Ekonomická formulace

Firma balící bonboniéry má k dispozici 60 čokoládových, 60 oříškových a 85 karamelových bonbónů. Může vyrábět dva druhy bonboniér. Do první bonboniéry se dávají dva čokoládové, šest oříškových a deset karamelových bonbónů a do druhé deset čokoládových, šest oříškových a pět karamelových. Firma má vykalkulováno, že na každém kusu první bonboniéry vydělá 30 Kč a na druhé 45 Kč. Jaký je optimální výrobní program firmy, pokud chce maximalizovat zisk?

Matematický model

$$\begin{array}{rcl}
\max & 30x_1 + 45x_2 & \\
\text{za podmínek} & & \\
2x_1 + 10x_2 & \leq & 60 \\
6x_1 + 6x_2 & \leq & 60 \\
10x_1 + 5x_2 & \leq & 85 \\
x_1, x_2 & \geq & 0, \ \text{celočíselné}
\end{array}$$

Řešení úlohy LP pomocí simplexové metody

Přídatné proměnné

Abychom mohli úlohu LP řešit pomocí tzv. simplexové metody, potřebujeme omezující podmínky převést do tvaru rovnic. Toho docílíme přidáním tzv. **přídatných proměnných**.

Příklad – bonboniéry

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 10x_2 + d_3 &= 60\\
6x_1 + 6x_2 + d_4 &= 60\\
10x_1 + 5x_2 + d_5 &= 85\\
x_1, x_2, d_3, d_4, d_5 &\geq 0,\ \text{celočíselné}
\end{aligned}
$$

Přídatné proměnné mají jednoznačnou ekonomickou interpretaci, vyjadřují zbytek jednotlivých surovin (v našem případě jednotlivých druhů bonbónů).

Vzpomínka na první semestr na ZF

Metody řešení soustavy lineárních rovnic – přepis do rozšířené matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 10 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & 1 & 85 \end{array}\right)$$

Jedno řešení je vidět z letadla.

A to $\mathbf{x} = (0, 0, 60, 60, 85)$. Nic se nevyrábí, vše nám zbývá. To asi ekonomy nepotěší.

Co s tím?

Kolik má tato úloha řešení a jak je získat?

V tomto případě je řešením úlohy vektorový prostor dimenze 2 (5 – proměnných, 3 – lineárně nezávislé rovnice, $5 - 3 = 2$). Umíme řešit z MATEA.

Jenže, které z těch všech řešení je optimální???

Základní věta LP: Má-li úloha LP optimální řešení, pak alespoň jedno ze základních řešení je optimální.

Základní řešení

Základním řešením v našem příkladě je každé řešení, které má alespoň dvě nulové složky (tj., v grafu, leží na průniku dvou přímek). (Obecně počet proměnných (včetně přídatných) - počet lineárně nezávislých omezujících podmínek, tj. dimenze prostoru řešení.)

No a?

To znamená, že řešení, která stačí porovnávat není až tolik. . .

A jak je vydolovat?

Když si všimneme, jak jsme získali první (někdy též výchozí) řešení (a to bylo základní), stačilo nám, aby v matici soustavy byla skryta jednotková matice.

A co z toho?

Když si vymyslíme, že bychom rádi jednotkovou matici například v prvních třech sloupcích, tak to přece umíme! Gaussova Jordanova eliminace je hračka. Jen se může stát, že nám na pravé straně vypadnou záporná čísla, a tak získáme nepřípustné řešení (podmínka nezápornosti). Pan Dantzing vymyslel, jak postupovat, aby se to nestalo – simplexová metoda.

Simplexová metoda (tzv. jednofázová)

Algoritmus

- Najdu jedno základní přípustné řešení.
- Test optimality, není-li řešení optimální, najdu jiné základní přípustné řešení.

Test optimality

Dle poslední řádky simplexové tabulky (resp. řádky s cenovými koeficienty). Pro maximalizační (resp. minimalizační), úlohy nesmí tato řádka obsahovat žádné záporné (resp. kladné) číslo. Pokud ho obsahuje, musíme hledat jiné základní řešení.

Vybereme tzv. **klíčový sloupec** – jako minimum (resp. maximum) z koeficientů v řádku s cenovými koeficienty. A tzv. **klíčový řádek** podle minimální hodnoty $\frac{b_i}{a_{ij}}$, kde j je index klíčového sloupce.

Tím jsme získali tzv. **vstupující a vystupující proměnnou**. Tj. označili jsme si sloupec na jehož místo se budeme snažit eliminací dostat jednotkový vektor s jednotkou na pozici **klíčového prvku** (leží v klíčovém

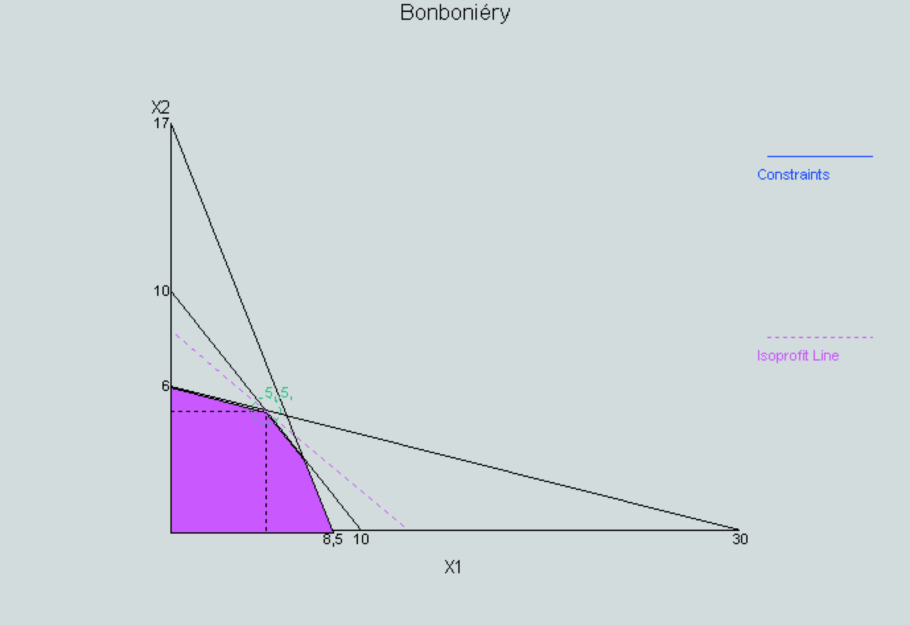
Simplexová metoda

maximization		30	45	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
0	Slack1	2	10	1	0	0	60	6
0	Slack2	6	6	0	1	0	60	10
0	Slack3	10	5	0	0	1	85	17
Zj - Cj		-30	-45	0	0	0	0	

maximization		30	45	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
45	x2	(1/5)	1	(1/10)	0	0	6	
0	Slack2	(24/5)	0	(-3/5)	1	0	24	
0	Slack3	9	0	(-1/2)	0	1	55	
Zj - Cj		-21	0	(9/2)	0	0	270	

Porovnejme s grafickým řešením.

Bonboniéry – grafické řešení



maximization		30	45	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
45	x2	(1/5)	1	(1/10)	0	0	6	30
0	Slack2	(24/5)	0	(-3/5)	1	0	24	5
0	Slack3	9	0	(-1/2)	0	1	55	(55/9)
Zj - Cj		-21	0	(9/2)	0	0	270	

maximization		30	45	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
45	x2	0	1	(1/8)	(-1/24)	0	5	
30	x1	1	0	(-1/8)	(5/24)	0	5	
0	Slack3	0	0	(5/8)	(-15/8)	1	10	
Zj - Cj		0	0	(15/8)	(35/8)	0	375	

Porovnejme s grafickým řešením.

Co že nám to vyšlo?

	X1	X2		RHS	Dual
Maximize	30,	45,			
čoko	2,	10,	<=	60,	1,875
oříšek	6,	6,	<=	60,	4,375
karamel	10,	5,	<=	85,	0,
Solution->	5,	5,		$375,	

Tj. pro maximální zisk máme vyrábět pět prvních bonboniér a pět druhých bonboniér, přitom nám zbude deset karamelových bonbónů a náš zisk bude 375Kč.

Proč bylo před názvem Simplexová metoda slovo "jednofázová"?

Měli jsme štěstí

Prvním bodem postupu při simplexové metodě je najít nějaké základní přípustné řešení. V našem konkrétním případě jsme měli "štěstí", jedno jsme viděli hned z tabulky. Ovšem, pokud bychom měli příklad jako na cvičení (krmné směsi), už by byla situace jiná.

Příklad – zadání

Předpokládejme, že máme dvě potraviny - chléb a sýr. Obě potraviny obsahují dva výživné faktory - kalorie a bílkoviny (vyjádřené v gramech). Spec. víme, že jedna libra chleba obsahuje 1000 kalorií a 25 gramů bílkovin a jedna libra sýra obsahuje 2000 kalorií a 100 gramů bílkovin. Žádoucí obsah kalorií a bílkovin ve stravě, kterou máme připravit, činní nejméně 3000 kalorií a 100 gramů bílkovin. Tržní ceny jsou 6 pencí za libru chleba a 18 pencí za libru sýra. Jaké máme zvolit optimální složení stravy, abychom co nejvíce ušetřili?

Příklad – matematický model

$$\min \quad 6x_1 + 18x_2$$

za podmínek

$$\begin{aligned} (\text{kalorie}) \quad 1000x_1 + 2000x_2 &\geq 3000 \\ (\text{bílkoviny}) \quad 25x_1 + 100x_2 &\geq 100 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Model doplněný o doplňkové proměnné

$$\min \quad 6x_1 + 18x_2$$

za podmínek

$$\begin{aligned} (\text{kalorie}) \quad 1000x_1 + 2000x_2 - d_1 &= 3000 \\ (\text{bílkoviny}) \quad 25x_1 + 100x_2 - d_2 &= 100 \\ x_1, x_2, d_1, d_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Odtud nelze rovnou získat základní přípustné řešení. Proto si musíme pomoci ještě tzv. **umělými proměnnými** – zn. u_i.

Model k simplexové metodě

$$\min \quad 6x_1 + 18x_2$$

$$\begin{array}{rrcl} & \text{za podmínek} & & \\ (\text{kalorie}) & 1000x_1 + 2000x_2 - d_1 + u_1 & = & 3000 \\ (\text{bílkoviny}) & 25x_1 + 100x_2 - d_2 + u_2 & = & 100 \\ & x_1, x_2, d_1, d_2, u_1, u_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A v první fázi výpočtu se musíme "zbavit" umělých proměnných, čímž získáme, bude-li to možné, výchozí přípustné základní řešení našeho problému.

Postoptimalizační analýza

Někdy se nespokojíme s tím, že víme, kolik přesně čeho máme vyrábět, abychom optimalizovali hodnotu účelové funkce. Zajímá nás, např. zda neexistuje ještě jiné možné řešení při stejné hodnotě účelové funkce, či zda by bylo výhodné přikoupit nějakou surovinu (a za jakou cenu) nebo naopak, zda nějakou surovinu nekupovat v takovém množství jako teď.

V případě, že nám u výrobního problému vyjde, že se nevyplatí nějaký výrobek vyrábět, ptáme se proč. Jak by bylo ztrátové tento výrobek vyrábět nebo o kolik musíme zvýšit zisk z něho, abychom ho mohli vyrábět bezeztrátově.

Odpovědi na tyto otázky poskytuje tzv. postoptimalizační analýza.

Něco lze vyčíst ihned ze simplexové tabulky

Duální ceny a redukované náklady

Redukované náklady se vztahují k základním proměnným a **duální ceny**, nebo-li **stínové ceny**, k přídatným proměnným. Čteme je v poslední řádce výsledné simplexové tabulky.

K čemu jsou?

Udávají nám, o kolik se změní hodnota účelové funkce s každou jednotkou „zařazenou do výroby“ (v rámci tzv. intervalu stability). (Všimněme si, jak se měnila hodnota účelové funkce při přepočtu simplexové tabulky v závislosti na cenovém koeficientu v klíčovém sloupci a počtu nově zařazených jednotek do výroby.)

Ilustrace na bonboniérách s cenovými koeficienty $(30, 30)$

maximization		30	30	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
0	Slack1	2	10	1	0	0	60	30
0	Slack2	6	6	0	1	0	60	10
0	Slack3	10	5	0	0	1	85	(17/2)
Zj - Cj		-30	-30	0	0	0	0	

maximization		30	30	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
0	Slack1	0	9	1	0	(-1/5)	43	
0	Slack2	0	3	0	1	(-3/5)	9	
30	x1	1	(1/2)	0	0	(1/10)	(17/2)	
Zj - Cj		0	-15	0	0	3	255	

maximization		30	30	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
0	Slack1	0	9	1	0	(-1/5)	43	(43/9)
0	Slack2	0	3	0	1	(-3/5)	9	3
30	x1	1	(1/2)	0	0	(1/10)	(17/2)	17
Zj - Cj		0	-15	0	0	3	255	

maximization		30	30	0	0	0		
Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b	omega
0	Slack1	0	0	1	-3	(8/5)	16	
30	x2	0	1	0	(1/3)	(-1/5)	3	
30	x1	1	0	0	(-1/6)	(1/5)	7	
Zj - Cj		0	0	0	5	0	300	

Porovnejme s grafickým řešením.

Všimněme si, že u třetí přídatné proměnné je cenový koeficient 0, přesto že tato proměnná není základní. To znamená, budu-li chtít z ní udělat základní, tzv. „zařadit ji do výroby“, hodnota účelové funkce se nezmění. Po přepočtu dostaneme následující simplexovou tabulku.

Base		x1	x2	Slack1	Slack2	Slack3	b
45	x2	0	1	(1/8)	(-1/24)	0	5
30	x1	1	0	(-1/8)	(5/24)	0	5
0	Slack3	0	0	(5/8)	(-15/8)	1	10
Zj - Cj		0	0	0	5	0	300

Hadí oči

Zapišme si výsledek poslední simplexové tabulky

proměnná	hodnota	duální hodnota
x_1	5	0
x_2	5	0
d_1	0	0
d_2	0	5
d_3	10	0

U proměnné d_3 nám vznikly tzv. **hadí oči**. To nám indukuje existenci více řešení.

Poznámka: Přepíšete-li stejným způsobem výsledky optimalizace s cenovými koeficienty $(45, 30)$, hadí oči se neobjeví, úloha měla pouze jedno řešení.

Duální ceny a redukované náklady – podrobněji

Ze struktury simplexové tabulky je zřejmé, že minimálně jedna z hodnot (skutečná či duální) u každé proměnné je rovna nule. (Buď je proměnná tzv. bazická, pak má nulovou duální hodnotu nebo je nebazická, pak je nulová a její duální hodnota může být libovolná.) Jsou-li nulové obě, pak je to znakem existence více řešení.

Poznámka

Z tohoto pravidla existují nějaké spec. výjimky, na které možná narazíme a možná ne:)

Intervaly stability

Duální ceny nám udávají, o kolik se z každou jednotkou, o kterou změníme příslušné omezení, změní hodnota účelové funkce (za předpokladu, že všechny ostatní podmínky úlohy se nezmění).

Např. duální cena ke karamelovým bonbónům je 0, tzn. jednotková změna v počtu karamelových bonbónů, které máme k dispozici, nezmění hodnotu účelové funkce. Při současné struktuře výroby nám zbývá 10ks, takže pokud jich budu mít více či (max. o 10 méně), na zisku se to nepodepíše. Ale už to nemusí platit, budu-li jich mít méně než 75 (=85 − 10). Je zřejmé, že pokud bychom neměli žádný karamelový bonbón, neměli bychom ani žádný zisk, tudíž při změně o 85 už duální cena neplatí. A právě interval, ve kterém platí duální cena, se nazývá **intervalem stability**. Podobně je to i s intervaly stability pro redukované náklady.

Jak získám intervaly stability?

Pokud řešíme úlohu pomocí nějaké alespoň trochu chytrého software, pak intervaly stability jsou součástí výstupu řešení úlohy.

Intervaly stability můžeme také dopočítat z výsledné simplexové tabulky. K tomu si stačí uvědomit strukturu této tabulky.