Decimos que dos campos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están *ϕ-relacionados* si

$$d\phi_p(X_p) = Y_{\phi(p)}, \quad \forall p \in M.$$

Así cuando $\phi : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ sólo está relacionado con $\phi_* X \in \mathfrak{X}(N)$. En el caso anterior de $\mathbb{S}^n$, cada campo $X \in \mathfrak{X}_+(\mathbb{S}^n)$ está π-relacionado con el campo $\pi_* X \in \mathfrak{X}(\mathbb{RP}^n)$ (y viceversa).

Veamos cómo identificar los campos de algunas variedades sencillas.

Ejemplo 2.1.1

1. Usando la identificación $\lambda : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada en el Ejemplo 1.4.1, podemos definir una biyección $\lambda : \mathfrak{X}(O) \to C^\infty(O, \mathbb{R}^n)$ donde $O \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier abierto, dada por

$$[\lambda(X)](p) = (X_p(x_1), \ldots, X_p(x_n)), \quad \forall p \in O, \forall X \in \mathfrak{X}(O).$$

   Nótese que λ lleva los campos básicos para la carta $(O, 1_O)$ en los vectores de la base canónica, vistos como aplicaciones constantes de O en $\mathbb{R}^n$.

2. Sea $M^n \subset \mathbb{R}^k$ una subvariedad. Usando la identificación entre T_pM y el subespacio $(\lambda \circ di_p)(T_pM)$ de $\mathbb{R}^k$ dado en la Proposición 1.4.4, podemos definir una biyección

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) & \to & \{F \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k) \mid F(p) \in (\lambda \circ di_p)(T_pM),\ \forall p \in M\} \\ X & \mapsto & \left(\begin{array}{rll} F_X : & M \to & \mathbb{R}^k, \\ & p \mapsto & F_X(p) = (X_p(x_1 \circ i), \ldots, X_p(x_k \circ i)) \end{array} \right) \end{array}$$

3. Sea $a \in \mathbb{S}^n$ un vector fijo. Definimos un campo $X_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ como el que se identifica mediante el punto 2 con la aplicación $F(p) = a - \langle p, a \rangle p$, siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n+1}$. Si $n = 2$, podemos definir otro campo $Y_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ como el que se identifica con la función $G(p) = p \times a$. Ahora los dos campos del ejemplo dadeo antes de la Proposición 2.1.2 tienen sentido.

4. Siguiendo los argumentos dados antes de la Definición 2.1.3, tenemos que los campos sobre $\mathbb{RP}^n$ pueden identificarse de la siguiente forma:

$$\mathfrak{X}(\mathbb{RP}^n) \equiv \{F \in C^\infty(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1}) \mid \langle F(p), p \rangle = 0 \ \text{ y } \ F(-p) = -F(p), \forall p \in \mathbb{S}^n\}.$$

5. Sea $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica. Entonces, las aplicaciones $F, G : O(n) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dadas por

$$F(A) = AX, \quad G(A) = XA, \quad \forall A \in O(n),$$

definen campos diferenciables de vectores sobre $O(n)$. Estos campos tienen la particularidad de no tener ceros en ningún punto de $O(n)$.

6. Sea $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz con traza cero. Entonces las funciones $F, G : Sl(n, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dadas por

$$F(A) = AX, \quad G(A) = XA, \quad \forall A \in Sl(n, \mathbb{R}),$$

definen campos diferenciables de vectores in $Sl(n, \mathbb{R})$, que vuelven a tener la propiedad de no tener ningún cero.

7. Sea $\lambda : G \times M \to M$ una acción diferenciable y propiamente discontinua de un grupo algebraico G sobre una variedad diferenciable M. Recordemos que M/G admite una única estructura diferenciable que hace a la proyección canónica $\pi : M \to M/G$ un difeomorfismo local (Proposición 1.3.3). Dado $p \in M$, podemos identificar T_pM y $T_{\pi(p)}(M/G)$ vía $d\pi_p$, que es un isomorfismo de espacios vectoriales. Es fácil ver que cada campo $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ define un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ mediante

$$d\pi_p(X_p) = \widehat{X}_{\pi(p)}, \quad \forall p \in M,$$

es decir, X está π-relacionado con $\widehat{X}$. Además, si $\lambda_g : M \to M$ es cualquiera de los difeomorfismos de M dados por la acción, puede probarse que X está λ_g-relacionado con sí mismo,

$$(d\lambda_g)_p(X_p) = X_{gp}, \quad \forall p \in M,$$

y esto $\forall g \in G$. Pues bien, esta construcción determina todos los campos diferenciables sobre M/G. En otras palabras, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(M/G) & \to & \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid (\lambda_g)_* X = X,\ \forall g \in G\} \\ \widehat{X} & \mapsto & \left(\begin{array}{rl} X: & M \to \quad TM \\ & p \mapsto \quad X(p) = (d\pi_p)^{-1}(\widehat{X}_{\pi(p)}) \end{array} \right) \end{array}$$

es una biyección. Esto generaliza la descripción de los campos en $\mathbb{RP}^n$ dada en el punto 4, y también permite identificar los campos diferenciables en un toro $\mathbb{T}^n$ cociente de $\mathbb{R}^n$ por las n traslaciones de vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_n$ como las aplicaciones $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ que son periódicas por el retículo de $\mathbb{R}^n$ dado por $\mathbb{Z}v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}v_n$.

Proposición 2.1.3 (Extensión de campos) *Sean U un abierto de M, $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $p \in M$. Entonces, existen $V \subset U$ abierto conteniendo a p y $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $\widetilde{X}|_V = X|_V$.*

Demostración. Tomemos un cerrado F y un abierto U' de M que cumplan

$$p \in \text{Int}(F), \quad F \subset U \subset \overline{U'} \subset U.$$

Como $F \subset U'$, el Corolario 1.3.2 asegura que existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $f = 1$ en F y $F = 0$ en $M - U'$. Definimos $V := \text{Int}(F)$, abierto de M conteniendo a p y contenido en U. Definimos $\widetilde{X} : M \to TM$ mediante

$$q \in M \mapsto \widetilde{X}_q = \left\{ \begin{array}{cl} f(q)X_q & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \notin U. \end{array} \right.$$

$\widetilde{X}|_U, \widetilde{X}|_{M-\text{soporte}(f)}$ son claramente diferenciables. Como soporte$(f) \subset \overline{U'} \subset U$, tenemos $M = U \cup (M - \text{soporte}(f))$, y por tanto deducimos que $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Por ultimo, $\widetilde{X}|_F = X|_F$ porque $f|_F = 1$. Por tanto, $\widetilde{X}|_V = X|_V$. □

Corolario 2.1.1 *Sea $p \in M$ y $v \in T_pM$. Entonces, existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$.*

Demostración. Tomemos una carta local $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ alrededor de p. Así, $v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ para ciertos $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Definimos $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$ (con coeficientes constantes). Por la Proposición 2.1.3, existe un abierto V conteniendo a p y contenido en U, y existe $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\widetilde{X}|_V = X|_V$. Este $\widetilde{X}$ es el campo global que buscábamos. □

2.2. 1-formas diferenciables.

En esta sección estudiaremos el concepto dual del de campo de vectores. De nuevo M denotará una variedad diferenciable de dimensión n.

Definición 2.2.1 El *fibrado contangente a M* se define como

$$T^*M := \bigcup_{p\in M} T_p^*M = \bigcup_{p\in M} (T_pM)^*.$$

Representamos por $\pi : T^*M \to M$ a la proyección natural, esto es $\pi(\omega) = p$ si $\omega \in T_p^*M$. De forma análoga a lo que ocurre con TM, es posible dotar a T^*M de estructura de variedad diferenciable $2n$-dimensional, que convierte a $\pi : T^*M \to M$ en una submersión. Pero no usaremos esa estructura diferenciable en lo que sigue.

Una 1-*forma en M* es una aplicación $\omega : M \to T^*M$ tal que $\pi \circ \omega = 1_M$, sin exigir regularidad alguna a ω. A la imagen de un punto p por ω se le representará por $\omega_p \in T_p^*M$.

Si α, β son 1-formas en M, $f : M \to \mathbb{R}$ una función (no necesariamente diferenciable) y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha + \beta$, $\lambda\alpha$ y $f\alpha$ son las 1-formas dadas por

$$(\alpha + \beta)_p = \alpha_p + \beta_p, \quad (\lambda\alpha)_p = \lambda\alpha_p, \quad (f\alpha)_p = f(p)\alpha_p, \quad \forall p \in M.$$

Nota 2.2.1

- En el Ejemplo 1.4.2 veíamos la diferencial df_p de cada $f \in C^\infty(M)$ como elemento en T_p^*M. Por tanto, $p \in M \mapsto df_p \in T_p^*M$ define una 1-forma a la que llamamos la *diferencial de f* y representamos por df.
- Sea $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta en M. Entonces, dx_i es una 1-forma sobre U $\forall i$, y $\{(dx_1)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ es la base dual en T_p^*M de la base $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\}$. Dada una 1-forma ω sobre M, existen funciones $a_i : U \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que
$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n a_i\, dx_i. \tag{2.2}$$

Definición 2.2.2 Una 1-forma ω en M se dice *diferenciable* si existe un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha))\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en M tal que las funciones $a_i^\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ dadas por (2.2) son diferenciables para todo $i = 1, \ldots, n$ y todo $\alpha \in \mathcal{A}$ (la definición es correcta, ya que no depende del atlas elegido en M). Al conjunto de 1-formas diferenciables sobre M lo denotaremos por $\Omega^1(M)$.

Nota 2.2.2

- Si $f \in C^\infty(M)$ es diferenciable, entonces $df \in \Omega^1(M)$. De hecho, la diferencial de funciones define un operador $d : C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ cumpliendo

$$d(f+g) = df + dg, \quad d(fg) = f\,dg + g\,df, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

- Si $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta en M, entonces $dx_i \in \Omega^1(U)$, $i = 1, \ldots, n$.

- Si $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces $\alpha+\beta$, $\lambda\alpha$, $f\alpha \in \Omega^1(M)$. Así, $\Omega^1(M)$ tiene estructura de espacio vectorial real y de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$.

Proposición 2.2.1

1. *Sea $\alpha \in \Omega^1(M)$. Definimos $F_\alpha : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ mediante $[F_\alpha(X)](p) = \alpha_p(X_p)$. Entonces, se tienen:*

$$F_\alpha(X+Y) = F_\alpha(X) + F_\alpha(Y), \quad F_\alpha(fX) = fF_\alpha(X), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

2. *Reciprocamente: si $F : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ es una aplicación que cumple las propiedades anteriores, entonces definiendo $\alpha : M \to T^*M$ por $\alpha_p(v) = [F(X)](p)$ donde $X \in \mathfrak{X}(M)$ cumple $X_p = v$ (este campo X existe por el Corolario 2.1.1), tenemos que α está bien definida (es independiente del campo X elegido) y es una 1-forma diferenciable sobre M.*

Demostración. El apartado 1 es trivial. En cuanto al apartado 2, primero veremos que la definición de α no depende de X. Esto será consecuencia de varias observaciones.

- *Sea $U \subset M$ abierto y $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X|_U = 0$. Entonces, $[F(X)]|_U = 0$.*
En efecto, fijemos $p \in U$ y veamos que $[F(X)](p) = 0$. Como $\{p\}, M - U$ son cerrados disjuntos de M, el Corolario 1.3.2 asegura que existe $f_p \in C^\infty(M)$ tal que $f_p|_{M-U} = 1$ y $f_p(p) = 0$. Como $X|_U = 0$, tenemos $X = f_pX$ en M (razonar por separado en U y en $M - U$), luego $F(X) = F(f_pX) = f_pF(X)$. Evaluando en p y usando que $f_p(p) = 0$, tenemos $[F(X)](p) = 0$. Como p es arbitrario en U, concluímos que $[F(X)]|_U = 0$.

- Ahora podemos definir la restricción $F|_U : \mathfrak{X}(U) \to C^\infty(U)$ de F a cualquier abierto $U \subset M$, de la siguiente forma: Dado $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $p \in U$, se define $[(F|_U)(X)](p) = [F(\widetilde{X})](p)$, donde $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ es cualquier campo tal que $\widetilde{X}|_{V_p} = X|_{V_p}$, siendo V_p un abierto de U con $p \in V_p$ (la existencia de $\widetilde{X}$, V_p son consecuencia de la Proposición 2.1.3). Para que esta definición sea correcta, debemos probar que$F|_U$ no depende de la extensión $\widetilde{X}$ de $X \in \mathfrak{X}(U)$; en efecto, si tomamos otra extensión $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(M)$ de X, entonces $\widetilde{X} - \widehat{X}$ está en las condiciones del punto anterior sobre el abierto V_p donde ambas extensiones coinciden con X. Por tanto, $[F(\widetilde{X} - \widehat{X})]|V_p = 0$. Como $F(\widetilde{X} - \widehat{X}) = F(\widetilde{X}) - F(\widehat{X})$, concluímos que $[F(\widetilde{X})](p) = [F(\widehat{X})](p)$.

- *Sean $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$ tales que $X_p = 0$. Entonces, $[F(X)](p) = 0$.*
  En efecto, tomemos una carta local $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ de M alrededor de p. Así, $X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $a_i \in C^\infty(U)$ $\forall i$. Como $F|_U$ está bien definida,
  $$[F(X)](p) = [(F|_U)(X|_U)](p) = \left[(F|_U)\left(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right](p) = \sum_i a_i(p)\left[(F|_U)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right](p).$$
  Lo anterior se anula porque al ser $X_p = 0$, tenemos $a_i(p) = 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$.
- Por último, que la expresión $[F(X)](p)$ es independiente de $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$, es consecuencia de un razonamiento análogo al que hacíamos para probar que $F|_U$ está bien definida.

Ahora podemos afirmar que $\alpha_p(v) = [F(X)](p)$ define una 1-forma sobre M. Que α es diferenciable se deduce de su expresión en coordenadas locales: Si $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta en M, entonces $\alpha|_U = \sum_i a_i \, dx_i$ donde
$$a_i = (\alpha|_U)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = (F|_U)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \in C^\infty(U).$$
□

Proposición 2.2.2 *Cada aplicación diferenciable $\Phi : M \to N$ induce un homomorfismo de espacios vectoriales $\Phi^* : \Omega^1(N) \to \Omega^1(M)$ mediante*
$$[\Phi^*(\alpha)]_p(v) = \alpha_{\Phi(p)}(d\Phi_p(v)), \quad \forall \alpha \in \Omega^1(N),\ v \in T_pM,\ p \in M.$$
Además, se tienen las siguientes propiedades:

1. $\Phi^*(f\alpha) = (f \circ \Phi)\Phi^*\alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^1(N),\ f \in C^\infty(N)$.
2. *Si $\Psi : N \to P$ es otra aplicación diferenciable, entonces $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$.*
3. $(1_M)^* = 1_{\Omega^1(M)}$ *(por tanto, $\Phi \mapsto \Phi^*$ define un funtor contravariante).*

Demostración. Ejercicio. □

2.3. Algebra exterior. Formas diferenciables.

Necesitamos algunos preliminares de álgebra multilineal. Sea V un espacio vectorial real, y $r \geq 1$ un entero no negativo. Un *tensor r-covariante*[2] sobre V es una aplicación r-lineal
$$T : V \times \overset{r)}{\ldots} \times V \to \mathbb{R}.$$

[2] Como no usaremos tensores contravariantes, llamaremos a un tensor covariante simplemente un tensor.

Al conjunto de todos los tensores r-covariantes sobre V lo denotaremos por $\mathcal{T}_r(V)$, conjunto que tiene estructura de espacio vectorial real con la suma y el producto por escalares natural a partir de la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(u_1,\ldots,u_k) &= T_1(u_1,\ldots,u_k)+T_2(u_1,\ldots,u_k),\\ (a\,T)(u_1,\ldots,u_k) &= a\,T(u_1,\ldots,u_k).\end{aligned}$$

Como casos particulares, tenemos $\mathcal{T}_0(V)=\mathbb{R}$ (por convenio) y $\mathcal{T}_1(V)=V^*$.

Dados dos tensores $T_1\in\mathcal{T}_r(V), T_2\in\mathcal{T}_{r'}(V)$, el *producto tensorial* de T_1 y T_2 es el tensor $T_1\otimes T_2\in\mathcal{T}_{r+r'}(V)$ dado por

$$(T_1\otimes T_2)(u_1,\ldots,u_r,u_{r+1},\ldots,u_{r+r'})=T_1(u_1,\ldots,u_r)\cdot T_2(u_{r+1},\ldots,u_{r+r'}),$$

para cualesquiera $u_1,\ldots,u_{r+r'}\in V$. Este producto tensorial cumple las siguientes propiedades (probarlas como ejercicio):

1. $(T_1+T_2)\otimes T=T_1\otimes T+T_2\otimes T,\quad (aT_1)\otimes T_2=a(T_1\otimes T_2)$.
2. $T\otimes(T_1+T_2)=T\otimes T_1+T\otimes T_2,\quad T_1\otimes(aT_2)=a(T_1\otimes T_2)$.
3. $T_1\otimes(T_2\otimes T_3)=(T_1\otimes T_2)\otimes T_3$.
4. $(\mathcal{T}(V):=\oplus_{r\geq 0}\mathcal{T}_r(V),+,\otimes)$ es un álgebra graduada.

Debido a la asociatividad del producto tensorial, se puede definir sin ambiguedad el producto tensorial $T_1\otimes\ldots\otimes T_m$ de un número finito de tensores. Esto nos valdrá, entre otras cosas, para encontrar una base de $\mathcal{T}_r(V)$: Sea $\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V y $\{\alpha^1,\ldots,\alpha^n\}\subset V^*$ su base dual. Entonces, el conjunto

$$\left\{\alpha^{i_1}\otimes\ldots\otimes\alpha^{i_r}\mid 1\leq i_1,\ldots,i_r\leq n\right\}.$$

es una base de $\mathcal{T}_r(V)$ (ejercicio). En particular, la dimensión de $\mathcal{T}_r(V)$ es n^r. Además cualquier tensor $T\in\mathcal{T}_r(V)$ se escribe en combinación lineal de esta base como

$$T=\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}T(v_{i_1},\ldots,v_{i_r})\,\alpha_{i_1}\otimes\cdots\otimes\alpha_{i_r}.$$

Toda aplicación lineal $\varphi:V\to W$ entre dos espacios vectoriales reales induce una aplicación lineal (pullback) entre los espacios de tensores covariantes $\varphi^*:\mathcal{T}_r(W)\to\mathcal{T}_r(V)$ mediante

$$(\varphi^*T)(u_1,\ldots,u_r)=T(\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_r)),$$

para cualesquiera $T \in \mathfrak{T}_r(W)$, $u_1, \ldots, u_r \in V$. El comportamiento del pullback frente al producto tensorial viene dado por la siguiente fórmula:

$$\varphi^*(T_1 \otimes T_2) = (\varphi^* T_1) \otimes (\varphi^* T_2),$$

donde $T_1 \in \mathfrak{T}_r(W)$, $T_2 \in \mathfrak{T}_s(W)$.

Dentro de $\mathfrak{T}_r(V)$ tenemos dos subespacios vectoriales destacados, según se comporten los tensores frente al cambios de orden en las variables. Así, tenemos el subespacio vectorial de los *tensores simétricos* (resp. *antisimétricos*, o también *r-formas*), que denotaremos por $\mathcal{S}_r(V)$ (resp. $\Lambda^r(V)$), que son aquellos $T \in \mathfrak{T}_r(V)$ tales que

$$\begin{array}{rrcl} & T(u_1, \ldots, u_k) & = & T(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(r)}), \\ \text{(resp.} & T(u_1, \ldots, u_k) & = & \operatorname{sig}(\sigma) T(u_\sigma(1), \ldots, u_{\sigma(r)}) \quad), \end{array}$$

para toda lista $u_1, \ldots, u_k \in V$ y toda permutación σ de r elementos, donde $\operatorname{sig}(\sigma) = \pm 1$ representa la signatura de σ. Como toda permutación se escribe como producto de transposiciones, para ver la antisimetría de un tensor $T \in \mathfrak{T}_r(V)$ basta probar que la segunda ecuación anterior se cumple para transposiciones de las variables (en tal caso $\operatorname{sig}(\sigma) = -1$), y más concretamente, para transposiciones que permutan variables contiguas. Un sencilla consecuencia de la multilinealidad es que un tensor $T \in \mathfrak{T}_r(V)$ es antisimétrico si y sólo si $T(u_1, \ldots, u_k) = 0$ sobre cualquier lista $(u_1, \ldots, u_k)$ que tenga dos argumentos repetidos (esto se lee T es *alternado*). Por convenio, pondremos

$$\Lambda^1(V) = \mathfrak{T}_1(V) = V^*, \qquad \Lambda^0(V) = \mathfrak{T}_0(V) = \mathbb{R}.$$

Es claro que $\mathcal{S}_r(V) \cap \Lambda^r(V) = \{0\}$ para todo r. Si $T \in \mathfrak{T}_2(V)$, hay una forma sencilla de asignar a T su partes simétrica y antisimétrica:

$$T(x, y) = \frac{1}{2}(T(x, y) + T(y, x)) + \frac{1}{2}(T(x, y) - T(y, x)).$$

La fórmula anterior prueba que $\mathfrak{T}_2(V) = \mathcal{S}_2(V) \oplus \Lambda^2(V)$. Aunque esta suma directa no se conserva para $\mathfrak{T}_r(V)$ con $r \geq 3$, podemos generalizar la fórmula anterior de la siguiente forma. Dado $E \in \mathfrak{T}_r(V)$, definimos

$$[\operatorname{Alt}(T)](u_1, \ldots, u_r) = \frac{1}{r\,!} \sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sig}(\sigma)\, T(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(r)}).$$

Es claro que $\operatorname{Alt}(T) \in \mathfrak{T}_r(V)$ y que la aplicación $T \mapsto \operatorname{Alt}(T)$ es lineal. De hecho, $\operatorname{Alt}(T)$ es antisimétrico, con lo que tenemos una aplicación lineal Alt: $\mathfrak{T}_r(V) \to \Lambda^r(V)$ que además cumple que si $\alpha \in \Lambda^r(V)$, entonces $\operatorname{Alt}(\alpha) = \alpha$ (aquí se usa el factor $r\,!$ en el denominador).

En consecuencia, $\mathrm{Alt}\circ\mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$, visto como endomorfismo de $\mathcal{T}_r(V)$, y por tanto $\mathcal{T}_r(V)$ se descompone como suma directa

$$\mathcal{T}_r(V) = \ker(\mathrm{Alt}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{Alt}) = \ker(\mathrm{Alt}) \oplus \Lambda^r(V).$$

Para $r = 2$, es $\mathcal{S}_2(V) = \ker(\mathrm{Alt})$, pero esto no se cumple para $r \geq 3$. Veamos algunas de esta aplicación Alt.

Lema 2.3.1

1. *Sea* $T \in \mathcal{T}_r(V)$ *tal que* $\mathrm{Alt}\,(T) = 0$. *Entonces,* $\mathrm{Alt}(T\otimes T') = \mathrm{Alt}(T'\otimes T) = 0$, *para todo* $T \in \mathcal{T}_s(V)$.

2. *Si* $\alpha \in \Lambda^k(V)$, $\beta \in \Lambda^l(V)$, $\gamma \in \Lambda^s(V)$, *entonces*

$$\mathrm{Alt}(\alpha\otimes \mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)) = \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma) = \mathrm{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma).$$

Demostración. De la definición de producto tensorial se tiene que dados $u_1, \dots, u_{r+s} \in V$,

$$(r+s)!\,\mathrm{Alt}(T\otimes T')(u_1,\dots,u_{r+s}) = \sum_{\sigma\in S_{r+s}} \mathrm{sig}(\sigma) T(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(r)})T'(u_{\sigma(r+1)},\dots,u_{\sigma(r+s)}). \tag{2.3}$$

Fijemos un subconjunto *ordenado* $A = (a_1,\dots,a_s)$ de s elementos en $\{1,\dots,r+s\}$. Sea $P_A = \{\sigma\in S_{r+s} \mid \sigma(r+i) = a_i,\ i = 1,\dots,s\}$. Es claro que la aplicación $\sigma \in P_A \mapsto \sigma|_{\{1,\dots,r\}}$ establece una biyección entre P_A y S_r (permutaciones de r elementos), y que si $\sigma\in P_A$ entonces

$$\mathrm{sig}(\sigma) = \pm\mathrm{sig}(\sigma|_{\{1,\dots,r\}}).$$

Además, el signo $\pm$ en la última expresión no depende de $\sigma \in P_A$. Por tanto, podemos reagrupar el miembro de la derecha de (2.3) de la forma siguiente:

$$\sum_{A=(a_1,\dots,a_s)} \left[\pm \sum_{\tau\in S_r} \mathrm{sig}(\tau)T(u_{\tau(1)},\dots,u_{\tau(r)})\right] T'(u_{a_1},\dots,u_{a_s}),$$

y ahora lo anterior se anula ya que $\mathrm{Alt}(T) = 0$. Esto prueba que $\mathrm{Alt}(T\otimes T') = 0$. La prueba de que $\mathrm{Alt}(T'\otimes T) = 0$ es análoga, con lo que tenemos demostrada la propiedad 1.

En cuanto a la propiedad 2, primero notemos que

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma) - \beta\otimes\gamma) = \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)) - \mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma)$$

$$= \mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma) - \mathrm{Alt}(\beta\otimes\gamma) = 0.$$

Usando la propiedad 1 para $T_1 = \alpha$, $T_2 = \mathrm{Alt}(\beta \otimes \gamma) - \beta \otimes \gamma$, tenemos

$$0 = \mathrm{Alt}\left(\alpha \otimes [\mathrm{Alt}(\beta \otimes \gamma) - \beta \otimes \gamma]\right) = \mathrm{Alt}\left(\alpha \otimes \mathrm{Alt}(\beta \otimes \gamma) - \alpha \otimes \beta \otimes \gamma\right)$$

$$= \mathrm{Alt}\left(\alpha \otimes \mathrm{Alt}(\beta \otimes \gamma)\right) - \mathrm{Alt}\left(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma\right),$$

que es una de las igualdades del apartado 2. La otra igualdad se prueba análogamente. □

La utilidad principal de la aplicación Alt es definir el siguiente producto natural entre tensores alternados.

Definición 2.3.1 El *producto exterior* de tensores alternados sobre V es la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \wedge : \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) & \longrightarrow & \Lambda^{r+s}(V) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \wedge \beta = \dfrac{(r+s)!}{r!\, s!} \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta). \end{array}$$

Usando la definición de Alt se tiene que

$$(\alpha \wedge \beta)(u_1, \ldots, u_{r+s}) = \frac{1}{r!\, s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \mathrm{sig}(\sigma)\, (\alpha \otimes \beta)(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(r+s)})$$

$$= \frac{1}{r!\, s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \mathrm{sig}(\sigma)\, \alpha(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(r)})\, \beta(u_{\sigma(r+1)}, \ldots, u_{\sigma(r+s)}).$$

Ahora recopilamos las propiedades algebraicas del producto exterior.

Teorema 2.3.1 *Sean $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^r(V)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Lambda^s(V)$, $\gamma \in \Lambda^k(V)$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$.
2. $\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$.
3. $(a\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (a\beta) = a(\alpha \wedge \beta)$.
4. $\beta \wedge \alpha = (-1)^{rs} \alpha \wedge \beta$.
5. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{(r+s+k)!}{r!\, s!\, k!} \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$.
6. *Si $\varphi : V \to W$ es una aplicación lineal, $\alpha \in \Lambda^r(W)$ y $\beta \in \Lambda^s(W)$, entonces*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^* \alpha) \wedge (\varphi^* \beta).$$

Demostración. 1,2,3 son consecuencias de las correspondientes propiedades para $\otimes$. Veamos la propiedad 4: Por definición,

$$(\beta\wedge\alpha)(u_1,\ldots,u_{r+s}) = \frac{1}{s!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}} \text{sig}(\sigma)\,\alpha(u_{\sigma(s+1)},\ldots,u_{\sigma(s+r)})\,\beta(u_{\sigma(1)},\ldots,u_{\sigma(s)})$$

$$= \frac{1}{s!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}} \text{sig}(\sigma)\,(\alpha\otimes\beta)(u_{\sigma(s+1)},\ldots,u_{\sigma(s+r)},u_{\sigma(1)},\ldots,u_{\sigma(s)}).$$

Consideremos la permutación $\rho\in S_{r+s}$ que lleva $(1,\ldots,s,s+1,\ldots,s+r)$ en $(s+1,\ldots,s+r,1,\ldots,s)$, en ese orden. Así, ρ mueve cada uno de los últimos r índices hacia atrás, saltando s índices, luego ρ es producto de rs transposiciones y $\text{sig}(\rho)=(-1)^{rs}$. Por tanto, podemos escribir la última fórmula como

$$\frac{1}{s!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}} \text{sig}(\sigma)\,(\alpha\otimes\beta)(u_{\sigma(\rho(1))},\ldots,u_{\sigma(\rho(r))},u_{\sigma(\rho(r+1))},\ldots,u_{\sigma(\rho(r+s))})$$

$$= \frac{1}{s!\,r!}\sum_{\sigma\in S_{r+s}} (-1)^{rs}\text{sig}(\sigma\circ\rho)\,(\alpha\otimes\beta)(u_{(\sigma\circ\rho)(1)},\ldots,u_{(\sigma\circ\rho)(r)},u_{(\sigma\circ\rho)(r+1)},\ldots,u_{(\sigma\circ\rho)(r+s)})$$

$$= \frac{(-1)^{rs}}{s!\,rT!}\sum_{\tau\in S_{r+s}} \text{sig}(\tau)\,(\alpha\otimes\beta)(u_{\tau(1)},\ldots,u_{\tau(r)},u_{\tau(r+1)},\ldots,u_{\tau(s+r)})$$

$$= (-1)^{rs}(\alpha\wedge\beta)(u_1,\ldots,u_{r+s}),$$

lo que prueba 4. Veamos la propiedad 5: Sustituyendo la definición de $\alpha\wedge\beta$ en $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$ obtenemos

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \left(\frac{(r+s)!}{r!\,s!}\text{Alt}(\alpha\otimes\beta)\right)\wedge\gamma = \frac{(r+s)!}{r!\,s!}\text{Alt}(\alpha\otimes\beta)\wedge\gamma.$$

Como $\text{Alt}(\alpha\otimes\beta)$ es de orden $r+s$, la definición de producto exterior nos permite escribir lo anterior como

$$\frac{(r+s)!}{r!\,s!}\frac{(r+s+k)!}{(r+s)!\,k!}\text{Alt}(\text{Alt}(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma) \overset{\text{Lema 2.3.1}}{=} \frac{(r+s+k)!}{r!\,s!\,k!}\text{Alt}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma),$$

y tenemos probada una de las dos fórmulas en la propiedad 5. La otra se hace análogamente. Por último, la propiedad 6 se deja como ejercicio. $\square$

Debido a la asociatividad del producto exterior, se puede definir sin ambiguedad el producto exterior $\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_m$ de un número finito de tensores alternados.

Como consecuencia del Teorema 2.3.1, conviene observar que dadas $\alpha\in\Lambda^r(V)$ y $\beta\in\Lambda^s(V)$ se tiene que

- $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$ si r ó s son pares.
- $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ si r y s son impares.
- $\alpha \wedge \alpha = 0$ si r es impar.

Notemos que la fórmula del apartado 5 en el teorema anterior dice que si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Lambda^1(V)$, entonces

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 = 3!\,\mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sig}(\sigma)\, \alpha_{\sigma(1)} \otimes \alpha_{\sigma(2)} \otimes \alpha_{\sigma(3)}.$$

Es fácil probar por inducción que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \Lambda^1(V)$, entonces

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m = \mathrm{m}!\,\mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sig}(\sigma)\, \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(m)}. \tag{2.4}$$

Proposición 2.3.1 *Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ su base dual. Dado $k = 1, \ldots, n$, el conjunto*

$$\{\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\},$$

es una base de $\Lambda^k(V)$. En consecuencia, $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$. Toda k-forma $\alpha \in \Lambda^k(V)$ se escribe

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1 \ldots i_k}\, \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k},$$

donde $\lambda_{i_1 \ldots i_k} = \alpha(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \in \mathbb{R}$.

Demostración. Viendo cada $\alpha \in \Lambda^k(V)$ como tensor en $\mathcal{T}_k(V)$, tenemos

$$\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \alpha(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k})\, \alpha_{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{i_k}.$$

Como α es alternado, $\alpha(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) = 0$ si alguno de los índices $i_1, \ldots, i_k$ se repite. Para aquellos sumandos en la última sumatoria donde $i_1, \ldots, i_k$ son todos distintos, los agruparemos por conjuntos de k índices distintos $\{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ con $j_1 < \ldots < j_k$ de forma que $(i_1, \ldots, i_k) = (\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k))$ para alguna permutación σ de k elementos (ojo: σ no mueve necesariamente los índices $1, \ldots, k$, sino k índices distintos elegidos en $1, \ldots, n$). Así,

$$\alpha = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} \left(\sum_{\sigma \in S_k} \alpha(u_{\sigma(j_1)}, \ldots, u_{\sigma(j_k)})\, \alpha_{\sigma(j_1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(j_k)} \right).$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_k} \left(\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sig}(\sigma)\alpha(u_{j_1},\ldots,u_{j_k})\, \alpha_{\sigma(j_1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(j_k)} \right).$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_k} \alpha(u_{j_1},\ldots,u_{j_k}) \left(\sum_{\sigma\in S_k} \mathrm{sig}(\sigma)\, \alpha_{\sigma(j_1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(j_k)} \right).$$

Por la fórmula (2.4), el paréntesis anterior coincide con $\alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k}$, lo que prueba que $\{\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ es un sistema de generadores de $\Lambda^k(V)$. La independencia lineal es consecuencia de la fórmula

$$(\alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k})(v_{j_1},\ldots,v_{j_k}) = \delta_{i_1,j_1} \ldots \delta_{i_k,j_k},$$

(producto de deltas de Kronecker) siempre que $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$. □

Notemos que si $k > n = \dim V$ y $\alpha \in \Lambda^k(V)$, entonces $\alpha(v_{i_1},\ldots,v_{i_k}) = 0$ para toda elección de índices con $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, ya que en la lista $v_{i_1},\ldots,v_{i_k}$ siempre hay dos vectores repetidos. Esto nos dice que

$$\Lambda^k(V) = \{0\} \quad \text{si } k > n.$$

Como $\dim \Lambda^n(V) = \binom{n}{n} = 1$, cualquier elemento no cero en $\Lambda^n(V)$ será una base de $\Lambda^n(V)$. A continuación estudiaremos qué n-formas pueden generar esta espacio.

Lema 2.3.2 *Sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \Lambda^1(V)$ (no necesariamente parte de la base dual de una base de V). Entonces, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$ son linealmente independientes en $\Lambda^1(V)$ si y sólo si $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \neq 0$ in $\Lambda^k(V)$.*

Demostración. Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ son linealmente independientes, entonces pueden completarse a una base $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ de $V^* = \Lambda^1(V)$, que será base dual de una cierta base $u_1,\ldots,u_n$ de V. Entonces, la Proposición 2.3.1 asegura que $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ es un elemento de una base de $\Lambda^k(V)$, luego $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \neq 0$.

Recíprocamente, si $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ son linealmente dependientes, entonces una de las α_i se escribe como combinación lineal del resto. Por la multilinealidad del producto exterior, basta probar que $\alpha_{j_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_k} = 0$ siempre que en $\{j_1,\ldots,j_k\} \subset \{1,\ldots,n\}$ hay al menos dos índices repetidos. Esto es consecuencia de que $\alpha \wedge \alpha = 0$ para toda $\alpha \in \Lambda^1(V)$. □

En el caso del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, podemos definir un elemento no nulo de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ muy especial. Definimos

$$\det : \mathbb{R}^n \times \overset{n}{\ldots} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\det(u_1,\ldots,u_n) = \det A,$$

donde $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz dada por $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, siendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Las propiedades estándar de los determinantes prueban que det es una n-forma sobre $\mathbb{R}^n$, y es no nula porque $\det(e_1, \ldots, e_n) = \det I_n = 1$. En realidad, esta n-forma det tiene sentido en cualquier espacio vectorial n dimensional V, sin más que prefijar una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y considerar el isomorfismo canónico de V en $\mathbb{R}^n$ que lleva B en la base canónica. Así, tenemos

$$\begin{gathered} \det_B : V \times \overset{n)}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \det_B(u_1, \ldots, u_n) = \det A, \end{gathered}$$

donde $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la matriz dada por $u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$.

Si V es un espacio vectorial n-dimensional y $\varphi \colon V \to V$ un endomorfismo, entonces φ^* es un endomorfismo del espacio vectorial 1-dimensional $\Lambda^n(V)$, luego φ^* es un múltiplo de la identidad. Este múltiplo tiene la siguiente interpretación:

Proposición 2.3.2 *Dado un endomorfismo $\varphi \colon V \to V$, se tiene*

$$\varphi^* \alpha = (\det \varphi)\, \alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda^n(V). \tag{2.5}$$

Demostración. Fijemos $\alpha \in \Lambda^n(V)$. Si $\alpha = 0$ entonces no tenemos nada que demostrar. Supongamos entonces que $\alpha \neq 0$, y por tanto α es una base de $\Lambda^n(V)$. Como $\varphi^* \in \Lambda^n(V)$, entonces $\varphi^* \alpha = \lambda \alpha$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que $\lambda = \det \varphi$ y habremos terminado: Como α es base de $\Lambda^n(V)$, existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $\alpha = v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*$, donde $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ es la base dual de $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces,

$$\lambda = (\varphi^* \alpha)(v_1, \ldots, v_n) = \alpha(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) = (v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*)(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) = \det(\varphi).$$

$\square$

En particular, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ son dos bases de V y $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ $\forall j$, entonces

$$\alpha(w_1, \ldots, w_n) = (\det A)\, \alpha(v_1, \ldots, v_n), \qquad \forall \alpha \in \Lambda^n(V). \tag{2.6}$$

A continuación trasladaremos lo aprendido arriba sobre álgebra multilineal a una variedad diferenciable M de dimensión n. Dado k un entero positivo, llamaremos

$$\Lambda^k(M) := \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M),$$

y representamos por $\pi : \Lambda^k(M) \to M$ a la proyección natural: $\pi(\alpha) = p$ si $\alpha \in \Lambda^k(T_p M)$.

Definición 2.3.2 Una *k-forma en M* es una aplicación $\alpha : M \to \Lambda^k(M)$ (en principio, sin ninguna regularidad) tal que $\pi \circ \alpha = 1_M$. A la imagen de un punto p por α se le representará por α_p.

Nota 2.3.1

1. Sean α, β dos k-formas en M, $f : M \to \mathbb{R}$ función (no necesariamente diferenciable) y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, $\alpha + \beta$, $\lambda\,\alpha$ y $f\alpha$ definidos por

$$(\alpha + \beta)_p = \alpha_p + \beta_p, \quad (\lambda\,\alpha)_p = \lambda\,\alpha_p \quad , (f\alpha)_p = f(p)\alpha_p,$$

son también k-formas en M.

2. Si α es una r-forma en M y β una s-forma en M, entonces $\alpha \wedge \beta$ definida por

$$(\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p, \quad p \in M,$$

es una $(r+s)$-forma en M.

3. Si $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta en M, entonces

$$\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$$

es una base local de k-formas en U (esto es, al evaluarlas en cualquier punto $p \in U$ dan una base de $\Lambda^k(T_pM)$).

4. Si α es una k-forma en M y $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta en M, entonces la restricción de α a U se escribe

$$\alpha|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \tag{2.7}$$

donde $f_{i_1 \ldots i_k} = (\alpha|_U)(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}) : U \to \mathbb{R}$ para $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

Definición 2.3.3 Una k-forma α en M se dice *diferenciable* si existe un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha))\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ en M tal que las funciones $f^\alpha_{i_1 \ldots i_k} : U_\alpha \to \mathbb{R}$ dadas por (2.7) para $(U, \psi) = (U_\alpha, \psi_\alpha)$ son diferenciables para todo $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ y todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Esta definición es correcta, ya que no depende del atlas escogido en M. Representaremos al conjunto de k-formas diferenciables sobre M por $\Omega^k(M)$.

Nota 2.3.2 Si $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$, entonces $\alpha + \beta$, $\lambda\,\alpha$, $f\alpha \in \Omega^k(M)$. Además, si $\beta \in \Omega^r(M)$, entonces $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+r}(M)$.

Usando el Teorema 2.3.1, es claro que $\Omega^k(M)$ tiene estructura de espacio vectorial real y de módulo sobre el anillo $C^\infty(M)$. De las correspondientes igualdades para espacios vectoriales se tiene $\Omega^k(M) = \{0\}$ si $k > n$, y $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Por tanto, llamando

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M),$$

deducimos de nuevo a partir del Teorema 2.3.1 que el producto exterior de formas dota a $\Omega^*(M)$ de estructura de álgebra graduada.

Las Proposiciones 2.1.1 y 2.2.1 tienen su análogo para k-formas. La demostración del siguiente resultado es muy parecida a la de la Proposición 2.2.1, por lo que la dejamos como ejercicio.

Proposición 2.3.3

1. *Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. Definimos $F_\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \overset{k)}{\ldots} \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ mediante*

$$[F_\alpha(X_1, \ldots, X_k)](p) = \alpha_p((X_1)_p, \ldots, (X_k)_p),$$

para cada $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, F_α es multilineal y alternado con respecto a la estructura de $C^\infty(M)$-módulo de $\mathfrak{X}(M)$.

2. *Recíprocamente: si $F : \mathfrak{X}(M) \times \overset{k)}{\ldots} \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ es una aplicación multilineal y alternada con respecto a la estructura de $C^\infty(M)$-módulo de $\mathfrak{X}(M)$, entonces definiendo $\alpha : M \to \Lambda^k(M)$ por*

$$\alpha_p(u_1, \ldots, u_k) = [F(X_1, \ldots, X_k)](p)$$

donde $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ cumple $(X_i)_p = v_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$, tenemos que α está bien definida y es una k-forma diferenciable sobre M.

Como consecuencia, podemos interpretar las k-formas diferenciables como operadores $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \overset{k)}{\ldots} \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ multilineales y alternados respecto a la estructura de módulo que posee $\mathfrak{X}(M)$.

Ahora enunciamos la generalización de la Proposición 2.2.2 para k-formas. La única novedad es el apartado 4, que es consecuencia del punto 6 del Teorema 2.3.1.

Lema 2.3.3 *Cada aplicación $\Phi \in C^\infty(M, N)$ induce una aplicación lineal $\Phi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ mediante*

$$[\Phi^*(\alpha)]_p(v_1, \ldots, v_k) = \alpha_{\Phi(p)}\left(d\Phi_p(v_1), \ldots, d\Phi_p(v_k)\right), \ \forall \alpha \in \Omega^k(N),\ v_1, \ldots, v_k \in T_pM,\ p \in M.$$

Además, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\Phi^*(f\alpha) = (f \circ \Phi)\Phi^*\alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega^k(N),\ f \in C^\infty(N)$.
2. *Si $\Psi : N \to P$ es otra aplicación diferenciable, entonces $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$.*
3. $(1_M)^* = 1_{\Omega^k(M)}$.
4. $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi^*(\alpha) \wedge \Phi^*(\beta)$.

2.4. Orientación en variedades.

Como hicimos en la sección anterior, primero desarrollaremos los conceptos en un espacio vectorial, para luego trasladarlos a una variedad vía sus distintos espacios tangentes.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Representemos por $\mathcal{B}$ al conjunto de bases *ordenadas* de V. En dicho conjunto se define una relación de equivalencia R mediante

$$(v_1, \ldots, v_n)\, R\, (w_1, \ldots, w_n) \iff \det A > 0,$$

donde $A = (a_{ij})_{i,j}$ es la matriz de cambio de base entre ambas bases, es decir $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, $i = 1, \ldots, n$ (da igual expresar los vectores w_j en combinación lineal de los v_i que al revés, ya que el cambio de base inverso produce la matriz A^{-1}, que tiene el mismo signo del determinante que $\det A$). Como hay dos posibilidades para el signo de una matriz de cambio de base, el conjunto cociente $\mathcal{B}/R$ tiene dos elementos.

Definición 2.4.1 Una *orientación* en V es un elemento de $\mathcal{B}/R$. Así en cada espacio vectorial real hay dos orientaciones. Si fijamos una orientación $[B] \in \mathcal{B}/R$, a cada base ordenada $B' \in [B]$ se la llama *positivamente orientada respecto a* $[B]$*;* al resto las llamamos *negativamente orientadas.*

Tenemos otra forma de introducir las orientaciones en un espacio vectorial: en $\Lambda^n(V) - \{0\}$ definimos una relación de equivalencia R' mediante

$$\alpha\, R'\, \beta \iff \beta = a\, \alpha, \quad \text{con } a > 0.$$

Como $\dim \Lambda^n(V) = 1$, el conjunto cociente $(\Lambda^n(V) - \{0\})/R'$ tiene también dos elementos. A continuación definimos una biyección entre $\mathcal{B}/R$ y $(\Lambda^n(V) - \{0\})/R'$. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces la Proposición 2.3.1 implica que $v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*$ es una base de $\Lambda^n(V)$ (aquí $\{v_i^*\}_i$ es la base dual de $\{v_i\}_i$), y por tanto $v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^* \in \Lambda^n(V) - \{0\}$. Esto permite definir una aplicación

$$F : \mathcal{B} \to \Lambda^n(V) - \{0\}, \quad F(v_1, \ldots, v_n) = v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*.$$

El comportamiento de F frente a las relaciones de equivalencia R, R' es el siguiente: Dadas $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{B}$, tenemos

$$v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^* = (v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*)(w_1, \ldots, w_n)\, w_1^* \wedge \ldots \wedge w_n^* \overset{\text{Proposición 2.3.2}}{=}$$

$$= (\det A)\, (v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*)(v_1, \ldots, v_n)\, w_1^* \wedge \ldots \wedge w_n^* = (\det A)\, w_1^* \wedge \ldots \wedge w_n^*.$$

siendo $A = (a_{ij})_{i,j}$ la matriz dada por $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$. Esto nos dice que

$$F(v_1, \ldots, v_n)\, R'\, F(w_1, \ldots, w_n) \iff (v_1, \ldots, v_n)\, R\, (w_1, \ldots, w_n).$$

Por tanto, F induce una biyección

$$\widetilde{F} : \mathcal{B}/R \longrightarrow (\Lambda^n(V) - \{0\})/R', \quad \widetilde{F}([(v_1, \ldots, v_n)]) = [v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*].$$

De esta forma, dar una orientación en V equivale a dar una clase de equivalencia en $(\Lambda^n(V) - \{0\})/R'$. Observemos que dada $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{B}$, se tiene $\widetilde{F}([(v_1, \ldots, v_n)]) = [\alpha]$ si y sólo si $\alpha(v_1, \ldots, v_n) > 0$.

Ahora pasamos lo anterior a variedades diferenciables.

Definición 2.4.2 Una variedad diferenciable M de dimensión n se dice *orientable* si existe $\alpha \in \Omega^n(M)$ tal que $\alpha_p \neq 0$ en todo punto p de M.

Si M es orientable y $\alpha \in \Omega^n(M)$ es una n-forma sin ceros, entonces α_p define un elemento de $\Lambda^n(T_pM) - \{0\}$, y en consecuencia una orientación en T_pM, $\forall p \in M$. La diferenciablidad de α puede interpretarse como que esta orientación varía "suavemente" al cambiar el punto $p \in M$.

Sea M^n una variedad orientable y $\mathcal{A} = \{\alpha \in \Omega^n(M) \,/\, \alpha_p \neq 0, \forall p \in M\} \neq \emptyset$. Definimos una relación de equivalencia R en $\mathcal{A}$ mediante

$$\alpha \, R \, \beta \iff \exists f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+) \text{ tal que } \beta = f\alpha.$$

Nótese que dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, siempre existe $f \in C^\infty(M)$ sin ceros tal que $\beta = f\alpha$, luego f sólo puede tener signo constante en M (suponiendo M conexa). Por tanto, hay dos clases de equivalencia en $\mathcal{A}/R$.

Definición 2.4.3 Una *orientación* en una variedad orientable M es una clase de equivalencia en $\mathcal{A}/R$.

A partir de ahora se identificará cada orientación en una variedad orientable con una n-forma sin ceros que la represente. Cada variedad orientable da lugar a dos variedades orientadas.

Ejemplo 2.4.1

1. $\mathbb{R}^n$ es orientable, pues la n-forma $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ no tiene ceros. Haciendo uso de la típica identificación entre vectores tangentes a $\mathbb{R}^n$ con los propios vectores de $\mathbb{R}^n$ (ver el Ejemplo 1.4.1), se tiene que la anterior n-forma viene dada en cada punto por la aplicación multilineal y alternada det:

$$\begin{aligned} \det : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \overset{n}{\cdots} \times C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \det(X_1, \ldots, X_n) &= \det A, \end{aligned}$$

donde $A : \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ viene dada por $X_j(p) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(p) e_i$, siendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

2. Todo abierto de una variedad orientable es orientable.
3. Si una variedad tiene un atlas con dos cartas cuya intersección es conexa, entonces es orientable.
4. $\mathbb{S}^n$ es orientable, por el punto anterior. Pero también podemos dar explícitamente una n-forma global sin ceros sobre la esfera:

   $$\alpha_p(v_1, \ldots, v_n) = \det(p, v_1, \ldots, v_n), \quad \forall v_1, \ldots, v_n \in T_p\mathbb{S}^n = \langle p \rangle^{\perp}, \ \forall p \in \mathbb{S}^n.$$

   A la orientación definida por α le llamaremos la *orientación canonica* en $\mathbb{S}^n$.
5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Entonces, S es orientable si y sólo si existe un campo diferenciable unitario y normal a S (una aplicación de Gauss globalmente definida).

Estudiemos ahora la orientabilidad de $\mathbb{RP}^n$. Como la aplicación antípoda $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es un difeomorfismo de $\mathbb{S}^n$, para cada k con $0 \leq k \leq n$ la aplicación lineal

$$A^* : \Omega^k(\mathbb{S}^n) \to \Omega^k(\mathbb{S}^n)$$

es un isomorfismo. Como $A^2 = 1_{\mathbb{S}^n}$, entonces $(A^*)^2 = 1_{\Omega^k(\mathbb{S}^n)}$. Definiendo

$$\Omega^k_{\pm}(\mathbb{S}^n) = \{\alpha \in \Omega^k(\mathbb{S}^n) \mid A^*(\alpha) = \pm\alpha\},$$

deducimos que $\Omega^k(\mathbb{S}^n) = \Omega^k_+(\mathbb{S}^n) \oplus \Omega^k_-(\mathbb{S}^n)$.

Sea $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ la proyección canónica sobre el espacio proyectivo real. De la igualdad $\pi \circ A = \pi$ deducimos que $\pi^*(\beta) \in \Omega^k_+(\mathbb{S}^n)$ para cada $\beta \in \Omega^k(\mathbb{RP}^n)$. Esto permite considerar la aplicación lineal

$$\pi^* : \Omega^k(\mathbb{RP}^n) \to \Omega^k_+(\mathbb{S}^n).$$

Veamos que π^* es un isomorfismo: si $\alpha \in \Omega^k_+(\mathbb{S}^n)$ entonces α es invariante por la aplicación antípoda, luego α induce una k-forma sobre $\mathbb{RP}^n$. La diferenciabilidad de la k forma inducida por α sobre $\mathbb{RP}^n$ es consecuencia directa de la diferenciabilidad de α y de que π es un difeomorfismo local. Por tanto, π^* es sobreyectiva (valuada en $\Omega^k_+(\mathbb{S}^n)$). Por otro lado, si $\beta \in \ker(\pi^*)$ entonces $\pi^*\beta = 0$ en $\mathbb{S}^n$. Como π es un difeomorfismo local, concluímos que $\beta = 0$ sobre $\mathbb{RP}^n$. Así, π^* es inyectiva y por tanto, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Proposición 2.4.1 *El espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$ es orientable si y sólo si n es impar. En este caso, una orientación sobre $\mathbb{RP}^n$ viene definida por la única n-forma β en $\mathbb{RP}^n$ tal que $\pi^*\beta = \alpha$, siendo $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ la proyección y α la orientación canónica sobre $\mathbb{S}^n$.*

Demostración. Un cálculo directo nos dice que $A^*\alpha = (-1)^{n+1}\alpha$ siendo A la aplicación antípoda y α la orientación canónica sobre $\mathbb{S}^n$. Por otro lado, del desarrollo anterior deducimos que $\mathbb{RP}^n$ es orientable si y sólo si existe $\alpha_1 \in \Omega^n_+(\mathbb{S}^n)$ sin ceros. Así, si n es impar entonces podemos tomar $\alpha_1 = \alpha$ y concluímos que $\mathbb{RP}^n$ es orientable. Recíprocamente, si $\mathbb{RP}^n$ es orientable entonces existe $\alpha_1 \in \Omega^n_+(\mathbb{S}^n)$ sin ceros. Así, $\alpha_1 = \lambda\,\alpha$ para cierta función $\lambda \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ sin ceros, luego con signo constante. Como $\alpha_1 = A^*\alpha_1$, entonces $\lambda\,\alpha = A^*(\lambda\,\alpha) = (\lambda \circ A)A^*\alpha = (\lambda \circ A)(-1)^{n+1}\alpha$. Pasando a orientaciones y usando que λ tiene signo constante, obtenemos $[\alpha] = (-1)^{n+1}[\alpha]$, luego n ha de ser impar. $\square$

Definición 2.4.4 Una *métrica Riemanniana* sobre una variedad M^n es una correspondencia $p \in M \longmapsto g_p \in \mathcal{T}_2(T_pM)$ tal que:

1. g_p es simétrica y definida positiva para todo $p \in M$.
2. $g : M \to \bigcup_{p\in M} \mathcal{T}_p(T_pM)$ es diferenciable en el sentido siguiente: para toda carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ de M, las funciones $g_{ij} = (g|_U)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables, $i, j = 1, \ldots, n$. Nótese que
$$g|_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$$

Al par (M^n, g) se le llamará *variedad Riemanniana.*

Claramente, es suficiente comprobar la propiedad 2 anterior para las cartas de un atlas.

Proposición 2.4.2 *En una variedad Riemanniana orientada (M^n, g) existe una única n-forma dv_g definiendo la orientación dada, tal que $(dv_g)_p(v_1, \ldots, v_n) = 1$ para toda base ordenada, ortonormal y positivamente orientada $(v_1, \ldots, v_n)$ de T_pM y todo $p \in M$. Llamaremos a dv_g la* forma de volumen métrico *de la variedad Riemanniana orientada M.*

Demostración. Definimos $(dv_g)_p$ para un punto $p \in M$ dado, como $(dv_g)_p = v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*$, siendo $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base dual de una base ordenada, ortonormal positiva $(v_1, \ldots, v_n)$ de T_pM. Como el determinante de una matriz ortogonal es ± 1, la fórmula (2.6) nos dice que esta definición no depende de $(v_1, \ldots, v_n)$. La misma fórmula da la unicidad de $(dv_g)_p$ y por tanto la de dv_g. La diferenciabilidad de dv_g se deduce de tomar como $(v_1, \ldots, v_n)$ la evaluación en cada punto $p \in U$ del resultado de aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a una base local de campos para una carta (U, ψ) de M positivamente orientada. $\square$

Es claro que si cambiamos la orientación fijando la métrica, entonces la forma de volumen cambia de signo. Si fijamos la orientación pero cambiamos la métrica, por ejemplo tomando $\widetilde{g} = h\, g$ con $h \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$, entonces la forma de volumen cambia según la expresión
$$dv_{\widetilde{g}} = h^{n/2}\, dv_g.$$

Ejemplo 2.4.2 Para cada matriz ortogonal $A \in O(n)$ sea $l_{A^{-1}} : O(n) \to O(n)$ el difeomorfismo dado por "traslación" (en este caso, multiplicación) a izquierda según A^{-1}, $l_{A^{-1}}(B) = A^{-1}B$. Como $l_{A^{-1}}(A) = I_n$, la diferencial $T_A := (dl_{A^{-1}})_A : T_A O(n) \to T_{I_n} O(n)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. T_A induce un isomorfismo a nivel de espacios de k-formas sobre $T_{I_n} O(n)$,

$$(T_A)^* : \Lambda^k(T_{I_n} O(n)) \longrightarrow \Lambda^k(T_A O(n)).$$

Dada una k-forma $\omega \in \Lambda^k(T_{I_n} O(n))$, la correspondencia

$$A \in O(n) \longmapsto (T_A)^*(\omega) \in \Lambda^k(T_A O(n))$$

define una k-forma diferenciable en $O(n)$. Como consecuencia, $O(n)$ es una variedad orientable (en realidad, todo grupo de Lie es orientable, ver el ejercicio 5).

2.5. Integración de formas sobre variedades orientadas.

Sea M^n una variedad diferenciable orientada y $\omega \in \Omega^n(M)$ una n-forma diferenciable sin ceros representando a la orientación. Una carta $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ con U conexo se dice *compatible con la orientación*[3] si

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = f\omega, \quad \text{con } f > 0.$$

Observemos que esta definición no depende de la n-forma ω que represente a la orientación pero sí del orden de las funciones coordenadas $x_1, \dots, x_n$.

- Cambiando una carta negativamente orientada $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ por $(U, \phi = (-x_1, \dots, x_n))$, podemos siempre construir un atlas numerable de M^n constituido por cartas compatibles con la orientación.

- Si $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ y $(V, \phi = (y_1, \dots, y_n))$ son cartas positivamente orientadas, entonces la ecuación (2.6) implica que la función $\det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} : U \cap V \to \mathbb{R}$ es positiva.

El siguiente objetivo es definir la integral de una n-forma sobre una variedad diferenciable orientada. Antes necesitamos algunos preliminares de integración, entre ellos el concepto de medida nula. Recordemos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice de *medida nula n-dimensional* si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento numerable $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de A por cubos n-dimensionales[4] con $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}(C_i) < \varepsilon$. Una propiedad se dice cierta *casi por doquier* (abreviadamente c.p.d.) en $\mathbb{R}^n$ si la propiedad se verifica en todo punto de $\mathbb{R}^n$ salvo, a lo más, en un conjunto de medida nula.

[3] O también, *positivamente orientada.*

[4] Dados $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ con $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$, llamaremos *cubo n-dimensional* al conjunto $C = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ a_i < x_i < b_i, \ \forall i = 1, \dots, n\}$ (aunque sus aristas no tienen porqué ser todas iguales). El *volumen* (de Lebesgue) de C es $\mathrm{Vol}(C) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) > 0$.

Definición 2.5.1 Un subconjunto A de una variedad diferenciable M^n se dice de *medida nula* en M si para cualquier[5] entorno coordenado (U, ϕ) de M, el conjunto $\phi(U \cap A)$ es de medida nula en $\mathbb{R}^n$. Una propiedad se dice cierta *casi por doquier* (abreviadamente c.p.d.) en M si la propiedad se verifica en todo punto de M salvo, a lo más, en un conjunto de medida nula.

Usando atlas diferenciables con una cantidad numerable de cartas, las propiedades clásicas de conjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$ pueden trasladarse a una variedad diferenciable:

- Si $A \subset M$ es de medida nula en M y $B \subseteq A \Rightarrow B$ es de medida nula en M.
- Si $A_i \subset M$ es de medida nula en M $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es de medida nula en M.
- Si $A \subset M$ es de medida nula en $M \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$.
- *(Criterio de Fubini)* Si $A \subset M^n \times N^m$, entonces son equivalentes:
  - A es de medida nula en $M \times N$.
  - $\forall p \in M$ c.p.d., el conjunto $j_p^{-1}(A)$ es de medida nula en N.
  - $\forall q \in N$ c.p.d., el conjunto $i_q^{-1}(A)$ es de medida nula en M.

  (recordemos que $j_p(q) = (p, q) = i_q(p)$, $\forall (p, q) \in M \times N$).
- Sea $f \in C^1(M^n, N^m)$. Entonces,
  - Si $n = m$ y $A \subset M$ es de medida nula en $M \Rightarrow f(A)$ es de medida nula en N.
  - Si $n < m \Rightarrow f(M)$ es de medida nula en N.

Aunque no lo demostraremos, conviene comentar un resultado, fundamental en Geometría Diferencial, que dice que para una aplicación diferenciable entre variedades, los puntos críticos[6] pueden ser muchos (incluso pueden rellenar la variedad de partida, piénsese en una aplicación constante), pero sus imágenes siempre han de formar un conjunto pequeño en la segunda variedad:

Teorema 2.5.1 (Sard) *Sea $f \in C^\infty(M^n, N^m)$ y $\Sigma_f \subset M$ el conjunto de sus puntos críticos. Entonces, $f(\Sigma_f)$ es de medida nula en N. En particular, el conjunto de valores regulares[7] de f es denso en N.*

---

[5] Como siempre, para que un subconjunto $A \subset M$ sea de medida nula en M basta comprobar esta condición local sólo para entornos coordenados de un atlas diferenciable de M: esto se deduce de que el cambio de cartas es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, y por tanto lleva conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula.

[6] Dada $f \in C^\infty(M^n, N^m)$, un punto $p \in M$ se dice *crítico* para f si $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ no es sobreyectiva.

[7] Un punto $q \in N$ es *valor regular* de $f \in C^\infty(M^n, N^m)$ si $\forall p \in f^{-1}(q)$, df_p es sobreyectiva.

Definición 2.5.2 Sea M^n una variedad diferenciable, con topología asociada $\mathcal{T}$. Llamemos $\mathcal{F} = \{A \subset M \mid A \text{ es de medida nula en } M\}$. Se define la σ-álgebra[8] *de Lebesgue* sobre M, denotada por $\mathcal{A}_M$, como la σ-álgebra generada[9] por $\mathcal{T} \cup \mathcal{F}$. Un conjunto $A \subset M$ se dice *medible* (en el sentido de Lebesgue) cuando $A \in \mathcal{A}_M$.

Si U es un abierto de M, entonces U es también una variedad diferenciable luego tiene su propio concepto de conjunto medible. Por otro lado, los subconjuntos de U también lo son de M, luego en este caso tenemos que un mismo conjunto $A \subset U$ puede ser U-medible y/o M-medible. Inmediatamente surge la pregunta de si estos dos conceptos son compatibles.

Lema 2.5.1 *Sea M^n una variedad diferenciable y U un abierto de M. Llamemos $\mathcal{T}_U$ a la topología inducida de $\mathcal{T}$ sobre U, $\mathcal{F}_U := \{A \subset U \mid A \text{ es de medida nula en } U\}$ y $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}(\mathcal{T}_U \cup \mathcal{F}_U)$ la σ-álgebra de Lebesgue sobre U. Entonces, $\mathcal{A}_U = \{A \cap U \mid A \in \mathcal{A}_M\}$.*

Demostración. Primeramente veamos que $\mathcal{F}_U = \{A \cap U \mid A \in \mathcal{F}\}$: En efecto, si $A \subset U$ tiene medida nula en U, entonces su imagen por cualquier carta de U es de medida nula en $\mathbb{R}^n$. Si tomamos cualquier carta (W, ϕ) de M, entonces $(W \cap U, \phi|_U)$ es una carta de U, luego $(\phi|_U)((W \cap U) \cap A)$ es de medida nula en $\mathbb{R}^n$. Pero $(\phi|_U)((W \cap U) \cap A) = \phi(W \cap A)$ porque $A \subset U$. Como (W, ϕ) es una carta arbitraria de M, deducimos que A es de medida nula en M. Recíprocamente, sean $A \in \mathcal{F}$ y (W, ϕ) una carta de U. Como U es abierto de M, (W, ϕ) también es carta de M, luego $\phi(W \cap (A \cap U))$ es de medida nula en $\mathbb{R}^n$. Como ahora (W, ϕ) es cualquier carta para U, se tiene que $A \cap U$ es de medida nula en U y la igualdad está probada.

Ya podemos probar la igualdad del enunciado, por doble inclusión:

$\boxed{\subseteq}$ Llamemos $\mathcal{A}_M \cap U = \{A \cap U \;/\; A \in \mathcal{A}_M\}$. Es fácil probar que $\mathcal{A}_M \cap U$ es una σ-álgebra en U. Así, para tener la inclusión deseada basta probar que $\mathcal{T}_U \cup \mathcal{F}_U \subset \mathcal{A}_M \cap U$. Para ello, sea $O \in \mathcal{T}_U$. Como U es abierto en M, se tiene que $O \in \mathcal{T} \subset \mathcal{A}_M$ luego por definición es $O = O \cap U \in \mathcal{A}_M \cap U$. Para conjuntos de medida nula es análogo: Tomemos un conjunto de medida nula en U, que por la descripción que acabamos de probar se podrá escribir $A \cap U$ con $A \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_M$, otra vez por definición es $A \cap U \in \mathcal{A}_M \cap U$.

---

[8]Sea X un conjunto arbitrario y $\mathcal{P}(X) = \{A \;/\; A \subseteq X\}$. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice una *σ-álgebra* sobre X si cumple

i) $X \in \mathcal{A}$.

ii) Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

iii) Si $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$.

En tal caso, al par $(X, \mathcal{A})$ se le llama un *espacio medible*. Nótese que si $B \in \mathcal{A}$, entonces $X - B \in \mathcal{A}$, y por tanto $\emptyset \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones numerables.

[9]Dado un conjunto X y una familia de partes $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$, se define la σ-álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ *generada por* $\mathcal{E}$ como la intersección de todas las σ-álgebras en X que contienen a $\mathcal{E}$ (esta intersección vuelve a ser una σ-álgebra sobre X). Equivalentemente, $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ es la menor σ-álgebra en X que contiene a $\mathcal{E}$.

$\boxed{\supseteq}$ Sea $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A}_M \mid A \cap U \in \mathcal{A}_U\}$. Si probamos que $\mathcal{A}_M \subseteq \mathcal{B}$, entonces será $A \cap U \in \mathcal{A}_U$, $\forall A \in \mathcal{A}_M$, que es la inclusión que buscamos. Y para ver que $\mathcal{A}_M \subseteq \mathcal{B}$ basta comprobar que $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra en M y que $\mathcal{T} \cup \mathcal{F} \subset \mathcal{B}$. Lo primero es fácil. En cuanto a lo segundo, sea $O \in \mathcal{T}$. Por definición de topología inducida, es $O \cap U \in \mathcal{T}_U \subset \mathcal{A}_U$, luego $O \in \mathcal{B}$. Para conjuntos de medida nula en M es análogo, usando otra vez la descripción de $\mathcal{F}_U$ del principio de esta demostración. $\square$

Ahora ya podemos resolver la cuestión planteada sobre compatibilidad del concepto de conjunto medible frente a abiertos:

Lema 2.5.2 *Sea M una variedad diferenciable y U un abierto de M. Entonces, un conjunto $A \subseteq U$ es U-medible si y sólo si A es M-medible.*

Demostración. Usaremos la notación de la demostración del Lema anterior.
A es U-medible $\Leftrightarrow$ $A \in \mathcal{A}_U$ $\Leftrightarrow$ $A \in \mathcal{A}_M \cap U$ $\Leftrightarrow$ $A = \widetilde{A} \cap U$ con $\widetilde{A} \in \mathcal{A}_M$. Pero esto equivale a que $A \in \mathcal{A}_M$ porque U es abierto de M, luego M-medible. $\square$

La definición de conjunto medible que hemos hecho es puramente intrínseca. El siguiente paso consiste en caracterizar la medibilidad de conjuntos de M en términos de cartas, porque eso nos permitirá trasladar resultados del espacio euclídeo a M. Necesitamos para ello un resultado previo.

Lema 2.5.3 *Sea $F : M_1^n \to M_2^n$ un difeomorfismo. Entonces, $F(\mathcal{A}_{M_1}) = \mathcal{A}_{M_2}$.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Lema 2.5.4 *Sea M una variedad diferenciable y $A \subset M$. Entonces, A es medible si y sólo si $\forall\,(U, \psi)$ carta para M, el conjunto $\psi(A \cap U)$ es medible en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos que A es medible y sea (U, ψ) carta para M. Como U es abierto, entonces $A \cap U$ es medible en M, y por el Lema 2.5.2 también es medible en U. Aplicando el Lema 2.5.3 al difeomorfismo $\psi : U \to \psi(U)$, concluímos que $\psi(A \cap U)$ es medible en $\psi(U)$, y como éste es un abierto de $\mathbb{R}^n$, otra vez el Lema 2.5.2 asegura que $\psi(A \cap U)$ es medible en $\mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, tomemos un recubrimiento numerable de M por cartas $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. Por hipótesis $\psi_i(A \cap U_i)$ es medible en $\mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.5.2, $\psi_i(A \cap U_i)$ es medible en $\psi_i(U_i)$, luego aplicando el Lema 2.5.3 deducimos que $A \cap U_i$ es medible en U_i y otra vez por el Lema 2.5.2, también es medible en M. Ahora basta escribir $A = A \cap (\cup_{i\in\mathbb{N}} U_i) = \cup_i (A \cap U_i)$, que es unión numerable de conjuntos medible, luego medible. $\square$

Definición 2.5.3 Sea $f : M \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ cualquier aplicación sobre una variedad diferenciable. f se dice *medible* si para todo abierto $O \subset \mathbb{R}$ (respecto de la topología usual), el conjunto $f^{-1}(O)$ es medible en M.

En particular, toda función continua (valuada finita) es medible.

De la misma forma que ocurría con los conjuntos medibles, podemos caracterizar las funciones medibles de una variedad diferenciable en $\overline{\mathbb{R}}$ por medio de cartas:

Lema 2.5.5 *En la situación anterior, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si $\forall\,(U, \psi)$ carta para M, la aplicación $f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible.*

Demostración. Primero notemos que dado cualquier subconjunto $O \subset \mathbb{R}$, se tiene $(f \circ \psi^{-1})^{-1}(O) = \psi(f^{-1}(O) \cap U)$. Ahora la equivalencia del lema se prueba de forma similar a la demostración del Lema 2.5.4, y se deja como ejercicio. $\square$

El siguiente resultado permite trabajar con comodidad en el futuro, cuando tengamos que restringir a un abierto o extender por cero.

Lema 2.5.6 *Sea M una variedad diferenciable y U un abierto de M.*

i) Si $A \subset M$ es M-medible $\Rightarrow$ $A \cap U$ es U-medible.

ii) Si $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible (en M) $\Rightarrow$ $f|_U : U \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible (en U).

iii) Si $\overline{f} : M \to \overline{\mathbb{R}}$ es la extensión por cero de una función $f : U \to \overline{\mathbb{R}}$, entonces f es medible (en U) si y sólo si $\overline{f}$ es medible (en M).

Supongamos adicionalmente que el complemento del abierto U es de medida nula en M.

iv) $A \subset M$ es M-medible si y sólo si $A \cap U$ es U-medible.

v) $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible (en M) si y sólo si $f|_U : U \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible (en U).

Demostración. *i)* y *ii)* se dejan como ejercicios. Para *iii)*, primero nótese que dado $O \subset \mathbb{R}$,

$$\overline{f}^{-1}(O) = \begin{cases} f^{-1}(O) & \text{si } 0 \notin O, \\ f^{-1}(O) \cup (M - U) & \text{si } 0 \in O. \end{cases}$$

A partir de esta observación la propiedad *iii)* es fácil y se deja como ejercicio.

Una implicación de *iv)* es el apartado *i)*, mientras que la implicación contraria se debe esencialmente a que todo conjunto de medida nula es medible. Algo parecido prueba el apartado *v)*. $\square$

En cuanto a las propiedades algebraicas de las funciones medibles, enunciaremos las más básicas:

- Si $f, h : M \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones medibles, entonces también son medibles $af + bh$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (siempre que esta combinación lineal tenga sentido), fh (también cuando tenga sentido), $\text{máx}(f, h), \text{mín}(f, h)$, $f^+ := \text{máx}(f, 0)$, $f^- = -\text{mín}(f, 0)$ (nótese que $f = f^+ - f^-$) y $|f| = f^+ + f^-$.

- Si $\{f_m : M \to \overline{\mathbb{R}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces son medibles el supremo, ínfimo, límite superior y el inferior (recordemos que éstos últimos se definen como $\left(\overline{\text{lím}} f_m\right)(p) = \lim_{m\to+\infty}(\sup_{k\geq m} f_k(p))$, $(\underline{\text{lím}} f_m)(p) = \lim_{m\to+\infty}(\inf_{k\geq m} f_k(p))$, $p \in M$.

Definición 2.5.4 Una n-forma ω sobre una variedad diferenciable M^n se dice *medible* si se escribe localmente $\omega|_U = h\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ con $h : U \to \mathbb{R}$ medible, respecto a cualquier carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ en M. Nótese que $h = (\omega|_U)(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

La definición anterior no depende de la carta, ya que si $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$, $(V, \phi = (y_1, \ldots, y_m))$ son cartas con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces

$$\left(\omega|_{(U\cap V)}\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) = \det\left[\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}\right]\left(\omega|_{(U\cap V)}\right)\left(\tfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial y_n}\right). \tag{2.8}$$

En particular, se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.5.7 *Sea ω una n-forma sobre una variedad diferenciable M^n. Entonces, son equivalentes:*

1. *ω es medible.*
2. *Existe un atlas numerable en M $\{(U_m, \phi_m = (x_1^m, \ldots, x_n^m))\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que las funciónes $h_m = (\omega|_{U_m})(\frac{\partial}{\partial x_1^m}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n^m})$ son medibles, $\forall m \in \mathbb{N}$.*
3. *$\omega(X_1, \ldots, X_n) : M \to \mathbb{R}$ es una función medible, $\forall X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$.*

El último ingrediente para definir la integral de una n-forma sobre una n-variedad diferenciable orientada es el concepto de integral de Lebesgue de una función en $\mathbb{R}^n$, o en un abierto de éste. Recordemos que una función medible $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ se dice *integrable* cuando existe la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx_1 \ldots dx_n := \int_{\mathbb{R}^n} f^+\, dx_1 \ldots dx_n - \int_{\mathbb{R}^n} f^-\, dx_1 \ldots dx_n$$

y ésta es finita. Nótese que cada una de las integrales en el miembro de la derecha existe en $[0, +\infty]$, como límite de integrales de funciones simples no negativas (una función en $\mathbb{R}^n$ se dice *simple* si es combinación lineal finita de funciones características de conjuntos medibles de medida finita), pero la diferencia de números en $[0, +\infty]$ podría no tener sentido de general: el que $f = f^+ - f^-$ sea integrable es exactamente que las integrales de f^+, f^- sean ambas finitas, y por tanto, también equivale a que $|f| = f^+ + f^-$ tenga integral finita. La definición de función integrable se extiende a funciones definidas en un abierto de $\mathbb{R}^n$, tras extender por cero. Conviene mencionar que f podría tomar valores infinitos siendo integrable, aunque eso no ocurrirá en nuestro caso por proceder de una n-forma sobre M.

Ya estamos en condiciones de definir la integral de una n-forma sobre una n-variedad diferenciable *orientada.* Lo haremos en tres etapas.

Definición 2.5.5 (Integral de una n-forma, I) Sea ω una n-forma medible y de soporte[10] compacto en una variedad orientada M^n, tal que soporte$(\omega) \subset U$, siendo $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de M compatible con la orientación. Diremos que ω es *integrable* sobre U (y también sobre M) si $h \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable en el sentido de Lebesgue, siendo $h : U \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\omega|_U = h\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

En tal caso, se define la *integral* de ω por

$$\int_M \omega = \int_U \omega := \int_{\mathbb{R}^n} h \circ \psi^{-1}\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\psi(U)} h \circ \psi^{-1}\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\psi(U)} \left[(\omega|_U)(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}) \circ \psi^{-1} \right] dx_1 \ldots dx_n \in \mathbb{R}.$$

La definición anterior no depende del sistema de coordenadas compatible con la orientación que contenga al soporte de ω: en efecto, sean $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$, $(V, \phi = (y_1, \ldots, y_n))$ cartas de M compatible con la orientación, tales que soporte$(\omega) \subset U \cap V$. Entonces,

$$\int_{\psi(U)} \left[(\omega|_U)(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}) \circ \psi^{-1} \right] dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\psi(U \cap V)} \left[(\omega|_{(U\cap V)})(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}) \circ \psi^{-1} \right] dx_1 \ldots dx_n.$$

Usando la fórmula (2.8), lo anterior es igual a

$$\int_{\psi(U\cap V)} \left[\det \left[\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \right] \left(\omega|_{(U\cap V)} \right) (\tfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial y_n}) \circ \psi^{-1} \right] dx_1 \ldots dx_n,$$

y ahora sólo hay que usar que $\det \left[\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \right]$ es el valor absoluto del Jaocbiano del cambio de variables $\phi \circ \psi^{-1}$ (porque ambas cartas están positivamente orientadas), junto con la fórmula de cambio de variable en integración de Lebesgue.

Las siguientes propiedades son una traslación directa de las correspondientes para funciones e integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

[10] El *soporte* de una n-forma ω sobre una variedad M^n es soporte$(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}$.

Proposición 2.5.1 *Si ω_1 y ω_2 son n-formas integrables para la Definición 2.5.5 y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

1. *$a\,\omega_1 + b\,\omega_2$ también es integrable según la Definición 2.5.5 y*
$$\int_M (a\,\omega_1 + b\,\omega_2) = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2.$$
2. *Si $\omega_1 = \omega_2$ c.p.d. en M, entonces $\int_M \omega_1 = \int_M \omega_2$.*

Definición 2.5.6 (Integral de una n-forma, II) Sea ω una n-forma medible sobre una variedad orientada M^n. Sea $\{(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha))\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un recubrimiento de M por cartas compatibles con la orientación y $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Notemos que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\varphi_i\omega$ es integrable según la Definición 2.5.5. Diremos que ω es *integrable* si la serie
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_M \varphi_i\omega$$
converge absolutamente. En tal caso, definimos
$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varphi_i\omega \in \mathbb{R}.$$

Hacemos algunas observaciones.

- Aunque ω no tenga soporte compacto, la suma $\sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i\omega$ es localmente finita y $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\omega$ en M.
- Si M es compacta o ω tiene soporte compacto, entonces la serie $\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_M \varphi_i\omega$ es una suma finita, luego la condición sobre convergencia absoluta se tiene automáticamente.
- Si ω tiene soporte compacto contenido en un entorno coordenado, entonces la Definición 2.5.6 coincide con la 2.5.5.
- La Definición 2.5.6 es independiente del recubrimiento de M compatible con la orientación y de la partición de la unidad subordinada a dicho recubrimiento: Supongamos que $\{\varphi_j'\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento $\{(V_\beta, \phi_\beta = (y_1^\beta, \ldots, y_n^\beta))\}_\beta$ de M por cartas positivamente orientadas. Entonces, $\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j'\omega$ en M. Cada una de las n formas $\varphi_j'\omega, \varphi_i\varphi_j'\omega$ está en las condiciones de la Definición 2.5.5, luego por linealidad (Proposición 2.5.1) tenemos
$$\int_M \varphi_j'\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varphi_i\varphi_j'\omega.$$

Cambiando los papeles de los recubrimientos y las particiones de la unidad obtenemos

$$\int_M \varphi_i \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M \varphi_i \varphi'_j \omega.$$

Sumando en j la primera expresión y en i la segunda obtenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M \varphi'_j \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varphi_i \varphi'_j \omega, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_M \varphi_i \varphi'_j \omega. \tag{2.9}$$

Ahora, la convergencia absoluta de $\sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varphi_i \omega$ implica que la serie doble

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_M \varphi_i \varphi'_j \omega \right|$$

es convergente y que podemos intercambiar el orden de los sumandos en las series dobles de (2.9), concluyendo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_M \varphi_i \omega = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M \varphi'_j \omega.$$

Definición 2.5.7 (Integral de una n-forma, III) Sea ω una n-forma medible en una variedad orientada M^n y $A \subset M$ un subconjunto medible. Diremos que ω es *integrable sobre* A si $\chi_A \omega$ es integrable, siendo χ_A la función característica de A. En tal caso, definimos

$$\int_A \omega = \int_M \chi_A \omega.$$

Las siguientes propiedades algebraicas de la integral de n-formas son fáciles de probar y se dejan como ejercicio.

Proposición 2.5.2 *Sea M^n una variedad orientada.*

1. *Si ω_1 y ω_2 son n-formas integrables sobre M y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a\,\omega_1 + b\,\omega_2$ es integrable sobre M y $\int_M (a\,\omega_1 + b\,\omega_2) = a \int_M \omega_1 + b \int_M \omega_2$.*

2. *Si ω_1 es integrable en M y $\omega_2 = \omega_1$ c.p.d. en M, entonces ω_2 es integrable sobre M y $\int_M \omega_1 = \int_M \omega_2$.*

3. *Si ω es integrable sobre un subconjunto medible A y $A' \subset M$ coincide con A salvo en un subconjunto de medida nula*[11]*, entonces ω es integrable sobre A' y* $\int_A \omega = \int_{A'} \omega$.
4. *Si ω es integrable sobre un subconjunto medible $A = A_1 \cup A_2$, donde A_1 y A_2 son medibles y $A_1 \cap A_2$ es de medida nula, entonces ω es integrable sobre A_1 y A_2 y* $\int_A \omega = \int_{A_1} \omega + \int_{A_2} \omega$.

A menudo, uno calcula integrales transformándolas en otras más sencillas. La base de estas transformaciones es la fórmula de cambio de variable, que tiene su formulación en nuestro ambiente.

Definición 2.5.8 Sea $F : M^n \to N^n$ un difeomorfismo local entre dos variedades orientadas conexas M y N. Si $\omega \in \Omega^n(M)$ y $\beta \in \Omega^n(N)$ representan las orientaciones respectivas, entonces $F^*\beta = f\omega$ para cierta $f \in C^\infty(M)$ sin ceros, y por tanto de signo constante. Se dice que F *conserva la orientación* si $f > 0$ y que F *invierte la orientación* si $f < 0$. Esta definición es correcta, es decir es independiente de las n-formas que representan a las orientaciones.

Si M (y por tanto N) no es conexa, entonces diremos que un difeomorfismo $F : M \to N$ *conserva (resp. invierte) la orientación* si su restricción a cada componente conexa conserva (resp. invierte) la orientación inducida.

Teorema 2.5.2 (Fórmula del cambio de variable) *Sean M^n y N^n variedades orientadas y $F : M \to N$ un difeomorfismo que conserva la orientación. Si ω es una n-forma integrable sobre N, entonces $F^*\omega$ es integrable sobre M y*

$$\int_M F^*\omega = \int_N \omega.$$

Si F invierte la orientación, entonces $F^*\omega$ también es integrable sobre M, pero

$$\int_M F^*\omega = -\int_N \omega.$$

Demostración. La segunda parte del teorema, cuando F invierte la orientación, es consecuencia directa de la primera. Así que en lo que sigue supondremos que F conserva la orientación. Sea $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una partición de la unidad subordinada a un atlas $\{(U_\alpha, \psi_\alpha = y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha))\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de N por cartas positivamente orientadas. Entonces,

$$\int_N \omega = \sum_{i=1}^\infty \int_N \varphi_i \omega.$$

[11] En particular, A' también es medible.

y la convergencia de la serie anterior es absoluta. Claramente, $\{\varphi_i \circ F\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una partición de la unidad subordinada al atlas $\{(F^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha \circ F = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha))\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de M, y estas cartas están positivamente orientadas (porque F conserva la orientación). Luego todo se reduce a probar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_M (\varphi_i \circ F)F^*\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_N \varphi_i\omega,$$

y que la convergencia de la serie de la izquierda es absoluta. Y ambas cosas son consecuencias de la fórmula

$$\int_M (\varphi_i \circ F)F^*\omega = \int_N \varphi_i\omega, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

Así que probemos (2.10). Fijado $i \in \mathbb{N}$, tenemos $(\varphi_i \circ F)F^*\omega = F^*(\varphi_i\omega)$. Ahora sólo tenemos que usar que $\varphi_i\omega$ tiene soporte compacto contenido en un abierto coordenado $(U, \psi) = (U_{\alpha(i)}, \psi_{\alpha(i)})$, escribir $(\varphi_i\omega)|_U = h\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$ donde $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ y entonces,

$$\int_M (\varphi_i \circ F)F^*\omega = \int_M F^*(\varphi_i\omega) \overset{(A)}{=} \int_{F^{-1}(U)} F^*(\varphi_i\omega)$$

$$\overset{(B)}{=} \int_{(\psi\circ F)((F^{-1}(U))} (h \circ F) \circ (\psi \circ F)^{-1}\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\psi(U)} (h \circ \psi^{-1})\, dx_1 \ldots dx_n = \int_N \varphi_i\omega.$$

donde en (A) hemos usado que $F^*(\varphi_i\omega)$ tiene soporte compacto contenido en $F^{-1}(U)$, en (B) que $F^*(\varphi_i\omega) = F^*(h\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = (h \circ F)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ en $F^{-1}(U)$ y la Definición 2.5.5 de integral. $\square$

Terminaremos este tema con una aplicación práctica de lo anterior, para calcular el volumen de $\mathbb{S}^2(1)$. El *volumen* de una variedad Riemanniana compacta y orientada (M^n, g) se define como

$$\text{Vol}(M, g) = \int_M dv_g,$$

donde dv_g es el elemento de volumen asociado a la métrica y a la orientación. A continuación calcularemos el volumen (área) de $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2(1)$ con su métrica estándar.

Sea $\phi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$, que es un difeomorfismo. Como $\{N\}$ tiene medida nula en $\mathbb{S}^2$,

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2 - \{N\}} dv_g \overset{(\star)}{=} \int_{\mathbb{R}^2} (\phi^{-1})^* dv_g,$$

donde en $(\star)$ hemos usado la fórmula de cambio de variables. Por otro lado, $(\phi^{-1})^* dv_g = \lambda\, dx \wedge dy$, donde

$$\lambda(x, y) = \left[(\phi^{-1})^* dv_g\right] \left(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}\right) = (dv_g)_{\phi^{-1}(x,y)} \left((d\phi^{-1})_{(x,y)}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right), (d\phi^{-1})_{(x,y)}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)\right)$$

$$= \det\left(\phi^{-1}(x,y), (d\phi^{-1})_{(x,y)}(\tfrac{\partial}{\partial x}), (d\phi^{-1})_{(x,y)}(\tfrac{\partial}{\partial y})\right).$$

Usando que $\phi^{-1}(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right)$, un cálculo directo nos lleva a

$$\lambda(x,y) = -\frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$$

En particular, el signo anterior nos dice que ϕ invierte la orientación. Por tanto,

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{R}^2} (\phi^{-1})^* dv_g = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{4r}{(1+r^2)^2} dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{4r}{(1+r^2)^2} dr = 2\pi \left[\frac{-2}{1+r^2}\right]_0^{\infty} = 4\pi.$$

EJERCICIOS.

1. ESTRUCTURA DIFERENCIABLE SOBRE TM.
Sea M^n una variedad diferenciable, TM su fibrado tangente y $\pi : TM \to M$ la proyección canónica, $\pi(v) = p \ \forall v \in T_pM$.

   a) Sea $\mathcal{A}$ un atlas sobre M y $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n)) \in \mathcal{A}$. Definimos la biyección $\widetilde{\psi} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ mediante $\widetilde{\psi}(v) = (\pi(v), (a_1, \ldots, a_n))$, donde $v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\pi(v)}$. Probar que el conjunto

   $$\mathcal{B} = \left\{ \widetilde{\psi}^{-1}(O_1 \times O_2) \mid O_1 \overset{abto.}{\subset} U,\ O_2 \overset{abto.}{\subset} \mathbb{R}^n,\ (U, \psi) \in \mathcal{A} \right\}$$

   es base de una topología Hausdorff sobre TM.

   b) Demostrar que $\forall (U, \psi) \in \mathcal{A}$, la biyección $\widetilde{\psi}$ se convierte en un homeomorfismo del abierto $\pi^{-1}(U)$ en $U \times \mathbb{R}^n$. Probar que la familia $\left\{ \left(\pi^{-1}(U), (\psi \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ \widetilde{\psi} \right) \right\}_{(U,\psi) \in \mathcal{A}}$ define un atlas sobre TM, y por tanto una estructura de variedad diferenciable $2n$-dimensional.

   c) Probar que con la estructura diferenciable anterior sobre TM, la proyección canónica $\pi : TM \to M$ se convierte en una aplicación sobreyectiva, diferenciable y con diferencial sobreyectiva en todo punto (esto es lo que se llama una *submersión*).

2. Sean M, N variedades diferenciables y $\phi \in C^\infty(M, N)$. Supongamos que $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ está ϕ-relacionado con $Y_i \in \mathfrak{X}(N)$, $i = 1, 2$. Probar que $aX_1 + bX_2, [X_1, X_2], (f \circ \phi)X$ están ϕ-relacionados con $aY_1 + bY_2, [Y_1, Y_2], fY$ respectivamente, siendo $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(N)$.

3. CAMPOS EN VARIEDADES PRODUCTO.
Sean M^n, N^m variedades diferenciables. Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$, se define $(X, Y) : M \times N \to T(M \times N)$ mediante

   $$(X, Y)_{(p,q)} = (X_p, Y_q) \in T_pM \times T_qN \equiv T_{(p,q)}(M \times N).$$

   Probar que $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M \times N)$. Sin embargo, no todos los campos de $M \times N$ son de esta forma, de igual forma que no toda función diferenciable $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ en $\mathbb{R}^2$ es de "variables separadas" $(f_1(x), f_2(y))$. Probar que los campos básicos asociados a una carta producto $(U \times V, \psi \times \phi)$ son campos de "variables separadas", es decir, son de la forma (X, Y) para ciertos $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$.

4. Una variedad diferenciable n-dimensional M se dice *paralelizable* si existen $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ que son linealmente independientes en cada punto $p \in M$. Demostrar que toda variedad paralelizable es orientable.

5. Sea $(G, \cdot)$ un grupo de Lie. Dado $g \in G$, denotaremos por $l_g, r_g : G \to G$ a las traslaciones a izquierda y derecha según g, es decir $l_g(x) = g \cdot x$, $r_g(x) = x \cdot g$, $\forall x \in G$.

   a) Se define $\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid (l_g)_* X = X, \forall g \in G\}$.
   Los campos $X \in \mathfrak{g}$ se dicen *invariantes a izquierda*. Demostrar que $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{X}(G)$:
   $$\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ [X, Y] \in \mathfrak{g}.$$
   A $\mathfrak{g}$ se le llama el *álgebra de Lie de* G. Sea e el elemento neutro de G. Probar que la aplicación $H : \mathfrak{g} \to T_eG$ dada por $H(X) = X_e$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y que su inversa es $v \in T_eG \mapsto H^{-1}(v) = X^v$, donde $(X^v)_g = (dl_g)_e(v)$, $\forall g \in G$.

   b) Se define $\mathfrak{g}^* = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid (r_g)_* X = X, \forall g \in G\}$.
   Los campos $X \in \mathfrak{g}^*$ se dicen *invariantes a derecha*. Probar que $\mathfrak{g}^*$ es una subálgebra de $\mathfrak{X}(G)$ y que como espacio vectorial es isomorfo a T_eG mediante $H^* : \mathfrak{g}^* \to T_eG$ dada por $H(X) = X_e$.

   c) Demostrar que $\Psi = (H^*)^{-1} \circ H$ cumple $(\Psi(X))_g = ((r_g \circ l_{g^{-1}})_* X)_g$, $\forall g \in G$. Deducir que Ψ es un isomorfismo de álgebras entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$. Esto justifica que no se estudie $\mathfrak{g}^*$, sino sólo $\mathfrak{g}$.

   d) Probar que si un campo invariante a izquierda tiene un cero, entonces ha de ser idénticamente nulo.

   e) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de T_eG. Para cada $i = 1, \ldots, n$, se considera el campo $X^{v_i} = H^{-1}(v_i) \in \mathfrak{g}$. Demostrar que para cada $g \in G$, $\{X_g^{v_1}, \ldots, X_g^{v_n}\}$ es base de T_gG (todo grupo de Lie es *paralelizable*).

   f) Deducir de lo anterior que todo grupo de Lie es orientable.

6. Probar la fórmula (2.4).

7. Probar que si $f : (M_1, [\omega_1]) \to (M_2, [\omega_2])$ es un difeomorfismo local que conserva la orientación, entonces $f : (M_1, [-\omega_1]) \to (M_2, [-\omega_2])$ también conserva la orientación (por ello, podemos hablar de cuándo un difeomorfismo local de una variedad orientable en sí misma conserva o invierte la orientación, sin prefijar ésta). Demostrar que si $f : M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo local y M_2 es orientable, entonces M_1 es orientable, definiendo orientaciones en M_1, M_2 respecto de las que f conserva la orientación (para pasar la orientabilidad de dominio a codominio, ver el problema siguiente).

8. Sea $\pi : \widetilde{M} \to M$ un recubridor regular. Supongamos que $\widetilde{M}$ es orientable y que todos los automorfismos del recubridor conservan la orientación en $\widetilde{M}$. Demostrar que M es orientable (un ejemplo de esta situación lo encontramos en la esfera $\mathbb{S}^n$ recubriendo al espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$: el grupo de automorfismos de este recubridor está generado por la aplicación antípoda, que conserva la orientación de $\mathbb{S}^n$ si y sólo si n es impar).

9. A veces es necesario pasar de una variedad no orientable a otra que sí lo sea mediante un recubridor. Esto puede hacerse considerando el *recubridor de dos hojas orientable de una variedad no orientable:* Sea M^n una variedad no orientable. Definimos

$$\widetilde{M} = \{(p, [\omega_p]) \mid p \in M,\ \omega_p \in \Lambda^n(T_pM) - \{0\}\},$$

donde $[\omega_p]$ denota la orientación en T_pM asociada a ω_p. Dada una carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ en M, llamamos

$$\widetilde{U} = \left\{(p, [\omega_p]) \in \widetilde{M} \mid p \in U,\ \omega_p\left((\tfrac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\tfrac{\partial}{\partial x_n})_p\right) > 0\right\},$$

$$\widetilde{\phi} : \widetilde{U} \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n,\ \widetilde{\psi}(p, [\omega_p]) = \phi(p).$$

Probar que el conjunto $\{(\widetilde{U}, \widetilde{\psi}) \mid (U, \phi)$ es carta local para $M\}$ define un atlas sobre $\widetilde{M}$ que dota a ésta de estructura de variedad diferenciable n-dimensional, y que $\widetilde{M}$ es orientable. Demostrar que la aplicación $\pi : \widetilde{M} \to M$ dada por $\pi(p, [\omega_p]) = p$ es una proyección recubridora con dos hojas.

10. Sea M una variedad diferenciable, $A \subset M$ y χ_A su función característica. Probar que A es medible si y sólo si χ_A es medible.

11. Probar que el volumen (longitud) de $\mathbb{S}^1(1)$ con su métrica estándar es 2π, y que el volumen de $\mathbb{S}^3(1)$ con su métrica estándar es $2\pi^2$ (indicación: usar el difeomorfismo $\phi(\xi, \phi, \theta) = (\operatorname{sen}\xi \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\xi\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\xi\cos\phi, \cos\xi)$ de $(0, \pi) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$ sobre su imagen en $\mathbb{S}^3(1)$).

Capítulo 3

DIFERENCIACION EXTERIOR. TEOREMA DE STOKES

Sea M^n una variedad diferenciable. En el Capítulo 2 vimos que la diferencial df de una función $f \in C^\infty(M)$ es una 1-forma sobre M. Esto define una aplicación lineal

$$d : C^\infty(M) = \Omega^0(M) \to \Omega^1(M), \ f \mapsto df.$$

Recordemos también que la 1-forma df viene dada por $df(X) = X(f)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, o en una carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$, por $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

El objetivo principal de este capítulo es extender la construcción anterior a formas de grado mayor, que será el ingrediente principal en la construcción en el Capítulo 4 de la cohomología de de Rham de una variedad. También estudiaremos en este capítulo la relación entre diferencial exterior e integración, cuyo mayor exponente es el Teorema de Stokes.

3.1. La diferencial exterior.

Teorema 3.1.1 (Existencia y unicidad de la diferencial exterior) *Sea M^n una variedad diferenciable. Entonces para cada $k = 0, \ldots, n-1$ existe una única aplicación*

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

1. *d es lineal: $d(a\,\alpha + b\,\beta) = a\,d\alpha + b\,d\beta$, $\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ $a, b \in \mathbb{R}$.*

2. *Para $k = 0$, $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ es la diferencial ordinaria de funciones.*

3. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$, $\forall \alpha \in \Omega^k(M)$.

4. $d^2 = 0 : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+2}(M)$.

Explícitamente, la diferencial exterior actúa así:

$$
\begin{aligned}
(d\alpha)(X_0, X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i \Big(\alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \Big) \\
&+ \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$\forall X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 0, \dots, k$, donde $\widehat{X}$ indica la supresión del campo X. Por último, la diferencial exterior se escribe en una carta $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ de la siguiente forma:

$$
(d\alpha)|_U = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \tag{3.2}
$$

donde $\alpha \in \Omega^k(M)$ viene dada localmente por

$$
\alpha|_U = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} f_{i_1 \dots i_k} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.
$$

Demostración. La prueba constará de cuatro pasos:

I. Definimos $d_U : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ en cada carta (U, ψ) de M, y comprobamos las propiedades 1,2,3,4 para $M = U$.

II. Definimos $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ por $(d\alpha)|_U := d_U(\alpha|_U)$, para toda carta (U, ψ) de M, y probamos que d está bien definida y que cumple las propiedades 1,2,3,4.

III. Probamos que d es única cumpliendo 1,2,3,4 en M.

IV. "Probamos" las fórmulas (3.1) y (3.2).

Ahora pasamos a desarrollar cada uno de los puntos anteriores.
I. Sea $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ una carta de M. Recordemos que $\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\}$ es base de $\Omega^k(U)$. Dada $f \in C^\infty(U)$, definimos

$$
d_U(f \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^{k+1}(U),
$$

y ahora extendemos linealmente la definición anterior a $d_U : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$. Las propiedades 1,2 se cumplen por definición de d_U. Por linealidad, la propiedad 3 basta probarla para $\alpha = f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, $\beta = h\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}$. Entonces, $\alpha \wedge \beta = fh\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}$ luego

$$d_U(\alpha \wedge \beta) = (h\, df + f\, dh) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}.$$

Por otro lado,

$$d_U\alpha \wedge \beta = df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge h\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}, \tag{3.3}$$

$$\alpha \wedge d_U\beta = f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dh \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}. \tag{3.4}$$

En (3.3) podemos llevar h al primer lugar sin modificar nada, mientras que en (3.4) llevaremos dh al primer lugar dando k saltos, cada uno de los cuales produce un -1. Así, $d_U(\alpha \wedge \beta) = d_U\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d_U\beta$.

En cuanto a la propiedad 4, por linealidad basta ver que $d_U^2(f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = 0$ $\forall f \in C^\infty(U)$. Pero

$$d_U^2(f\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = d_U(df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \overset{\text{(propiedad 3)}}{=}$$
$$= d_U(df) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} - df \wedge d_U(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}).$$

Reiterando el argumento anterior sobre el segundo sumando, concluímos que basta probar que $d_U(df) = 0$ $\forall f \in C^\infty(U)$. Pero

$$d_U(df) = d_U\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \overset{\text{(propiedad 1)}}{=} \sum_{j=1}^n d_U\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \overset{\text{(def.)}}{=} \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j$$
$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\right) \wedge dx_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0.$$

II. Definimos $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ por $(d\alpha)|_U := d_U(\alpha|_U)$, para toda carta (U, ψ) de M. Para que esta definición sea correcta, hay que probar que si $(U, \psi), (V, \phi)$ son cartas con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $d_U(\alpha|_U) = d_V(\alpha|_V)$ en $U \cap V$. Pero de la definición de d_U se deduce directamente que si $U' \subset U$, entonces

$$[d_U(\alpha|_U)]\,|_{U'} = d_{U'}(\alpha|_{U'}),$$

y aplicando esto dos veces, tenemos

$$[d_U(\alpha|_U)]|_{U\cap V} = d_{U\cap V}(\alpha|_{U\cap V}) = [d_V(\alpha|_V)]|_{U\cap V},$$

luego $d\alpha$ está bien definida, $\forall \alpha \in \Omega^k(M)$. Que $d\alpha$ está en $\Omega^{k+1}(M)$ es evidente. Y d cumple las propiedades $1, 2, 3, 4$ porque se pueden probar punto a punto, y por tanto son consecuencia de las propiedades 1,2,3,4 de d_U.

III. $\widehat{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ otro operador cumpliendo las propiedades 1,2,3,4.

Afirmación 3.1.1 *Sea $U \subset M$ abierto y $\alpha \in \Omega^k(M)$ tales que $\alpha|_U = 0$. Entonces, $(\widehat{d}\alpha)|_U = 0$.*

Demostración de la afirmación. La prueba es análoga a la del primer punto de la demostración de la Proposición 2.2.1: Fijemos $p \in U$ y veamos que $(\widehat{d}\alpha)_p = 0$. Como $\{p\}, M-U$ son cerrados disjuntos de M, el Corolario 1.3.2 asegura que existe $f \in C^\infty(M)$ tal que $f|_{M-U} = 1$ y $f(p) = 0$. Como $\alpha|_U = 0$, tenemos $\alpha = f\,\alpha$ en M (razonar por separado en U y en $M-U$), luego $\widehat{d}\alpha = \widehat{d}(f\,\alpha) = \widehat{d}f \wedge \alpha + f\,\widehat{d}\alpha = df \wedge \alpha + f\,\widehat{d}\alpha$ donde hemos usado las propiedades 3 y 2 para $\widehat{d}$. Evaluando en p y usando que $f(p) = 0$, tenemos $(\widehat{d}\alpha)_p = 0$. Como p es arbitrario en U, concluímos que $(\widehat{d}\alpha)|_U = 0$ y la afirmación está probada.

Veamos ya que $d\alpha = \widehat{d}\alpha$ $\forall \alpha \in \Omega^k(M)$: Fijemos $p \in M$. ¿$(d\alpha)_p = (\widehat{d}\alpha)_p$?
Sea $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta alrededor de p, en la que α se escribe

$$\alpha|_U = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} f_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Sea h una función meseta que vale 1 en un entorno abierto V de p con $V \subset U$ y con el soporte de h compacto contenido en U (el Lema 1.3.2 o el Corolario 1.3.2 dan la existencia de h). Definimos una k forma global $\beta \in \Omega^k(M)$ mediante

$$\beta = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \widetilde{f}_{i_1\ldots i_k}\, d\tilde{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\tilde{x}_{i_k},$$

donde para $g = f_{i_1\ldots i_k}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, la función $\widetilde{g} \in C^\infty(M)$ denota la extensión por cero a M de $(h|_U)g$. Entonces, $\widetilde{g}|_V = g|_V$ luego $\beta|_V = \alpha|_V$. Aplicando la Afirmación anterior a $\alpha - \beta$, tenemos $(\widehat{d}(\alpha - \beta))|_V = 0$. Como $\widehat{d}$ cumple 1,2,3,4, tenemos

$$(\hat{d}\alpha)_p = (\hat{d}\beta)_p = \left(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} df_{i_1\ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right)_p = (d\alpha)_p.$$

IV. La fórmula (3.2) se tiene por construcción de d. En cuanto a (3.1), sólo la probaremos para $k = 0, 1$ (esto explica las comillas cuando enunciábamos este punto IV). La demostración para k general es por inducción, y necesita el lenguaje de derivaciones y antiderivaciones sobre espacios de tensores en una variedad, que no desarrolleramos aquí (ver algunas indicaciones en el ejercicio 1).

Para $k = 0$, la fórmula se reduce a $df(X_0) = (-1)^0 X_0(f)$. Para $k = 1$, por linealidad podemos suponer que $\alpha \in \Omega^1(M)$ se escribe localmente $\alpha|_U = f\,dx_j$, con $f \in C^\infty(U)$ y $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta de M. Entonces,

$$d\alpha(X_0, X_1) = (df \wedge dx_j)(X_0, X_1) = X_0(f)X_1(x_j) - X_1(f)X_0(x_j).$$

Por otro lado, el miembro de la derecha de (3.1) es

$$X_0(\alpha(X_1)) - X_1(\alpha(X_0)) - \alpha([X_0, X_1]) = X_0(f\, dx_j(X_1)) - X_1(f\, dx_j(X_0)) - f\, dx_j([X_0, X_1])$$

$$= X_0(f)X_1(x_j) + fX_0(X_1(x_j)) - X_1(f)X_0(x_j) - fX_1(X_0(x_j)) - fX_0(X_1(x_j)) + fX_1(X_0(x_j))$$

$$= X_0(f)X_1(x_j) - X_1(f)X_0(x_j),$$

y se tiene la fórmula para $k = 1$. $\square$

Sea $\Phi \in C^\infty(M^n, N^m)$. Dada $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$, tenemos $d(\Phi^* f) = d(f \circ \Phi) = \Phi^*(df)$. Si ahora tomamos una carta $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_m))$ de N y $f \in C^\infty(V)$, entonces en $\Phi^{-1}(V)$ se tiene

$$d\, [\Phi^*(f\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k})] = d\, [(f \circ \Phi)\, \Phi^*(dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \Phi^*(dy_{i_k})]$$

$$= d\, [(f \circ \Phi)\, (dy_{i_1} \circ \Phi) \wedge \ldots \wedge (dy_{i_k} \circ \Phi)] = d(f \circ \Phi) \wedge (dy_{i_1} \circ \Phi) \wedge \ldots \wedge (dy_{i_k} \circ \Phi)$$

$$= (df \wedge dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}) \circ \Phi = [(d(f\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k})] \circ \Phi,$$

con lo que la igualdad $d \circ \Phi^* = \Phi^* \circ d$ se ha probado para formas del tipo $f\, dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$, $f \in C^\infty(V)$. Extendiendo por linealidad, la igualdad es cierta en $\Omega^k(V)$ y eso para cualquier carta (V, ψ) de N. Por tanto, también es cierta en $\Omega^k(N)$, con lo que obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1 *Sea $\Phi : M^n \to N^m$ una aplicación diferenciable. Entonces para cada k el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{\Phi^*} & \Omega^k(M) \\ d \downarrow & & d \downarrow \\ \Omega^{k+1}(N) & \xrightarrow{\Phi^*} & \Omega^{k+1}(M) \end{array}$$

3.2. Dominios con borde en una variedad orientada.

Sea M^n una variedad orientada. Un subconjunto $D \subset M$ se dice un *dominio con borde diferenciable* si, para cada $p \in M$, una de las siguientes propiedades se cumple:

1. Existe un entorno abierto de p en M que está contenido en $M - D$ (tales puntos son llamados *exteriores* a D).
2. Existe un entorno abierto de p en M que está contenido en D (tales puntos son llamados *interiores* a D).
3. Existe una carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ de M con $p \in U$ y $\psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\psi(U \cap D) = \psi(U) \cap H^+$, donde $H^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ (son llamados *puntos del borde* de D).

Al conjunto de puntos cumpliendo 3 se le representa por ∂D y se le llama el *borde de* D. Algunos comentarios:

- $\partial D \subset D$.
- El conjunto de puntos que cumplen 1 (resp. 2) es el exterior (resp. interior) topológico de D, en particular ambos conjuntos son abiertos.
- Las tres condiciones anteriores son mutuamente excluyentes.
- D es un subconjunto cerrado de M. Además $D = \text{Int}(D) \cup \partial D$, por lo que ∂D coincide con la frontera topológica de D, que es un cerrado en M. En particular, si M es compacta, ∂D también será compacto.
- Cabe la posibilidad de que $\partial D = \emptyset$, por ejemplo cuando $D = M$.
- La definición anterior tiene sentido incluso cuando $n = 1$, aunque en este caso ∂D es un conjunto de puntos aislados.
- Si $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ es una de las cartas en 3, entonces $\psi(U \cap \partial D) = \psi(U) \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Como $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \equiv \mathbb{R}^{n-1}$, tenemos que la restricción a ∂D de los sistemas de coordenadas descritos en 3 proporciona un atlas en ∂D que lo convierte en una variedad diferenciable de dimensión $n-1$.

A continuación veremos que ∂D es también orientable y fijaremos una orientación en ∂D a partir de la orientación en M. Sea $p \in \partial D$ y $(U, \psi = (x_1, \dots, x_n))$ una carta en las condiciones del punto 3 anterior, esto es $\psi(p) = 0$, $\psi(U \cap D) = \psi(U) \cap H^+$ y $\psi(U \cap \partial D) = \psi(U) \cap \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_n = 0\}$. Por tanto, $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\}$ es una base de T_pM y $\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)_p\}$ es una base de $T_p\partial D$. Esta descripción de los espacios tangentes implica que

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pM - T_p\partial D \ \Leftrightarrow \ a_n \neq 0.$$

En estas condiciones, diremos que *u apunta hacia fuera de D* si $a_n < 0$ y que *apunta hacia dentro de D* si $a_n > 0$. La propiedad de que un vector en $T_pM - T_p\partial D$ apunte hacia fuera o hacia dentro es independiente del sistema de coordenadas en p como el anterior.

No olvidemos que en M hemos fijado una orientación. Una base $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ de $T_p\partial D$ se dirá *positivamente orientada* si $\{u, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ es una base orientada de T_pM, siendo u un vector que apunta hacia fuera (esta orientación de $T_p\partial D$ es independiente de u, ver el Ejercicio 2). Esto orienta todos los espacios tangentes $T_p\partial D$ con $p \in \partial D$.

A continuación orientaremos globalmente ∂D, construyendo una $(n-1)$-forma diferenciable sin ceros sobre ∂D que induzca en cada $T_p\partial D$ la orientación anterior.

Proposición 3.2.1 *Sea D un dominio con borde diferenciable de una variedad orientada M^n. Entonces, existe un entorno abierto W de ∂D y un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(W)$ tales que $X|_{\partial D}$ apunta hacia fuera en todos los puntos de ∂D. Además, si $\omega \in \Omega^n(M)$ representa la orientación de M, entonces la $(n-1)$-forma sobre W dada por*

$$\widehat{\omega}(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{n-1}), \quad X_1, \ldots, X_{n-1} \in \mathfrak{X}(W) \tag{3.5}$$

define, al restringirla a ∂D, una $(n-1)$-forma diferenciable sin ceros sobre ∂D que induce en cada punto $p \in \partial D$ la orientación definida anteriormente.

Demostración. Para cada $p \in \partial D$ tomemos una carta $(U_p, \psi_p = (x_1, \ldots, x_n))$ en las condiciones del punto 3 anterior. Entonces, el campo $X_{U_p} := -\frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathfrak{X}(U_p)$ apunta hacia fuera de D en cada $q \in U \cap \partial D$. Además, $\{U_p\}_{p \in \partial D}$ es un recubrimiento por abiertos del abierto $W := \bigcup_{p \in \partial D} U_p$. Sea $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una partición de la unidad de W, subordinada a dicho recubrimiento. Cada función φ_i tiene asociado un abierto $U_i = U_{p(i)}$ tal que soporte$(\varphi_i) \subset U_i$, y claramente $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es también un recubrimiento por abiertos de W. Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos el campo $X_{U_i} \in \mathfrak{X}(U_i)$ definido arriba, y sea

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i X_{U_i}.$$

Como la suma anterior es localmente finita, define un campo diferenciable de vectores sobre W. Además, X apunta hacia fuera en cada $p \in \partial D$ porque las φ_i son no negativas y suman 1. Por último, la $(n-1)$-forma $\widehat{\omega}$ sobre W definida por (3.5) es diferenciable por serlo X y ω. Dados $p \in \partial D$ y una base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de $T_p\partial D$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}_p(v_1, \ldots, v_{n-1}) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \omega_p(X_p, v_1, \ldots, v_{n-1}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \{X_p, v_1, \ldots, v_{n-1}\} \text{ es base positivamente orientada de } T_pM \\
&\Leftrightarrow \quad \{v_1, \ldots, v_{n-1}\} \text{ es base positivamente orientada de } T_p\partial D,
\end{aligned}$$

luego la proposición está probada. □

3.3. El teorema de Stokes.

Teorema 3.3.1 (Stokes, I) *Sea M^n una variedad diferenciable, orientada y $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ con soporte compacto. Entonces,*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Demostración. Como $d\omega \in \Omega^n(M)$ tiene soporte compacto (por la Afirmación 3.1.1 aplicada a $\widehat{d} = d$), $d\omega$ es integrable en M. Sea $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento por entornos coordenados de M y $\{\varphi_i\}_i$ una partición de la unidad subordinada a dicho recubrimiento. Como $\{\varphi_i\}_i$ es una familia localmente finita, el soporte de ω (que es compacto) sólo cortará a una cantidad finita de soportes de las φ_i, a las que denotamos por $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Así, $\omega = \sum_{i=1}^k \varphi_i \omega$ en M y

$$\int_M d\omega = \int_M d(\sum_{i=1}^k \varphi_i \omega) = \sum_{i=1}^k \int_M d(\varphi_i \omega).$$

Por tanto, podemos suponer que ω tiene soporte compacto contenido en un entorno coordenado U, donde tenemos definida una carta $\psi = (x_1, \ldots, x_n)$ compatible con la orientación de M. Escribiendo ω localmente como $\omega|_U = \sum_{j=1}^n f_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$ con $f_j \in C^\infty(U)$, tenemos

$$(d\omega)|_U = \sum_{j=1}^n df_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Por tanto,

$$\int_M d\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_U \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\psi(U)} \frac{\partial (f_j \circ \psi^{-1})}{\partial r_j} \, dr_1 \ldots dr_n,$$

donde $r_1, \ldots, r_n$ denotan las coordenadas en el euclídeo. Teniendo en cuenta que cada función $f_j \circ \psi^{-1}$ tiene soporte compacto contenido en $\psi(U)$, basta extender por cero dicha función a un n-cubo $[A, B]^n \subset \mathbb{R}^n$ que contenga a $\psi(U)$ y aplicar el Teorema de Fubini para concluir que la última integral se anula. □

Teorema 3.3.2 (Stokes, II) *Sea M^n una variedad diferenciable, orientada, $D \subset M$ un dominio con borde diferenciable y $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ con soporte compacto. Entonces,*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} i^* \omega, \tag{3.6}$$

donde en ∂D se considera la orientación inducida e $i : \partial D \hookrightarrow M$ es la inclusión.

Demostración. Primero notemos que como ω tiene soporte compacto, también lo tienen $d\omega, i^*\omega$, y por tanto ambas son integrables. Sea $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento por entornos coordenados de M, todos compatibles con la orientación de ésta, y $\{\varphi_i\}_i$ una partición de la unidad subordinada a dicho recubrimiento. No perdemos generalidad suponiendo que

- $\psi_i(U_i)$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

- Cada carta (U_i, ψ_i) está en una de los dos siguientes casos:

    1. $U_i \cap \partial D = \emptyset$, o bien
    2. $U_i \cap \partial D \neq \emptyset$, y en tal caso (U_i, ψ_i) es una carta de tipo 3 para la definición de dominio con borde diferenciable.

Como el soporte de ω es compacto y la familia $\{\varphi_i\}_i$ es localmente finita, soporte(ω) sólo corta a una cantidad finita de soportes de las φ_i, a las que denotamos por $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Así, $\omega = \sum_{i=1}^k \varphi_i \omega$ en M y

$$\int_D d\omega = \sum_{i=1}^k \int_D d(\varphi_i \omega), \qquad \int_{\partial D} i^*\omega = \sum_{i=1}^k \int_{\partial D} i^*(\varphi_i \omega).$$

Por tanto, podemos suponer que ω tiene soporte compacto contenido en un entorno coordenado U, donde tenemos definida una carta $\psi = (x_1, \ldots, x_n)$ compatible con la orientación de M y cumpliendo 1 ó 2, y queremos probar (3.6). Discutimos según esos dos casos para la carta.

Supongamos que $U \cap \partial D = \emptyset$. Entonces, $i^*\omega = 0$ en ∂D y debemos ver que $\int_D d\omega = 0$. Esto es evidente si $U \cap D = \emptyset$ porque soporte$(d\omega) \subset$ soporte$(\omega) \subset U$. En otro caso, $U \subset \mathrm{Int}(D)$ luego

$$\int_D d\omega = \int_U d\omega = \int_M d\omega,$$

que se anula por la versión I del teorema de Stokes.

Supongamos que $U \cap \partial D \neq \emptyset$. Entonces, $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta del tipo 3 para la definición de dominio con borde diferenciable. Escribiendo ω en esta carta, tenemos $\omega|_U = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$ con $f_j \in C^\infty(U)$ (hemos incluído el factor $(-1)^{j-1}$ por conveniencia para lo que sigue). Así,

$$(d\omega)|_U = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

y

$$(i^*\omega)|_{U\cap \partial D} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (f_j \circ i) \, i^*dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{i^*dx_j} \wedge \ldots \wedge i^*dx_n$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (f_j \circ i) \, d(x_1 \circ i) \wedge \ldots \wedge \widehat{d(x_j \circ i)} \wedge \ldots \wedge d(x_n \circ i))$$

$$= (-1)^{n-1} (f_n \circ i) \, d(x_1 \circ i) \wedge \ldots \wedge d(x_{n-1} \circ i),$$

donde en la última igualdad hemos usado que $x_n \circ i \colon U \cap \partial D \to \mathbb{R}$ es constante (cero), luego $d(x_n \circ i) = 0$ en $U \cap \partial D$.

Ahora notemos que $(U \cap \partial D, \phi = \psi|_{U \cap \partial D} \equiv (x_1 \circ i, \ldots, x_{n-1} \circ i))$ es una carta de ∂D (estamos identificando $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ con $\mathbb{R}^{n-1}$), pero no siempre es compatible con la orientación de ∂D como borde de D: como $X = -\frac{\partial}{\partial x_n}$ apunta hacia fuera de D y (U, ψ) es compatible con la orientación de M, por definición de orientación inducida al borde se tiene que $(U \cap \partial D, \phi)$ es compatible con la orientación de ∂D si y sólo si $(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(X, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}) > 0$. Pero

$$(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(X, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}) = -(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$$

$$= (-1)^n (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = (-1)^n,$$

Luego $(U \cap \partial D, \phi)$ es compatible con la orientación de ∂D si y sólo si n es par. Como $i^*\omega$ tiene soporte compacto contenido en $U \cap \partial D$, por de integral se tiene

$$\int_{\partial D} i^*\omega = (-1)^n \int_{\phi(U \cap \partial D)} (-1)^{n-1} (f_n \circ i \circ \phi^{-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}$$

$$= -\int_{\phi(U \cap \partial D)} (f_n \circ i \circ \phi^{-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (f_n \circ \psi^{-1})(r_1, \ldots, r_{n-1}, 0)\, dr_1 \ldots dr_{n-1},$$

donde hemos extendido por cero a todo $\mathbb{R}^{n-1}$ el integrando en la última integral.

Por otro lado, como $d\omega$ tiene soporte compacto contenido en U, de su expresión local en la carta orientada positivamente (U, ψ) obtenemos

$$\int_D d\omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{\psi(D)} \frac{\partial (f_j \circ \psi^{-1})}{\partial r_j}\, dr_1 \ldots dr_n,$$

donde $r_1, \ldots, r_n$ denotan las coordenadas en el euclídeo. Teniendo en cuenta que cada función $\frac{\partial (f_j \circ \psi^{-1})}{\partial r_j}$ tiene soporte compacto contenido en $\psi(U)$ y que estamos integrando en $\psi(D) \subset H^+$, extenderemos por cero $\frac{\partial (f_j \circ \psi^{-1})}{\partial r_j}$ a un n-cubo $[A, B]^n \subset \mathbb{R}^n$ que contenga a $\psi(U)$ e integraremos $\chi_{H^+} \frac{\partial (f_j \circ \psi^{-1})}{\partial r_j}$ sobre $[A, B]^n$ (aquí χ_{H^+} denota la función característica de H^+). Aplicando el Teorema de Fubini concluímos que

$$\int_{\psi(D)} \frac{\partial (f_j \circ \psi^{-1})}{\partial r_j}\, dr_1 \ldots dr_n = \int_{[A,B]^n} \chi_{H^+} \frac{\partial (f_j \circ \psi^{-1})}{\partial r_j}\, dr_1 \ldots dr_n = 0 \quad \text{si } j \neq n,$$

luego

$$
\begin{aligned}
\int_D d\omega &= \int_{[A,B]^n} \chi_{H^+} \frac{\partial(f_n \circ \psi^{-1})}{\partial r_n}\, dr_1 \dots dr_n \\
&= \int_{[A,B]^{n-1}} \left(\int_A^B \chi_{H^+} \frac{\partial(f_n \circ \psi^{-1})}{\partial r_n} dr_n \right) dr_1 \dots dr_{n-1} \\
&= \int_{[A,B]^{n-1}} \left[(f_n \circ \psi^{-1})(r_1, \dots, r_{n-1}, B) - (f_n \circ \psi^{-1})(r_1, \dots, r_{n-1}, 0) \right] dr_1 \dots dr_{n-1} \\
&= -\int_{[A,B]^{n-1}} (f_n \circ \psi^{-1})(r_1, \dots, r_{n-1}, 0)\, dr_1 \dots dr_{n-1},
\end{aligned}
$$

lo que termina de probar el teorema. $\square$

Terminaremos el capítulo con algunas consecuencias del Teorema de Stokes.

Teorema 3.3.3 (Fórmula de Green) *Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio compacto y conexo, cuyo borde ∂D es diferenciable y consiste en una unión finita de curvas de Jordan, parametrizadas con la orientación inducida mediante $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \partial D$, $i = 1, \dots, k$. Si $P, Q \in C^\infty(A)$ son funciones diferenciables en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ que contenga a D, entonces*

$$
\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} \left[P_i(t) x_i'(t) + Q_i(t) y_i'(t) \right] dt,
$$

siendo $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$, $P_i(t) = P(\gamma_i(t))$ y $Q_i(t) = Q(\gamma_i(t))$.

Demostración. Basa aplicar el Teorema de Stokes a la 1-forma $\omega = P\, dx + Q\, dy \in \Omega^1(A)$ y al dominio D. $\square$

Corolario 3.3.1 *Sea Ω el dominio interior a una curva de Jordan $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, dotada de la orientación inducida como borde de Ω. Entonces,*

$$
\mathrm{Area}\,(\Omega) = \frac{1}{2} \int_a^b \det\{\gamma, \gamma'\}\, dt.
$$

Demostración. Aplicar la fórmula de Green con $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$. $\square$

Corolario 3.3.2 (Fórmula integral de Cauchy) *Sea F una función holomorfa en un abierto simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$. Dado un punto $z_0 \in U$ y una curva de Jordan $\gamma \subset U$ que rodee a z_0 en el sentido contrario a las agujas del reloj, se tiene*

$$
\int_\gamma \frac{F(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i F(z_0).
$$

Demostración. Primero veamos que si f es una función holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $D \subset \Omega$ es un dominio con frontera diferenciable, entonces $\int_{\partial D} f(z)\, dz = 0$: en efecto, si $f = u + iv$ es la descomposición en parte real e imaginaria para f, tenemos

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = \int_{\partial D} (u + iv)\, d(x + iy) = \int_{\partial D} (u\, dx - v\, dy) + i \int_{\partial D} (v\, dx + u\, dy).$$

Por el Teorema de Stokes, lo anterior es igual a

$$\int_D d(u\, dx - v\, dy) + i \int_D d(v\, dx + u\, dy) = -\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Como f es holomorfa, u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego los integrandos anteriores se anulan en Ω.

Probamos ya la fórmula integral de Cauchy, aplicando lo anterior: Sea $\Omega = U - \{z_0\}$ y $f(z) = \frac{F(z)}{z - z_0}$, holomorfa en Ω. Tomamos el dominio con frontera diferenciable $D_\varepsilon = \overline{\Omega_\gamma} - D(z_0, \varepsilon) \subset \Omega$, donde Ω_γ es el dominio interior a γ y $D(z_0, \varepsilon)$ es el disco abierto centrado en z_0 de radio ε. Entonces,

$$0 = \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz = \int_\gamma \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz + \int_{\{|z - z_0| = \varepsilon\}} \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz, \tag{3.7}$$

donde la orientación a lo largo de $\{|z - z_0| = \varepsilon\}$ es la de las agujas del reloj (porque es la orientación sobre γ es contraria a las agujas del reloj, y $\{|z - z_0| = \varepsilon\} \cup \gamma$ tiene la orientación inducida como borde de D_ε). Calculamos esta última integral, usando la parametrización $\alpha(\theta) = z_0 + \varepsilon e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\int_{\{|z - z_0| = \varepsilon\}} \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz = -i \int_0^{2\pi} \frac{F(z_0 + \varepsilon e^{-i\theta})}{\varepsilon e^{-i\theta}} \varepsilon e^{-i\theta}\, d\theta = -i \int_0^{2\pi} F(z_0 + \varepsilon e^{-i\theta})\, d\theta.$$

De (3.7) deducimos que $\int_{\{|z - z_0| = \varepsilon\}} \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz$ no depende de ε. Tomando $\varepsilon \to 0$, la última igualdad implica que $\int_{\{|z - z_0| = \varepsilon\}} \frac{F(z)}{z - z_0}\, dz = -2\pi i F(z_0)$, y la fórmula integral de Cauchy está probada. □

Recordemos de la Proposición 2.4.2 que habíamos definido la forma de volumen métrico de una variedad Riemanniana orientada (M^n, g) como la única n-forma $dv_g \in \Omega^n(M)$ definiendo la orientación dada y tal que $(dv_g)_p(v_1, \ldots, v_n) = 1$ para toda base ordenada, ortonormal y positivamente orientada $(v_1, \ldots, v_n)$ de T_pM y todo $p \in M$. Si $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta compatible con la orientación de M, veamos que

$$dv_g = \sqrt{G}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \quad \text{en } U, \tag{3.8}$$

donde $G = \det\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)_{i,j}$. En efecto, como $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ es una base local de n-formas en U, tenemos

$$dv_g = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \tag{3.9}$$

con $f \in C^\infty(U)$. Además $f > 0$ en U ya que $dv_g, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ representan la orientación de M. Tomemos una base ordenada g-ortonormal de campos $(E_1, \ldots, E_n)$ sobre U (obtenidos, por ejemplo, mediante el proceso de Gram-Schmidt aplicado sobre $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$). Tras un posible cambio de signo en E_1, podemos suponer que $(E_1, \ldots, E_n)$ produce una base positivamente orientada en cada punto de U. Sean $\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i$ las ecuaciones del cambio de base, $j = 1, \ldots, n$. Así,

$$f = dv_g(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) \overset{(\star)}{=} \det(a_{ij})_{i,j} dv_g(E_1, \ldots, E_n) = \det(a_{ij})_{i,j},$$

donde en $(\star)$ hemos usado la Proposición 2.3.2. Por otro lado,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = g\left(\sum_k a_{ki} E_k, \sum_h a_{hj} E_h\right) = \sum_{k,h} a_{ki} a_{hj} \delta_{kh} = \sum_k a_{ki} a_{kj},$$

donde δ_{ij} es el Delta de Kronecker. Llamando $A = (a_{ij})_{i,j}$ a la matriz de cambio de base, lo anterior se escribe matricialmente $\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)_{i,j} = A^t \cdot A$, luego tomando determinantes y extrayendo la raíz cuadrada positiva obtenemos $\sqrt{G} = |\det A| = \det A$, siendo esta última igualdad cierta porque $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ y $(E_1, \ldots, E_n)$ inducen la misma orientación sobre U. Ahora sólo tenemos que sustituir en (3.9) para obtener (3.8).

Definición 3.3.1 Dada una variedad Riemanniana (M^n, g) y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define la *divergencia* de X como la función $\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M)$ que cumple la igualdad

$$d\left(i(X) dv_g\right) = \mathrm{div}(X)\, dv_g. \tag{3.10}$$

donde $i(X)$ es el producto interior definido en el ejercicio 1.

Nótese que en la definición anterior no hemos supuesto M orientable, pero aparece el elemento de volumen métrico orientado dv_g. Sin embargo, el que aparezca a ambos lados de la igualdad hace que, si M es orientable, entonces $\mathrm{div}(X)$ no dependa de la orientación. Y si M no es orientable, podemos definir $\mathrm{div}(X)$ localmente y por lo anterior, estará globalmente definida.

Necesitaremos la expresión de la divergencia en coordenadas locales. De nuevo supondremos que la variedad está orientada, aunque lo que sigue es puramente local y la expresión final no dependerá de la orientación elegida. Tomemos una carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$

compatible con la orientación de M. Como $i(X)dv_g$ es una $(n-1)$-forma, se escribirá

$$(i(X)dv_g)|_U = \sum_{j=1}^{n} f_j\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

para ciertas funciones $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(U)$ que pueden calcularse mediante

$$f_h = (i(X)dv_g)\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \widehat{\tfrac{\partial}{\partial x_h}}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) = dv_g\left(X, \tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \widehat{\tfrac{\partial}{\partial x_h}}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Si ahora escribimos $X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $a_i \in C^\infty(U)$, lo anterior nos dice que

$$f_h = \sum_{i=1}^{n} a_i\, dv_g\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \widehat{\tfrac{\partial}{\partial x_h}}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) = a_h\, dv_g\left(\tfrac{\partial}{\partial x_h}, \tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \widehat{\tfrac{\partial}{\partial x_h}}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$= (-1)^{h-1} a_h\, dv_g\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_h}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_n}\right) = (-1)^{h-1} a_h \sqrt{G},$$

donde en la última igualdad hemos usado la fórmula (3.8), válida ya que (U, ψ) es compatible con la orientación. Por tanto,

$$\operatorname{div}(X)\, dv_g = d\left(i(X)dv_g\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_h} dx_h \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n\right)$$

$$= \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n = \sum_j (-1)^{j-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_j \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j \sqrt{G})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \stackrel{(3.8)}{=} \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j\sqrt{G})\, dv_g,$$

de donde deducimos la fórmula deseada:

$$(\operatorname{div}(X))|_U = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j \sqrt{G}) \qquad \text{si } X|_U = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.11}$$

Como caso particular de (3.11), conviene destacar que en $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, la divergencia de un campo adopta la forma clásica de la Física y el Análisis: $\operatorname{div}(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$ si $X = (a_1, \ldots, a_n)$.

Teorema 3.3.4 (Teorema de la divergencia) *Sea (M^n, g) una variedad Riemanniana orientada, $D \subseteq M$ un dominio con borde diferenciable y $N : \partial D \to TM$ un campo normal* *unitario exterior*[1] *a D a lo largo de ∂D. Dado un abierto $O \subseteq M$ conteniendo a D y un campo $X \in \mathfrak{X}(O)$ con soporte compacto, se tiene*

$$\int_D \mathrm{div}(X)\, dv_g = \int_{\partial D} g(X,N)\, dv_{(g|_{\partial D})},$$

donde $dv_g, dv_{(g|_{\partial D})}$ son los elementos de volumen métrico orientado para (M,g) y $(\partial D, g|_{\partial D})$, donde en ∂D se considera la orientación inducida como borde de D.

Demostración.

$$\int_D \mathrm{div}(X)\, dv_g \overset{(3.10)}{=} \int_D d\left(i(X)dv_g\right) \overset{(\star)}{=} \int_{\partial D} i(X)dv_g,$$

donde en $(\star)$ hemos aplicado el Teorema de Stokes a la $(n-1)$-forma $\omega = i(X)dv_g$ (que tiene soporte compacto por tenerlo X). Falta entonces probar que $i(X)dv_g = g(X,N)\, dv_{(g|_{\partial D})}$ en ∂D (en la primera $(n-1)$-forma se sobreentiende el pullback vía la inclusión de ∂D en M).

Sea $(V_2,\ldots,V_n)$ una base local ortonormal del espacio tangente a ∂D, positivamente orientada. Como N es el campo normal unitario exterior a D a lo largo de ∂D, la base ordenada $(N, V_2, \ldots, V_n)$ es g-ortonormal y compatible con la orientación de M. Tras descomponer $X = g(X,N)N + \sum_{j=2}^n g(X,V_j)V_j$, tenemos

$$\begin{aligned}(i(X)dv_g)(V_2,\ldots,V_n) &= dv_g(X,V_2,\ldots,V_n) = dv_g\left(g(X,N)N, V_2,\ldots,V_n\right)\\ &= g(X,N)\, dv_g(N,V_2,\ldots,V_n) = g(X,N) = \left[g(X,N)dv_{(g|_{\partial D})}\right](V_2,\ldots,V_n),\end{aligned}$$

y el Teorema está demostrado. □

3.4. Campos y formas en abiertos de $\mathbb{R}^3$.

En esta sección particularizaremos mucho de lo aprendido sobre el álgebra de campos y formas sobre una variedad M, al ambiente en que surgieron estos conceptos: cuando M sea un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$. Denotaremos por x, y, z a las coordenadas habietuales en $\mathbb{R}^3$.

Sea $X \in \mathfrak{X}(U) \equiv C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$. Así, $X = (X^1, X^2, X^3)$ con $X^i : U \to \mathbb{R}$ diferenciable. Podemos asociar canónicamente una 1-forma al campo X:

$$\begin{array}{rcl} \omega_X : U & \to & \Lambda^1(U) \\ p & \mapsto & (\omega_X)_p : T_pU \equiv \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ & & \qquad\quad v \quad\;\; \mapsto (\omega_X)_p(v) = \langle X_p, v\rangle. \end{array}$$

[1] Esto es, $N_p \in T_pM$ es un vector ortogonal a $T_p\partial D$ y de norma uno respecto de g_p que apunta hacia fuera, $\forall p \in \partial D$.

Escribiendo ω_X en coordenadas respecto a la base natural $\{dx, dy, dz\}$ de $\Omega^1(U)$ obtenemos

$$\omega_X = X^1\,dx + X^2\,dy + X^3\,dz,$$

de donde deducimos que ω_X es diferenciable. Claramente, la asociación $X \mapsto \omega_X$ es biyectiva. Por ejemplo, la diferencial y el gradiente de una función están relacionados mediante

$$df = \omega_{\nabla f}.$$

También podemos asociar de forma canónica una 2-forma[2] a X:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_X : U & \to & \Lambda^2(U) \\ p & \mapsto & (\alpha_X)_p : T_pU \times T_pU \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ & & \qquad (v,w) \qquad\qquad \mapsto (\alpha_X)_p(v,w) = \det(X_p, v, w). \end{array}$$

Si escribimos α_X en combinación lineal de la base $\{dx\wedge dy, dx\wedge dz, dy\wedge dz\}$ obtendremos

$$\alpha_X = X^3\,dx\wedge dy - X^2\,dx\wedge dz + X^1\,dy\wedge dz,$$

luego también α_X es diferenciable y la asociación $X \mapsto \alpha_X$ es biyectiva. Nótese que

$$\alpha_X = i(X)\,(dx\wedge dy\wedge dz), \tag{3.12}$$

donde $i(X)$ denota producto interior.

Dado $X \in \mathfrak{X}(U)$, tenemos $d\omega_X \in \Omega^2(U)$, luego existe un único $Y \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $d\omega_X = \alpha_Y$. A este campo Y lo llamamos el *rotacional* de X, denotado por $\mathrm{rot}(X)$:

$$d\omega_X = \alpha_{\mathrm{rot}(X)}.$$

Si calculamos explícitamente el rotacional de $X = (X^1, X^2, X^3)$ obtendremos

$$\mathrm{rot}(X) = \left(\frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z}, \frac{\partial X^1}{\partial z} - \frac{\partial X^3}{\partial x}, \frac{\partial X^1}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial x}\right) \in \mathfrak{X}(U).$$

El hecho de que exista una 3-forma global sin ceros en U hace que tengamos una correspondencia biunívoca entre funciones diferenciables y 3-formas diferenciales en U: Dada $f \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$, sea

$$\eta_f = f\,dx\wedge dy\wedge dz \in \Omega^3(U). \tag{3.13}$$

De nuevo $f \mapsto \eta_f$ es una biyección.

[2]La asociación $X \in \mathfrak{X}(U) \mapsto \omega \in \Omega^1(U)$ puede generalizarse a cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$, incluso a cualquier variedad Riemanniana; pero al asociar a X la 2-forma α_X estamos usando que la dimensión del euclídeo donde trabajamos es 3; si $U \subset \mathbb{R}^n$, entonces podemos asociar a $X \in \mathfrak{X}(U)$ una $(n-1)$-forma $\alpha_X \in \Omega^{n-1}(U)$ mediante un procedimiento análogo.

Recordemos que la divergencia de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ respecto a una métrica Riemanniana g se definió como la función $\text{div}(X) \in C^\infty(M)$ dada por la igualdad $\text{div}(X)\, dv_g = d(i(X)\, dv_g)$, donde dv_g es el elemento de volumen métrico asociado a g y a una orientación (local). En nuestro contexto actual $M = U \subset \mathbb{R}^3$ y $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ (producto escalar usual) tenemos $dv_g = dx \wedge dy \wedge dz$ luego la ecuación (3.12) implica

$$d\alpha_X = d\,(i(X)(dx \wedge dy \wedge dz)) = d(i(X)dv_g) = \text{div}(X)\, dv_g = \eta_{\text{div}(X)}.$$

En coordenadas, se tiene la fórmula clásica

$$\text{div}(X) = \frac{\partial X^1}{\partial x} + \frac{\partial X^2}{\partial y} + \frac{\partial X^3}{\partial z} \qquad \text{si } X = (X^1, X^2, X^3).$$

Por otro lado, la igualdad $d \circ d = 0$ aplicada a 0-formas y a 1-formas (para 2-formas no dice nada) se escribe:

$$\forall f \in C^\infty(U),\ 0 = d(df) = d(\omega_{\nabla f}) = \alpha_{\text{rot}(\nabla f)} \ \Rightarrow \text{rot}(\nabla f) = 0. \tag{3.14}$$

$$\forall X \in \mathfrak{X}(U),\ 0 = d(d\omega_X) = d(\alpha_{\text{rot}(X)}) = \eta_{\text{div}(\text{rot}(X))} \ \Rightarrow \text{div}(\text{rot}(X)) = 0. \tag{3.15}$$

Ahora bien, dado $X \in \mathfrak{X}(U)$, ¿cuándo existe $f \in C^\infty(U)$ tal que $X = \nabla f$ (equivalentemente, tal que $\omega_X = df$)? según (3.14), una condición necesaria para esto es que $\text{rot}(X) = 0$. Esta condición es *localmente suficiente* (como podrá deducirse del Corolario 4.2.4), pero no es en general *globalmente suficiente* (para un contraejemplo, véase el ejercicio 4). De igual forma, dado $X \in \mathfrak{X}(U)$ ¿cuándo existe $Y \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $X = \text{rot}(Y)$? Según (3.15), una condición necesaria es que $\text{div}(X) = 0$, y de nuevo esta condición es *localmente suficiente* por el Corolario 4.2.4, pero no es en general *globalmente suficiente* (ejercicio 5). En ambos casos, el que existan soluciones globales a estos problemas no depende de la estructura diferenciable de U, sino de su topología, y la herramienta adecuada para estudiar la solubilidad de ambos problemas será la *cohomología de de Rham,* que estudiaremos en el próximo capítulo.

Ejercicios.

1. Sea M^n una variedad diferenciable. Una *derivación de grado 0* es una aplicación lineal $D : \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M) \to \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ que deja invariante[3] cada $\Omega_k(M)$ y cumple la regla del producto:

$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge D\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M),$$

donde si $\alpha = f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, entendemos $f \wedge \beta$ como $f\,\beta$. Demostrar que

- D está determinada por su actuación sobre formas del tipo $f\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, siendo $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta en M.
- D está determinada por su actuación sobre funciones y diferenciales de funciones.

Un ejemplo de derivación de grado cero es la *derivada de Lie* de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, a la que denotaremos por L_X, determinada por

$$L_X(f) = X(f), \quad L_X(df) = dL_X(f), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

En particular, se tiene $L_X \circ d = d \circ L_X$ (cierto por construcción sobre funciones, y por linealidad y la regla del producto sobre cualquier k-forma). Aunque no lo haremos aquí, puede probarse[4] que

$$(L_X\omega)(X_1, \ldots, X_k) = X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_k). \quad (3.16)$$

Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, el *producto interior* es la *antiderivación*[5] *de grado* -1 dada por

$$([i(X)]\omega)(X_2, \ldots, X_k) = \omega(X, X_2, \ldots, X_k),$$

donde $\omega \in \Omega^k(M)$, $X_2, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ (por convenio, $[i(X)](f) = 0\ \forall f \in \Omega^0(M)$).

[3] Una derivación de *grado* $d \in \mathbb{Z}$ se define de igual forma, pero lleva k-formas en $k + d$ formas.

[4] Al menos, daremos una justificación de (3.16): Tras pasar la sumatoria al miembro de la izquierda, (3.16) se escribe como una regla del producto usual:

$$L_X(\omega(X_1, \ldots, X_k)) = (L_X\omega)(X_1, \ldots, X_k) + \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \ldots, L_X X_i, \ldots, X_k),$$

donde hemos definido $L_X Y = [X, Y]$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$. Esto nos dice que extendiendo la noción de derivada de Lie a campos mediante el corchete de Lie, y de ahí a tensores r-covariantes y s-contravariantes cualesquiera mediante la regla del producto usual, la fórmula anterior es trivial por construcción.

[5] Una *antiderivación de grado* $d \in \mathbb{Z}$ es una aplicación lineal $A : \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M) \to \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ que lleva k formas en $k + d$ formas, y cumple $A(\alpha \wedge \beta) = A\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge A\beta$, $\forall \alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$. La diferencial exterior es una antiderivación de grado 1 (propiedad 3 del Teorema 3.1.1).

- Probar que $d \circ i(X) + i(X) \circ d$ es una derivación de grado 0.
- Demostrar que dada $f \in C^\infty(M)$, se tienen

  $$[d \circ i(X) + i(X) \circ d](f) = L_X(f), \quad [d \circ i(X) + i(X) \circ d](df) = L_X(df)$$

  y concluir que $d \circ i(X) + i(X) \circ d = L_X$ (*fórmula de Cartan*).
- Utilizando la fórmula de Cartan y (3.16), demostrar por inducción sobre k la ecuación (3.1) que aparece en el Teorema 3.1.1.

2. Probar que dado un dominio D con borde diferenciable en una variedad orientada y dado $p \in \partial D$, la orientación inducida en $T_p\partial D$ por la de T_pM no depende de la elección del vector $u \in T_pM$ apuntando hacia fuera de D en p.

3. Deducir el teorema fundamental del cálculo a partir del teorema de Stokes.

4. Sea $U = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ y $X \in \mathfrak{X}(U)$ el campo dado por

   $$X(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

   Probar que $\operatorname{rot}(X) = 0$, pero que no existe $f \in C^\infty(U)$ tal que $\nabla f = X$ (indicación: si f existiera, entonces $\int_\gamma \omega_X = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset U$; sin embargo, esta integral no se anula para $\gamma = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2 = 1\}$).

5. En $U = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ se considera el campo $X \in \mathfrak{X}(U)$ dado por $X_p = \frac{p}{\|p\|^3}$.

   a) Probar que $\operatorname{div}(X) = 0$ pero que no existe $Y \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $X = \operatorname{rot}(Y)$.

   b) Demostrar que $\mathbb{S}^2(1)$ no es el borde de ningún dominio $D \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$.

6. Sea U un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$. Definimos

   $$\Omega^0(U,\mathbb{C}) = C^\infty(U,\mathbb{C}) = \{f \colon U \to \mathbb{C} \mid f \text{ es diferenciable}\} = \{u + iv \mid u,v \in C^\infty(U)\},$$

   $$\Omega^1(U,\mathbb{C}) = \{\alpha + i\beta \mid \alpha,\beta \in \Omega^1(U)\}, \qquad \Omega^2(U,\mathbb{C}) = \{\omega + i\eta \mid \omega,\eta \in \Omega^2(U)\}.$$

   Así, $\Omega^i(U,\mathbb{C})$ es el espacio vectorial complejo obtenido al complexificar $\Omega^i(U)$, $i = 0,1,2$.

   a) Dada $f \in \Omega^0(U,\mathbb{C})$, se definen

   $$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) \in \Omega^0(U,\mathbb{C}),$$

   donde cada subíndice f_x, f_y denota derivada parcial. Concluir que f es holomorfa (resp. antiholomorfa) si y sólo si $f_{\overline{z}} = 0$ (resp. $f_z = 0$).

b) Se definen $dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$, y en general, extendemos la diferencial por $\mathbb{C}$-linealidad a funciones diferenciables valuadas complejas. Demostrar que $\{dz, d\overline{z}\}$ es una base local de $\Omega^1(U, \mathbb{C})$, es decir, toda $\omega \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$ se escribe de forma única como $\omega = f\,dz + h\,d\overline{z}$, para ciertas $f, h \in C^\infty(U, \mathbb{C})$. También extendemos por $\mathbb{C}$-linealidad el producto exterior de 1-formas a

$$\wedge \colon \Omega^1(U, \mathbb{C}) \times \Omega^1(U, \mathbb{C}) \to \Omega^2(U, \mathbb{C}).$$

Demostrar que $dz \wedge d\overline{z} = -2i\,dx \wedge dy$. En particular, $dz \wedge d\overline{z}$ es una base local de $\Omega^2(U, \mathbb{C})$.

c) Definimos los operadores diferenciales

$$\begin{array}{rcl} \partial \colon \Omega^0(U, \mathbb{C}) & \to & \Omega^1(U, \mathbb{C}), \\ f & \mapsto & f_z\,dz \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \overline{\partial} \colon \Omega^0(U, \mathbb{C}) & \to & \Omega^1(U, \mathbb{C}), \\ f & \mapsto & f_{\overline{z}}\,d\overline{z} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \partial \colon \Omega^1(U, \mathbb{C}) & \to & \Omega^2(U, \mathbb{C}), \\ f\,dz + h\,d\overline{z} & \mapsto & h_z\,dz \wedge d\overline{z} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \overline{\partial} \colon \Omega^1(U, \mathbb{C}) & \to & \Omega^2(U, \mathbb{C}) \\ f\,dz + h\,d\overline{z} & \mapsto & -f_{\overline{z}}\,dz \wedge d\overline{z} \end{array}$$

Demostrar que $d = \partial + \overline{\partial}$ (d es la diferencial exterior extendida $\mathbb{C}$-linealmente a $\Omega^i(U, \mathbb{C})$, $i = 0, 1$), $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$, $\partial \circ \overline{\partial} = -\overline{\partial} \circ \partial$.

d) GENERERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY PARA FUNCIONES NO HOLOMORFAS.
Sea $F \in C^\infty(U, \mathbb{C})$, donde U es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, $D \subset U$ un dominio con frontera diferenciable y $z_0 \in \text{Int}(D)$. En este apartado probaremos la siguiente fórmula (comparar con el Corolario 3.3.2):

$$2\pi i F(z_0) = \int_{\partial D} \frac{F(z)}{z - z_0} dz + \int_D \frac{F_{\overline{z}}(z)}{z - z_0} dz \wedge d\overline{z}. \tag{3.17}$$

1) Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ tiene su cierre contenido en $\text{Int}(D)$. Probar que si llamamos $\omega = \frac{F(z)}{z - z_0} dz \in \Omega^1(U - \{z_0\}, \mathbb{C})$, entonces $d\omega = -\frac{F_{\overline{z}}(z)}{z - z_0} dz \wedge d\overline{z}$.

2) Aplicar el Teorema de Stokes a ω en $D_\varepsilon = D - \mathbb{D}(z_0, \varepsilon)$ para concluir que

$$i \int_0^{2\pi} F(z_0 + \varepsilon e^{-i\theta})\,d\theta = \int_{\partial D} \frac{F(z)}{z - z_0} dz + \int_{D_\varepsilon} \frac{F_{\overline{z}}(z)}{z - z_0} dz \wedge d\overline{z}.$$

3) Deducir del apartado anterior que existe el límite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{D_\varepsilon} \frac{F_{\overline{z}}(z)}{z - z_0} dz \wedge d\overline{z}$, y que (3.17) se cumple.

7. PROPIEDAD DE LA MEDIA PARA FUNCIONES ARMÓNICAS.
Sea $u \in C^\infty(U)$ donde U es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$. Sea $z_0 \in U$ y $R > 0$ tal que $\mathbb{D}(z_0, R)$ tiene su cierre contenido en D.

a) Probar que dado $r \in (0, R]$, se tienen las fórmulas

$$\int_{\mathbb{D}(z_0,r)} \Delta u\, dxdy = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(z_0+re^{i\theta})r\, d\theta, \quad \int_{\partial\mathbb{D}(z_0,r)} u\, ds = r\int_0^{2\pi} u(z_0+re^{i\theta})\, d\theta,$$

donde $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ son coordenadas polares centradas en z_0, y ds es el elemento de longitud en $\partial D(z_0, r)$.

b) Concluir de lo anterior que si u es armónica en U, entonces

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)} u\, ds \qquad \text{(resp. } \leq, \geq).$$

c) Demostrar que si u es subarmónica ($\Delta u \geq 0$) o superarmónica ($\Delta u \leq 0$) en U, entonces la igualdad anterior cambia a una desigualdad:

$$u(z_0) \leq \text{(resp. } \geq) \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial\mathbb{D}(z_0,R)} u\, ds \quad \text{si } u \text{ subarmónica (resp. si } u \text{ superarmónica).}$$

Capítulo 4

COHOMOLOGÍA DE de RHAM

El objetivo final de toda teoría matemática es clasificar, si es posible, todos los objetos que en ese momento sean motivo de estudio. Hacer esto de forma exhaustiva es muchas veces imposible, y entonces se buscan herramientas para distinguir objetos y así situarlos como distintos elementos en la lista de posibilidades. Por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ no son difeomorfos, ni siguiera homememomorfos, y uno tiene distintas herramientas para distinguirlos. A menudo estas herramientas se basan en asociar a los espacios unos objetos algebraicos que los distinguen, en el sentido de que si dos espacios son equivalentes (difeomorfos o homeomorfos), entonces sus objetos algebraicos asociados son isomorfos. Por ejemplo, podemos acudir al grupo fundamental, que mide los lazos en los espacios y sus deformaciones. Pero el grupo fundamental, y sus generalizacions a dimensiones superiores, los llamados *grupos de homotopía superiores,* son notablemente difíciles de calcular; en este capítulo estudiaremos otra herramienta para distinguir espacios asociándoles un objeto algebraico, en este caso un espacio vectorial, que en cierto modo también detecta los "agujeros" del espacio, como hacen los grupos de homotopía. La idea es sencilla: toda 1-forma cerrada en $\mathbb{R}^2$ es la diferencial de una función (diremos que la 1-forma es *exacta*, pero eso no es cierto en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Por otro lado, el conjunto de 1-formas cerradas en una variedad puede ser enorme: basta tomar una 1-forma cerrada ω y sumarle cualquier df con $f \in C^\infty(M)$, pero $\omega + df$ será exacta si y sólo si ω lo es, luego es natural identificar ω con $\omega + df$, $\forall f$. Cuando hagamos esta identificación nos aparecerá un espacio vectorial real, que en el caso de $\mathbb{R}^2$ tiene timensión 0 y en el caso de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ es de dimensión 1. La construcción precisa de este espacio vectorial y sus análogos para dimensiones más altas será el objetivo de la siguiente sección.

4.1. Espacios de cohomología de de Rham. Lema de Poincaré.

Recordemos del álgebra que un *complejo de cocadenas* es una sucesión de grupos abelianos o módulos $\ldots, A_2, A_1, A_0, A_1, A_2, \ldots$ conectados por homomorfismos $d_n : A_n \to A_{n+1}$ tales que $d_{n+1} \circ d_n = 0 \ \forall n$. Tomando $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ como la diferencial exterior en una variedad diferenciable M^n, tenemos un complejo de cocadenas $\big(\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M), d\big)$ (para aquellos índices $k \leq 0$ ó $k \geq n$, convenimos en que $\Omega^k(M) = \{0\}$ y $d = 0$) , al que llamaremos el *complejo de de Rham* de M.

Para cada $k \in \{0, \ldots, n\}$ definimos

$$B^k(M) = \mathrm{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)), \qquad Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\}.$$

Entonces $B^k(M)$ y $Z^k(M)$ son subespacios vectoriales de $\Omega^k(M)$ y a sus elementos le llamaremos k-formas *exactas* y *cerradas* respectivamente. El que $d^2 = 0$ significa que toda k-forma exacta es cerrada, luego $B^k(M)$ es un subespacio de $Z^k(M)$ y podemos considerar el espacio vectorial cociente:

$$H^k(M) := \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}, \quad \text{para } k = 0, \ldots, n,$$

al que se llama el *k-ésimo espacio de cohomología de de Rham de M*. A los elementos de $H^k(K)$ se les llama *clases de cohomología de de Rham de M* y se les representa por $[\alpha]$ con $\alpha \in \Omega^k(M)$ cerrada. Llamaremos

$$B(M) = \bigoplus_{k=0}^n B^k(M), \quad Z(M) = \bigoplus_{k=0}^n Z^k(M), \quad H(M) = \bigoplus_{k=0}^n H^k(M).$$

Nota 4.1.1

1. *Si $\alpha, \beta \in Z(M) \ \Rightarrow \alpha \wedge \beta \in Z(M)$ ($Z(M)$ es un subálgebra unitaria de $\Omega(M)$, con unidad $1 \in Z^0(M)$):*
   Es consecuencia directa del apartado 3 del Teorema 3.1.1.

2. *Si $\omega \in B(M)$, $\alpha \in Z(M) \ \Rightarrow \ \omega \wedge \alpha, \ \alpha \wedge \omega \in B(M)$ ($B(M)$ es un ideal bilátero de $Z(M)$):*
   $\omega \in B(M) \ \Rightarrow \exists \eta \in \Omega(M)$ tal que $\omega = d\eta$. Así, $\omega \wedge \alpha = d\eta \wedge \alpha = d(\eta \wedge \alpha)$ porque $\alpha \in Z(M)$. Análogamente, $\alpha \wedge \omega = \alpha \wedge d\eta = (-1)^{\mathrm{grado}(\alpha)} d\,(\alpha \wedge \eta) = d\left((-1)^{\mathrm{grado}(\alpha)} \alpha \wedge \eta\right)$.

3. *El producto $[\omega] \wedge [\alpha] = [\omega \wedge \alpha]$ está bien definido en $H(M)$, y dota a este conjunto de estructura de álgebra graduada asociativa,anticonmutativa*[1] *y con elemento unidad.*

[1] Si $\omega \in \Omega^k(M)$, $\alpha \in \Omega^l(M)$, entonces $\omega \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \omega$. En este sentido, $\Omega(M)$ se dice un álgebra *anticonmutativa*. Esto mismo puede decirse de $H(M)$, al pasar a cocientes.

En efecto, Si $[\omega] = [\omega'] \in H^k(M)$ y $[\alpha] = [\alpha'] \in H^l(M)$, entonces $\omega - \omega' \in B^k(M)$ y $\alpha - \alpha' \in B^l(M)$ luego $\omega \wedge \alpha - \omega' \wedge \alpha' = (\omega - \omega') \wedge \alpha + \omega' \wedge (\alpha - \alpha')$. Ahora sólo hay que aplicar el punto 2 anterior.

Al par $(H(M), \wedge)$ se le llama el *álgebra de cohomología de de Rham de M.*

Nota 4.1.2

1. Como $\dim(M) = n$, toda n-forma es cerrada luego $H^n(M) = \frac{\Omega^n(M)}{B^n(M)}$, $\quad H^0(M) = Z^0(M)$.

2. $Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid f$ constante en cada componente conexa de $M\}$ y $B^0(M) = d(\Omega^{-1}(M)) = \{0\}$, luego

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}^d, \text{ siendo } d = \#(\text{componentes conexas}^2 \text{ de } M).$$

4.2. Invarianza homotópica de la cohomología de de Rham.

Ses $\Phi \in C^\infty(M^n, N^m)$ y $\alpha \in Z^k(N)$. Por Proposición 3.1.1, $d(\Phi^*\alpha) = \Phi^*(d\alpha) = \Phi^*(0) = 0$ luego $\Phi^*\alpha \in Z^k(M)$. El mismo razonamiento nos dice que si $\alpha \in B^k(N)$ entonces $\Phi^*\alpha \in B^k(M)$. Esto permite definir aplicaciones lineales

$$\begin{array}{r} \Phi^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M) \\ \Phi^*([\alpha]) = [\Phi^*\alpha], \end{array} , \qquad \Phi^* : H(N) \longrightarrow H(M)$$

Además:

- Φ^* respeta el producto exterior (propiedad 4 del Lema 2.3.3), luego es un morfismo de álgebras.
- $\Phi \mapsto \Phi^*$ define un *funtor contravariante.* (propiedades 2 y 3 del Lema 2.3.3).
- Si $M \cong N$ (difeomorfas) $\Rightarrow$ $H(M) \cong H(N)$ (isomorfas).
- Si $\Phi : M \to N$ es constante $\Rightarrow \Phi^* = 0 : H(N) \to H(M)$.

Definición 4.2.1 Dos aplicaciones $\Phi, \Psi \in C^\infty(M^n, N^m)$ se dicen *diferenciablemente homotópicas* si existe una aplicación diferenciable $H : M \times \mathbb{R} \to N$ tal que

$$\begin{array}{ll} H(p,t) = \Phi(p) & \forall p \in M,\ t \leq 0, \\ H(p,t) = \Psi(p) & \forall p \in M,\ t \geq 1. \end{array}$$

A H se le llama *homotopía diferenciable de Φ a Ψ* (notación: $H : \Phi \overset{d}{\simeq} \Psi$).

[2] M puede tener, a lo más, una cantidad numerable de componentes conexas (porque satisface ANII); en tal caso, $H^0(M) \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La razón por la que la homotopía H está definida en $M \times \mathbb{R}$ y no en $M \times [0,1]$ como sería usual, es que M podría ser una variedad con borde (no estudiaremos este caso), y el producto de dos variedades con borde no tiene porqué ser una variedad con borde (un cuadrado no tiene borde regular). Sin embargo, el producto de una variedad con borde por otra sin borde sigue siendo una variedad con borde.

Nuestro siguiente objetivo es probar que si dos aplicaciones diferenciablemente homotópicas inducen los mismos morfismos a nivel de cohomología. Para ello necesitamos un concepto previo.

Definición 4.2.2 Un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de una variedad diferenciable M es una familia $\{\phi_s\}_{s\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Diff}(M)$ tal que $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ $\forall s,t \in \mathbb{R}$, y $(p,s) \in M \times \mathbb{R} \to M \mapsto \phi_s(p) \in M$ es diferenciable.

Nótese que para un grupo uniparamétrico de difeomorfismos $\{\phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$, se tienen $\phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s$, y $\phi_0 = 1_M$. Fijado $p \in M$, la aplicación $\gamma_p : \mathbb{R} \to M$, $\gamma_p(s) = \phi_s(p)$, es una curva diferenciable en M. Por tanto, $\gamma_p'(0) \in T_pM$ y podemos definir el *campo* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *asociado al grupo uniparmétrico* como

$$X : M \to TM, \quad X_p = \gamma_p'(0) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s(p).$$

La diferenciabilidad de X se deduce de su expresión en coordenadas locales: si $(U, \psi = (x_1,\dots,x_n))$ es una carta en M, entonces dado $p \in U$

$$[X(x_i)](p) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (x_i \circ \gamma_p)(s) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (x_i \circ \phi_s)(p).$$

Lema 4.2.1 (Lema de Poincaré) *Sea $\{\phi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico de difeomorfismos*[3] *de una variedad diferenciable M. Entonces, $\phi_s^* : H(M) \to H(M)$ es la identidad, $\forall s \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Fijemos $\omega \in \Omega^k(M)$.

1. Veamos que $L_X\omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s^*\omega$ (aquí L_X es la derivada de Lie del campo X, definida en el ejercicio 1 del Capítulo 3):
   Como L_X, $\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s^*$ son derivaciones de grado 0, basta comprobar que coinciden al aplicarlas sobre funciones y diferencales de funciones (esto es suficiente, por el ejercicio 1 del Capítulo 3). Dada $f \in C^\infty(M)$ y $p \in M$,

$$\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s^* f\right)(p) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (f \circ \phi_s)(p) = \left[\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s(p)\right](f) = X_p(f) = [X(f)](p),$$

[3]Es decir, $s \in (\mathbb{R},+) \mapsto \phi_s \in (\mathrm{Diff}(M),\circ)$ es un morfismo de grupos.

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s^* df = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (\phi_s^* \circ d)(f) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (d \circ \phi_s^*)(f) = d\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s^* f\right) = d[X(f)].$$

2. Dado $a \in \mathbb{R}$, veamos que $L_X \phi_a^* \omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_a \phi_s^* \omega$:

$$L_X \phi_a^* \omega \overset{(1)}{=} \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_s^* (\phi_a^* \omega) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (\phi_s^* \circ \phi_a^*)\omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \phi_{s+a}^* \omega = \left.\frac{d}{ds}\right|_a \phi_s^* \omega.$$

3. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, veamos que
$\phi_b^* \omega - \phi_a^* \omega = d\left(\int_a^b i(X)\,(\phi_s^* \omega)\,ds\right) + \int_a^b i(X)\,[\phi_s^* d\omega]\,ds$:
Lo que sigue hay que entenderlo tras evaluar en un punto $p \in M$ y en una lista $(v_1, \ldots, v_k) \in (T_p M)^k$, que no escribiremos por simplicidad. El resultado es, por tanto, un número real.

$$\phi_b^* \omega - \phi_a^* \omega = \int_a^b \left.\frac{d}{ds}\right|_s (\phi_s^* \omega)\,ds \overset{(2)}{=} \int_a^b (L_X \phi_s^* \omega)\,ds.$$

Usando la fórmula de Cartan (ejercicio 1 del Capítulo 3), lo anterior se escribe

$$\int_a^b (d \circ i(X) + i(X) \circ d)\,\phi_s^* \omega\,ds = \int_a^b (d \circ i(X))\,\phi_s^* \omega\,ds + \int_a^b i(X)\,[d(\phi_s^* \omega)]\,ds.$$

En el primer sumando anterior, podemos intercambiar la diferencial exterior con la integral de a a b; en el segundo sumando intercambiaremos la diferencial exterior con ϕ_s^*, obteniendo la fórmula que buscábamos.

Finalmente reescribimos la fórmula del punto 3 para $\omega \in Z^k(M)$:

$$\phi_b^* \omega - \phi_a^* \omega = d\left(\int_a^b i(X)\,(\phi_s^* \omega)\,ds\right).$$

Tomando clases en $H^k(M)$, tenemos $[\phi_b^* \omega] = [\phi_a^* \omega]$. Como esto es $\forall \omega \in Z^k(M)$, hemos demostrado el lema. $\square$

Teorema 4.2.1 *Si $\Phi, \Psi \in C^\infty(M^n, N^m)$ son diferenciablemente homotópicas, entonces $\Phi^* = \Psi^* : H(N) \to H(M)$.*

Demostración. Por hipótesis, existe una homotopía diferenciable $H : M \times \mathbb{R} \to N$ de Φ a Ψ, es decir $H(p,t) = \Phi(p)$ $\forall t \leq 0$, $H(p,t) = \Psi(p)$ $\forall t \geq 1$, $\forall p \in M$. Consideremos la inyección natural $i : M \to M \times \mathbb{R}$, $i(p) = (p, 0)$. Entonces, las aplicaciones

$$\phi_s : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}, \quad \phi_s(p,t) = (p, t+s), \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

definen un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de $M \times \mathbb{R}$. Por el Lema 4.2.1, tenemos $\phi_s^* = 1_{H(M\times\mathbb{R})}$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Por otro lado, $\Phi = H \circ i$ y $\Psi = H \circ \phi_1 \circ i$, luego $\Psi^* = (H \circ \phi_1 \circ i)^* = i^* \circ \phi_1^* \circ H^* = i^* \circ H^* = (H \circ i)^* = \Psi^*$. $\square$

Definición 4.2.3 Dos variedades diferenciables M^n, N^m *tienen el mismo tipo de homotopía diferenciable* si existen $\Phi \in C^\infty(M,N)$, $\Psi \in C^\infty(N,M)$ tales que $\Psi \circ \Phi \overset{d}{\simeq} 1_M$ y $\Phi \circ \Psi \overset{d}{\simeq} 1_N$. En tal caso, Φ, Ψ se dicen *equivalencias homotópicas.*

Dos variedades difeomorfas tienen el mismo tipo de homotopía diferenciable, pero el recíproco no es cierto: si M, N tienen el mismo tipo de homotopía diferenciable, ni siquiera tienen porqué tener la misma dimensión (por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ tiene el mismo tipo de homotopía diferenciable que un punto). Una consecuencia trivial de la definición anterior y de la funtorialidad de la aplicación inducida en cohomología es la siguiente.

Corolario 4.2.1 *Si M, N son variedades diferenciables con el mismo tipo de homotopía diferenciable, entonces $H(M) \cong H(N)$.*

A menudo tendremos que calcular la cohomología de de Rham de variedades que son difeomorfas a un cilindro sobre otra variedad base. El siguiente resultado dice que nos podremos reducir a calcular la cohomología de la variedad base.

Corolario 4.2.2 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto estrellado respecto de un punto $x \in U$, es decir, para todo $y \in U$ el segmento de recta que une x con y está contenido en U. Entonces, $H(M \times U) \cong H(M)$.*

Demostración. Como variedades difeomorfas tienen álgebras de cohomología isomorfas, no perdemos generalidad suponiendo que $0 \in U$ y U es estrellado respecto al origen.

Por el Corolario 4.2.1, basta probar que $M \times U, M$ tienen el mismo tipo de homotopía diferenciable. Consideremos las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} i : M & \to & M \times U \\ p & \mapsto & (p, 0) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \pi_1 : M \times U & \to & M \\ (p,t) & \mapsto & p \end{array}$$

Si vemos que $\pi_1 \circ i \overset{d}{\simeq} 1_M$, $i \circ \pi_1 \overset{d}{\simeq} 1_{M\times U}$ habremos terminado. Lo primero se cumple porque $\pi_1 \circ i = 1_M$. En cuanto a lo segundo, tomemos una función $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(t) = 0$ si $t \leq 0$ y $\varphi(t) = 1$ si $t \geq 1$. Sea

$$H : (M \times U) \times \mathbb{R} \to M \times U, \quad H((p,y),t) = (p, (1 - \varphi(t))y)\,.$$

Entonces, H es diferenciable y $H : i \circ \pi_1 \overset{d}{\simeq} 1_{M\times U}$. $\square$

Ya sabemos la cohomología de de Rham de $\mathbb{R}^n$ o de cualquier abierto estrellado suyo:

Corolario 4.2.3 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto estrellado respecto de un punto. Entonces,*

$$H^k(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & si\ k = 0, \\ \{0\} & si\ k \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. Aplicar el Corolario 4.2.2 a $M = \{p\}$ y U. □

Corolario 4.2.4 *En un abierto estrellado de $\mathbb{R}^n$, toda k-forma cerrada es exacta, $\forall k > 0$.*

La cohomologia de de Rham de una variedad diferenciable no depende de su estructura diferenciable, sino sólo de su topología. No demostraremos esto detalladamente, pero daremos un esquema del razonamiento:

1. Cada aplicación continua $f : M \to N$ entre dos variedades diferenciables es homotópica[4] a una aplicación diferenciable de M en N.

2. Si $\Psi, \Phi \in C^\infty(M, N)$ son (continuamente) homotópicas, entonces son diferenciablemente homotópicas.

3. A cada aplicación continua $f : M \to N$ entre variedades diferenciables le asociamos un morfismo $f^* : H(N) \to H(M)$ mediante $f^* = \Psi^*$ donde $\Psi \in C^\infty(M, N)$ es (continuamente) homotópica a f. Este morfismo Ψ^* no depende de Ψ por el punto anterior. Además, la correspondencia $f \mapsto f^*$ es funtorial.

4. La funtorialidad de $f \mapsto f^*$ implica la invarianza topológica de la cohomología de de Rham, es decir: *dos variedades diferenciables homormorfas tienen álgebras de cohomología de de Rham isomorfas.*

5. Si dos aplicaciones continuas $f, g : M \to N$ entre variedades diferenciables son (continuamente) homotópicas, entonces sus morfismos inducidos f^*, g^* coinciden (es consecuencia directa de 1,2). Por tanto, *dos variedades diferenciables con el mismo tipo de homotopía continuo[5] tienen álgebras de cohomología de de Rham isomorfas.*

4.3. La sucesión de Mayer-Vietoris.

A partir de esta sección exploraremos más propiedades de la cohomología de de Rham en una variedad diferenciables, pero desde el punto de vista y con técnicas de la topología

[4] En el sentido usual, es decir, existe $H : M \times [0,1] \to N$ continua tal que $H(p,0) = f$, $H(p,1) \in C^\infty(M,N)$.

[5] Es decir, existen $f : M \to N$, $g : N \to M$ continuas tales que $g \circ f$ es continuamente homotópica a 1_M y $f \circ g$ es continuamente homotópica a 1_N.

algebraica. De hecho, muchos de los resultados que obtendremos son válidos para situaciones más generales que una variedad diferenciable, aunque en nuestra situación las demostraciones son más fáciles.

Sea M^n una variedad diferenciable y U, V abiertos de M tal que $U \cup V = M$. Representemos por $i_U : U \hookrightarrow M$, $i_V : V \hookrightarrow M$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ y $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$ las correspondientes inclusiones (diferenciables). Para todo $k \geq 0$, definimos las aplicaciones lineales

$$\Omega^k(M) \xrightarrow{F} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{G} \Omega^k(U \cap V) \tag{4.1}$$

mediante $\quad F(\omega) = (i_U^*\omega, i_V^*\omega), \qquad G(\omega_1, \omega_2) = j_U^*\omega_1 - j_V^*\omega_2.$

Es claro que $G \circ F = 0$, es decir, $\mathrm{Im}(F) \subset \ker(G)$. De hecho, la recíproco es cierto: si $G(\omega_1, \omega_2) = 0$, entonces $\omega_1|_{U\cap V} = \omega_2|_{U\cap V}$ y podemos definir $\omega \in \Omega^k(M)$ como ω_1 en U y ω_2 en V. La igualdad $\mathrm{Im}(F) = \ker(G)$ nos dice que la sucesión (4.1) es exacta en el centro.

Lema 4.3.1 *La sucesión*

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{F} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{G} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0,$$

es exacta.

Demostración. Ya hemos visto la exactitud en $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$.

$\underline{\ker(F) = \{0\}}$: Sea $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $F(\omega) = (0, 0)$. Así, $\omega|_U, \omega|_V = 0$. Como $M = U \cup V$, deducimos que $\omega = 0$ en M.

$\underline{\mathrm{Im}(G) = \Omega^k(U \cap V)}$: Sea $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$. Usaremos un resultado previo de particiones de la unidad, que probaremos abajo: tomemos funciones $\varphi_U, \varphi_V \in C^\infty(M)$ tales que $\mathrm{soporte}(\varphi_U) \subset U$, $\mathrm{soporte}(\varphi_V) \subset V$, $\varphi_U + \varphi_V = 1$ en M (ver Afirmación 4.3.1). Llamamos

$$\omega_1 = \begin{cases} \varphi_V \omega & \text{en } U \cap V \\ 0 & \text{en } U - \mathrm{soporte}(\varphi_V) \end{cases} \qquad \omega_2 = \begin{cases} -\varphi_U \omega & \text{en } U \cap V \\ 0 & \text{en } V - \mathrm{soporte}(\varphi_U) \end{cases}$$

Como $U \cap V, U - \mathrm{soporte}(\varphi_V)$ son abiertos de U que recubren a U (aquí se usa que $\mathrm{soporte}(\varphi_V) \subset V$, nótese que podría haber problemas con la diferenciabilidad de ω_1 en puntos de $U \cap \partial V$ si sólo tuviéramos $\mathrm{soporte}(\varphi_V) \subset \overline{V}$), deducimos que $\omega_1 \in \Omega^k(U)$. Análogamente $\omega_2 \in \Omega^k(V)$. Finalmente, $G(\omega_1, \omega_2) = j_U^*\omega_1 - j_V^*\omega_2 = (\omega_1)|_{U\cap V} - (\omega_1)|_{U\cap V} = (\varphi_V\omega)|_{U\cap V} + (\varphi_U\omega)|_{U\cap V} = \omega$. $\square$

Afirmación 4.3.1 *Sean U, V abiertos de una variedad diferenciable con $M = U \cup V$. Entonces, existen funciones $\varphi_U, \varphi_V \in C^\infty(M)$ tales que* $\mathrm{soporte}(\varphi_U) \subset U$, $\mathrm{soporte}(\varphi_V) \subset V$, *$\varphi_U + \varphi_V = 1$ en M.*

Demostración. Tomemos una partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ subordinada al recubrimiento abierto $\{U, V\}$ de M. Sean

$$\varphi_U = \sum_{i\in A} \varphi_i, \quad \varphi_V = \sum_{i\in\mathbb{N}-A} \varphi_i = 1 - \varphi_U,$$

donde $A = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{soporte}(\varphi_i) \subset U\}$. Como las sumas anteriores son localmente finitas, φ_U, φ_V son funciones diferenciables sobre M. Sólo queda probar que soporte$(\varphi_V) \subset V$ y, soporte$(\varphi_U) \subset U$. El razonamiento que sigue es simétrico en U y en V, y sólo lo hacemos para V.

<u>soporte$(\varphi_V) \subset \overline{V}$</u>: Dado $x \in M$ tal que $\varphi_V(x) \neq 0$, existe $i \in \mathbb{N} - A$ tal que $\varphi_i(x) \neq 0$. Por definición de A, soporte$(\varphi_i) \not\subset U$ luego soporte$(\varphi_i) \subset V$. En particular, $x \in V$ y hemos probado que $\{x \in M \mid \varphi_V(x) \neq 0\} \subset V$. Tomando adherencias tenemos lo deseado.

<u>soporte(φ_V) no corta a ∂V</u>: Por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto $x \in$ soporte$(\varphi_V) \cap \partial V$. Por ser la partición de la unidad $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ localmente fiinta, existirá un entorno abierto U_x de x en M que sólo corta a una cantidad finita de soportes de las φ_i, funciones a las que llamamos $\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_N}$. Como $x \in$ soporte(φ_V), existe una sucesión $\{x_k\}_k \subset M$ convergiendo a x (por tanto, podemos suponer $x_k \in U_x$ $\forall k \in \mathbb{N}$) tal que $\varphi_V(x_k) \neq 0$ $\forall k$. Por definición de φ_V, existe una sucesión $\{i(k)\}_k \subset \mathbb{N} - A$ tal que $\varphi_{i(k)}(x_k) \neq 0$ $\forall k$. Como $x_k \in U_x$, tenemos $\{i(k)\}_k \subset \{j_1, \ldots, j_N\}$, y así

$$x_k \in \text{soporte}(\varphi_{i(k)}) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{soporte}(\varphi_{i(k)}) := K.$$

Nótese que el conjunto K es compacto, por ser unión finita de compactos (ya que cada soporte$(\varphi_{i(k)})$ es compacto y sólo hay una cantidad finita de $i(k)$). Como lo anterior es cierto $\forall k \in \mathbb{N}$ y K es compacto, tomando límites obtenemos $x \in K$. Pero $K \subset V$ (porque cada soporte$(\varphi_{i(k)})$ está contenido en V), luego $x \in V$. Esto contradice que $x \in \partial V$ y V es abierto. $\square$

Lema 4.3.2 *En la situacion anterior, el diagrama siguiente es conmutativo para cada k:*

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^k(M) & \xrightarrow[F]{} & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \xrightarrow[G]{} & \Omega^k(U \cap V) \\
\downarrow d & & \downarrow d \oplus d & & \downarrow d \\
\Omega^{k+1}(M) & \xrightarrow[F]{} & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \xrightarrow[G]{} & \Omega^{k+1}(U \cap V)
\end{array}$$

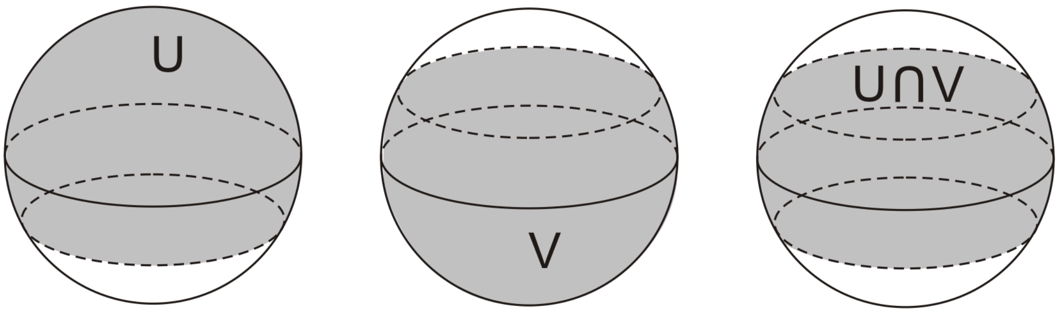
Demostración. Comprobación directa. □

La situación anterior es bien conocida en álgebra homológica, se conoce como una *sucesión exacta corta de complejos de cocadenas.* En estas condiciones, existe un resutado puramente algebraico sobre la cohomología asociada a los complejos de cocadenas, produciendo lo que se llama una *sucesión exacta larga en cohomología.* Pero no vamos a introducir este lenguaje en abstracto, sino que llegaremos al resultado adaptando los argumentos a nuestra situación particular.

Primero el que el diagrama del Lema 4.3.2 sea conmutativo implica que las aplicaciones F, G se inducen en cohomología:

$$H^k(M) \xrightarrow{F^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{G^*} H^k(U \cap V) \tag{4.2}$$

mediante $F^*[\omega] = ([i_U^*\omega], [i_V^*\omega])$, $G^*([\omega_1], [\omega_2]) = [G(\omega_1, \omega_2)] = [j_U^*\omega_1 - j_V^*\omega_2]$.
Sin embargo, no es cierto en general que (4.2) pueda ampliarse a una sucesión exacta corta poniendo cero a izquierda y derecha. Por ejemplo, si tomamos los abiertos U, V de $\mathbb{S}^2$ dados por el dibujo de abajo,



Una descomposición de $\mathbb{S}^n$ cumpliendo las condiciones de Mayer-Vietoris.

entonces tenemos la correspondiente sucesión exacta corta como la del Lema 4.3.1, pero la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^1(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{F} & H^1(U) \oplus H^1(V) & \xrightarrow{G} & H^1(U \cap V) & \longrightarrow 0, \\ & \| & & \| & & \| & \\ & (\star) & & \{0\} & & \mathbb{R} & \end{array}$$

no es exacta (en realidad $(\star) = \{0\}$ pero aún no lo hemos probado), sino que podremos conectar cada línea como (4.2) con su siguiente subiendo uno el grado, mediante un *morfismo de conexión:*

Teorema 4.3.1 (Sucesión de Mayer-Vietoris) *Dada una variedad diferenciable M^n descompuesta en unión de abiertos $M = U \cup V$, existe para todo $k \geq 0$ una aplicación lineal $\Delta : H^k(U \cap V) \to H^{k+1}(M)$ tal que la siguiente sucesión es exacta*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(M) \xrightarrow{F^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{G^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^1(M) \xrightarrow{F^*} \dots \\ \dots \to H^k(M) \xrightarrow{F^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{G^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(M) \xrightarrow{F^*} \dots \\ \dots \to H^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^n(M) \xrightarrow{F^*} H^n(U) \oplus H^n(V) \xrightarrow{G^*} H^n(U \cap V) \to 0, \end{aligned}$$

siendo $F^*[\omega] = ([\omega|_U], [\omega|_V])$, $G^*([\omega_1], [\omega_2]) = [\omega_1|_{U \cap V} - \omega_2|_{U \cap V}]$.

Demostración. Como dijimos antes, el resultado es puramente algebraico. Aunque haremos la demostración en nuestra situación geométrica, los argumentos sólo usarán propiedades de complejos de cocadenas, y dejaremos la intepretación puramente geométrica para después de la demostración.

Queremos definir $\Delta : H^k(U \cap V) \to H^{k+1}(M)$. Para ello, tomemos $[\omega] \in H^k(U \cap V)$, generada por $\omega \in Z^k(U \cap V)$. Como $G_k : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V)$ es sobreyectiva[6], existen $\omega_1 \in \Omega^k(U)$, $\omega_2 \in \Omega^k(V)$ tales que $G_k(\omega_1, \omega_2) = \omega$. Como ω es cerrada,

$$0 = d\omega = (d \circ G_k)(\omega_1, \omega_2) = G_{k+1}(d\omega_1, d\omega_2) \tag{4.3}$$

luego $(d\omega_1, d\omega_2) \in \ker(G_{k+1}) = \mathrm{Im}(F_{k+1})$ y por tanto existe $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$ tal que $F_{k+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$. Ahora bien, η es cerrada porque F_{k+2} es inyectiva y

$$(F_{k+2} \circ d)(\eta) = (d \oplus d)(F_{k+1}(\eta)) = (d \oplus d)(d\omega_1, d\omega_2) = 0. \tag{4.4}$$

Así, η general una clase de cohomología $[\eta] \in H^{k+1}(M)$, que es la que íbamos buscando: definimos

$$\Delta([\omega]) = [\eta].$$

Debemos comprobar que la definición anterior es correcta; si tomamos $\omega' = \omega + d\alpha$ con $\alpha \in \Omega^{k-1}(U \cap V)$, entonces por sobreyectividad de G_{k-1} existen $\alpha_1 \in \Omega^{k-1}(U)$, $\alpha_2 \in \Omega^{k-1}(V)$ tales que $\alpha = G_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)$. Sigamos con el proceso explicado arriba para definir Δ, pero aplicado a ω' en vez de a ω: Como $G_k : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \to \Omega^k(U \cap V)$ es sobreyectiva, existen $\omega'_1 \in \Omega^k(U)$, $\omega'_2 \in \Omega^k(V)$ tales que $G_k(\omega'_1, \omega'_2) = \omega'$. Como ω' es cerrada, la misma cuenta que en (4.3) nos dice que $(d\omega'_1, d\omega'_2) \in \ker(G_{k+1}) = \mathrm{Im}(F_{k+1})$ y por tanto existe $\eta' \in \Omega^{k+1}(M)$ tal que $F_{k+1}(\eta') = (d\omega'_1, d\omega'_2)$, e igual que en (4.4), η' es cerrada. Sólo resta ver que $[\eta] = [\eta']$: Primero notemos que

$$G_k(\omega'_1 - \omega_1, \omega'_2 - \omega_2) = \omega' - \omega = d\alpha = (d \circ G_{k-1})(\alpha_1, \alpha_2) = G_k(d\alpha_1, d\alpha_2)$$

[6]Nótese que hemos añadido un subíndice a G, y haremos lo mismo con F, para destacar el grado de las formas sobre las que actúa.

luego $(\omega' - \omega_1 - d\alpha_1, \omega_2' - \omega_2 - d\alpha_2) \in \ker(G_k) = \mathrm{Im}(F_k)$, de donde $(\omega' - \omega_1 - d\alpha_1, \omega_2' - \omega_2 - d\alpha_2) = F_k(\theta)$ para cierta $\theta \in \Omega^k(M)$. Por último,

$$F_{k+1}(\eta' - \eta) = F_{k+1}(\eta') - F_{k+1}(\eta) = (d\omega_1' - d\omega_1, d\omega_2' - d\omega_2)$$

$$= \big(d\omega_1' - d\omega_1 - (d \circ d)(\alpha_1), d\omega_2' - d\omega_2 - (d \circ d)(\alpha_2)\big) = (d \circ F_k)(\theta) = F_{k+1}(d\theta)$$

y otra vez por inyectividad de F concluímos que $\eta' - \eta = d\theta$, lo que implica que $[\eta'] = [\eta]$ y Δ está bien definida.

Queda comprobar la exactitud de la sucesión del Teorema.

Exactitud en $H^0(M)$.
Basta ver que $F^* : H^0(M) \to H^0(U) \oplus H^0(V)$ es inyectiva. Sea $[f] \in H^0(M)$ cumpliendo $F^*([f]) = 0$ y sea $f \in [f] \subset Z^0(M)$. Como $0 = F^*([f])$, tenemos que $F_0(f) \in \Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V)$ tiene sus dos componentes exactas, $F_0(f) = (d\omega_1, d\omega_2)$ para $\omega_1 \in \Omega^{-1}(U)$, $\omega_2 \in \Omega^{-1}(V)$. Como $\Omega^{-1}(U) = \Omega^{-1}(V) = \{0\}$, tenemos $F_0(f) = (d0, d0) = (0, 0)$ y como F_0 es inyectiva, concluímos que $f = 0$ y por tanto $[f] = 0$.

Exactitud en $H^k(U) \oplus H^k(V)$, $0 \leq k \leq n$.
Como $G_k \circ F_k = 0$ a nivel de $\Omega^k(\cdot)$, las aplicaciones inducidas en cohomología cumplen $G^* \circ F^* = 0$, de donde $\mathrm{Im}(F^*) \subseteq \ker(G^*)$.

Recíprocamente, sea $([\omega_1], [\omega_2]) \in \ker(G^*)$. Tomemos representantes $\omega_1 \in Z^k(U)$, $\omega_2 \in Z^k(V)$. Como $0 = G^*([\omega_1], [\omega_2]) = [G_k(\omega_1, \omega_2)] \in H^k(U \cap V)$, existirá $\alpha \in \Omega^{k-1}(U \cap V)$ tal que $G_k(\omega_1, \omega_2) = d\alpha$. Como G_{k-1} es sobreyectiva, existen $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega^{k-1}(U) \oplus \Omega^{k-1}(V)$ tales que $G_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha$. Por tanto,

$$G_k(d\alpha_1, d\alpha_2) = d(G_{k-1}(\alpha_1, \alpha_2)) = d\alpha = G_k(\omega_1, \omega_2),$$

de donde $(\omega_1 - d\alpha_1, \omega_2 - d\alpha_2) \in \ker(G_k) = \mathrm{Im}(F_k)$. Así, existe $\eta \in \Omega^k(M)$ tal que $F_k(\eta) = (\omega_1 - d\alpha_1, \omega_2 - d\alpha_2)$. Ahora bien, $d\eta = 0$ porque $F_{k+1}(d\eta) = (d \oplus d)(F_k(\eta)) = (d\omega_1, d\omega_2) = (0, 0)$ y porque F_{k+1} es inyectiva. Esto implica que $\eta \in Z^k(M)$, luego η genera una clase de cohomología $[\eta] \in H^k(M)$, y

$$F^*([\eta]) = [F_k(\eta)] = ([\omega_1 - d\alpha_1], [\omega_2 - d\alpha_2]) = ([\omega_1], [\omega_2]),$$

luego $([\omega_1], [\omega_2]) \in \mathrm{Im}(F^*)$.

Exactitud en $H^k(U \cap V)$. Supongamos que $([\omega_1], [\omega_2]) \in H^k(U) \oplus H^k(V)$ con representantes $(\omega_1, \omega_2) \in Z^k(U) \oplus Z^k(V)$. Recordemos de la definición de Δ que llamando $[\omega] := G^*([\omega_1], [\omega_2])$, entonces $\Delta([\omega]) = [\eta]$ donde $\eta \in Z^{k+1}(M)$ cumple $F_{k+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$. En nuestro caso, $(d\omega_1, d\omega_2) = (0, 0)$ luego $F_{k+1}(\eta) = (0, 0)$. Como F_{k+1} es inyectiva, deducimos que $\eta = 0$. Así, $(\Delta \circ G^*)([\omega_1], [\omega_2]) = [\eta] = 0$ y hemos probado que $\mathrm{Im}(G^*) \subseteq \ker(\Delta)$.

Recíprocamente, sea $[\omega] \in H^k(U \cap V)$ tal que $\Delta([\omega]) = 0 \in H^{k+1}(M)$. Tomemos un representante $\omega \in Z^k(U \cap V)$. Por definición de Δ, tenemos $\Delta([\omega]) = [\eta]$ donde $\eta \in Z^{k+1}(M)$

cumple $F_{k+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$, siendo $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ tales que $G_k(\omega_1, \omega_2) = \omega$. Además, $0 = \Delta([\omega]) = [\eta]$ luego η es exacta. Por tanto, existe $\theta \in \Omega^k(M)$ tal que $d\theta = \eta$. Aplicando F_k obtenemos $F_k(\theta) = \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$. Llamemos $F_k(\theta) = (\omega_1', \omega_2')$. Entonces,

$$(d \oplus d)(\omega_1', \omega_2') = [(d \oplus d) \circ F_k](\theta) = F_{k+1}(d\theta) = F_{k+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2),$$

luego $d\omega_1' = d\omega_1$, $d\omega_2' = d\omega_2$ y por tanto, $(\omega_1 - \omega_1', \omega_2 - \omega_2') \in Z^k(U) \oplus Z^k(V)$. Tomando clases de cohomología, $([\omega_1 - \omega_1'], [\omega_2 - \omega_2']) \in H^k(U) \oplus H^k(V)$, y por tanto tiene sentido

$$G^*([\omega_1 - \omega_1'], [\omega_2 - \omega_2']) = \big[G_k(\omega_1 - \omega_1', \omega_2 - \omega_2')\big] = \big[G_k(\omega_1, \omega_2) - G_k(\omega_1', \omega_2')\big]$$

$$= [G_k(\omega_1, \omega_2) - (G_k \circ F_k)(\theta)] = [G_k(\omega_1, \omega_2)] = [\omega].$$

Así, $[\omega] \in \mathrm{Im}(G^*)$ y hemos probado que $\mathrm{Im}(G^*) \supseteq \ker(\Delta)$.

Exactitud en $H^{k+1}(M)$.

Primero comprobamos que $F^* \circ \Delta = 0$. En efecto, si $[\omega] \in H^k(U \cap V)$ entonces $\Delta([\omega]) = [\eta] \in H^{k+1}(M)$ donde $\eta \in Z^{k+1}(M)$ cumple $F_{k+1}(\eta) = (d\omega_1, d\omega_2)$, siendo $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ tales que $G_k(\omega_1, \omega_2) = \omega$ y $\omega \in Z^k(U \cap V)$ un representante de $[\omega]$. Ahora,

$$(F^* \circ \Delta)([\omega]) = F^*([\eta]) = ([d\omega_1], [d\omega_2]) = (0, 0)$$

luego $F^* \circ \Delta = 0$ y por tanto, $\mathrm{Im}(\Delta) \subseteq \ker(F^*)$.

Recíprocamente, sea $[\eta] \in H^{k+1}(M)$ y $\eta \in Z^{k+1}(M)$ un representante, tales que $F^*([\eta]) = (0, 0) \in H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V)$. Veamos que existe $[\omega] \in H^k(U \cap V)$ tal que $\Delta([\omega]) = [\eta]$. En efecto, como $F^*([\eta]) = (0, 0)$, tenemos que $F_{k+1}(\eta)$ es de la forma $F_{k+1}(\eta) = (\omega_1', \omega_2')$ con ω_1', ω_2' exactas; más concretamente, existe $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ tal es que $d\omega_1 = \omega_1'$, $d\omega_2 = \omega_2'$. Tomemos $\omega := G_k(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(U \cap V)$. Entonces, ω es cerrada porque

$$d\omega = (d \circ G_k)(\omega_1, \omega_2) = G_{k+1}(d\omega_1, d\omega_2) = G_{k+1}(\omega_1', \omega_2') = G_{k+1}(F_{k+1}(\eta)) = 0.$$

Así, ω induce una clase de cohomología $[\omega] \in H^k(U \cap V)$. Sólo queda ver que $\Delta([\omega]) = [\eta]$, y eso se deduce de que $F_{k+1}(\eta) = (\omega_1', \omega_2') = (d\omega_1, d\omega_2)$ y de la definición de Δ. Así, tenemos $\mathrm{Im}(\Delta) \supseteq \ker(F^*)$.

Exactitud en $H^n(U \cap V)$. Se trata de probar que G^* es sobreyectiva: si $[\omega] \in H^n(U \cap V)$, tomamos un representante $\omega \in Z^n(U \cap V) = \Omega^n(U \cap V)$. Como G_n es sobreyectiva, existe $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V) = Z^n(U) \oplus Z^n(V)$ tal que $G_n(\omega_1, \omega_2) = \omega$, y tomando clases tendremos $G^*([\omega_1], [\omega_2]) = [\omega]$ y hemos terminado. □

Nota 4.3.1 La demostración anterior es válida paso a paso para probar la existencia de una sucesión exacta en cohomología siempre que tengamos una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas, construyendo el morfismo de conexión correspondiente. La interpretación explícita del morfismo de conexión dependerá de la sucesión exacta corta de complejos de cocadenas que tengamos. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa de la cohomología de de Rham de una variedad diferenciable M^n, si partimos de una clase de cohomología $[\omega] \in H^k(U \cap V)$ y de un represntante $\omega \in [\omega] \subset Z^k(U \cap V)$, entonces las k-formas

$$\omega_1 = \begin{cases} \varphi_V \omega & \text{en } U \cap V, \\ 0 & \text{en } U - \text{soporte}(\varphi_V) \end{cases} \qquad \omega_2 = \begin{cases} -\varphi_U \omega & \text{en } U \cap V, \\ 0 & \text{en } U - \text{soporte}(\varphi_U) \end{cases}$$

(con la notación de la demostración del Lema 4.3.1) cumplen $G_k(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U\cap V} - \omega_2|_{U\cap V} = \omega$. Además, por ser ω cerrada, tenemos $d\omega_1|_{U\cap V} = d(\varphi_V \omega) = d((1-\varphi_U)\omega) = -d(\varphi_U \omega) = d\omega_2|_{U\cap V}$ luego la $(k+1)$-forma

$$\eta = \begin{cases} d\omega_1 & \text{en } U \\ d\omega_2 & \text{en } V \end{cases}$$

está globalmente definida en M, es cerrada y $[\eta] = \Delta([\omega])$. En resumen:

$$[\omega] \in H^k(U \cap V) \mapsto \Delta([\omega]) = [\eta] = \left[\begin{cases} d(\varphi_V \omega) & \text{en } U, \\ -d(\varphi_U \omega) & \text{en } V \end{cases} \right] \in H^{k+1}(M).$$

Si M se descompone como $M = U \cup V$ con U, V abiertos disjuntos (en particular M no es conexa), entonces la sucesión de Mayer-Vietoris nos dice que $H^k(M) \cong H^k(U) \oplus H^k(V)$ para todo $k = 0, 1 \ldots, n$. Iterando esto, tenemos:

Proposición 4.3.1 *Si $M = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ es la descomposición en componentes conexas de una variedad M, entonces para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene*

$$H^k(M) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H^k(U_i).$$

Como veremos más adelante, la utilidad de la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris consiste en encontrar la descomposición $M = U \cup V$ de forma que aparezcan muchos ceros en los espacios de cohomología de la sucesión exacta larga; cortando por esos ceros conseguirmos "fragmentos" que son sucesiones exactas, y a menudo es posible deducir información sobre los espacios que aparecen sin más que contar dimensiones (veremos un ejemplo en la ecuación (4.5)). Relacionado con esto, tenemos dos observaciones: en la primera enunciamos una fórmula algebraica para relacionar las dimensiones de los espacios en cada "fragmento", y en la segunda estudiamos variedades que descomponen de forma especialmente adecuada en esta dirección.

Lema 4.3.3 *Consideremos una sucesión exacta de espacios vectoriales*

$$0 \to V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \ldots \to V_{k-1} \to V_k \to 0.$$

Entonces, la suma alternada de las dimensiones de los espacios V_i es cero.

Demostración. Hacerla como ejercicio por inducción sobre k; para caer en la hipótesis de inducción, se cambia en la sucesión anterior el fragmento $0 \to V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ por el fragmento $0 \to V_2/\ker(g) \xrightarrow{\widetilde{g}} V_3$ manteniendo el resto de la sucesión, donde $\widetilde{g}(x+\ker(g)) = g(x)$ para cada $x \in V_2$. □

Definición 4.3.1 Una variedad diferenciableM^n se dice de *tipo finito* si admite un recubrimiento abierto finito $\{U_i\}_{1\leq i\leq m}$ tal que cada intersección $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}$ es vacía o difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Puede probarse que toda variedad compacta es de tipo finito[7], aunque hay muchas variedades no compactas que son de tipo finito, como el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.3.2 *En una variedad diferenciable M^n de tipo finito, los espacios de cohomología de de Rham $H^k(M)$ tienen dimensión finita, $\forall k = 0, 1, \ldots, n$.*

Demostración. Por inducción sobre el número m de abiertos de un recubrimiento $\{U_i\}_{1\leq i\leq m}$ de M tal que cada intersección $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}$ es vacía o difeomorfa a $\mathbb{R}^n$: para $m = 1$, M es difeomorfa a $\mathbb{R}$‘n y la proposición es trivial. Suponiendo cierto el enunciado para m, veámoslo para $m+1$: supongamos que M tiene un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{1\leq i\leq m+1}$ tal que cada intersección $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}$ es vacía o difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Sean $U = U_1 \cup \ldots \cup U_m$, $V = U_{m+1}$. Usando la sucesión de Mayer-Vietoris para M, U, V, tenemos una sucesión exacta

$$\cdots \to H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta} H^k(M) \xrightarrow{F^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{G^*} \ldots$$

Como $H^k(M)/\ker(F^*) \cong \mathrm{Im}(F^*)$, basta probar que $\ker(F^*)$, $\mathrm{Im}(F^*)$ tienen dimensión finita para que $H^k(M)$ sea de dimensión finita. Como $\mathrm{Im}(F^*)$ es un subespacio de $H^k(U) \oplus H^k(V)$ y $\dim\ker(F^*) = \dim \mathrm{Im}(\Delta) \leq \dim H^{k-1}(U \cap V)$, es suficiente demostrar que $H^k(U), H^k(V), H^{k-1}(U \cap V)$ tienen dimensión finita. $H^k(U)$ tiene dimensión finita por

[7]La idea se basa en el generalizar el concepto de conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ a una variedad; para ello hace falta generalizar la noción de segmento a geodésica minimizante, para lo que es necesario dotar a M de una métrica Riemanniana (toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana, simplemente pegando métricas localmente definidas en entornos coordenados por medio de una partición de la unidad). La existencia de entornos coordenados convexos en una variedad Riemanniana es siempre posible, y la intersección de convexos es convexa. La compacidad se usa para encontrar un recubrimiento finito por entornos coordenados convexos.

hipótesis de inducción; V es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ luego también $H^k(U)$ tiene dimensión finita; finalmente, $U\cap V$ tiene como recubrimiento a $\{U_1\cap U_{m+1},\dots,U_m\cap U_{m+1}\}$, luego también por hipótesis de inducción $H^{k-1}(U\cap V)$ tiene dimensión finita. □

Cuando una variedad M tiene todos sus espacios de cohomología finito-dimensionales, se define el *k-esimo número de Betti de M* mediante

$$\beta_k(M)=\dim H^k(M),$$

y la *característica de Euler-Poincaré de M* por

$$\chi(M)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k(M).$$

Comentaremos (aunque no lo probaremos) que en una variedad compacta M^n (luego de tipo finito) y orientable, los números de Betti cumplen $\beta_k(M)=\beta_{n-k}(M)$ (dualidad de Poincaré), $\forall k=0,\dots,n$.

4.4. Cohomología de la esfera y el espacio proyectivo real.

La sucesión de Mayer-Vietoris es un método muy potente para el cálculo de cohomología de de Rham, ya que muchas variedades admiten descomposiciones $M=U\cup V$ donde $U,V,U\cap V$ tienen cohomologías más simples que la propia M. Un ejemplo de esto ocurre al calcular la cohomología de de Rham de $\mathbb{S}^n$.

Teorema 4.4.1 *La cohomología de de Rham de la esfera $\mathbb{S}^n$ viene dada por*

$$H^0(\mathbb{S}^0)=\mathbb{R}^2,\qquad y\ si\ n\geq 1,\ H^k(\mathbb{S}^n)\cong\left\{\begin{array}{cl}\mathbb{R} & si\ \ k=0,n\\ \{0\} & si\ \ 0<k<n.\end{array}\right.$$

Demostración. Consideremos abiertos $U,V\subset\mathbb{S}^n$ como en el gráfico antes del Teorema 4.3.1, es decir, U,V son difeomorfos a $\mathbb{R}^n$, $U\cap V$ admite como retracto de deformación a $\mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{S}^n=U\cup V$. Así, U,V tienen el tipo de homotopía de $\mathbb{R}^n$ y $U\cap V$ tiene el tipo de homotopía de $\mathbb{S}^{n-1}$. Por los Corolarios 4.2.1 y 4.2.3,

$$H(U)\cong H(V)\cong H(\mathbb{R}^n)\cong\left\{\begin{array}{cl}\mathbb{R} & \text{si}\ \ k=0\\ \{0\} & \text{si}\ \ 0<k\leq n\end{array}\right.\qquad H(U\cap V)\cong H(\mathbb{S}^{n-1}),$$

luego la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a esta descomposición es

$$\begin{array}{l} 0 \to \underset{\underset{\mathbb{R}}{\|}}{H^0(\mathbb{S}^n)} \xrightarrow{F^*} \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\|}}{H^0(U)\oplus H^0(V)} \xrightarrow{G^*} \underset{\underset{H^0(\mathbb{S}^{n-1})}{\|}}{H^0(U\cap V)} \xrightarrow{\Delta} H^1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{F^*} \underset{\underset{\{0\}}{\|}}{H^1(U)\oplus H^1(V)} \to \dots \\ (k>1) \\ \dots \to \underset{\underset{\{0\}}{\|}}{H^{k-1}(U)\oplus H^{k-1}(V)} \xrightarrow{G^*} \underset{\underset{H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})}{\|}}{H^{k-1}(U\cap V)} \xrightarrow{\Delta} H^k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{F^*} \underset{\underset{\{0\}}{\|}}{H^k(U)\oplus H^k(V)} \xrightarrow{G^*} \dots \end{array}$$

De la línea de abajo deducimos que $H^k(\mathbb{S}^n) \cong H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ si $k > 1$. De la línea de arriba deducimos que si $n \geq 1$ entonces la sucesión siguiente es exacta en todos sus puntos:

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{F^*} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G^*} H^0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\Delta} H^1(\mathbb{S}^n) \to 0 \tag{4.5}$$

Y tenemos dos opciones:

- Si $n > 1$ entonces $\mathbb{S}^{n-1}$ es conexa, luego $H^0(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R}$. Usando la fórmula de la nulidad y el rango para cada aplicación de (4.5) (equivalentemente, por el Lema 4.3.3) llegaremos a que $H^1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$.

- Si $n = 1$ entonces $\mathbb{S}^{n-1} = \{-1, 1\}$, luego $H^0(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R}^2$. Razonando como arriba llegaremos a que $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$.

En resumen, $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$, $H^1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ $\forall n > 1$, $H^k(\mathbb{S}^n) \cong H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$, de donde el Teorema de deduce por inducción sobre n. $\square$

Una consecuencia directa del Teorema 4.4.1 es la siguiente:

Corolario 4.4.1 *Si $n \neq m$, entonces $\mathbb{S}^n$ no tiene el mismo tipo de homotopía*[8] *que $\mathbb{S}^m$ (en particular, no son homeomorfas).*

El siguiente corolario es trivial si cambiamos “homeomorfos” por “isomorfos” (como espacios vectoriales) o “difeomorfos”; la gracia está en que usamos argumentos diferenciables para obtener resultados topológicos.

Corolario 4.4.2 *Si $n \neq m$, entonces $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos.*

[8] En rigor, deberíamos decir aquí “tipo de homotopía diferenciable”. Para eliminar el adjetivo diferenciable, necesitamos que si dos variedades tienen el mismo tipo de homotopía continua, entonces tienen el mismo tipo de homotopía diferenciable. Esto es consecuencia de la discusión final de la Sección 4.2.

Demostración. Supongamos que existiera un homemomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Restringiendo deduciríamos que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^m - \{h(0)\}$. Pero $\mathbb{R}^n - \{0\}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{n-1}$, y $\mathbb{R}^m - \{h(0)\}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{m-1}$, luego tendríamos que $\mathbb{S}^{n-1}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{S}^{m-1}$, contradicción. □

Como el anterior, hay otros muchos resultados clásicos de la topología (teorema del punto fijo de Brouwer, teorema de la invarianza del dominio, teorema de separación de Jordan-Brouwer, etc.) que pueden demostrarse usando cohomología de de Rham, con técnicas parecidas a las anteriores. Como antes, enunciaremos los resultados en toda generalidad pero sólo los los probaremos rigurosamente en la categoría diferenciable.

Teorema 4.4.2 (Teorema del punto fijo de Brouwer)
Toda aplicación continua $f : \overline{\mathbb{D}}^n \to \overline{\mathbb{D}}^n$ *tiene un punto fijo, siendo* $\overline{\mathbb{D}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que f no tiene puntos fijos en $\overline{\mathbb{D}}^n$. Dado $x \in \overline{\mathbb{D}}^n$, consideremos la recta R que une x con $f(x)$ (es única porque $x \neq f(x)$):

$$R = \{x(\lambda) = x + \lambda(x - f(x)) \mid \lambda \geq 0\}.$$

Como R es no acotada, R cortará a $\partial\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{S}^{n-1}$ en dos puntos distintos $x(\lambda_1), x(\lambda_2)$, siendo $\lambda_1 = \lambda_1(x) \geq 0, \lambda_2 = \lambda_2(x) < 0$. Además, λ_1, λ_2 son las soluciones de la siguiente ecuación de segundo grado en λ:

$$\|x + \lambda(x - f(x))\|^2 = 1,$$

luego λ_1, λ_2 son funciones continuas de $x \in \overline{\mathbb{D}}^n$ (de hecho, el que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ implica que λ_1, λ_2 dependen diferenciablemente de λ si f es diferenciable). Consideremos la aplicación $h : \overline{\mathbb{D}}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ dada por

$$x \mapsto h(x) = x(\lambda_1).$$

h es continua (de hecho, h es C^∞ si f lo es) y define una retracción de $\overline{\mathbb{D}}^n$ sobre $\mathbb{S}^{n-1}$, es decir, $h \circ i = 1_{\mathbb{S}^{n-1}}$ donde $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \overline{\mathbb{D}}^n$ es la inclusion. Pasando a cohomología (aquí necesitamos asociar una aplicación inducida a nivel de cohomología a cada aplicación continua), tenemos que $h^* : H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R} \to H^{n-1}(\overline{\mathbb{D}^n}) \cong H^{n-1}(\mathbb{D}^n) = \{0\}$ es inyectiva, contradicción. □

El Teorema del punto fijo de Brouwer tiene muchas aplicaciones a la "vida real"; comentaremos algunas.

- Tomemos una hojas de papel con un sistema de coordenadas (una cuadrícula). Pensemos en dos copias de la hoja, de las cuales una la situamos perfectamente estirada sobre una mesa y la otra la arrugamos (sin romperla), formando con ella una bola de papel arrugado. Ahora situamos la copia arrugada donde queramos, encima de la hoja lisa. Entonces, existe al menos un punto en la hoja arrugada que cae exactamente encima del punto correspondiente de la hoja lisa (es decir, encima del punto de la segunda hoja con las mismas coordenadas que el primer punto). Para entender porqué es esto, identifiquemos $\overline{\mathbb{D}}^2$ con la hoja de papel lisa, y dado $x \in \overline{\mathbb{D}}$ llamemos $\phi(x) \in \mathbb{R}^3$ al punto de la bola arrugada con las mismas coordenadas (bidimensionales) que x, y sea $f = \pi_2 \circ \phi : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ la composición de f con la proyección vertical (asumimos que la bola de papel arrugada, al descansar sobre la hoja lisa, está contenida en el cilindro vertical $\overline{\mathbb{D}} \times \mathbb{R}$, para que f esté valuada en $\overline{\mathbb{D}}$). Por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe $x \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $f(x) = x$, lo que quiere decir que $f(x)$ está situado directamente encima de x.

- Imaginemos que estamos en la terminal de un aeropuerto, y nos encontramos entrente a un mapa de la misma terminal. La aplicación que envía cada punto de la terminal en su imagen sobre el mapa es continua y puede verse como de la terminal en sí misma; por tanto, debe tener un punto fijo, que normalmente se denota por una indicación "usted está aquí". Sin embargo, si encontramos un mapa similar pero fuera de la terminal, dejaría de cumplir la condición de tener igual dominio que codominio, y carecería de puntos fijos.

Corolario 4.4.3 *Una n-forma diferenciable ω sobre $\mathbb{S}^n$ es exacta si y sólo si* $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 0.$

Demostración. Consideremos la aplicación lineal $I : \Omega^n(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{R}$ dada por $I(\alpha) = \int_{\mathbb{S}^n} \alpha$. Si $\beta = \alpha + d\eta$ para $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^n)$, entonces el teorema de Stokes nos da $I(\beta) = I(\alpha)$. Por tanto, podemos inducir I a una aplicación lineal

$$I : H^n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad I([\alpha]) = \int_{\mathbb{S}^n} \alpha.$$

El corolario estará probado si vemos que I es un isomorfismo, o equivalentemente, si $\mathrm{Im}(I) \neq \{0\}$. Para esto último, tomemos una carta $(U, \psi = (x_1, \ldots, x_n))$ de $\mathbb{S}^n$ y una función $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ cumpliendo $f \geq 0$ en $\mathbb{S}^n$, $f(p) > 0$ en al menos un punto $p \in \mathbb{S}^n$ y cuyo soporte es compacto contenido en U. Entonces, extendiendo $f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ por cero a $\mathbb{S}^n$ obtenemos una n-forma $\alpha \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ (cerrada por ser de grado máximo), y

$$I([\alpha]) = \int_{\mathbb{S}^n} \alpha = \int_{\psi(U)} (f \circ \psi^{-1})\, dx_1 \ldots dx_n > 0.$$

Por tanto, I es un isomorfismo. $\square$

Nota 4.4.1 Más adelante generalizaremos el Corolario 4.4.3 a cualquier variedad diferenciable, compacta, conexa y orientable.

A continuación determinamos la cohomología de de Rham de $\mathbb{RP}^n$. En la Sección 2.4 vimos que la igualdad $A \circ A = 1_{\mathbb{S}^n}$ (aquí A es la aplicación antípoda) produce una descomposición $\Omega^k(\mathbb{S}^n) = \Omega^k_+(\mathbb{S}^n) \oplus \Omega^k_-(\mathbb{S}^n)$, donde

$$\Omega^k_{\pm}(\mathbb{S}^n) = \{\omega \in \Omega^k(\mathbb{S}^n) \mid A^*\omega = \pm\omega\}.$$

Esta descomposición se traslada a la cohomología:

$$H^k(\mathbb{S}^n) = H^k_+(\mathbb{S}^n) \oplus H^k_-(\mathbb{S}^n),$$

donde $H^k_{\pm}(\mathbb{S}^n) = \{[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n) \mid \omega \in \Omega^k_{\pm}(\mathbb{S}^n)\}$. Por otro lado, si llamamos $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ a la proyección canónica, el que $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{RP}^n) \to \Omega^k_+(\mathbb{S}^n)$ sea un isomorfismo hace que

$$\pi^* : H^k(\mathbb{RP}^n) \to H^k_+(\mathbb{S}^n)$$

también sea un isomorfismo. Por tanto, $H^k(\mathbb{RP}^n) \cong H^k_+(\mathbb{S}^n) \leq H^k(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ si $0 < k < n$, luego para tales k es $H^k(\mathbb{RP}^n) = \{0\}$. Para $k = n$ tenemos $H^n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$, generada por una forma de volumen ω en $\mathbb{S}^n$. Pero $\omega \in \Omega^n_+(\mathbb{S}^n)$ si y sólo si $\mathbb{RP}^n$ es orientable, es decir, si y sólo si n es impar. De aquí que $H^n_+(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ si n es par, y $H^n_+(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$ si n es impar. Con esto hemos probado:

Proposición 4.4.1 *La cohomología de de Rham de $\mathbb{RP}^n$ viene dada por*

$$H^k(\mathbb{RP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & si \;\; k = 0 \\ \{0\} & si \;\; 0 < k < n, \end{cases} \qquad H^n(\mathbb{RP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & si \; n \; par, \\ \{0\} & si \; n \; impar. \end{cases}$$

Teorema 4.4.3 *$\mathbb{S}^n$ admite un campo de vectores sin ceros si y sólo si n es impar.*

Demostración. En $\mathbb{S}^{2k-1}$ podemos considerar el campo tangente $X(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1})$, que no tiene ceros.

Recíprocamente, supongamos que existe $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ sin ceros y veamos que n es impar. Consideremos la aplicación diferenciable $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por $f(p) = \frac{X(p)}{\|X_p\|}$, que tiene sentido porque X no tiene ceros. Claramente, no puede existir $p \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p) = p$ (porque entonces sería $X_p = \|X_p\|p$, que no es tangente a $\mathbb{S}^n$) o tal que $f(p) = -p$ (por la misma razón). Por la Afirmación 4.4.1 que probaremos abajo, tenemos que f es diferenciablemente homotópica a A (aplicación antípoda) y a $1_{\mathbb{S}^n}$. Por transitividad, A es diferenciablemente homotópica a $1_{\mathbb{S}^n}$, luego a nivel de $H^n(\mathbb{S}^n)$ inducen la misma aplicación lineal. Esto dice que $A^*\omega = \omega$ donde ω es una forma de volumen de $\mathbb{S}^n$, lo cual sabemos que ocurre si y sólo si n es impar. □

Afirmación 4.4.1 *Sean $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ diferenciables. Si $f(p) \neq g(p)$ $\forall p \in \mathbb{S}^n$, entonces f es diferenciablemente[9] homotópica a $-g$.*

Demostración. Sea $\psi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ una función diferenciable auxiliar cumpliendo: $\psi(t) = 0$ si $t \leq 0$, $\psi(t) = 1$ si $t \geq 1$, ψ es estrictamente creciente en $(0, 1)$ y $\psi(1/2) = 1/2$. Definimos $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^n$ mediante

$$H(p, t) = \frac{\psi(t)f(p) + (\psi(t) - 1)g(p)}{\|\psi(t)f(p) + (\psi(t) - 1)g(p)\|}.$$

H será diferenciable si vemos que $\psi(t)f(p) + (\psi(t) - 1)g(p)$ no tiene ceros. Si $(p, t) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ cumplen $\psi(t)f(p) + (\psi(t) - 1)g(p) = 0$, entonces $\psi(t)f(p) = (1 - \psi(t))g(p)$. Tomando normas y usando que f, g están valuadas en $\mathbb{S}^n$ tenemos $2\psi(t) = 1$ luego $t = 1/2$, de donde deducimos que $f(p) = g(p)$. Así, H es diferenciable. Es fácil ver que H es una homotopía entre f y $-g$. □

Imaginemos que situamos un vector normal y no cero en cada punto de $\mathbb{S}^{2n}$, y llamemos "pelos" a cada uno de estos vectores. El teorema 4.4.3 no dice que es imposible peinar estos pelos, es decir situarlos de forma tangente a $\mathbb{S}^{2n}$ en todo punto, si al menos uno de ellos no es cero. Por ello, este resultado suele llamarse "teorema de la bola peluda".

El teorema 4.4.3 tiene una curiosa apllicación meteorológica: consideremos un planeta con atmósfera. El viento puede considerarse como un campo de vectores que actúa sobre cada punto de la superficie del planeta. Supondremos que la componente no tangencial a la superficie es despreciable en comparación con el tamaño del planeta. Un posible escenario, bastante poco realista, es imaginar que el aire no se mueve en absoluto, lo que corresponde a viento cero en cada punto. Pero es más interesante suponer que hay viento: en tal caso, el teorema anterior nos dice que en cada instante siempre hay un punto de la superficie planetaria donde no hay nada de viento. Debido a que no es posible que el viento fluya desde ni hacia este cero del campo, el comportamiento del campo alrededor de un cero siempre será de forma espiral (en un sentido de giro u otro), con centro en ese cero, tal y como ocurre en un ciclón. En ese sentido, el teorema de la bola peluda nos dice que en todo instante debe existir algún ciclón en algún punto de la Tierra (aunque no informa sobre el tamaño del ojo del ciclón, o sobre la magnitud del viento que rodea al ojo).

Proposición 4.4.2 *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una subvariedad cerrada. Entonces*

$$H^p(\mathbb{R}^{n+1} - M) \cong H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+2} - M), \quad \textit{para} \quad p \geq 1,$$
$$H^0(\mathbb{R}^{n+1} - M) \cong H^1(\mathbb{R}^{n+2} - M) \oplus \mathbb{R}, \quad H^0(\mathbb{R}^{n+2} - M) \cong \mathbb{R}.$$

[9] Este enunciado es cierto para funciones continuas $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ siendo X cualquier espacio topológico, cambiando "diferenciablemente homotópicas" por simplemente "homotópicas". La demostración es la misma, pero la homotopía $H : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^n$ cambia a $H : X \times [0, 1] \to \mathbb{S}^n$, tomando $\psi(t) = t$.

Proposición 4.4.3 *Sean M^n y N^n dos subvariedades cerradas de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\phi : M \to N$ un difeomorfismo. Entonces ϕ se extiende a un difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^{2(n+1)} \to \mathbb{R}^{2(n+1)}$, donde $\mathbb{R}^{n+1}$ está incluido en $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ por $x \mapsto (x, 0)$.*

Corolario 4.4.4 *Si M^n y N^n son dos subvariedades cerradas de $\mathbb{R}^{n+1}$ difeomorfas, entonces*

$$H^p(\mathbb{R}^{n+1} - M) \cong H^p(\mathbb{R}^{n+1} - N), \quad \forall p \geq 0.$$

En particular $\mathbb{R}^{n+1} - M$ y $\mathbb{R}^{n+1} - N$ tienen el mismo número de componentes conexas.

Corolario 4.4.5 *(***Teorema de separación de Jordan-Brouwer***) El compleneto de una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$ difeomorma a $\S^n$ tiene dos componentes conexas.*

4.5. Cohomología de grado máximo. Clase fundamental.

En esta sección generalizaremos algunos de los resultados obtenidos para la cohomología de la esfera. Sea M^n una variedad compacta y orientada de dimensión n. Si $\alpha, \beta \in \Omega^n(M)$ cohomólogas, esto es $\beta = \alpha + d\gamma$ para cierta $\gamma \in \Omega^{n-1}(M)$, entonces el teorema de Stokes implica que

$$\int_M \beta = \int_M \alpha + \int_M d\gamma = \int_M \alpha.$$

Por tanto, tiene sentido la aplicación lineal $I : H^n(M^n) \to \mathbb{R}$ dada por

$$I([\alpha]) = \int_M \alpha, \quad \forall [\alpha] \in H^n(M). \tag{4.6}$$

Para probar que I es un epimorfismo de espacios vectoriales, bastará comprobar que I no es idénticamente nula. Podemos probar esto repitiendo el argumento de la demostración del Corolario 4.4.3, o también usar que si ω_0 es una n-forma sin ceros sobre M (que existe en nuestras condiciones), entonces $\int_M \omega_0 \neq 0$.

Tal y como ocurría para $\mathbb{S}^n$, I es un isomorfismo; pero ahora no conocemos a priori $H^n(M)$ para deducir esto de la sobreyectividad de I, sino que será al revés.

Teorema 4.5.1 *Sea M^n una variedad compacta, conexa y orientada. Entonces, la aplicación lineal $I : H^n(M) \to \mathbb{R}$ dada por (4.6) es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, $H^n(M^n) \cong \mathbb{R}$. A la clase de cohomología que se aplica por I en $1 \in \mathbb{R}$ se le llama la* clase fundamental de M^n.

Para demostrar el Teorema necesitamos algunos resultados previos. Primero observemos que toda $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R})$ es exacta (porque $H^n(\mathbb{R}^n) = \{0\}$). Pero si ω tiene soporte compacto, ¿tenemos asegurada la existencia de una $(n-1)$-forma η *de soporte compacto* tal que $d\eta = \omega$? Desde luego si η existe, el teorema de Stokes asegura que $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} d\eta = 0$. Lo interesante es que el recíproco es cierto.

Lema 4.5.1 *Sea* $\Omega_c^k(\mathbb{R}^n) = \{\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n) \mid \text{soporte}(\omega) \text{ es compacto}\}$*, y sea* $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$*. Entonces:*

$$\exists \eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n) \mid d\eta = \omega \;\Leftrightarrow\; \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0.$$

Demostración. Sólo tenemos que probar la condición suficiente. Sea $\mathbb{B}(r)$ una bola abierta centrada en el origen y de radio r tal que soporte$(\omega) \subset \mathbb{B}(r)$. Como $H^n(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ y ω es cerrada, existe $\widehat{\eta} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $d\widehat{\eta} = \omega$. Pero $\widehat{\eta}$ no tiene necesariamente soporte compacto. Vamos a rectificarla con un término para que lo tenga, sin perder su relación con ω.

Como $d\left(\widehat{\eta}|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)}\right) = (d\widehat{\eta})|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)} = \omega|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)} = 0$, tenemos que $\widehat{\eta}|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)}$ genera una clase de cohomología $[\widehat{\eta}|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)}] \in H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)) \cong H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R}$.

Por otro lado, la inclusión $i : \partial\mathbb{B}(r) \to \mathbb{R}^n - B(r)$ es una equivalencia homotópica, luego induce un isomorfismo a nivel de la cohomología $(n-1)$-dimensional,

$$i^* : H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)) \to H^{n-1}(\partial\mathbb{B}(r)) \cong \mathbb{R}, \quad i^*([\theta]) = [i^*\theta] = [\theta|_{\partial\mathbb{B}(r)}].$$

Recordemos que la integración produce un isomorfismo de $H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ en $\mathbb{R}$. Además, el Teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{\partial\mathbb{B}(r)} \widehat{\eta}|_{\partial\mathbb{B}(r)} = \int_{\overline{\mathbb{B}}(r)} d\widehat{\eta} = \int_{\overline{\mathbb{B}}(r)} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0,$$

Luego $i^*([\widehat{\eta}|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)}]) = 0$ en $H^{n-1}(\partial\mathbb{B}(r))$. Como i^* es un isomorfismo, deducimos que $[\widehat{\eta}|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)}] = 0$ en $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r))$, y por tanto existe $\alpha \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r))$ tal que $d\alpha = \widehat{\eta}|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r)}$. Ahora extendemos α a todo $\mathbb{R}^n$: tomemos una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = 0$ en un entorno de $\mathbb{B}(r)$, $f = 1$ en $\mathbb{B}(2r)$. Definimos $\widetilde{\alpha} \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n)$, $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$\widetilde{\alpha} = \begin{cases} f\,\alpha & \text{en } \mathbb{R}^n - \mathbb{B}(r), \\ 0 & \text{en } \mathbb{B}(r), \end{cases} \qquad \eta = \widehat{\eta} - d\widetilde{\alpha}.$$

Fuera de $\mathbb{B}(2r)$ tenemos $d\widetilde{\alpha} = d(f\,\alpha) = d(\alpha) = \widehat{\eta}$ luego $\eta|_{\mathbb{R}^n - \mathbb{B}(2r)} = 0$. Por tanto, η tiene soporte compacto, y $d\eta = d\widehat{\eta} = \omega$ en $\mathbb{R}^n$, lo que termina de probar el lema. □

Una consecuencia directa del Lema 4.5.1 es que dadas $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$$\exists \eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n) \mid d\eta = \omega_1 - \omega_2 \;\Leftrightarrow\; \int_{\mathbb{R}^n} \omega_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_2. \tag{4.7}$$

Lema 4.5.2 *Sea* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto no vacío y* $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$*. Entonces, existe* $\omega_1 \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ *con* soporte$(\omega_1) \subset U$ *tal que* $\omega - \omega_1$ *es la diferencial exterior de una* $(n-1)$*-forma de soporte compacto en* $\mathbb{R}^n$*.*

Demostración. Usando una función meseta con soporte compacto contenido en U, podemos encontrar $\omega_1 \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ tal que soporte$(\omega) \subset U$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega$. Usando (4.7) concluiremos la demostración del lema. □

Ahora pasaremos el Lema 4.5.2 a una variedad diferenciable M^n. Dado $k = 0, \ldots, n$, llamaremos

$$\Omega_c^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \text{soporte}(\omega) \text{ es compacto}\}.$$

Lema 4.5.3 *Sea $U \subset M^n$ un abierto no vacío de una variedad diferenciable y conexa. Dada $\omega \in \Omega_c^n(M)$, existe $\omega_1 \in \Omega_c^n(M)$ con* soporte$(\omega_1) \subset U$ *tal que $\omega - \omega_1$ es la diferencial exterior de una $(n-1)$-forma de soporte compacto en M.*

Demostración. PRIMERO PROBAREMOS EL LEMA SUPONIENDO QUE SOPORTE$(\omega) \subset V$, DONDE $V \subset M$ ES UN ABIERTO DE M DIFEOMORFO A $\mathbb{R}^n$.

Tomemos un abierto $W \subset U$ que sea difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Tomemos una cadena finita de abiertos $O_1, \ldots O_r$ de M tales que $O_1 = V$, $O_r = W$, cada O_i es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y $O_i \cap O_{i+1} \neq \emptyset$ $\forall i = 1, \ldots, r-1$ (esto puede conseguirse uniendo un punto de V con otro de W mediante una curva continua, tomando un recubrimiento de la curva por abiertos de M difeomorfos a $\mathbb{R}^n$ y usando la compactidad de la curva).

Aplicando el Lema 4.5.2 a $O_1 \cap O_2$ (que podemos ver como abierto de $\mathbb{R}^n$) y a $\omega|_{O_1} \in \Omega_c^n(O_1)$ (nótese que O_1 es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$), deducimos que existe $\widetilde{\omega}_1 \in \Omega_c^n(O_1)$ con soporte$(\widetilde{\omega}_1) \subset O_1 \cap O_2$ tal que $\omega|_{O_1} - \widetilde{\omega}$ es la diferencial exterior de una $(n-1)$-forma $\alpha_1 \in \Omega_c^{n-1}(O_1)$. Extendiendo por cero $\widetilde{\omega}_1, \alpha_1$ a M podemos considerar ambas formas en $\Omega_c^k(M)$, $k = n-1, n$.

Aplicando el Lema 4.5.2 a $O_2 \cap O_3$ (que podemos ver como abierto de $\mathbb{R}^n$) y a $\widetilde{\omega}_1|_{O_2} \in \Omega_c^n(O_2)$ (nótese que O_2 es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$), deducimos que existe $\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_c^n(O_2)$ con soporte$(\widetilde{\omega}_2) \subset O_2 \cap O_3$ tal que $\omega|_{O_2} - \widetilde{\omega}|_1$ es la diferencial exterior de una $(n-1)$-forma $\alpha_2 \in \Omega_c^{n-1}(O_1)$. Extendiendo por cero $\widetilde{\omega}_2, \alpha_2$ a M podemos considerar ambas formas en $\Omega_c^k(M)$, $k = n-1, n$.

Reiterando el proceso, probaremos el lema en este primer caso.

AHORA DEMOSTRAREMOS EL LEMA EN EL CASO GENERAL.

Sea $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento localmente finito de M por abiertos difeomorfos a $\mathbb{R}^n$, y $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento. Por ser compacto el soporte de ω, sólo cortará a una cantidad finita de V_i a los que llamamos $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$. En particular, $\varphi_{i_1} + \ldots + \varphi_{i_k} = 1$ en el soporte de ω. Así, $\omega = \sum_{j=1}^k \varphi_{i_j}\omega$, y cada $\varphi_{i_j}\omega$ está en las hipótesis del caso anterior. Entonces, el Lema aplicado a $\varphi_{i_j}\omega$ produce una n-forma $\widetilde{\omega}_j \in \Omega_c^n(M)$ con soporte$(\widetilde{\omega}_j) \subset U$ tal que $\varphi_{i_j}\omega - \widetilde{\omega}_j$ es la diferencial de una forma $\eta_j \in \Omega_c^{n-1}(M)$, $\forall j = 1 \ldots, k$. Así, $\omega := \sum_{j=1}^k \widetilde{\omega}_j \in \Omega_c^n(M)$, $\eta := \sum_{j=1}^k \eta_j \in \Omega_c^{n-1}(M)$, soporte$(\widetilde{\omega}) \subset U$ y $d\eta = \omega$. □

Demostración del Teorema 4.5.1. Por la discusión previa al enunciado del teorema, la aplicación $I : H^n(M) \to \mathbb{R}$ está bien definida y es un epimosfirmo de espacios vectoriales.

Queda ver que $\ker(I) = \{0\}$, es decir que si $\omega \in \Omega^n(M)$ cumple $\int_M \omega = 0$, entonces ω es exacta.

Tomemos un abierto $U \subset M$ difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por el Lema 4.5.3, existe $\omega_1 \in \Omega_c^n(M) = \Omega^n(M)$ con soporte$(\omega_1) \subset U$, tal que $\omega - \omega_1 = d\eta$ para cierta $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M) = \Omega^{n-1}(M)$. Por el Teorema de Stokes,

$$0 = \int_M \omega = \int_M \omega_1 + \int_M d\eta = \int_M \omega_1 = \int_U \omega_1. \tag{4.8}$$

Como U es difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, podemos aplicar el Lema 4.5.1 a U y a $\omega_1|_U \in \Omega_c^n(U)$. Así, (4.8) implica que existe $\eta \in \Omega_c^{n-1}(U)$ tal que $\omega_1|_U = d\eta$ en U. Extendiendo η por cero a M, tenemos $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$ y $\omega = d\eta$ en M. Así, en $H^n(M)$ se tiene $[\omega] = [\omega_1] = 0$. $\square$

4.6. Grado de aplicaciones diferenciables.

En esta sección, M^n y N^n denotarán dos variedades conexas, compactas, orientadas y de la misma dimensión. Toda aplicación $\Psi \in C^\infty(M, N)$ induce una aplicación lineal $\Psi^* : H^n(N) \to H^n(M)$, y el Teorema 4.5.1 produce un diagrama conmutativo de aplicaciones lineales (las flechas verticales son isomorfismos)

$$\begin{tikzcd} H^n(N) \arrow[r, "\Psi^*"'] \arrow[d, "I"', "(\cong)"] & H^n(M) \arrow[d, "I"', "(\cong)"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de la forma $\varphi(x) = a\,x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, para cierto $a \in \mathbb{R}$ fijo. La conmutatividad del diagrama nos dice que $\int_M \Psi^*\omega = a \int_N \omega$, $\forall \omega \in \Omega^n(N)$.

Definición 4.6.1 En la situación anterior, al número real a se le llama el *grado de* Ψ y se le representa por $\deg(\Psi)$. Así pues,

$$\int_M \Psi^*\omega = \deg(\Psi) \int_N \omega, \quad \forall \omega \in \Omega^n(N).$$

Veamos algunas propiedades sencillas del grado.

Proposición 4.6.1

1. *El grado depende de las orientaciones fijadas en M, N, pero si $M = N$ ya no depende de la orientación prescrita en M.*

2. $\deg(1_M) = 1$.

3. *Si* $\Psi : M \to N$ *es un difeomorfismo, entonces* $\deg(\Psi) = 1$ *si* Ψ *conserva la orientación y* $\deg(\Psi) = -1$ *si la invierte.*

4. *Si* $\Psi : M^n \to N^n$ *es constante, entonces* $\deg(\Psi) = 0$.

5. *Si* $\Psi : M^n \to N^n$ *y* $\Phi : N^n \to P^n$ *son aplicaciones diferenciables entre variedades conexas, compactas y orientadas, entonces* $\deg(\Psi \circ \Phi) = \deg(\Psi)\deg(\Phi)$.

6. *Si* $\Psi, \Phi \in C^\infty(M^n, N^n)$ *son diferenciablemente*[10] *homotópicas, entonces* $\deg(\Psi) = \deg(\Phi)$.

Demostración. *1,2,4,5* son triviales. *3* es consecuencia de la fórmula del cambio de variable (Teorema 2.5.2) y *6* se deduce del Teorema 4.2.1. □

Ejemplo 4.6.1 *La aplicación antípoda* $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ *tiene grado* $deg(A) = (-1)^{n+1}$.

A continuación veremos un método para calcular el grado de una aplicación diferenciable $\Psi : M^n \to N^n$ entre variedades conexas, compactas y orientadas. Consideremos un valor regular $q \in N$ de Ψ, esto es $d\Psi_p$ es sobreyectiva $\forall p \in \Psi^{-1}(q)$ (como M y N tienen la misma dimensión, $d\Psi_p$ es un isomorfismo para tales p). El teorema de Sard (Teorema 2.5.1) nos asegura que los valores regulares de Ψ son densos en N. Por el teorema de la función inversa, los puntos de $\Psi^{-1}(q)$ son aislados y por ser M compacta, $\Psi^{-1}(q)$ es finito, pongamos $\Psi^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset M$. Como M, N están orientadas y $d\Psi_{p_i} : T_{p_i}M \to T_q N$ es un isomorfismo, se puede definir el *signo de* Ψ *en* p_i por

$$\mathrm{sig}(\Psi, p_i) = \pm 1,$$

según que $d\Psi_{p_i}$ conserve o invierta la orientación.

Teorema 4.6.1 *En las condiciones anteriores,*

$$\deg(\Psi) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{sig}(\Psi, p_i). \tag{4.9}$$

(En particular, el miembro de la derecha no depende del valor regular q elegido).

[10] Sigue siendo válido si sólo exigimos que Ψ, Φ sean homotópicas (continuamente).

Demostración. Teníamos un valor regular $q \in N$ y $\Psi^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Como $d\Psi_{p_i}$: $T_{p_i}M \to T_qN$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, el Teorema de la Función inversa nos da entornos abiertos U_i de p_i y V_i de q tales que $\Psi|_{U_i} : U_i \to V_i$ es un difeomorfismo. Podemos suponer que los U_i son todos disjuntos. Cambiando V_i por $V := \cap_{i=1}^m V_i$ y redefiniendo U_i como $(\Psi|U_i)^{-1}(V)$, tenemos $\Psi^{-1}(V) = U_1 \cup \ldots \cup U_m$. Tampoco perdemos generalidad tomando V conexo (y por tanto todos los U_i también lo son).

Por el Lema 4.5.3, podemos tomar una n-forma $\omega \in \Omega^n(N)$ con soporte$(\omega) \subset V$ y $\int_N \omega = 1$. Así,

$$\int_M \Psi^*\omega = \deg(\Psi) \int_N \omega = \deg(\Psi).$$

Ahora calcularemos la integral de la izquierda. Como soporte$(\omega) \subset V$, tenemos que soporte$(\Psi^*\omega) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$, y como los U_i son disjuntos,

$$\int_M \Psi^*\omega = \sum_{i=1}^m \Psi^*\omega \overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \int_V \omega \tag{4.10}$$

donde en $(\star)$ hemos usado la fórmula de cambio de variable (Teorema 2.5.2), y $\varepsilon = 1$ (resp. -1) si $\Psi|_{U_i} : U_i \to V$ conserva la orientación (resp. invierte la orientación). Como U_i es conexo y $p_i \in U_i$, tenemos que $\Psi|_{U_i} : U_i \to V$ conserva la orientación si y sólo si $d\Psi_{p_i} : T_{p_i}M \to T_qN$ conserva la orientación. Ahora la fórmula (4.9) se deduce directamente de (4.10). □

Corolario 4.6.1 *Sea $\Psi : M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades conexas, compactas, orientadas y de la misma dimensión. Entonces:*

1. $\deg(\Psi) \in \mathbb{Z}$.
2. *Si Ψ no es sobreyectiva* $\Rightarrow \deg(\Psi) = 0$.

Nota 4.6.1 El punto 2 anterior es útil para probrar que ciertas ecuaciones $\Psi(p) = q$ tienen solución: basta probar que $\Psi : M \to N$ tiene grado distinto de cero. Por otro lado y como ocurre con otros resultados anteriores, el hecho de que toda aplicación continua sea homotópica a una diferenciable hace que pueda extenderse la definición de grado a aplicaciones continuas $f : M^n \to N^n$ siendo M, N compactas, conexas y orientadas. Incluso puede evitarse la hipótesis de compacidad sobre M, imponiendo que f sea propia (es decir, la imagen inversa de cada compacto de N es compacta en M). En estas condiciones mucho más generales, el grado es independiente de la clase de homotopía de la aplicación f, y el Corolario 4.6.1 sigue siendo válido.

Ejercicios.

1. Probar que la cohomología de de Rham del toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ viene dada por

$$H^k(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R} \quad \text{si k=0,2}, \quad H^1(\mathbb{T}) \cong \mathbb{R}^2.$$

Demostrar que si $[\omega] \in H^1(\mathbb{S}^1)$ es un generador (esto es una clase no nula), entonces $\{\pi_1^*[\omega], \pi_2^*[\omega]\}$ es una base de $H^1(\mathbb{T})$, siendo $\pi_i : \mathbb{T} \to \mathbb{S}^1$, $i = 1, 2$ las proyecciones (indicación: probar que $\pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\omega$ es un elemento de volumen en $\mathbb{T}$).

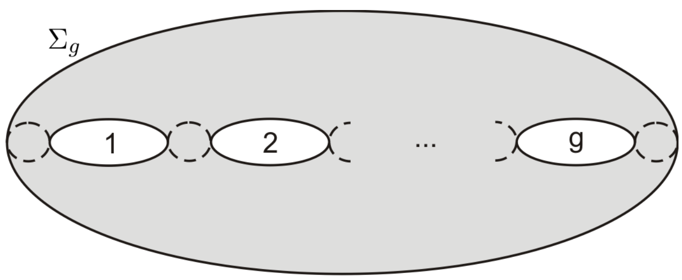
2. Dados $p_1, \ldots, p_m$ con $m \in \mathbb{N}$, demostrar que la cohomología de $\mathbb{R}^n - \{p_1, \ldots, p_m\}$ es

$$H^0(\mathbb{R}^n - \{p_1, \ldots, p_m\}) \cong \mathbb{R}, \quad H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{p_1, \ldots, p_m\}) \cong \mathbb{R}^m,$$

$$H^k(\mathbb{R}^n - \{p_1, \ldots, p_m\}) = \{0\} \quad \forall k = 1, \ldots, n-2, n.$$

(Indicación usar inducción sobre m; caer en la hipótesis de inducción usando la sucesión de Mayer-Vietoris).

3. Cohomología de de Rham de las superficies compactas y orientables. Admitiendo que cada superficie compacta y orientable Σ es difeomorfa a la superficie Σ_g siguiente para algún $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcularemos en este ejercicio sus espacios de cohomología de de Rham:



   a) Sea D_g un abierto de $\mathbb{R}^2$ producido quitando g discos cerrados disjuntos a un disco abierto. Probar que la cohomología de de Rham de D_g viene dada por

$$H^k(D_g) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^g & \text{si } k = 1 \\ \{0\} & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

   (Indicación: probarlo por inducción sobre g, usando la sucesión de Mayer-Vietoris).

b) Probar que la cohomología de de Rham de Σ_g viene dada por

$$H^k(D_g) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

(Indicación: Dividir Σ_g en dos mitades cortándola por su plano de simetría horizontal, y usar la sucesión de Mayer-Vietoris).

4. Sea M^n una variedad diferenciable, orientada y $D \subset M$ un dominio compacto con borde diferenciable y conexo (por tanto, ∂D es una $(n-1)$-variedad compacta y orientada según la orientación inducida). Sea $\Psi : \partial D \to N^{n-1}$ una aplicación diferenciable valuada en una variedad conexa, compacta y orientada con la misma dimensión que ∂D. Probar que si Ψ admite una extensión diferenciable $\widetilde{\Psi} : D \to N$, entonces $\deg(\Psi) = 0$.

5. Teorema fundamental del álgebra.
Sea $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ un polinomio con coeficientes complejos. El objetivo de este ejercicio es demostrar que P tiene al menos un cero en $\mathbb{C}$. El argumento es por reducción al absurdo, luego supongamos en adelante que $P(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

   a) Sea $R > 0$ y $\mathbb{S}^1(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Consideremos las aplicaciones $\Psi, \Phi : \mathbb{S}^1(R) \to \mathbb{S}^1(1)$ dadas por $\Psi(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}$, $\Phi(z) = \frac{z^n}{R^n}$. Probar que $\deg(\Psi) = 0$ y $\deg(\Phi) = n$.

   b) Demostrar que existe $R > 0$ tal que $z^n + \lambda(a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n) \neq 0$ $\forall (z, \lambda) \in \mathbb{S}^1(R) \times [0, 1]$.

   c) Para el radio R del apartado anterior, construir una homotopía diferenciable entre Ψ y Φ, lo que implica que $\deg(\Psi) = \deg(\Phi)$, contradicción.

6. Cohomología con soportes compactos.
Sea M^n una variedad diferenciable y $k = 0, \ldots, n$. Recordemos que $\Omega^k_c(M)$ es el subconjunto de $\Omega^k(M)$ formado por las k-formas de soporte compacto. Probar que:

   a) $\Omega^k_c(M)$ es un subespacio vectorial de $\Omega^k(M)$, $\Omega_c(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k_c(M)$ es un subálgebra de $\Omega(M)$ y la diferencial exterior cumple $d\left(\Omega^k_c(M)\right) \subset \Omega^{k+1}_c(M)$.

   b) Los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $\Omega^k_c(M)$:

$$Z^k_c(M) = \{\omega \in \Omega^k_c(M) \mid d\omega = 0\}, \quad B^k_c(M) = d\left(\Omega^{k-1}_c(M)\right),$$

   Se define el *k-ésimo espacio de cohomología con soportes compactos* como

$$H^k_c(M) = \frac{Z^k_c(M)}{B^k_c(M)}.$$

Nótese que las funciones constantes no están en $\Omega_c^k(M)$, a menos que M sea compacta (y en tal caso, la cohomología con soportes compactos coincide con la cohomología de de Rham usual). La aplicación

$$i : H_c^k(M) \to H^k(M), \quad i([\omega]) = [\omega],$$

es lineal, pero no es necesariamente un monomorfismo.

c) Si M es conexa y no compacta, entonces $H_c^0(M) = \{0\}$.

d) Si $f \in C^\infty(M, N)$ es una aplicación *propia* (es decir, la imagen inversa de cada compacto de N es compacta en M) entre variedades diferenciables, entonces f induce una aplicación lineal $f^* : H_c^k(N) \to H_c^k(M)$ mediante $f^*([\omega]) = [f^*\omega]$, $\forall \omega \in H_c^k(N)$. Además, las propiedades habituales $(1_M)^* = 1_{H_c^k(M)}$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ son ciertas. En particular, dos variedades difeomorfas tienen álgebras de cohomología con soportes compactos isomorfas.

e) Modificar la demostración del Lema 4.5.1 para obtener que

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \{0\} & \text{si} \ \ 0 \leq k < n, \\ \mathbb{R} & \text{si} \ \ k = n, \end{cases}$$

y que la integración $I : H_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dada por $I([\alpha]) = \displaystyle\int_M \alpha$, proporciona un isomorfismo de espacios vectoriales.