Písemka z úvodu do funkcionální analýzy - pro cvičení z 1. části

Příklad 1 Nechť zobrazení f je definováno předpisem $f(x) = \int_0^2 (1+t^3)x(t)\,dt$.

(a) Dokažte, že f je spojitý lineární funkcionál na prostoru $(X, \|\ \|)$, kde $X = C([0,2])$ a $\|x\| = \int_0^2 |x(t)|\,dt$.

(b) Vyšetřete, čemu se rovná jeho norma.

(c) Vyšetřete, zda svou normu nabývá na jednotkové kouli.

(6 bodů)

Příklad 2 Zobrazení S je definováno předpisem

$$S : (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2^{\mathbb{C}} \mapsto \left(\frac{e^{-i}x_1}{1}, \frac{e^{-2i}x_3}{2}, \dots, \frac{e^{-ni}x_{2n-1}}{n}, \dots\right).$$

(a) Dokažte, že $S \in L(X)(= L(X,X))$, kde $X = \ell_2^{\mathbb{C}}$.

(b) Vyšetřete jeho normu a existenci $x \in B_X$, pro který $\|Sx\| = \|S\|$.

(c) Vyšetřete, zda jde o projekci.

(6 bodů)

Příklad 3 Nechť $L = \{f \in C([-1,1]) : f \text{ je lichá funkce}\}$ a $S = \{f \in C([-1,1]) : f \text{ je sudá funkce}\}$.

(a) Dokažte, že platí $L \oplus_t S = C([-1,1])$.

(b) Ukažte, že existuje projekce $C([-1,1])$ na L s normou 1 a jádrem S.

(c) Ukažte, že $f \in S \mapsto f + L$ definuje lineární izometrii S na C/L.

(6 bodů)

Písemka E z úvodu do funkcionální analýzy - 5. termín, 17.3.2017

$\varphi\ x \cdot e^{-|x|} f(x)$

$\mathbb{R}$

Příklad 1 V následujícím uvažujeme zobrazení definované týmž předpisem $F_i(f) = \cancel{\int_0^\infty x e^{-x} f(x)}\, dx$ na prostorech X_i, kde $i = 1, 2, 3$.

(a) Vyšetřete, zda F_1 je spojitý lineární funkcionál na prostoru $X_1 = \ell_\infty(\mathbb{R})$ omezených funkcí na $\mathbb{R}$ s normou definovanou předpisem $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Pokud ano, určete normu $\|F_1\|_{X_1^*}$ a vyšetřete, zda F v nějakém bodě jednotkové koule prostoru X_1 hodnotu $\|F\|_{X_1^*}$ nabývá.

(b) Vyšetřete, zda F_2 je spojitý lineární funkcionál na prostoru $X_2 = \ell_\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}$ s normou definovanou předpisem $\|f\|_\infty$. Pokud ano, určete normu $\|F\|_{X_2^*}$ a vyšetřete, zda F_2 v nějakém bodě jednotkové koule prostoru X_2 hodnotu $\|F\|_{X_2^*}$ nabývá.

(c) Vyšetřete, zda F_3 je spojitý lineární funkcionál na prostoru $X_3 = L_1(\mathbb{R})$. Pokud ano, určete normu $\|F\|_{X_3^*}$ a vyšetřete, zda F v nějakém bodě jednotkové koule prostoru X_3 hodnotu $\|F\|_{X_3^*}$ nabývá.

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení T_j je definováno předpisem $(T_j f)(x) = a(x) f(x)$, kde funkce $a : [0,3] \to \mathbb{R}$ je definována rovnostmi $a(x) = x$ pro $x \in [0,1]$, $a(x) = x - 1$ pro $x \in [2,3]$ a $a(x) = 1$ pro $x \in [1,2]$. Přitom T_j uvažujeme pro funkce f z prostorů X_j, $j = 1, 2$, kde $X_1 = C([0,3])$ a $X_2 = L_1([0,3])$.

(a) Dokažte, že operátory T_1 i T_2 jsou omezené.
(b) Vyšetřete pro operátory T_1 a T_2 jejich bodové spektrum.
(c) Vyšetřete pro operátory T_1 a T_2 jejich spektrum.

Pokud budete potřebovat tvrzení, že $g(x)h(x) \in L_1([0,1])$ pro všechna $h \in L_1([0,1])$, právě když $g \in L_\infty([0,1])$, můžete jej užít bez zdůvodňování.
(8 bodů)

Příklad 3 Definujeme funkce $f_n = \sum_{k=-n}^{n} k e^{-ikx}$ a distribuce $T_n\varphi = T_{f_n}$.

(a) Vyjádřete $T_n\varphi$ pomocí hodnot Fourierovy transformace φ a vysvětlete, proč T_n φ jsou temperované distribuce.
(b) Dokažte, že temperované distribuce T_n konvergují k temperované distribuci T.
(c) Vyjádřete $T_n\varphi$ pomocí derivací $\varphi^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, a najděte nějaký odhad na řád distribucí T_n a T.
(d) Odvoďte, čemu se rovná Fourierova transformace $\hat{T}$ distribuce T, jaký má řád a co je její nosič?

Napište definice nosiče a řádu distribuce, Schwartzova prostoru "rychle ubývajících funkcí". Pokud užíváte nějaká tvrzení o distribucích, zformulujte je. (8 bodů)

Hodnocení

Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy
zimní semestr - 2. termín - 1. 2. 2006

Příklad 1 Zobrazení T je definováno předpisem

$$T : (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \mapsto (0, \frac{x_1}{2^2}, -\frac{x_2}{2^3}, \frac{x_3}{2^4}, -\frac{x_4}{2^5}, \dots),$$

tj. pro posloupnost komplexních čísel $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} = T(x)$ taková že $y_n = (-1)^n \frac{x_{n-1}}{2^n}$ (zde $x_0 = 0$).

(a) Dokažte, že T je spojitý lineární operátor na prostoru ℓ^2 a spočtěte jeho normu.
(b) Je T kompaktní na ℓ^2?
(c) Vyšetřete bodové spektrum $T \in L(\ell^2)$.
(d) Vyšetřete spektrum $T \in L(\ell^2)$.

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení S je definováno předpisem $S(x) = \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ pro každou absolutně konvergentní posloupnost $x = (x_1, x_2, \dots)$ reálných čísel.

(a) Dokažte, že S je omezený lineární operátor z $L(\ell^1, c_0)$.
(b) Vyjádřete adjungovaný operátor S' pomocí kanonických reprezentací funkcionálů na ℓ^1 a c_0, tj. jako $S' = j \circ S^* \circ i^{-1}$, kde i je kanonická izometrie prostoru ℓ^1 na duál k c_0 a j je kanonická izometrie prostoru ℓ^∞ na duál k ℓ^1.
(c) Je některý z operátorů S, S' a S^* kompaktní?

(8 bodů)

Příklad 3 Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí a svá tvrzení dokažte. Pokud se odvoláte na nějaké věty z přednášky, napište jejich znění a přesně vysvětlete, jak jste je použili.

(a) Je-li X normovaný lineární prostor konečné dimenze, pak X' je Banachův prostor konečné dimenze.
(b) Je-li X normovaný lineární prostor a X' je konečněrozměrný, je X konečněrozměrný a Banachův?
(c) Je-li X separabilní Banachův prostor, je X' separabilní?
(d) Je-li X normovaný lineární prostor a jednotková sféra v duálu ($S_{X'}$) je separabilní, je X separabilní?

(8 bodů)

Hodnocení
Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy
letní semestr - 2. termín - 6. 6. 2007

Příklad 1 Zobrazení g_p je definováno na prostoru ℓ^p posloupností $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel předpisem

$$g_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n}$$

pro $1 \leq p < \infty$. Vyšetřete v závislosti na hodnotě p :

(a) Zda je g_p omezený lineární funkcionál.
(b) Zda nabývá g_p své normy na jednotkové kouli prostoru ℓ^p.

Návod. Můžete užít znalostí o reprezentaci funkcionálů na ℓ^p.
(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení T je definováno pro $f \in C([0,2])$ předpisem

$$(Tf)(x) = \min\{x, 1\} \cdot f(x), x \in [0,2].$$

(a) Dokažte, že T je omezený lineární operátor reálného Banachovu prostoru $C([0,2])$ do sebe.
(b) Vyšetřete spektrum a bodové spektrum operátoru T.
(c) Rozhodněte o kompaktnosti operátoru T.

(8 bodů)

Příklad 3 Nechť K je neprázdný kompaktní metrický prostor. Dokažte, že $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ a $(c) \Rightarrow (a)$, tj. že následující tři tvrzení jsou ekvivalentní.

(a) K je konečný.
(b) $\dim C(K) = \dim C(K)^{**} < \infty$.
(c) $C(K)$ je reflexivní Banachův prostor.

Návod: Pro implikaci $(c) \Rightarrow (a)$ můžete např. vyšetřit nabývání normy pro funkcionál $(Tf)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(x_n)$, pokud $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je prostá konvergentní posloupnost v K.

Své závěry dokažte. Pokud se odvoláte na nějaké věty z přednášky, napište jejich znění a přesně vysvětlete, jak jste je použili. Známá tvrzení z lineární algebry můžete užít bez dalšího vysvětlování.
(8 bodů)

Hodnocení
Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy
zimní semestr - 3. termín - 8. 2. 2006

Příklad 1 Zobrazení T je definováno předpisem

$$T : (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \mapsto (e^{i\cdot 1}x_1, 0, e^{i\cdot 2}x_2, 0, \dots),$$

tj. pro posloupnost komplexních čísel $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost $y = (y_n)_{n=1}^\infty = T(x)$ taková že $y_{2n-1} = e^{i\cdot n}x_n$ a $y_{2n} = 0$ pro $n = 1, 2, \dots$.

(a) Dokažte, že T je spojitý lineární operátor na prostoru ℓ^2 a určete jeho normu.
(b) Popište adjungovaný operátor $T^* \in L(\ell^2)$.
(c) Vyšetřete bodové spektrum $T \in L(\ell^2)$.
(d) Vyšetřete spektrum $T \in L(\ell^2)$.

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení S_p, $p \in \mathbb{Z}$, jsou definována pomocí Lebesgueova integrálu předpisem $S_p(f) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{|x|}}{x^p} f(x)\, dx$.

(a) Vyšetřete, pro která $p \in \mathbb{Z}$ je S_p prvek duálního prostoru k $C([-1, 1])$ (nad tělesem reálných čísel).
(b) Určete normu funkcionálu S_p pro ta $p \in \mathbb{Z}$, pro která je spojitý.
(c) Vyšetřete, pro která $p \in \mathbb{Z}$ nabývá S_p svou normu na jednotkové kouli prostoru $C([-1, 1])$.

(8 bodů)

Příklad 3

(a) Zformulujte tvrzení, které charakterizuje kompaktnost operátoru T normovaného lineárního prostoru X do normovaného lineárního prostoru Y pomocí posloupností.
(b) Nechť X je Hilbertův prostor, Y je Banachův prostor a T je lineární zobrazení prostoru X do Y takové, že posloupnost $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ konverguje v normě prostoru Y pro každou slabě konvergentní posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ v X. Dokažte, že T je kompaktní operátor prostoru X do prostoru Y.

Všechna svá tvrzení dokažte. Pokud k tomu užijete nějaké věty z přednášky, nedokazujte je, ale přesně je zformulujte a vysvětlete, jak jste je použili.

(8 bodů)

Hodnocení
Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy
letní semestr - 3. termín - 13. 6. 2007

Příklad 1 Zobrazení S je definováno na prostoru $L^1(-1,1)$ integrovatelných reálných funkcí (s rovností skoro všude) předpisem

$$S(f) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\, dx.$$

(a) Dokažte, že S je omezený lineární funkcionál.
(b) Vyšetřete, čemu se rovná norma S.
(c) Ukažte, že S nenabývá své normy na jednotkové kouli prostoru $L^1(-1,1)$.
(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení T je definováno pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1$ předpisem

$$Tx = (\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2^2}, \dots, \frac{x_{n+1}}{2^n}, \dots).$$

(a) Dokažte, že T je omezený lineární operátor reálného Banachovu prostoru ℓ^1 do sebe.
(b) Rozhodněte o kompaktnosti operátoru T.
(c) Vyšetřete spektrum a bodové spektrum operátoru T.
(8 bodů)

Příklad 3 Nechť X je Banachův prostor. Dokažte, že nutně platí implikace $(a) \Rightarrow (b)$ a $(b) \Rightarrow (c)$, kde
(a) X je separabilní reflexivní prostor.
(b) X^* je separabilní.
(c) X je separabilní.
Lze některou z uvedených implikací obecně obrátit?
Své závěry dokažte. Pokud se odvoláte na nějaké věty z přednášky, napište jejich znění a přesně vysvětlete, jak jste je použili. Pokud tvrdíte, že nějaká implikace obecně neplatí, uveďte příklad.
(8 bodů)

Hodnocení
Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy
zimní semestr - 1. termín - 25. 1. 2006

Příklad 1 Zobrazení T je definováno na prostoru spojitých komplexních funkcí $C([0, 2\pi])$ předpisem

$$Tf(\alpha) = e^{i\alpha} f(\alpha) \text{ pro } \alpha \in [0, 2\pi].$$

(a) Je T omezený lineární operátor z $L(C([0, 2\pi]))$?
(b) Pokud ano, jaká je jeho norma?
(c) Je kompaktní?
(d) Vyšetřete jeho bodové spektrum.
(e) Vyšetřete jeho spektrum.

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení L je definováno na prostoru spojitých reálných funkcí $C([-1, 1])$ předpisem

$$Lx = \int_{-1}^{1} x(t)\ dt - \frac{1}{3}(x(0) + x(-1) + x(1)).$$

(a) Dokažte, že L je prvek duálu k reálnému Banachovu prostoru $C([-1, 1])$.
(b) Jaká je norma L?
(c) Nabývá L hodnoty své normy na uzavřené jednotkové kouli prostoru $C([-1, 1])$?

(8 bodů)

Příklad 3 Nechť A je lineární zobrazení Banachova prostoru X na Banachův prostor Y nad tělesem komplexních čísel a nechť graf A v $X \times Y$ je uzavřená množina. Položme

$$\|x\|_1 = \|Ax\|_Y \text{ a } \|x\|_2 = \|x\|_X + \|Ax\|_Y.$$

(a) Charakterizujte ta A, pro která je $\|\cdot\|_1$ norma a vyšetřete, zda $(X, \|\cdot\|_1)$ je v tom případě Banachův prostor.
(b) Dokažte, že $\|\cdot\|_2$ je vždy norma a $(X, \|\cdot\|_2)$ je Banachův prostor.

Své závěry dokažte. Pokud se odvoláte na nějaké věty z přednášky, napište jejich znění a přesně vysvětlete, jak jste je použili.
(8 bodů)

Hodnocení
Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy
letní semestr - 4. termín - 27. 6. 2007

Příklad 1 Zobrazení I je definováno na prostoru reálných funkcí $X_1 = C([0,2])$, resp. $X_2 = L^\infty([0,2])$, předpisem

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx.$$

Vyšetřete v závislosti na volbě prostoru X_1 či X_2:

(a) Zda je I omezený lineární funkcionál.
(b) Zda nabývá I své normy na uzavřené jednotkové kouli prostoru X.

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení T je definováno pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$ předpisem

$$Tx = (2x_1, x_1 + 3x_2, x_3, x_4, \dots).$$

(a) Dokažte, že T je omezený lineární operátor komplexního Banachovu prostoru ℓ^2 do sebe.
(b) Vyšetřete spektrum a bodové spektrum operátoru T.
(c) Popište adjungovaný operátor T^*.

(8 bodů)

Příklad 3 Nechť $e^n \in c_0$ pro $n \in \mathbb{N}$ je definováno předpisem $e_k^n = 1$, pokud $k = n$ a $e_k^n = 0$ jinak. Rozhodněte, zda platí:

(a) Posloupnost $(e^n)_{n=1}^\infty$ konverguje slabě k nule (v c_0).
(b) Posloupnost $\left((\log n) \cdot e^n\right)_{n=1}^\infty$ konverguje slabě k nule (v c_0).
(c) Pokud $(x_n)_{n=1}^\infty$ konverguje slabě k x v c_0, pak $(x_n)_{n=1}^\infty$ konverguje v normě k x v c_0.
(d) Pokud posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ konverguje v normě k x v c_0, pak $(x_n)_{n=1}^\infty$ konverguje slabě k x v c_0.

Své závěry dokažte. Pokud se odvoláte na nějaké věty z přednášky, napište jejich znění a přesně vysvětlete, jak jste je použili. Pokud tvrdíte, že nějaká tvrzení obecně neplatí, uveďte příklad.
(8 bodů)

Hodnocení
Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.

Cvičná písemka domácí - Úvod do funkcionální analýzy, letní semestr 2006/7

Příklad 1 Zobrazení T je definováno na prostoru $C([-1,1],\mathbb{C})$ spojitých komplexních funkcí na intervalu $[-1,1]$ předpisem

$$Tx = \int_{-1}^{1} x(t)\ dt - \frac{1}{3}(x(0) + x(-1) + x(1)).$$

(a) Je T omezený lineární funkcionál na $X = C([-1,1],\mathbb{C})$?
(b) Pokud ano, jaká je jeho norma?
(c) Pokud ano, nabývá T svou normu na B_X?

Příklad 1' Nechť T je definováno předpisem

$$T : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, e^i x_1, 0, e^i x_2, \dots).$$

(a) Je T omezený lineární operátor na $X = \ell^2_{\mathbb{C}}$?
(b) Pokud ano, jaká je jeho norma?
(c) Pokud ano, nabývá $\|Tx\|$ normu $\|T\|$ na B_X?

Příklad 1" Nechť T je definováno předpisem

$$T : (x_1, x_2, \dots) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{5^n} - 4 \lim x_{2^n}$$

na c.

(a) Je T omezený lineární funkcionál na c?
(b) Pokud ano, jaká je jeho norma?
(c) Pokud ano, nabývá T svou normu na B_c?

Příklad 2

(a) Je identita T z $X = L^\infty([0,1])$ do $Y = L^1([0,1])$ omezený lineární operátor?
(b) Pokud ano, je to izomorfismus X na $T(X)$?
(c) Je $T(X)$ uzavřený podprostor Y?

Příklad 2'

(a) Je $X = \{f \in C([0,1]) : \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) = 0\}$ uzavřený podprostor $C([0,1])$?
(b) Je $T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ spojitý lineární funkcionál na X?

Příklad 3 Dokažte, že každý Banachův prostor je lineárně izometrický uzavřenému podprostoru $\ell^\infty(B_{X^*})$.

Příklad 3' Nechť $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ je posloupnost uzavřených koulí v Banachově prostoru X. Dokažte, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$.

VYBRANÉ PARTIE Z FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY, LETNÍ SEMESTR 2015–2016, DRUHÝ ZÁPOČTOVÝ TEST

LUBOŠ PICK

Příklad 1. Nechť $X = C([0,1])$ a $T : X \to X$ je operátor definovaný předpisem

$$Tf(x) = x^2 f(0), \quad x \in [0,1], \ f \in X.$$

Rozhodněte, zda je operátor T kompaktní a určete jeho spektrum a bodové spektrum.

Příklad 2. Nechť $X = \ell^2$ a $T : X \to X$ je operátor definovaný předpisem

$$Tx = (0, 0, x_1, \tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \dots), \quad x \in X.$$

Rozhodněte, zda je operátor T kompaktní a určete jeho spektrum a bodové spektrum.

Všechny uvažované prostory jsou nad $\mathbb{C}$.

1. Nechť T je dán jako

$$T : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, x_2 + \frac{1}{1}x_1, x_3 + \frac{1}{2}x_2, x_4 + \frac{1}{3}x_3, \dots).$$

   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$.
   (b) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.
   (c) Je T kompaktní?
2. Nechť $Tf = \int_0^1 x^k f(x)\,dx$.
   (a) Zjistěte, pro jaká $k \in \mathbb{Z}$ a $p \in [1, \infty)$ je $T \in (\mathcal{L}^p([0,1]))^*$.
   (b) Najděte pro tato k a p normu $\|T\|$ a zjistěte, zda se jí nabývá.
3. Nechť T je dán jako

$$Tf(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^1([0, \frac{1}{2}]), \mathcal{L}^1([0,1]))$ a najděte $\|T\|$.
   (b) Popište duální operátor k T (tj. najděte spojitý lineární operátor S z $\mathcal{L}^\infty([0,1])$ do $\mathcal{L}^\infty([0, \frac{1}{2}])$ takový, že $S = j^{-1} \circ T' \circ i$, přičemž i (resp. j) je standardní ztotožnění $(\mathcal{L}^1([0, \frac{1}{2}]))^*$ s $\mathcal{L}^\infty([0, \frac{1}{2}])$ (resp. $(\mathcal{L}^1([0,1]))^*$ s $\mathcal{L}^\infty([0,1])$).

Písemka A

17. dubna 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Zjistěte, pro která $p \in [1, \infty]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definuje formule
$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x(n), \quad x = \{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p,$$
spojitý lineární funkcionál na ℓ^p. Pro tato α a p zjistěte, zdali příslušný funkcionál nabývá své normy.

2. (a) Nechť $p \in (1, \infty)$. Zjistěte, zdali formule
$$Tf(x) = \int_x^1 tf(t), \quad x \in [0,1], f \in L^p([0,1]),$$
definuje spojitý lineární operátor na $L^p([0,1])$.
   (b) Zjistěte, zda je kompaktní. (Ukažte, že T vede dokonce do $C([0,1])$, a tedy ho lze uvažovat jako složení dvou operátorů, z nichž první je kompaktní a druhý spojitý.)
   (c) Nalezněte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$. (Převeďte integrální rovnici na rovnici diferenciální.)

3. Nechť $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ a F je Fourierova transformace. Definujme otočení $\check{u}$ jako $\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Řekneme, že u je lichá, pokud $\check{u} = -u$ a u je sudá, pokud $\check{u} = u$.
   (a) Nechť $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že je-li u lichá, je Fu též lichá. Dále odvoďte, že $F(u') = (ig)Fu$.
   (b) Nechť sgn značí funkci $\operatorname{sgn} x$, δ_0 je Diracova míra v 0 a c značí konstantní funkci rovnou c. Nechť $u_{1/x}$ značí distribuci definovanou jako
$$u_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$
Ukažte, že $(u_{\mathrm{sgn}})' = 2u_{\delta_0}$. Za pomoci bodu (a) pak odvoďte, že
$$(\frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} g)(F(u_{\mathrm{sgn}})) = u_1.$$
   (c) Ukažte, že u_{sgn}, $u_{1/x}$ jsou liché a u_{δ_0} je sudá.
   (d) Použijte fakt, že $gu = u_1$ právě tehdy, když $u \in u_{1/x} + \operatorname{span}\{u_{\delta_0}\}$ k odvození toho, že
$$F(u_{\mathrm{sgn}}) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} u_{1/x} + cu_{\delta_0}$$
pro nějaké $c \in \mathbb{C}$. Za pomoci bodů (a) a (c) ukažte, že $F(u_{\mathrm{sgn}}) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} u_{1/x}$.

Písemka B

27. ledna 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Zjistěte, zdali formule

$$\{(Tf)(n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}\int_0^1 f(t)e^{int}\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

   definuje spojitý lineární operátor $T_1\colon L^1([0,1]) \to c_0$, respektive $T_2\colon L^2([0,1]) \to \ell^2$. Pokud tomu tak je, nalezněte duální operátor T_1' příslušný T_1 v rámci standardní duality a adjungovaný operátor T_2^* k T_2.

2. Nechť $X = \ell^2(\mathbb{Z})$ a

$$Tx(n) = \{i^n x(n-1)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X.$$

   (a) Zjistěte, zdali T definuje prvek $L(X)$.
   (b) Vyzkoumejte, zda se jedná o surjektivní izometrii.
   (c) Zjistěte, zdali je T kompaktní.
   (d) Ukažte, že je-li Y Banachův prostor a $S \in L(Y)$ invertovatelný operátor, pak pro nenulové komplexní číslo λ platí, že $\lambda \in \sigma(S)$ právě tehdy, když $\lambda^{-1} \in \sigma(S^{-1})$.
   (e) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$. (Pro určení $\sigma(T)$ uvažte prvek $y(n) = \chi_{\{0\}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.)

3. Nechť $X = \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

   (a) Nechť $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$ konverguje k 0 a $\{u_n\} \subset X$ konverguje v X k nějakému $u \in X$. Ukažte, že $c_n u_n \to 0$ ve X.
   (b) Ukažte pomocí (a), že je-li F podprostor X uzavřený vzhledem ke konvergenci v X a $x \in X$, je $\operatorname{span}(F \cup \{x\})$ uzavřený v X vzhledem ke konvergenci v X. (Množina $A \subset X$ je uzavřená vzhledem ke konvergenci v X, pokud $x \in A$, kdykoliv existuje posloupnost $\{x_n\} \subset A$ konvergující v X k x.)
   (c) Ukažte, že každý konečně dimenzionální podprostor X je uzavřený vzhledem ke konvergenci v X.
   (d) Nechť $\{h_j\}$ je aproximativní jednotka a nechť $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ řeší rovnici $u'' + u = 0$. Ukažte, že funkce $u_j = u * h_j$ též splňují tuto rovnici.
   (e) Použitím (c) a (d) popište všechna $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ splňující rovnici $u'' + u = 0$.

Písemka C

3. února 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Uvažujme v tomto příkladu pouze reálné prostory.

   Nechť $K = [-1,1] \times [-1,1]$. Zjistěte, zdali formule

   $$Tf = \int_K xyf(x,y)\,dx\,dy$$

   definuje spojitý lineární funkcionál $T_1\colon C(K) \to \mathbb{R}$, respektive $T_2\colon L^\infty(K) \to \mathbb{R}$. Pokud tomu tak je, nalezněte jejich normy a zjistěte, zdali se jich nabývá.

2. (a) Zjistěte, zdali formule

   $$Tf(x) = if(x) + x^2 \int_0^1 f(t)\,dt, \quad x \in [0,1],$$

   definuje spojitý lineární operátor na $L^1([0,1])$.

   (b) Zjistěte, zdali je T kompaktní.

   (c) Nalezněte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.

3. Uvažujme $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Nechť $u_{1/x}$ je prvek $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ definovaný jako

   $$u_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

   Nechť 1 značí funkci rovnou jedné na $\mathbb{R}$, δ_0 je Diracova míra v bodě 0 a $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Ukažte, že $gu_{\delta_0} = 0$ a $gu_{1/x} = u_1$.

   (b) Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a $\alpha, \beta\colon X \to \mathbb{C}$ jsou lineární zobrazení. Ukažte, že $\beta \in \operatorname{span}\{\alpha\}$ právě tehdy, když $\operatorname{Ker}\alpha \subset \operatorname{Ker}\beta$.

   (c) Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ splňuje $\varphi(0) = 0$. Ukažte, že funkce $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$, je v $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ a $\varphi(x) = x\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

   (d) Ukažte pomocí (b) a (c), že splňuje-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ rovnost $gu = 0$, je $u \in \operatorname{span}\{u_{\delta_0}\}$.

   (e) Ukažte pomocí (a) a (d) že splňuje-li $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ rovnici $gu = u_1$, je $u \in u_{1/x} + \operatorname{span}\{u_{\delta_0}\}$.

Písemka D

11. února 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní. Též si uvědomte, že prvky L^p prostorů jsou třídy ekvivalence dané rovností skoro všude.

1. Nechť $X = L^2([-\pi,\pi])$, $Y = \{f \in X : f \text{ je spojitá}\}$ a $\widetilde{R}f(x) = f(-x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, $f \in Y$.
   (a) Ukažte, že existuje právě jeden operátor $R \in L(X)$ splňující $Rf = \widetilde{R}f$ pro $f \in Y$.
   (b) Nechť $P = \frac{1}{2}(I+R)$ a $X_S = \{f \in X : Rf = f\}$. Ukažte, že P je projekce X na X_S.
   (c) Nechť $X_L = \{f \in X : Rf = -f\}$. Ukažte, že $X = X_S \oplus_t X_L$ a $X_L = (X_S)^\perp$. (Fakt, že $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi = 0$ pro lichou funkci φ, nemusíte dokazovat.)
   (d) Spočtěte $\operatorname{dist}(f, X_L)$, kde $f(x) = e^x$, $x \in [-\pi,\pi]$.

2. (a) Nechť $g(x) = \max\{0,x\}$, $x \in [-1,1]$. Zjistěte, pro která $r \in [1,\infty)$ formule
$$(T_r f)(x) = g(x)f(x), \quad x \in [-1,1], \quad f \in L^r([-1,1]),$$
   definuje spojitý lineární operátor na $L^r([-1,1])$.
   (b) Pro příslušná r nalezněte $\sigma_p(T_r)$ a $\sigma(T_r)$.
   (c) Pro příslušná r zjistěte, zda je T_r kompaktní.

3. Nechť F značí Fourierovu transformaci, $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$ a
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & x = 0. \end{cases}$$
   (a) Ukažte, že $Ff = g$.
   (b) Ukažte, že pro $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ platí
$$\int_{\mathbb{R}} |u|\, dm_1 \le \sup\Big\{\Big|\int_{\mathbb{R}} (\varphi u)\, dm_1\Big| : \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \|\varphi\|_\infty \le 1\Big\}.$$
   (Zvažte následující návod. Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pravá strana větší nebo rovna než $\int_{-n}^{n} |u|$ takto: Položte $v = \operatorname{sgn} u \cdot \chi_{(-n,n)}$ a shlaďte v pomocí aproximativní jednotky $\{h_j\}$. Vzniklé funkce vezměte do úvahy při důkazu požadované nerovnosti.)
   (c) Ukažte, že neexistuje $C > 0$ splňující $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R},m_1)} \le C\|F\varphi\|_\infty$ pro každé $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. (Předpokládejte existenci takové konstanty a uvažujte funkci g z bodu (a). Nechť $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ má supremovou normu nejvýše 1. Ukažte, že
$$\Big|\int_{\mathbb{R}} \varphi g\, dm_1\Big| \le \|f\|_\infty \|F\varphi\|_{L^1(\mathbb{R},m_1)} \le C\|f\|_\infty.$$
   Použitím (b) dostanete spor. Fakt, že $g \notin L^1(\mathbb{R},m_1)$, nemusíte dokazovat.)
   (d) Odvoďte z (c), že $F: L^1(\mathbb{R},m_1) \to C_0(\mathbb{R})$ není surjektivní. (Vezměte do úvahy Větu o otevřeném zobrazení.)

Písemka D

25. března 2015

Písemná část trvá dvě hodiny a sestává ze tří příkladů. Můžete používat libovolnou literaturu, ale ne elektronické přístroje. Každý příklad je ohodnocen sedmi body, pro úspěšné absolvování této části je třeba dosáhnout zisku alespoň jedenácti bodů.

Všechny prostory, pokud nebude řečeno jinak, jsou uvažovány jako komplexní.

1. Rozhodněte, které z následujících formulí definují lineární zobrazení z X do Y. U těch, které jsou lineární, zjistěte, zdali se jedná o prvek prostoru $L(X,Y)$. V těchto případech pak určete normu tohoto zobrazení a zjistěte, zda se jí nabývá.
   (a) Nechť $X = Y = \ell^\infty$ a $Tx = (x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6, \cdots)$, $x = (x_n) \in X$.
   (b) Nechť $X = Y = L^1([0,\infty))$ a $Tf(x) = e^{-x}f(x)$, $x \in [0,\infty)$, $f \in X$.
   (c) Nechť $X = c_0$, $Y = \mathbb{C}$ a $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x_n$, $x = (x_n) \in X$.
   (d) Nechť $X = Y = L^2(\mathbb{R}, m_1)$ a T je transformace z Plancherelovy věty (zvažte funkci $e^{-\frac{1}{2}x^2}$).
2. (a) Nechť $X = c_0$ a $Tx = (ix_1, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{5}x_5, \frac{1}{6}x_6, \cdots)$, $x \in X$. Ukažte, že tato formule definuje spojitý lineární operátor na X.
   (b) Zjistěte, zda je T kompaktní (uvažujte operátory
   $$T^k x = (ix_1, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \frac{1}{5}x_5, \frac{1}{6}x_6, \cdots, \frac{1}{k}x_k, 0, 0, 0, \cdots), \quad x \in X).$$
   (c) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.
3. Nechť F značí Fourierovu transformaci na $L^1(\mathbb{R}, m_1)$ a P transformaci na $L^2(\mathbb{R}, m_1)$ z Plancherelovy věty. Nechť
   $$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1,0), \\ 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus ((-1,0) \cup (0,1)). \end{cases}$$
   (a) Spočtěte Pf.
   (b) Ukažte, že Ff je v $L^2(\mathbb{R}, m_1)$.
   (c) Spočtěte $\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1-\cos t}{t}\right|^2 dt$ (uvažte Plancherelovu větu).
   (d) Nechť $u_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi f$, $\varphi \in \mathscr{S}$. Ukažte, že u_f je temperovaná distribuce a spočtěte její Fourierovu transformaci.

PÍSEMKA Z FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY-VERZE H

1. Uvažovaný prostor je komplexní. Uvažujme kompaktní množinu v $\mathbb{C}$
$$K = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, x, y \geq 0\}$$
a operátor T
$$Tf(z) = z^2 f(z), \quad f \in \mathcal{C}(K).$$
   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(K))$.
   (b) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.
   (c) Je T kompaktní?
2. Uvažovaný prostor je komplexní. Nechť T je dán jako
$$T((x_n)) = (i^n x_{n+1})_{n=-\infty}^{\infty}.$$
   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ a najděte $\|T\|$.
   (b) Najděte (Hilbertovsky) adjungovaný operátor T^*.
   (c) Je pravda, že $TT^* = T^*T$?
3. Uvažovaný prostor je reálný. Nechť T je dán jako
$$Tf = \int_0^\pi (\cos x)^k f(x)\, dx.$$
   (a) Pro jaká $k \in \mathbb{Z}$ je $T \in (\mathcal{C}([0, \pi]))^*$?
   (b) Najděte pro tato k normu $\|T\|$ a zjistěte, zda se jí nabývá (pokud vám vyjde norma jako nějaký integrál, nemusíte ho počítat).

PÍSEMKA Z FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY-VERZE I

1. Uvažovaný prostor je komplexní. Nechť T je dán jako
$$Tf(x) = \int_x^1 tf(t)\,dt, \quad x \in [0,1].$$
   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(\mathcal{C}[0,1])$.
   (b) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.
   (c) Je T kompaktní?
2. Uvažovaný prostor je komplexní. Nechť T je dáno jako
$$T((x_n)) = (x_2, -x_1 + x_2, \frac{1}{3^2}x_3, \frac{1}{4^2}x_4, \frac{1}{5^2}x_5, \dots).$$
   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(c_0, \ell^1)$.
   (b) Popište T', tj. najděte $S : \ell^\infty \to \ell^1$ tak, že $S = j_2^{-1} \circ T' \circ j_1$, kde $j_1 : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ and $j_2 : \ell^1 \to (c_0)^*$ jsou standardní izometrické izomorfizmy.
   (c) Je $\operatorname{Rng} T$ uzavřený?
3. Uvažovaný prostor je reálný. Nechť $X = L^1(0,1)$ a $Y = \operatorname{span}\{f_1\}$, kde $f_1(x) = x^2$, $x \in (0,1)$.
   (a) Najděte nějakou spojitou projekci P X na Y a spočtěte její normu.
   (b) Ukažte, že P' je projekce na X^*.

PÍSEMKA Z FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY-VERZE J

1. Uvažovaný prostor je komplexní. Nechť T je dán jako

$$T((x_n)) = (-x_2, x_1, -\frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_3, -\frac{1}{3}x_6, \frac{1}{3}x_5, \dots).$$

   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$.
   (b) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.
   (c) Je T kompaktní?
2. Uvažovaný prostor je komplexní. Nechť T je dán jako

$$Tf(x) = x\int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 tf(t)\,dt, \quad x \in (0,1).$$

   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(L^1(0,1))$.
   (b) Najděte duální operátor T', tj. najděte operátor $S : L^\infty(0,1) \to L^\infty(0,1)$ tak, že $S = j^{-1} \circ T' \circ j$, kde $j : L^\infty(0,1) \to (L^1(0,1))^*$ je standardní izometrický izomorfizmus.
   (c) Je pravda, že $\operatorname{Rng} T = (\operatorname{Ker} T')_\perp$?
3. Uvažovaný prostor je reálný. Nechť $X = c_0 \times \ell^1$ se součtovou normou, tj. $\|(x,y)\|_X = \|x\|_{c_0} + \|y\|_{\ell^1}$ a

$$T((x,y)) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}x_n + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4^n}y_n \quad (x,y) \in X.$$

   (a) Je $T \in X^*$?
   (b) Najděte normu $\|T\|$.

FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA - VERZE K

1. Uvažovaný prostor je komplexní. Nechť T je definován jako
$$Tf(x) = f(x) + x^2 \int_0^\infty f(t)e^{-t}\, dt, \quad x \in (0,\infty).$$
   (a) Ukažte, že $T \in \mathcal{L}(L^1((0,\infty), e^{-t}dt))$.
   (b) Najděte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.
   (c) Je T kompaktní operátor?
2. Uvažovaný prostor je reálný. Nechť T je definován jako
$$Tf = \int_0^1 (\sin x)^\alpha f(x)\, dx.$$
   (a) Najděte $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in [1,\infty)$, pro které $T \in (L^p([0,1]))^*$.
   (b) Pro tyto α a p najděte $\|T\|$ a zjistěte, zdali se jí nabývá (pokud vám norma vyjde jako nějaký integrál, nemusíte ho počítat).
3. Uvažovaný prostor je reálný. Nechť $X = L^2(0,1)$ a $Y = \operatorname{span}\{1, x^2\}$.
   (a) Najděte nějakou spojitou projekci P prostoru X na Y a spočtěte její normu.
   (b) Najděte $f \in X$ tak, že $\|f\| = 1$ a $\operatorname{dist}(f, Y) = 1$.