Matematika I

Lineární závislost a nezávislost

RNDr. Renata Klufová, Ph. D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

EF Katedra aplikované matematiky a informatiky

Co už známe?

vektory - základní operace (sčítání, odčítání, násobení reálným číslem, skalární součin, norma vektoru)

matice - základní operace (sčítání, odčítání, násobení reálným číslem, součin matic)

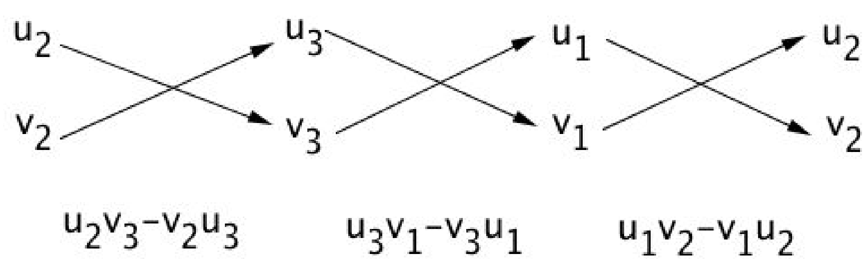
ekonomické úvahy

Vektorový součin

Def. Pro každé dva 3-složkové vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je definován **vektorový součin** $\vec{u} \times \vec{v}$ takto:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

schéma výpočtu:

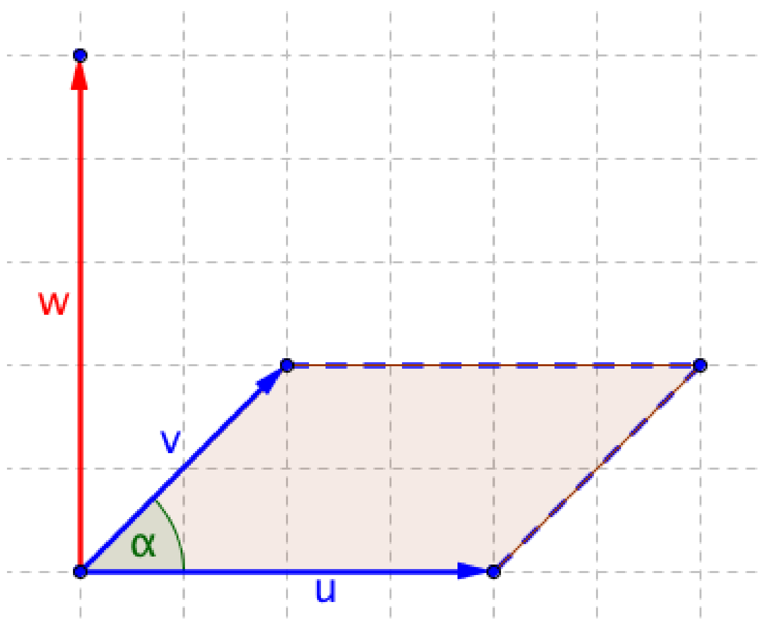


Vlastnosti vektorového součinu

Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ nenulové a je-li α úhel, který svírají, pak platí:

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin \alpha|.$$

vektorový součin ... vektor kolmý na oba vektory původní



Vektorový prostor - základní pojmy

Def. **Vektorový prostor** V_n je množina všech n-složkových aritmetických vektorů spolu se zvolenými algebraickými operacemi (sčítání, odčítání vektorů a reálný násobek vektoru).

Soubor n-složkových vektorů je libovolný seznam (skupina) $A: \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ vektorů z prostoru V_n, v němž mohou být některé vektory navzájem shodné.

Prázdný soubor O ... soubor, který neobsahuje žádný vektor.

Shodnost dvou souborů

Dva soubory vektorů z vektorového prostoru V_n jsou **shodné**, mají-li stejný počet položek a všechny jejich příslušné položky (vektory) si odpovídají.

ukázky:

- $A\ :\ (1,-1),(0,3),(1,-1),\quad B\ :\ (1,-1),(0,3),(1,-1)$ ... shodné soubory

- $M : (-1,-1),(4,3),(1,-1),\quad N : (-1,-1),(1,-1),(4,3)$ ... nejsou shodné (mají stejnou "skladbu", ale liší se v pořadí, ve kterém jsou uváděny)

Lineární kombinace vektorů

Def. Ve vektorovém prostoru V_n je dán soubor vektorů
$A: \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ a reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Vektor $\vec{v} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + c_k \cdot \vec{v}_k$ nazveme **lineární kombinací** souboru A (vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$) s **koeficienty** $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Jsou-li všechny koeficienty rovny 0, nazýváme lineární kombinaci **triviální** ... dostaneme $\vec{o}$,
v každém jiném případě pak kombinaci **netriviální**.

ukázka:
$\vec{v} = 3 \cdot (1, -1, 0, 0) + 4 \cdot (0, 1, 0, 1) - 5 \cdot (0, 7, -1, 3) = (3, -34, 5, -11)$

netriviální lineární kombinace vektorů $(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 7, -1, 3)$
s koeficienty 3,4,-5

Lineární závislost/nezávislost vektorů

Def. Soubor A vektorů prostoru V_n nazýváme **(lineárně) nezávislým**, jestliže nulový vektor $\vec{o}$ z něj vzniká pouze triviální lineární kombinací.

Soubory, které nejsou nezávislými nazýváme **(lineárně) závislými**.

Prázdný soubor O je považován za nezávislý soubor.

Hodností souboru A nazýváme velikost maximálního nezávislého podsouboru, který lze z A vybrat a značíme ji $h(A)$. Jestliže je A složen z k vektorů, pak $0 \le h(A) \le k$.

Lineární závislost/nezávislost vektorů

Věta o lineární závislosti/nezávislosti:
Nechť A je soubor k vektorů z V_n. Potom platí:

(i) A je závislý, právě když buď **některý** jeho vektor je lineární kombinací vektorů ostatních nebo se jedná o soubor **jednoho nulového** vektoru,

(ii) A je nezávislý, právě když buď **žádný** jeho vektor není lineární kombinací ostatních nebo se jedná o soubor **jednoho nenulového** vektoru,

(iii) A je závislý, právě když $h(A) < k$ a naopak, je nezávislý, právě když $h(A) = k$.

Ekvivalentní úpravy souboru vektorů

Ekvivalentními úpravami souboru vektorů A nazýváme následující úkony s vektory tohoto souboru:

(a) změnit pořadí vektorů,

(b) vynásobit kterýkoliv vektor libovolným nenulovým číslem,

(c) přičíst/odečíst ke kterémukoliv vektoru libovolnou kombinaci zbylých vektorů,

(d) přidat nebo ubrat nulový vektor.

Ekvivalentní úpravy **nemění hodnost** souboru. Uvedené úpravy lze opakovat. Vzniklý soubor B je ekvivalentní s původním - zapisujeme:$A \sim B$.

Věta o hodnostech souborů

Věta o hodnostech souborů.

Jestliže $A \sim B$, pak platí $h(A) = h(B)$.

ukázka:

Hodnost matice

Def. **Hodností matice** A nazýváme hodnost souboru všech jejích řádkových vektorů.

Řekneme, že matice A a B jsou ekvivalentní ($A \sim B$), jestliže soubory všech jejich řádkových vektorů jsou ekvivalentní.

Ekvivalentní matice mají stejné hodnosti.

Hodnost matice se zjišťuje její úpravou do **Gaussova tvaru**.

Matice v Gaussově tvaru - trojúhelníková matice, která neobsahuje nulový řádek.

Hodnost matice

Věty o hodnosti matice a převodu matice do Gaussova tvaru.

Je-li A matice v Gaussově tvaru, pak $h(A)$ je rovna počtu jejích řádků.

Každou nenulovou matici lze ekvivalentními úpravami převést na Gaussův tvar.

Strategie pro úpravu nenulové matice na Gaussův tvar

1. Najdeme první nenulový sloupec (řekněme j-tý) a výměnou a úpravou řádků dosáhneme toho, aby $a_{1j} = 1$ (**klíčová jednička**).

2. Pomocí klíčového řádku dosáhneme toho, aby se všechny prvky „pod" klíčovou jedničkou změnily na nuly (tzv. eliminace).

3. Nulové řádky odstraníme.

4. Postup (1), (2), (3) aplikujeme znovu na zbytek upravené matice bez prvního řádku.

5. Také na další řádky aplikujeme uvedený postup, dokud nebude celá matice v požadovaném tvaru.

Hodnost transponované matice

Ekvivalentní úpravy lze provádět i se sloupci matice.

Pro každou matici A platí $h(A) = h(A^T)$.