Dvojný integrál

Text pro Matematiku 2 na FCH VUT v Brně

Miroslav Kureš

Ústav matematiky FSI VUT v Brně

© 2020, 2021, 2022, 2023

Obsah

Intuitivně

Jednoduchý určitý integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

jsme uvažovali na konečném intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro nezápornou funkci f vyjadřoval *obsah podgrafu*, tedy dvourozměrné oblasti vymezené přímkou $y = 0$, křivkou $y = f(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$.

Intuitivně

Nyní chceme totéž uvažovat o dimenzi výše. V co přejde interval $\langle a, b\rangle$? Nejjednodušší by byl obdélník. Ale budeme potřebovat i jiné oblasti než obdélník: trojúhelník, kruh a další. Představme si třeba nějaký souvislý pozemek. Taková oblast je v pořádku. Ale například podmnožina roviny, jejíž hranicí je fraktální křivka, už v pořádku není a uvažovat ji nebudeme. Oblast označme M a její hranici δM.

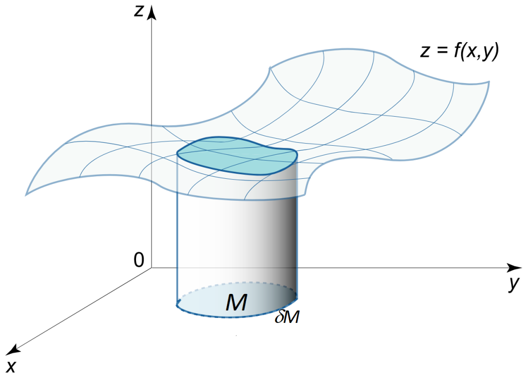
Intuitivně

Dvojný určitý integrál

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

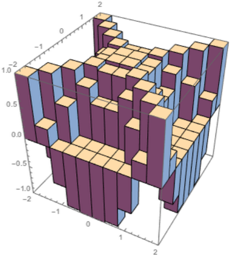
uvažujeme na vhodné dvourozměrné oblasti M a pro nezápornou funkci f vyjadřuje *objem podgrafu*, tedy třírozměrného tělesa vymezeného rovinou $z=0$, plochou $z=f(x,y)$ a válcovou plochou, jejíž řídící křivkou je hranice δM.

Názorně



Definice

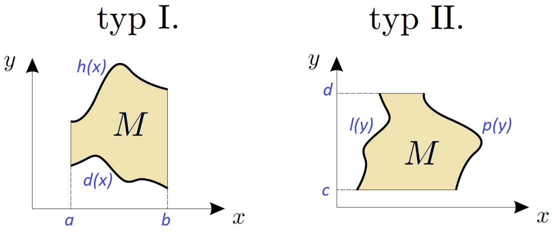
Přesná definice spočívá v rozdělení oblasti M, kterou napřed uvažujeme pouze poskládanou z obdélníků, na podoblasti, na kterých počítáme dolní a horní integrální součty. Horní hranice dolních se v případě integrovatelnosti potká s dolní hranicí horních. Do podrobností nepůjdeme.



Oblasti

Oblasti M budeme uvažovat tzv. *elementární*, a to

- *I. typu*, kde $a \leq x \leq b$, $d(x) \leq y \leq h(x)$
- *II. typu*, kde $c \leq y \leq d$, $l(y) \leq y \leq p(y)$.



Výpočet

- I. typ:

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

- II. typ:

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{p(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Oblasti

Uvědomme si, že celá řada oblastí je současně I. typu i II. typu: můžeme si vybrat.
Dále: Množinu M nazveme *regulární*, je-li sjednocením konečně mnoha elementárních oblastí, které mají společné nejvýše svoje hranice.
Je-li regulární množina $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$ složená z elementárních oblastí M_j, pak platí

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{k} \iint_{M_j} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Tato vlastnost se nazývá *aditivita vzhledem k integrační oblasti*.

Vlastnosti dvojného integrálu

Odpovídají vlastnostem určitého integrálu, zejména:

- *aditivita vzhledem k funkcím*

$$\iint_M (f(x,y)+g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- *homogenita vzhledem k funkcím*

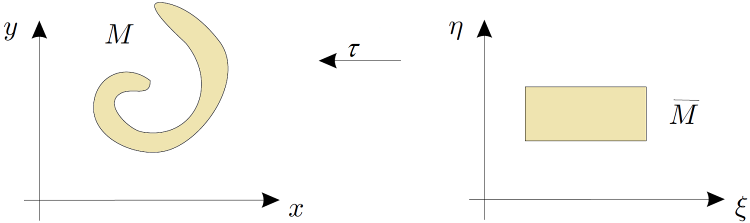
$$\iint_M (cf(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- *monotonie vzhledem k funkcím $f \leq g$ na M*

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_M g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Zjednodušení oblasti transformací souřadnic

Oblast M může v jiných (křivočarých) souřadnicích vypadat jako pro integraci jednodušší oblast $\overline{M}$. Provádíme proto *transformaci* souřadnic, při které musíme také přepočítávat její obsah vyjádřený determinantem Jacobiho matice, tzv. *jacobiánem*.



Transformace do polárních souřadnic

Uvedeme nejčastější typ transformace do tzv. *polárních souřadnic* ρ a φ. Provádíme ji, když M má tvar kruhu, kruhové výseče, mezikruží, apod. Pak

$$\begin{aligned} x &= \tau_1(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi \\ y &= \tau_2(\rho,\varphi) = \rho\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\iint_{\overline{M}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) J \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi,$$

kde

$$J = \det\begin{pmatrix} {\tau_1}'_\rho & {\tau_1}'_\varphi \\ {\tau_2}'_\rho & {\tau_2}'_\varphi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} = \rho.$$

Transformace do polárních souřadnic

Polární souřadnice $\rho \geq 0$ vyjadřuje vzdálenost bodu od počátku ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) a polární souřadnice $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ vyjadřuje úhel od osy x v kladném směru ($\tan \varphi = \frac{y}{x}$).

Příklad 1

- Spočtěte
$$\iint_M \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
kde M je oblast ohraničená přímkou $y = 2x$ a parabolou $y = -15x^2 + 12x$.

Příklad 1

- Je vhodné si nakreslit alespoň hrubý náčrtek oblasti M, abyste si ujasnili sklon přímky a polohu paraboly.
- Obrázkem si ujasníte, že lze očekávat dva průsečíky: spočtete je jako řešení rovnice

$$2x = -15x^2 + 12x.$$

- Zjistíte, že průsečíky jsou $x = 0$ a $x = \frac{2}{3}$.

Příklad 1

- Je vhodné si nakreslit alespoň hrubý náčrtek oblasti M, abyste si ujasnili sklon přímky a polohu paraboly.
- Obrázkem si ujasníte, že lze očekávat dva průsečíky: spočtete je jako řešení rovnice

$$2x = -15x^2 + 12x.$$

- Zjistíte, že průsečíky jsou $x = 0$ a $x = \frac{2}{3}$.

Příklad 1

- Je vhodné si nakreslit alespoň hrubý náčrtek oblasti M, abyste si ujasnili sklon přímky a polohu paraboly.
- Obrázkem si ujasníte, že lze očekávat dva průsečíky: spočtete je jako řešení rovnice

$$2x = -15x^2 + 12x.$$

- Zjistíte, že průsečíky jsou $x = 0$ a $x = \frac{2}{3}$.

Příklad 1

- Také si ujasníte, že „horní“ funkcí je parabola a „dolní“ funkcí je přímka.
- Oblast M je I. typu a popíšete ji takto:

$$\begin{aligned} 0 \le \quad & x \quad \le \frac{2}{3} \\ 2x \le \quad & y \quad \le -15x^2 + 12x \end{aligned}$$

- Nyní zapište integrál.

Příklad 1

- Také si ujasníte, že „horní“ funkcí je parabola a „dolní“ funkcí je přímka.
- Oblast M je I. typu a popíšete ji takto:

$$\begin{aligned} 0 \leq \quad & x \quad \leq \frac{2}{3} \\ 2x \leq \quad & y \quad \leq -15x^2 + 12x \end{aligned}$$

- Nyní zapište integrál.

Příklad 1

- Také si ujasníte, že „horní“ funkcí je parabola a „dolní“ funkcí je přímka.
- Oblast M je I. typu a popíšete ji takto:

$$\begin{aligned} 0 \leq &\quad x \quad \leq \frac{2}{3} \\ 2x \leq &\quad y \quad \leq -15x^2 + 12x \end{aligned}$$

- Nyní zapište integrál.

Příklad 1

- $$\iint_M \left(x^2+8y\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\int_{2x}^{-15x^2+12x} \left(x^2+8y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
- (spočtěte vnitřní integrál: integrace vzhledem k y)
- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[x^2y+4y^2\right]_{2x}^{-15x^2+12x} \mathrm{d}x =$$
- (dosaďte za y a upravte)

Příklad 1

- $$\iint_M \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\int_{2x}^{-15x^2+12x} \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
- (spočtěte vnitřní integrál: integrace vzhledem k y)
- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[x^2 y + 4y^2\right]_{2x}^{-15x^2+12x} \mathrm{d}x =$$
- (dosaďte za y a upravte)

Příklad 1

- $$\iint_M \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\int_{2x}^{-15x^2+12x} \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
- (spočtěte vnitřní integrál: integrace vzhledem k y)
- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[x^2 y + 4y^2\right]_{2x}^{-15x^2+12x} \mathrm{d}x =$$
- (dosaďte za y a upravte)

Příklad 1

- $$\iint_M \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(\int_{2x}^{-15x^2+12x} \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
- (spočtěte vnitřní integrál: integrace vzhledem k y)
- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[x^2 y + 4y^2\right]_{2x}^{-15x^2+12x} \mathrm{d}x =$$
- (dosaďte za y a upravte)

Příklad 1

- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(885x^4 - 1430x^3 + 560x^2\right) \mathrm{d}x =$$
- (integrujte vzhledem k x)
- $$= \left[177x^5 - \frac{715x^4}{2} + \frac{560x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}} =$$
- (a dosaďte za x meze)
- $$= 8.$$

Příklad 1

- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(885x^4 - 1430x^3 + 560x^2\right) \mathrm{d}x =$$
- (integrujte vzhledem k x)
- $$= \left[177x^5 - \frac{715x^4}{2} + \frac{560x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}} =$$
- (a dosaďte za x meze)
- $$= 8.$$

Příklad 1

- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(885x^4 - 1430x^3 + 560x^2\right) \mathrm{d}x =$$
- (integrujte vzhledem k x)
- $$= \left[177x^5 - \frac{715x^4}{2} + \frac{560x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}} =$$
- (a dosaďte za x meze)
- $$= 8.$$

Příklad 1

- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(885x^4 - 1430x^3 + 560x^2\right) \mathrm{d}x =$$
- (integrujte vzhledem k x)
- $$= \left[177x^5 - \frac{715x^4}{2} + \frac{560x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}} =$$
- (a dosaďte za x meze)
- $$= 8.$$

Příklad 1

- $$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left(885x^4 - 1430x^3 + 560x^2\right) \mathrm{d}x =$$
- (integrujte vzhledem k x)
- $$= \left[177x^5 - \frac{715x^4}{2} + \frac{560x^3}{3}\right]_0^{\frac{2}{3}} =$$
- (a dosaďte za x meze)
- $$= 8.$$

Příklad 1

Závěr:

$$\iint_M \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 8.$$

(M je oblast ohraničená přímkou a parabolou dle zadání.)

Příklad 2

Spočtěte

$$\iint_M \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde M je oblast v I. kvadrantu ohraničená souřadnicovými osami a kružnicemi $x^2 + y^2 = 36$ a $x^2 + y^2 = 144$. (Povšimněte si, že funkce je stejná jako v Příkladu 1.)

Příklad 2

- Oblast M je sjednocením dvou oblastí I. typu, M_1 a M_2, které popíšete takto:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \quad x \quad \leq 6 \\ \sqrt{36 - x^2} \leq & \quad y \quad \leq \sqrt{144 - x^2} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} 6 \leq & \quad x \quad \leq 12 \\ 0 \leq & \quad y \quad \leq \sqrt{144 - x^2} \end{aligned}$$

- Protože ale jde o výseč mezikruží, proveďte transformaci do polárních souřadnic. Nejdříve popište oblast $\overline{M}$.

Příklad 2

- Oblast M je sjednocením dvou oblastí I. typu, M_1 a M_2, které popíšete takto:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \quad x \quad \leq 6 \\ \sqrt{36 - x^2} \leq & \quad y \quad \leq \sqrt{144 - x^2} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} 6 \leq & \quad x \quad \leq 12 \\ 0 \leq & \quad y \quad \leq \sqrt{144 - x^2} \end{aligned}$$

- Protože ale jde o výseč mezikruží, proveďte transformaci do polárních souřadnic. Nejdříve popište oblast $\overline{M}$.

Příklad 2

- Oblast $\overline{M}$ je tvaru:

$$\begin{aligned} 6 \leq \quad &\rho \quad \leq 12 \\ 0 \leq \quad &\varphi \quad \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- V polárních souřadnicích tedy jde o obdélník! Nyní dosaďte do funkce $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a přidejte jacobián. Dostanete:
-

$$\iint_{\overline{M}} \left(\rho^3\cos^2\varphi + 8\rho^2\sin\varphi\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$\int_6^{12} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^3\cos^2\varphi + 8\rho^2\sin\varphi\right)\right) \mathrm{d}\rho$$

Příklad 2

- Oblast $\overline{M}$ je tvaru:

$$\begin{aligned} 6 \leq \quad & \rho \quad \leq 12 \\ 0 \leq \quad & \varphi \quad \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- V polárních souřadnicích tedy jde o obdélník! Nyní dosaďte do funkce $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a přidejte jacobián. Dostanete:
-

$$\iint_{\overline{M}} \left(\rho^3\cos^2\varphi + 8\rho^2\sin\varphi\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_6^{12}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\rho^3\cos^2\varphi + 8\rho^2\sin\varphi\right)\right)\mathrm{d}\rho$$

Příklad 2

- Oblast $\overline{M}$ je tvaru:

$$\begin{aligned} 6 \leq &\ \rho \leq 12 \\ 0 \leq &\ \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- V polárních souřadnicích tedy jde o obdélník! Nyní dosaďte do funkce $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a přidejte jacobián. Dostanete:
-

$$\iint_{\overline{M}} \left(\rho^3\cos^2\varphi + 8\rho^2\sin\varphi\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$\int_6^{12} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^3\cos^2\varphi + 8\rho^2\sin\varphi\right) \right) \mathrm{d}\rho$$

Příklad 2

- Postupujte nyní standardně. Začnete vnitřním integrálem a provedete integraci vzhledem k φ. Je vhodné zde připomenout, že $\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + c$. Po dosazení mezí provedete integraci vzhledem k ρ a opět dosadíte meze.
- Pokud jste dobře počítali, dostanete výsledek

$$4032 + 1215\pi.$$

Příklad 2

- Postupujte nyní standardně. Začnete vnitřním integrálem a provedete integraci vzhledem k φ. Je vhodné zde připomenout, že $\int \cos^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + c$. Po dosazení mezí provedete integraci vzhledem k ρ a opět dosadíte meze.
- Pokud jste dobře počítali, dostanete výsledek

$$4032 + 1215\pi.$$

Příklad 2

Závěr:

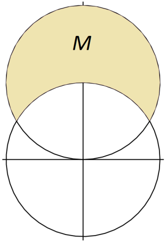
$$\iint_M \left(x^2 + 8y\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4032 + 1215\pi.$$

M je výseč mezikruží dle zadání.

Příklad 3

Vyjádřete oblast M na obrázku v polárních souřadnicích. Kružnice mají rovnice

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad x^2 + (y-2)^2 = 4.$$



Příklad 3

- Zatímco v Příkladu 2 byla oblast v polárním vyjádření zřejmá, zde postupujte úpravou rovnic kružnic. Protože oblast leží vně první kružnice a uvnitř druhé, máte

$$x^2 + y^2 \geq 4, \qquad x^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

- Dosaďte $x = \rho \cos \varphi$ a $y = \rho \sin \varphi$ a upravte.
-

$$\rho \geq 2, \qquad \rho \leq 4 \sin \varphi.$$

- Nyní je ρ ohraničeno dvěma křivkami. Spočtěte, pro jaké φ se protnou, tzn. řešte rovnici

$$2 = 4 \sin \varphi.$$

Příklad 3

- Zatímco v Příkladu 2 byla oblast v polárním vyjádření zřejmá, zde postupujte úpravou rovnic kružnic. Protože oblast leží vně první kružnice a uvnitř druhé, máte

$$x^2 + y^2 \geq 4, \qquad x^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

- Dosaďte $x = \rho \cos \varphi$ a $y = \rho \sin \varphi$ a upravte.
-

$$\rho \geq 2, \qquad \rho \leq 4 \sin \varphi.$$

- Nyní je ρ ohraničeno dvěma křivkami. Spočtěte, pro jaké φ se protnou, tzn. řešte rovnici

$$2 = 4 \sin \varphi.$$

Příklad 3

- Zatímco v Příkladu 2 byla oblast v polárním vyjádření zřejmá, zde postupujte úpravou rovnic kružnic. Protože oblast leží vně první kružnice a uvnitř druhé, máte

$$x^2 + y^2 \geq 4, \qquad x^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

- Dosaďte $x = \rho\cos\varphi$ a $y = \rho\sin\varphi$ a upravte.
-
$$\rho \geq 2, \qquad \rho \leq 4\sin\varphi.$$

- Nyní je ρ ohraničeno dvěma křivkami. Spočtěte, pro jaké φ se protnou, tzn. řešte rovnici

$$2 = 4\sin\varphi.$$

Příklad 3

- Zatímco v Příkladu 2 byla oblast v polárním vyjádření zřejmá, zde postupujte úpravou rovnic kružnic. Protože oblast leží vně první kružnice a uvnitř druhé, máte

$$x^2 + y^2 \geq 4, \qquad x^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

- Dosaďte $x = \rho \cos \varphi$ a $y = \rho \sin \varphi$ a upravte.
-

$$\rho \geq 2, \qquad \rho \leq 4 \sin \varphi.$$

- Nyní je ρ ohraničeno dvěma křivkami. Spočtěte, pro jaké φ se protnou, tzn. řešte rovnici

$$2 = 4 \sin \varphi.$$

Příklad 3

- Dostanete

$$\frac{1}{2} = \sin\varphi.$$

- Odtud

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{nebo} \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

Příklad 3

- Dostanete

$$\frac{1}{2} = \sin\varphi.$$

- Odtud

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{nebo} \quad \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

Příklad 3

Závěr: Oblast *M* vyjádřená v polárních souřadnicích pomocí nerovností je

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} \leq &\quad \varphi \quad \leq \frac{5\pi}{6} \\ 2 \leq &\quad \rho \quad \leq 4\sin\varphi; \end{aligned}$$

jde proto vzhledem k ρ a φ o elementární oblast II. typu.

Objem podgrafu

Objem podgrafu

$$V = \iint_M f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Obsah rovinné oblasti

Obsah M je

$$P = \iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Rovinná destička – hmotnost

U rovinných destiček zanedbáváme výšku. Označme $\sigma(x, y)$ plošnou hustotu. Pak hmotnost destičky je

$$m = \iint_M \sigma(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Je-li hustota konstantní, říkáme, že destička je *homogenní*. Prakticky můžeme pak uvažovat $\sigma(x, y) = 1$.

Rovinná destička – statické momenty a těžiště

Statické momenty vzhledem k osám x a y jsou

$$S_x = \iint_M y\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad S_y = \iint_M x\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Těžiště destičky

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right]$$

Rovinná destička – momenty setrvačnosti *

Moment setrvačnosti – vyjadřuje ochotu tělesa setrvávat v otáčivém pohybu (klasicky: kulička (hmotný bod) hmotnosti m, kterou točíme na provázku délky l, má moment setrvačnosti $J = ml^2$).

$$J_x = \iint_M y^2 \, \sigma(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad J_y = \iint_M x^2 \, \sigma(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Příklad 4

- Spočtěte těžiště výseče mezikruží o poloměrech R_1, R_2 a středovém úhlu α a s hustotou úměrnou vzdálenosti od středu mezikruží.
- Hustota je tedy $\sigma(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, kde pro zjednodušení zvolíme $k = 1$. Pro řešení příklad transformujeme do polárních souřadic $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $J = \rho$, meze $R_1 \leq \rho \leq R_2$ a $-\frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \frac{\alpha}{2}$.

Příklad 4

- Spočtěte těžiště výseče mezikruží o poloměrech R_1, R_2 a středovém úhlu α a s hustotou úměrnou vzdálenosti od středu mezikruží.
- Hustota je tedy $\sigma(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, kde pro zjednodušení zvolíme $k = 1$. Pro řešení příklad transformujeme do polárních souřadic $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $J = \rho$, meze $R_1 \le \rho \le R_2$ a $-\frac{\alpha}{2} \le \varphi \le \frac{\alpha}{2}$.

Příklad 4

$$m = \iint_M \sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{R_1}^{R_2} \mathrm{d}\varphi =$$

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{R_2^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right) \mathrm{d}\varphi = \left(\frac{R_2^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right) \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \mathrm{d}\varphi =$$

$$\left(\frac{R_2^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right) \alpha$$

Příklad 4

$$S_x = \iint_M y\,\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^3 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \left[-\cos\varphi\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \left(-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 0$$

Příklad 4

- $$S_y = \iint_M x\,\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^3 \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi =$$
  $$\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} =$$
  $$\frac{R_2^4 - R_1^4}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
- Závěr: Hledané těžiště je
  $$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right] = \left[\frac{3(R_2^4 - R_1^4)\sin\frac{\alpha}{2}}{2(R_2^4 - R_1^4)\alpha}, 0\right].$$

Příklad 4

- $$S_y = \iint_M x\,\sigma(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho^3 \cos\varphi\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi =$$
$$\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \left[\sin\varphi\right]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} =$$
$$\frac{R_2^4 - R_1^4}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- Závěr: Hledané těžiště je

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right] = \left[\frac{3(R_2^4 - R_1^4)\sin\frac{\alpha}{2}}{2(R_2^4 - R_1^4)\alpha}, 0\right].$$

Další příklad

Spočtěte

$$\iint_M (x + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

na oblasti M ohraničené přímkami $x = 0$, $y = 0$, $y = 5$, $y = -\frac{1}{2}x + 6$ a parabolou $y = -4x^2 + 3$.

Výsledek: $\frac{15853}{48} - \frac{72\sqrt{3}}{35}$.

O vybudování teorie integrálu se zasloužil Bernhard Riemann (1826-1866). Větu o výpočtu dvojného integrálu pomocí jednoduchých zformuloval Guido Fubini (1879-1943).