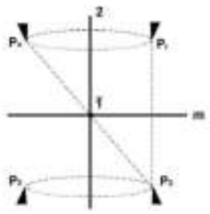
GRUPOS PUNTUALES

Existen algunas relaciones entre elementos de simetría que pueden ser útiles a la hora de deducir cuales son los conjuntos de estos que forman grupo.

1.- Todos los elementos de simetría de un grupo finito se han de cortar en un único punto, y si hay centro de inversión, este es el punto común. De hecho, si no se cortaran en un único punto, el grupo de simetría no sería finito, porque la aplicación sucesiva de elementos de simetría sin un punto común generaría una figura infinita.

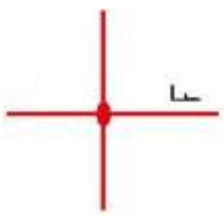
2.- Si hay un eje de simetría de orden par y un plano de simetría perpendicular, en la intersección se genera un centro de inversión. Y supuesta la existencia de dos de estos elementos, se deduce el tercero.



Supongamos un eje de orden 2 y un plano m perpendicular. En la figura el motivo P_0 se relaciona con el P_1 por un eje de orden n=2 (o binario), y éste con el P_2 por una reflexión en el plano m. A su vez, las figuras P_0 y P_2 están relacionadas por un centro de inversión situado en la intersección de 2 y m. El relacionado con P_2 por el eje binario (P_3) se relaciona con P_0 mediante el plano m y con P_1 mediante el centro de inversión

3.- Si un grupo solo tiene un eje de simetría, cualquier plano de simetría del grupo ha de ser necesariamente perpendicular o contener el eje. Si no fuera así y existiera un plano formando un cierto ángulo diferente de 90º con el eje, el plano espejo generaría un segundo eje simétrico del anterior y formando el mismo ángulo con el plano.

4.- Si un plano de simetría contiene un eje de orden n, existen n planos que contienen el eje formando entre ellos ángulos $\alpha=\pi/n$.



Ejercicio

En la figura se representa un eje doble (vertical), un plano espejo (horizontal) y un motivo (letra F). Aplicar la simetría del plano m y del eje doble hasta que no aparezcan otras Fs. Determinar si existen otros planos o ejes de simetría

GRUPOS DE OPERACIONES DE SIMETRÍA

La simetría de un cristal, molécula u objeto simétrico cualquiera no ha de incluir necesariamente todos los elementos de simetría posibles, sino únicamente algunos de estos, que además, han de ser compatibles entre sí, veremos que esto implica que el conjunto de operaciones de simetría del objeto simétrico forman un grupo. Para ello deben cumplir ciertas condiciones.

En términos simples para que un conjunto de operaciones tenga estructura de grupo debe cumplir las siguientes condiciones:

- que sea cerrado, es decir que la aplicación consecutiva (producto) de dos de las operaciones de simetría no genere una tercera operación distinta de las que se consideraron iniclamente como constituyentes del grupo. Por ejemplo, un eje binario y un plano espejo perpendicular no forman grupo porqué al aplicar las operaciones del giro binario (180º) y la reflexión, se genera un centro de inversión. Es decir, el centro de inversión aparece como consecuencia de la existencia del eje binario y el plano m (ejemplo que ya viéramos anteriormente). En cambio si forman grupo un eje binario, un plano m perpendicular al eje 2 y un centro de inversión en la intersección de los anteriores.
- que contenga la operación inversa de cada una de las operaciones de simetría que lo constituyen. Por ej. Si el grupo contiene a un eje de orden 2, debe contener un giro contrario en 180, si

contiene un plano m debe aplicarse nuevamente la reflexión, o si tuviera la inversión, tendría que contener la inversión en sentido inverso.

.

- que el grupo contenga el elemento neutro u operación identidad, que deje invariante una figura (y que no modifique las coordenadas de un punto). Este es el eje de orden 1, que hay que considerar que forma parte de todos los grupos.

- que la operación de multiplicación de operaciones tenga las propiedades conmutativa y asociativa. Se sugiere que el estudiante efectúe esta comprobación.

GRUPOS PUNTUALES BIDIMENSIONALES

Se pueden deducir los posibles grupos de simetría puntual en dos dimensiones, partiendo del hecho que los posibles elementos en el plano (considerando la disminución de dimensiones de 3 a 2) son

a) puntos de giro de orden 1, 2, 3, 4 y 6

b) línea de reflexión m (no se considera el centro de inversión porqué en dos dimensiones equivale a un punto de giro binario)

Las combinaciones posibles son

- cada uno de los elementos por sí solo (1, 2, 3, 4, 6 y m)

- los resultados de combinar los puntos de giro con la línea de reflexión

1 + m –> m (ya existente)

2 + m –> 2mm

3 + m –> 3m

4 + m –> 4mm

6 + m –> 6mm

Esto implica un total de 10 grupos puntuales bidimensionales, que se representan a continuación.