Teoretické otázky ke zkoušce z předmětu Úvod do algebry

V odpovědích na tyto otázky je nutné přesně definovat použité pojmy a na základě těchto definic odvodit resp. dokázat, co se žádá.

Polynomy

1. Proč kořenový činitel dělí polynom beze zbytku.
2. Proč celočíselný kořen polynomu s celočíselnými koeficienty dělí a_0.
3. Dokažte, že ke každému kořenu polynomu s reálnými koeficienty existuje kořen komplexně sdružený.
4. Proč ke každým dvěma polynomům p, q (q nenulový) je určen částečný podíl a zbytek jednoznačně?
5. Nechť má polynom $a_n = 1$ a má jen reálné nebo po dvou komplexně sdružené kořeny. Proč pak má všechny koeficienty reálné?
6. Proč polynom lichého stupně s reálnými koeficienty musí mít alespoň jeden reálný kořen?
7. Proč nemůže mít polynom stupně n více než n vzájmeně různých kořenů?
8. Proč je polynom stupně n určen jednoznačně svými hodnotami v $n + 1$ různých bodech?

Lineární prostor

9. Odvoďte z axiomů linearity (v definici lineárního prostoru) vlastnosti: a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = x$, b) $\alpha\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ pro $\boldsymbol{x}$ libovolný prvek lineárního prostoru, $\boldsymbol{o}$ nulový prvek a $\alpha \in \mathbf{R}$.
10. Ověřte podrobně, že $\mathbf{R}^n$ s obvyklým $+$, $\cdot$ tvoří lineární prostor.
11. Ukažte, že množina nekonečných posloupností s $+$ a $\cdot$ definovaným „po složkách“ tvoří LP.
12. Proč je množina všech posloupností s limitou=0 lineárním podprostorem LP všech posloupností?
13. Proč množina $M = \{(a, b, c, d), |a| = |b|, |c| = |d|\}$ není podprostorem R^4?
14. Zdůvodněte, proč průnik lineárních podprostorů je lineární podprostor a sjednocení lineárních podprostorů nemusí být lineární podprostor.

Lineární závislost, obal, báze

15. Zdůvodněte podrobně z axiomů linearity, proč triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.
16. Proč přítomnost nulového vektoru ve skupině vektorů zaručuje lineární závislost této skupiny?
17. Podrobně zdůvodněte, proč v lineárním prostoru reálných funkcí jsou funkce f, g, h dané vzorci $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$ a $h(x) = 1$ jsou lineárně nezávislé.
18. Dokažte větu: vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když existuje jeden, který je lineární kombinací ostatních.
19. Předpokládejte konečnou neprázdnou lineárně závislou množinu vektorů M. Zdůvodněte, proč přidáním vektoru k množině M vznikne lineárně závislá množina.
20. Předpokládejte konečnou aspoň dvouprvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů M. Zdůvodněte, proč odebráním vektoru z množiny M vznikne lineárně nezávislá množina.
21. Vysvětlete z definice lineární závislosti, proč lineární závislost není ovlivněna pořadím vektorů.
22. Vysvětlete z definice lineární závislosti, proč skupina vektorů, v níž se nějaký vektor opakuje, je lineárně závislá.
23. Definujte lineární obal i pro nekonečné množiny. Zdůvodněte, proč $z \in \langle M \rangle$ právě tehdy, když existuje konečně mnoho vektorů z M tak, že z je jejich lineární kombinací.
24. Dokažte $\langle lob < M > \rangle = \langle M \rangle$.
25. Proč je množina vektorů M lineárním podprostorem právě tehdy, když je $\langle M \rangle = M$?
26. Proč je lineární obal jakékoli množiny podprostor?
27. Zdůvodněte, proč je lineární obal množiny M nejmenším podprostorem, který obsahuje M.
28. Předpokládejte N lineárně nezávislou množinu a $z \notin \langle M \rangle$. Dokažte, že přidáním vektoru z k N zůstává tato množina lineárně nezávislá.
29. Popište postup, jakým lze (v lineárním prostoru s konečnou dimenzí) doplnit libovolnou lineárně nezávislou množinu N na bázi.
30. Zdůvodněte, proč lze z lineárně závislé množiny M odebrat vektor tak, že lineární obal zmenšené množiny je stejný jako lineární obal původní množiny M.
31. Zformulujte (bez důkazu) Steintzovu větu o výměně a vysvětlete její využití v důkaze tvrzení, že každé dvě báze stejného lineárního prostoru mají stejný počet prvků.

32. Proč lineárně nezávislá množina vektorů nesmí mít více prvků, než dimenze lineárního prostoru těchto vektorů?
33. V lineárním prostoru L uvažujte množinu M, která má více prvků, než $\dim L$. Proč musí být M lineárně závislá?
34. Dokažte, že pokud má množina M stejně prvků, jako je $\dim L$, pak je lineárně nezávislá právě tehdy, když $\langle M \rangle = L$.
35. Zdůvodněte, proč množina $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ tvoří bázi lineárního prostoru všech polynomů.
36. Podrobně zdůvodněte, proč množina polynomů $\{x^2+1, x, x-1\}$ tvoří bázi lineárního prostoru všech polynomů nejvýše druhého stupně.

Matice

37. Proč matice typu (m, n) tvoří lineární prostor? Jakou má tento prostor dimenzi?
38. Proč GEM nemění lineární obal řádků?
39. Jak GEM slouží k výpočtu hodnosti matice? Popište metodu a zdůvodněte, proč tato metoda skutečně počítá hodnost matice.
40. Popište metodu ověření lineární závislosti vektorů z $\mathbf{R}^n$ eliminací matice, ve které jsou tyto vektory zapsány po řádcích. Jak tato metoda souvisí s definicí lineární závislosti?
41. Definujte maticové násobení. Proč čtvercová matice A komutuje s A^2?
42. Dokažte asociativitu maticového násobení.
43. Dokažte asociativitu maticového násobení a maticového násobku.
44. Zdůvodněte, proč maticové násobení nemusí být komutativní ani pro čtvercové matice.
45. Proč má horní trojúhelníková matice linárně nezávislé řádky?
46. Zdůvodněte, proč matice komutující s pevně danou maticí tvoří lineární podprostor.
47. Proč je součin regulárních matic regulární?
48. Čím je zaručena jednoznačnost inverzní matice?
49. Popište metodu výpočtu inverzní matice eliminací a zdůvodněte, proč tato metoda skutečně dává inverzní matici.
50. Vynásobíme-li matici A regulární maticí, pak se matice A může změnit, ale nezmění se její hodnost. Proč?
51. Co víme o hodnosti součinu matic, když známe hodnosti jednotlivých činitelů? Zdůvodněte.

Determinant

52. Definice determinantu.
53. Zdůvodněte z definice základní vlastnosti determinantu.
54. Proč přičtení násobku řádku k jinému nezmění hodnotu determiantu?
55. Formulujte (bez důkazu) větu o rozvoji determinatu podle řádku/sloupce.
56. Z věty o determinantu součinu odvoďte vzorec pro determinant inverzní matice.
57. Zformulujte a dokažte větu na výpočet inverzní matice pomocí doplňků.

Soustavy lineárních rovnic

58. Frobeniova věta, přesná formulace, význam, důkaz.
59. Definice pojmu řešení soustavy lineárních rovnic.
60. Proč množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tvoří lineární podprostor?
61. Nechť v je jedno řešení soustavy lineárních rovnic. Proč všechna ostatní řešení této soustavy jsou ve tvaru součtu $v + u$, kde u je nějaké řešení homogenní soustavy přidružené k dané soustavě?
62. Zformulujte a dokažte Cramerovu větu.
63. Nechť $M = \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle, M' = \boldsymbol{v}' + \langle \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k \rangle$. Navrhněte a zdůvodněte postup, podle kterého poznáte, že $M = M'$.
64. Jakou dimenzi má prostor řešení homogenní soustavy lineárních rovnic a proč?

Konečná dimenze

65. Definujte pojem souřadnice vzhledem k uspořádané bázi. Zdůvodněte existenci a jednoznačnost souřadnic.
66. Proč jsou souřadnice polynomu vzhledem ke standardní bázi lin. prostoru polynomů nejvýše n-tého stupně rovny koeficientům tohoto polynomu?

67. Proč jsou souřadnice vektoru z $\mathbf{R}^n$ vzhledem ke standardní bázi rovny složkám tohoto vektoru?
68. Proč je zobrazení, které vektorům přiřadí uspořádanou n-tici jejich souřadnic vzhledem k pevně zvolené bázi, lineární?
69. Definujte spojení dvou podprostorů. Čemu je rovnen součet dimenzí spojení a průniku dvou podprostorů? Proč?

Lineární zobrazení

70. Charakterizujte lineární zobrazení, vysvětlete princip superpozice.
71. Definujte jádro, defekt a hodnost lineárního zobrazení.
72. Jak dodefinujeme lineární zobrazení na celém prostoru, když jsou známy jeho hodnoty na bázi? Proč je toto rozšíření jednoznačné?
73. Nechť $a : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Jak souvisí defekt a, hodnost a s $\dim L_1$ a $\dim L_2$?
74. Isomorfismus lineárních prostorů. Proč jsou dva lineární prostory shodné konečné dimense vzájemně isomorfní?
75. Definice, existence a jednoznanost matice lineárního zobrazení.
76. Vysvětlete, proč platí $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, kde A je matice lineárního zobrazení $a : L_1 \to L_2$, $\boldsymbol{x}$ jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{u} \in L_1$ a $\boldsymbol{y}$ jsou souřadnice vektoru $a(\boldsymbol{u})$.
77. Zdůvodněte, proč hodnost lineárního zobrazení je rovna hodnosti matice tohoto zobrazení.

Vlastní čísla, vlastní vektory

78. Definujte vlastní číslo matice/zobrazení a vlastní vektor matice/zobrazení.
79. Proč mají podobné matice stejná vlastní čísla?
80. Definujte charakteristický polynom matice a zdůvodněte, proč jeho kořeny jsou vlastními čísly matice.
81. Vysvětlete, proč matice, která má pouze jednonásobná vlastní čísla, je podobná s diagonální maticí.
82. Proč je matice singulární právě tehdy, když má nulu jako vlastní číslo?

Lineární prostory se skalárním součinem

83. Vyjmenujte axiomy skalárního součinu a vysvětlete, proč standardní skalární součin na $\mathbf{R}^n$ tyto axiomy splňuje.
84. Jak je možné na základě skalárního součinu definovat velikost vektoru (normu vektoru) a úhel mezi dvěma vektory?
85. Proč platí Schwartzova a trojúhelníková nerovnost?
86. Vysvětlete, jak se počítá skalární součin dvou vektorů, známe-li jejich souřadnice vzhledem k ortonormální bázi. Vzorec zdůvodněte.
87. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je ortonormální báze lineárního prostoru L. Proč je i-tá souřadnice vektoru $\boldsymbol{x} \in L$ vzhledem k této bázi rovna skalárnímu součinu $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i$?
88. Vysvětlete podstatu a smysl Schmidtova ortogonalizačního procesu.

Kódování

89. Definujte těleso $\mathbf{Z}_2^n$ a uveďte jeho základní vlastnosti.
90. Vysvětlete pojmy kód, kódové slovo, Hammingova velikost, lineární kód.
91. Co je a k čemu slouží generující a kontrolní matice lineárního kódu?
92. Navrhněte kontrolní a generující matici Hamingova (7,4) kódu a popište proces kódování, dekódování a opravy chyby.