Lineární programování

Jana Klicnarová

Department of Applied Mathematics and Information Science
Agricultural Faculty
University of South Bohemia

Co to je LP?

- disciplína tzv. operačního výzkumu (operační analýzy)
- začalo se rozvíjet po druhé světové válce (1947 – Dantzing – simplexová metoda)
- slouží k řešení optimalizačních úloh z různých oblastí, využívá k tomu matematické poznatky především z oblasti lineární algebry
- patří sem i Leontjevovy a von Neumannovy modely (viz mikroekonomie a makroekonomie)

Jak na LP?

Postup

1. formulace ekonomického problému
2. sestavení matematického modelu
3. řešení matematického problému
4. ekonomická interpretace získaných výsledků
5. postoptimalizační analýza

Matematický model

1. účelová funkce
2. omezující podmínky
   1. vlastní
   2. nevlastní

Ekonomická formulace

Firma balící bonboniéry má k dispozici 60 čokoládových, 60 oříškových a 85 karamelových bonbónů. Může vyrábět dva druhy bonboniér. Do první bonboniéry se dávají dva čokoládové, šest oříškových a deset karamelových bonbónů a do druhé deset čokoládových, šest oříškových a pět karamelových. Firma má vykalkulováno, že na každém kusu první bonboniéry vydělá 30 Kč a na druhé 45 Kč. Jaký je optimální výrobní program firmy, pokud chce maximalizovat zisk?

Matematický model

$$
\begin{array}{rcl}
\max & 30x_1 + 45x_2 & \\
\text{za podmínek} & & \\
2x_1 + 10x_2 & \leq & 60 \\
6x_1 + 6x_2 & \leq & 60 \\
10x_1 + 5x_2 & \leq & 85 \\
x_1, x_2 & \geq & 0, \text{ celočíselné}
\end{array}
$$

Symbolický matematický model

Vektor řešení

$\mathbf{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n)^T$ – optimální řešení optimalizačního problému. Jednotlivé složky určují např. optimální množství výroby jednotlivých druhů výrobků.

Cenový vektor

$\mathbf{c} = (c_1, c_2 \dots, c_n)^T$ – většinou vektor jednotkových zisků či nákladů. V našem případě $(30, 45)^T$.

Účelová funkce

$z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ – funkce vektoru řešení. Vyjadřuje např. zisk v závislosti na objemu výroby, náklady, množství odpadu apod.

Poznámka

Na účelovou funkci mohu nahlížet buď jako na maticový součin dvou vektorů:

$$(30, 45)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 30x_1 + 45x_2$$

nebo jako na skalární součin dvou vektorů:

$$(30, 45)(x_1, x_2) = 30x_1 + 45x_2.$$

To se bude hodit při řešení v MS Excel - modulu Řešitel (Solver).

Strukturní koeficienty

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ – matice strukturních koeficientů, v našem případě

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & 6 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vektor omezení

Značíme $\mathbf{b}$ – klasicky vektor disponibilního množství jednotlivých surovin. V našem případě $\mathbf{b} = (60, 60, 85)^T$.

Matematický model

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.t. \quad & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \quad & \leq \quad \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \quad & \geq \quad \mathbf{0}, \text{(popř. celočíselné, binární)} \end{aligned}$$

Jak řešit úlohy LP

- malé úlohy lze řešit graficky
- simplexovou metodou
- speciálními postupy (dopravní problém, přiřazovací problém, celočíselná optimalizace,. . .)
- pomocí vhodného software (lindo.com, Řešitel (MS Excel), Opera, Linkosa, mnoho dalších)

Grafické řešení

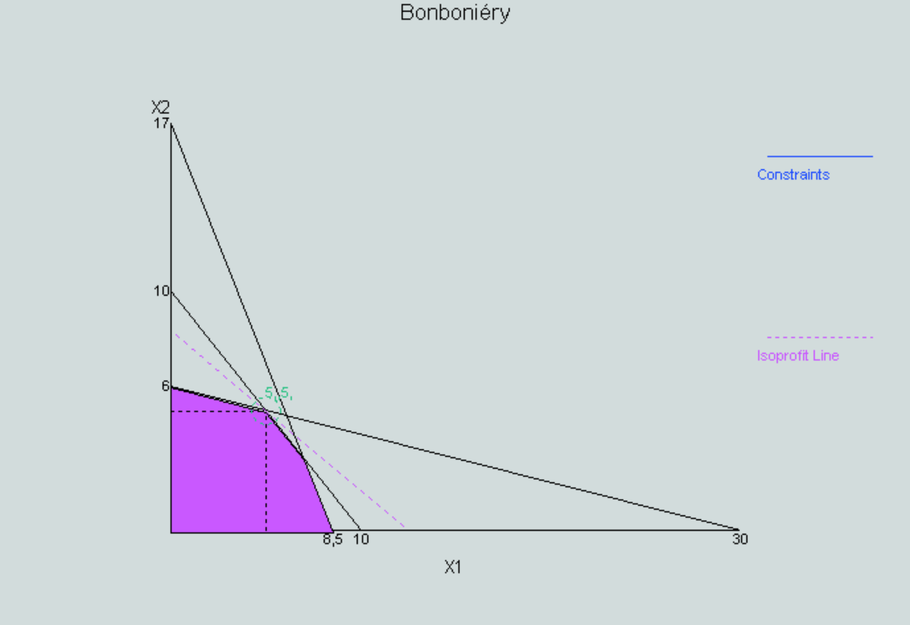
Lze řešit pouze úlohy, kde vektor proměnných je dvoudimensionální.

Grafickým řešením lineární nerovnice (tj. jedna omezující podmínka) je polorovina omezená přímkou, na které platí rovnost.

Grafickým řešením soustavy lineárních nerovnic (tj. množina, kde platí všechny omezující podmínky) je průnik jednotlivých polorovin.

Grafickým řešením rovnice $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = z$ (v našem případě $z = 30x_1 + 45x_2$) jsou pro různá z různé rovnoběžné přímky. Hodnota z je tím větší, čím výše protíná přímka osu y.

Bonboniéry – grafické řešení



Neomezená množina přípustných řešení

Firma usiluje o co největší úhrnný počet výrobků V_1 a V_2, jejichž prodejem by dosáhla alespoň 30 tis.Kč. Cena výrobku V_1 je 3 tis.Kč/ks, výrobek V_2 se prodává za 4 tis.Kč/ks. Výrobek V_2 vyžaduje speciální výrobní zařízení, které umožňuje jeho výrobu v rozsahu nejvýše 6 ks. Kolik výrobků V_1 a V_2 má firma vyrábět?

Matematický model

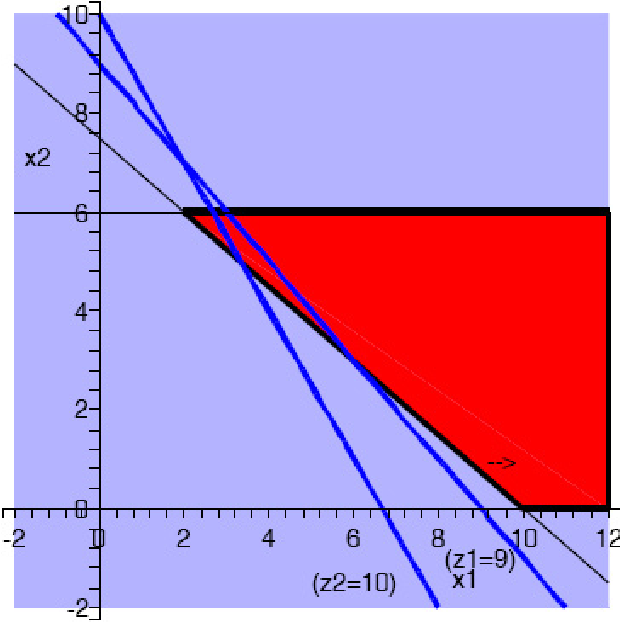
Model bude mít dvě strukturní proměnné, a to x_1 (počet výrobků V_1 v ks) a x_2 (počet V_2 v ks). Omezující podmínky:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\geq 30 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{celočíselné} \end{aligned}$$

Účelová funkce:

$$z = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

Neomezená množina přípustných řešení



Prázdná množina přípustných řešení

Denní jídelníček sestavený dle zásad racionální výživy je třeba doplnit vhodnými potravinami tak, aby energetická hodnota se zvýšila nejméně o 1200 kJ, bílkoviny nejméně o 18 g, sacharidy nejvýše o 90 g, tuk pouze o 1,2 g a vápník nejméně o 2 g. Jaké množství nízkoenergetického jogurtu a celozrnných křehkých plátků uspokojí tyto požadavky při minimálních výdajích? Podkladové údaje pro vyřešení tohoto problému, vztažené na 100 g uvedených potravin, jsou obsaženy v následující tabulce.

	En.(kJ)	Bílk.(g)	Sach.(g)	Tuky(g)	Váp.(mg)	Cena(Kč)
Jogurt	200	5	6	0,1	160	4
Cel. pl.	1500	9	80	1,5	-	10

Matematický model

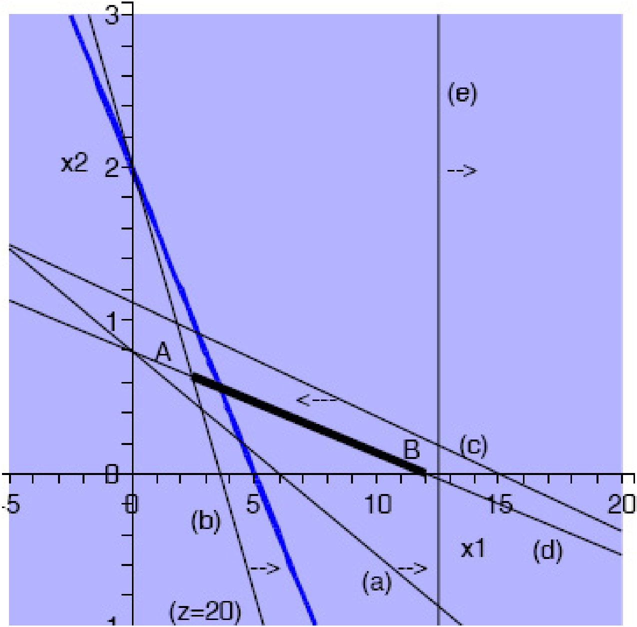
Hledanými veličinami v dané úloze jsou váhová množství uvažovaných potravin (ve 100 g), a to
x_1 – množství jogurtu
x_2 – množství celozrnných plátků.
Účelová funkce je tvaru

$$z = 4x_1 + 10x_2 \quad \rightarrow \quad \min.$$

Omezující podmínky jsou dány nutričními požadavky na doplnění denního jídelníčku, což vyjadřují následující nerovnice a rovnice:

(a)	energie (kJ)	$200x_1 + 1500x_2 \geq 1200$
(b)	bílkoviny (g)	$5x_1 + 9x_2 \geq 18$
(c)	sacharidy (g)	$6x_1 + 80x_2 \leq 90$
(d)	tuk (g)	$0,1x_1 + 1,5x_2 = 1,2$
(e)	vápník (mg)	$160x_1 \geq 2000$
		$x_1, x_2 \geq 0.$

Prázdná množina přípustných řešení



Základní pojmy – řešení úloh LP

Přípustné řešení

Je každé řešení, které vyhovuje všem omezujícím podmínkám úlohy LP.

Základní řešení

Řešení, které má minimální počet nenulových složek (viz později).

Optimální řešení

Řešení, které je přípustné a zároveň na množině přípustných řešení optimalizuje hodnotu účelové funkce.