



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD AZCAPOTZALCO

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

**“Optimización y Control Robusto de un Digestor Anaerobio de Dos Etapas
para el Procesamiento de Vinazas de Tequila”**

Tesis para obtener el grado de
Maestría en Ingeniería de Procesos

Presenta: I. Q. Ennio Rafael Piceno Díaz

Matricula 2163806220

Asesor:

Dr. Héctor F. Puebla Núñez (UAM)

Co-asesor:

Dr. Hugo O. Méndez Acosta (UDG)

Indice General

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.2. JUSTIFICACIÓN	2
1.2.1. <i>Ventajas de la Digestión Anaerobia sobre la Aerobia</i>	3
1.2.2. <i>Ventajas de la Digestión Anaerobia de Dos Etapas sobre la de Una Etapa</i>	3
1.2.3. <i>Complejidad en el Control de los Procesos de Digestión Anaerobia</i>	4
1.3. HIPÓTESIS	7
1.4. OBJETIVOS	7
1.4.1. <i>Objetivo General</i>	7
1.4.2. <i>Objetivos Particulares</i>	8
1.5. ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO	8
2. DIGESTIÓN ANAEROBIA DE DOS ETAPAS	10
2.1. DIGESTIÓN ANAEROBIA	10
2.1.1. <i>Introducción al Proceso de Digestión Anaerobia</i>	10
2.1.2. <i>Hidrólisis</i>	11
2.1.3. <i>Acidogénesis</i>	12
2.1.4. <i>Acetogénesis</i>	13
2.1.5. <i>Metanogénesis</i>	14
2.2. PARÁMETROS DE LA DIGESTIÓN ANAEROBIA	15
2.2.1. <i>Factores Intrínsecos a la Digestión Anaerobia</i>	15
2.2.2. <i>Parámetros Operacionales</i>	17
2.3. DIGESTIÓN ANAEROBIA DE DOS ETAPAS	17
2.4. MODELO DE DIGESTIÓN ANAEROBIA DE 2 ETAPAS	20
2.4.1. <i>Preliminares</i>	20
2.4.2. <i>Descripción del Modelo</i>	20
2.4.3. <i>Precisiones Acerca del Sistema Físico</i>	24
2.4.4. <i>Consideraciones Adicionales del Modelo</i>	25
2.5. ANÁLISIS DINÁMICO DEL SISTEMA DE DA DE 2 FASES	28
2.5.1. <i>Determinación de Puntos Fijos</i>	28
2.5.2. <i>Simulación del Modelo y Cálculo de los Puntos de Equilibrio</i>	32
2.5.3. <i>Linealización y Valores Propios</i>	34
2.5.4. <i>Condiciones de Lavado</i>	38

3.	MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN Y CONTROL ROBUSTO.....	42
3.1.	OPTIMIZACIÓN.....	42
3.1.1.	<i>Minimización de la DQO.....</i>	<i>44</i>
3.1.2.	<i>Maximización del Flujo de Biogas.....</i>	<i>45</i>
3.1.3.	<i>Solución de los Problemas de Optimización.....</i>	<i>46</i>
3.2.	MÉTODOS DE CONTROL ROBUSTO.....	49
3.2.1.	<i>Control por Compensación del Error de Modelado, MEC.....</i>	<i>50</i>
3.2.2.	<i>Control de Modo Deslizante, SMC.....</i>	<i>55</i>
3.2.3.	<i>Control Predictivo No lineal Basado en Modelo (NMPC).....</i>	<i>66</i>
4.	CONTROL APLICADO A LA PLANTA DE DA DE 2 ETAPAS.....	75
4.1.	CONSIDERACIONES GENERALES PARA LA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA.....	75
4.2.	IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR MEC.....	78
4.2.1.	<i>Caso 1: Salida de Control, DQO del Efluente Tratado.....</i>	<i>78</i>
4.2.2.	<i>Caso 2: Salida de Control, AGV en el Reactor Acidogénico.....</i>	<i>82</i>
4.2.3.	<i>Caso 3: Salida de Control, AGV en el Reactor Metanogénico.....</i>	<i>87</i>
4.3.	IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR SMC, APROX.1ER ORDEN.....	90
4.3.1.	<i>Caso 1: Salida de Control, DQO del Efluente Tratado.....</i>	<i>90</i>
4.3.2.	<i>Caso 2: Salida de Control, AGV en el Reactor Acidogénico.....</i>	<i>92</i>
4.3.3.	<i>Caso 3: Salida de Control, AGV en el Reactor Metanogénico.....</i>	<i>94</i>
4.4.	IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO.....	96
4.4.1.	<i>Caso 1: Salida de Control, DQO del Efluente Tratado.....</i>	<i>96</i>
4.4.2.	<i>Caso 2: Salida de Control, AGV en el Reactor Acidogénico.....</i>	<i>99</i>
4.4.3.	<i>Caso 3: Salida de Control, AGV en el Reactor Metanogénico.....</i>	<i>100</i>
4.5.	IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROLADOR NMPC.....	102
4.5.1.	<i>Sintonización del Controlador NMPC.....</i>	<i>103</i>
4.5.2.	<i>Resultados de la Implementación del Algoritmo NMPC.....</i>	<i>106</i>
5.	ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	108
5.1.	COMPARACIÓN DE LOS CONTROLADORES IMPLEMENTADOS.....	108
5.1.1.	<i>Problema de Regulación de DQO.....</i>	<i>108</i>
5.1.2.	<i>Problema de Regulación de AGV en el Reactor Acidogénico.....</i>	<i>110</i>
5.1.3.	<i>Problema de Regulación de AGV en el Reactor Metanogénico.....</i>	<i>111</i>
5.2.	BASES CONCEPTUALES PARA LA IMPLEMENTACIÓN FÍSICA DE LOS CONTROLADORES.....	113
5.3.	CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO.....	115
5.3.1.	<i>Conclusiones y Recomendaciones.....</i>	<i>115</i>

5.3.2. Trabajo Futuro	117
BIBLIOGRAFÍA	119
ANEXO I: MÉTODO DE COLOCACIÓN ORTOGONAL EN ELEMENTO FINITO	127
ANEXO II: MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN EMPÍRICA	132
ANEXO III: PROGRAMAS DE MATLAB	136

Índice de Figuras

FIGURA 1.1 COMPARACIÓN DE LA DIGESTIÓN AEROBIA Y ANAEROBIA	3
FIGURA 2.1 PASOS METABÓLICOS INVOLUCRADOS EN LA DIGESTIÓN ANAEROBIA.....	11
FIGURA 2.2 PROCESO DE DIGESTIÓN ANAEROBIA DE DOS ETAPAS TÍPICO	18
FIGURA 2.3 DIAGRAMA DE FLUJO DE PLANTA PILOTO DE DA DE 2 ETAPAS EN LA UGD, CAMPUS CUCEI.	26
FIGURA 2.4 PUNTO DE EQUILIBRIO CON SENTIDO FÍSICO SISTEMA DE DA DE 2 ETAPAS	33
FIGURA 2.5 CONDICIÓN DE LAVADO DEL REACTOR ACIDOGÉNICO (CASO A)	40
FIGURA 2.6 CONDICIÓN DE LAVADO DEL REACTOR METANOGÉNICO (CASO M).....	40
FIGURA 3.1 TIPOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.....	43
FIGURA 3.2 SUPERFICIE DESLIZANTE Y TRAYECTORIAS DEL SISTEMA	56
FIGURA 3.3 FUNCIÓN DE SATURACIÓN, SAT(s).....	59
FIGURA 3.4 CONTROLADOR NMPC CON REGULADOR, ESTIMADOR Y CALCULADOR DE OBJETIVOS	69
FIGURA 4.1. CAMBIOS DE PUNTOS DE REFERENCIA Y CONDICIONES DE ENTRADA DE LOS CONTROLADORES	77
FIGURA 4.2 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC (1), REGULACIÓN DE DQO	80
FIGURA 4.3 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC (2), REGULACIÓN DE DQO	80
FIGURA 4.4 RESULTADOS DEL CONTROLADOR MEC, REGULACIÓN DE DQO.....	81
FIGURA 4.5 RESULTADOS DEL CONTROLADOR MEC, ESTADOS COMPLETOS.	83
FIGURA 4.6 RESULTADOS DEL CONTROLADOR MEC, CAMBIO DE PUNTO DE REFERENCIA.....	83
FIGURA 4.7 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC (1), REGULACIÓN DE AGV EN R1	85
FIGURA 4.8 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC (2), REGULACIÓN DE AGV EN R1	86
FIGURA 4.9 RESULTADOS DEL CONTROLADOR MEC, REGULACIÓN DE AGV EN R1	86
FIGURA 4.10 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC (1), REGULACIÓN DE AGV EN R2	88
FIGURA 4.11 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC (2), REGULACIÓN DE AGV EN R2	88
FIGURA 4.12 RESULTADOS DEL CONTROLADOR MEC, REGULACIÓN DE AGV EN R2	90
FIGURA 4.13 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN DE DQO EN R2	91
FIGURA 4.14 RESULTADOS DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN DE DQO EN R2	92
FIGURA 4.15 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN DE AGV EN R1.....	93
FIGURA 4.16 RESULTADOS DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN DE AGV EN R1.....	94
FIGURA 4.17 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN DE AGV EN R2.....	95
FIGURA 4.18 RESULTADOS DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN DE AGV EN R2.....	95
FIGURA 4.19 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN DE DQO EN R2	98
FIGURA 4.20 RESULTADOS DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN DE DQO EN R2	98
FIGURA 4.21 RESULTADOS DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN DE AGV EN R1.....	100

FIGURA 4.22 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN DE AGV EN R2	101
FIGURA 4.23 RESULTADOS DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN DE AGV EN R2	101
FIGURA 4.24 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR NMPC, EFECTO DE (N), REGULACIÓN DE DQO EN R2	104
FIGURA 4.25 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR NMPC, EFECTO DE (DC Y DT), REGULACIÓN DE DQO EN R2.....	104
FIGURA 4.26 SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR NMPC, INESTABILIDAD EN LA REGULACIÓN DE DQO EN R2	105
FIGURA 4.27 RESULTADOS DE CONTROLADOR NMPC, ENTRADAS Y SALIDAS EN LA REGULACIÓN DE DQO EN R2.....	106
FIGURA 4.28 RESULTADOS DE CONTROLADOR NMPC, REGULACIÓN DE DQO EN R2	107
FIGURA 5.1 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES, REGULACIÓN DE DQO EN R2	109
FIGURA 5.2 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES, REGULACIÓN DE DQO EN R2	109
FIGURA 5.3 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES, REGULACIÓN DE AGV EN R1.....	110
FIGURA 5.4 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES, REGULACIÓN DE AGV EN R1.....	111
FIGURA 5.5 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES, REGULACIÓN DE AGV EN R2.....	112
FIGURA 5.6 COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO DE LOS CONTROLADORES, REGULACIÓN DE AGV EN R2.....	112
FIGURA I.1 APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN CON 3 PUNTOS DE COLOCACIÓN Y HORIZONTE DE PREDICCIÓN DE 1.	128
FIGURA I.2 APROXIMACIÓN DE UNA FUNCIÓN CON 3 PUNTOS DE COLOCACIÓN Y HORIZONTE DE PREDICCIÓN DE N.	131
FIGURA II.1 CURVA DEL COMPORTAMIENTO DINÁMICO EN UNA PRUEBA DE IDENTIFICACIÓN EMPÍRICA.....	132
FIGURA II.2 DEFINICIÓN GRÁFICA DE T EN UNA PRUEBA DE IDENTIFICACIÓN EMPÍRICA PARA AJUSTE A UN MODELO DE PRIMER ORDEN SIN TIEMPO MUERTO	133
FIGURA II.3 RESPUESTA DE LA SALIDA, $Y = X_6$, POR EFECTO DEL CAMBIO ESCALÓN EN U_2	134
FIGURA II.4 RESPUESTA DE LA SALIDA, $Y = X_3$, POR EFECTO DEL CAMBIO ESCALÓN EN U_1	135
FIGURA II.5 RESPUESTA DE LA SALIDA, $Y = X_7$, POR EFECTO DEL CAMBIO ESCALÓN EN U_2	135

Índice de Tablas

TABLA 1.1 ESTADO DEL ARTE: CONTROLADORES DE DIGESTORES ANAEROBIOS DE DOS ETAPAS	5
TABLA 2.1 RANGOS DE TEMPERATURAS DEL PROCESO DE DIGESTIÓN ANAEROBIA (AL SEADI, T. 2008, P.23.)	15
TABLA 2.2 VENTAJAS DE LA DIGESTIÓN ANAEROBIA DE DOS ETAPAS RESPECTO A LA DE 1 ETAPA.....	19
TABLA 2.3 PARÁMETROS DEL MODELO DE DIGESTIÓN ANAEROBIA DE 2 ETAPAS DE VINAZAS TEQUILERAS.	32
TABLA 2.4 RESULTADOS DE LAS CONDICIONES DE LAVADO SISTEMA DE DA DE 2 ETAPAS	39
TABLA 3.1 RESULTADOS DE LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN	48
TABLA 4.1 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC, SALIDA DE CONTROL (DQO).....	79
TABLA 4.2 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC, SALIDA DE CONTROL (AGV EN R1)	85
TABLA 4.3 PUNTOS DE REFERENCIA DE LOS 3 CASOS DE REGULACIÓN	89
TABLA 4.4 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR MEC, SALIDA DE CONTROL (AGV EN R2)	89
TABLA 4.5 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN DQO EN R2.....	92
TABLA 4.6 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN AGV EN R1	93
TABLA 4.7 PARÁMETROS DE SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR SMC 1ER ORDEN, REGULACIÓN AGV EN R2	96
TABLA 4.8 PARÁMETROS DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN DQO EN R2.....	99
TABLA 4.9 PARÁMETROS DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN AGV EN R1	99
TABLA 4.10 PARÁMETROS DEL CONTROLADOR SMC LIBRE DE MODELO, REGULACIÓN AGV EN R2	102
TABLA 5.1 PASOS MÁXIMOS DE INTEGRACIÓN DE LOS ALGORITMOS DE CONTROL	115

Agradecimientos

Este trabajo de Tesis no hubiera sido posible sin la asesoría y el apoyo de varias personas e instituciones, por lo que agradezco mucho:

A mis asesores:

Dr. Héctor Puebla Núñez

Dr. Hugo Méndez Acosta

A las Instituciones:

UAM (Azcapotzalco) y CONACYT

A todos mis Profesores de la Maestría

Al Dr. Miguel Ángel Gutiérrez Limón

A mi Familia y Amigos, en especial a mi Mamá

A Dios.

Resumen

En el presente trabajo se aborda el problema de optimización y control de un digestor anaerobio continuo de dos etapas, específicamente para el procesamiento de vinazas de tequila. El problema del tratamiento de estas aguas residuales es de gran importancia debido al impacto ambiental en función de los volúmenes de producción de tequila. Adicionalmente el recuperar el agua de desecho de los procesos de producción de tequila por medio de procesos de digestión anaerobia trae consigo como todo proceso de este tipo, la obtención de biogas que se traduce en la generación de bioenergía.

El problema de optimización y control de procesos de digestión anaerobia es difícil por su naturaleza no lineal, el presente trabajo tiene como objetivo la mejora en la operación de estos equipos y/o procesos. Por lo que para este fin se aplicaron primero, técnicas de optimización no lineal para minimizar la demanda química de oxígeno (DQO) a la salida del sistema de reactores y para maximizar la producción de biogas, principalmente constituido por metano. Después de encontrar los valores óptimos de las variables de estado, se propusieron diseños de controladores basados en el método de compensación del error de modelado (MEC), modos deslizantes (SMC) y control predictivo no lineal (NMPC). Se consideraron los casos de regulación de DQO a la salida del sistema y también de regulación de AGV en cada reactor, esto último con el fin de mediciones más continuas de la salida de control. Los diseños resultantes se implementaron numéricamente y se obtuvieron resultados adecuados de los controladores MEC y NMPC, que cumplieron con los objetivos de regulación antes mencionados. Pero, para el caso de los controladores SMC los resultados no fueron aceptables debido a un comportamiento con sobredisparos en la variable manipulable.

Finalmente en este trabajo se propusieron y analizaron los elementos para una futura implementación física de los controladores diseñados que presentan un comportamiento adecuado, en este caso el algoritmo MEC resultó el más atractivo.

Capítulo 1

1. Introducción

En este capítulo se introduce el problema que es el objeto de estudio de la presente disertación, junto con su justificación, hipótesis, objetivos y estructura de la misma.

1.1. Planteamiento del Problema

Actualmente, el tratamiento de aguas residuales es fundamental para la reducción de la contaminación ambiental, para la recuperación y reutilización del líquido más importante para el ser humano: el agua. Uno de los métodos ampliamente utilizados en todo el mundo para el tratamiento de aguas residuales municipales y agroindustriales es la digestión anaerobia, la cual tiene como objetivo la digestión de la materia orgánica. Adicionalmente, como parte de la naturaleza del proceso, se produce biogas, el cual está constituido principalmente por metano. Aunque la digestión anaerobia es un método de tratamiento de aguas muy importante en la actualidad, es un proceso complejo que involucra la utilización de microorganismos muy sensibles a cambios en las condiciones de operación (Poh et al., 2016; Seghezzi et al., 1998).

Por otra parte, los residuos agroindustriales con una alta carga orgánica además de representar un problema ambiental serio, conforman una oportunidad para producir energía limpia, de acuerdo a Lora Grando et al. (2017), el potencial de fuentes de biogas a nivel mundial según la GIA (Global Intelligence Alliance), son: 75% residuos y cultivos de agricultura, 17% residuos orgánicos industriales y municipales, y 8% de aguas residuales municipales.

Precisamente, uno de los productos agroindustriales muy apreciados en México y cuyos residuos representan un problema ambiental fuerte, es el tequila. Como la industria del tequila pertenece a una economía de gran escala (De acuerdo al CRT, Consejo Regulador del Tequila, la producción promedio anual es de 240

millones de litros), la cantidad de desechos que produce es muy grande. López-López et al., (2010) mencionan que se generan de 10 a 12 L de vinazas (residuos líquidos) y aproximadamente 1.4 kg de bagazo, por cada litro de tequila producido.

Considerando las características de las vinazas de tequila, de bajo pH, DQO (demanda química de oxígeno) alto, una coloración café oscura y para poder cumplir con las leyes ambientales (NOM-001-SEMARNAT-1996), se han propuesto varios métodos, entre los que se encuentran, la coagulación /floculación con biopolímeros seguida de ozonación catalítica heterogénea (Ferral-Pérez et al., 2016) o bien con ácido poliglutámico (Carvajal-Zarrabal et al., 2012). No obstante, el método mayor estudiado y desarrollado es la digestión anaerobia.

Dentro de los procesos de digestión anaerobia se encuentra una variante que consiste en separar el proceso acidogénico del metanogénico, el cual se denomina digestión anaerobia de dos fases o de dos etapas (Two phase anaerobic digestion) la cual fue presentada inicialmente por Pohland & Ghosh, (1971). Desde entonces esta variante de la digestión anaerobia ha sido ampliamente estudiada en cuestión de aplicaciones de procesos, con la obtención de resultados positivos en comparación con el proceso convencional de una sola etapa. Sin embargo, es reciente, el desarrollo de modelos matemáticos y la aplicación de esquemas de control para los procesos de digestión anaerobia de dos etapas, de modo que, la investigación a este respecto, es relativamente escasa.

1.2. Justificación

La justificación del presente trabajo se fundamenta en tres puntos en los que se realizó la revisión del estado del arte y los cuales son: las ventajas de la digestión anaerobia sobre la aerobia, las ventajas de los procesos de digestión anaerobia de dos etapas sobre los de una etapa, basados en el mismo diseño de reactor. Y la naturaleza compleja y relativa poca cantidad de trabajos de control de los procesos de digestión anaerobia de dos etapas.

1.2.1. Ventajas de la Digestión Anaerobia sobre la Aerobia

En los últimos años los procesos de digestión anaerobia han sido de gran importancia debido a sus ventajas sobre la digestión aerobia, en términos de cantidad de lodos producidos, energía utilizada, tamaño de reactor, producción de energía renovable por la generación de biogas, utilización de oxígeno, entre otros (Riffat, R., 2013). En la **Figura 1.1** se muestra la comparación entre la digestión aerobia y la anaerobia.

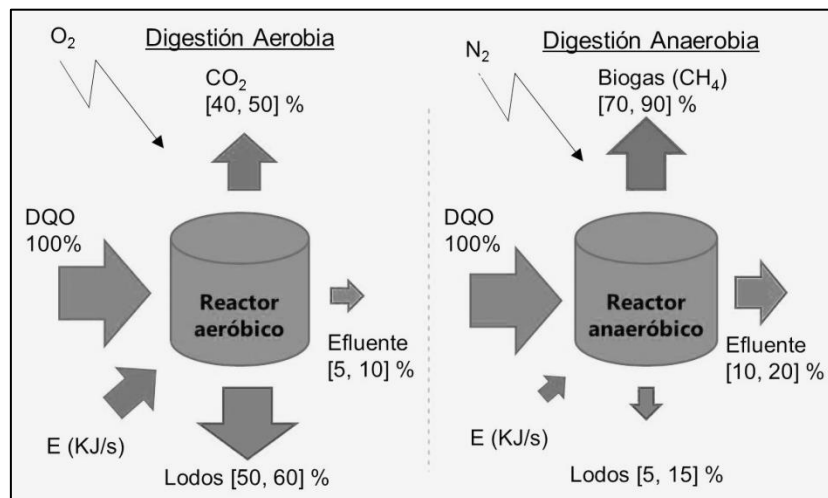


Figura 1.1 Comparación de la Digestión Aerobia y Anaerobia (De Lemos, 2007)

La construcción de plantas de digestión anaerobia en el mundo ha mostrado una tendencia muy creciente, sobre todo, por el potencial de la producción de biogas (De Baere, 2006; Van Lier, Mahmoud y Zeeman, 2008).

1.2.2. Ventajas de la Digestión Anaerobia de Dos Etapas sobre la de Una Etapa

La hipótesis de Pohland & Ghosh, (1971) de la separación de las etapas acidogénica y metanogénica, fue en relación a maximizar la actividad de cada grupo de microorganismos con el fin de mejorar la estabilidad y el control del proceso (Demirel & Yenigün, 2002). Varios trabajos de investigación han reportado las ventajas de los sistemas de digestión anaerobia de dos etapas con respecto a los de una etapa. Li et

al.,(2016) y Schievano et al., (2014), Schievano et al., (2012), obtuvieron un 83 y 43% más de recuperación de energía que en el caso de una sola etapa, y en cuanto a remoción de DQO, Li et al., (2016) obtuvo un 57% más; esto fue para la digestión anaerobia de residuos de comida y residuos agroindustriales respectivamente. Otros trabajos, como los de Arreola-Vargas et al., (2016) y Yazar et al., (2016), el primero tratando bagazos de tequila y el segundo, lacto-suero; consiguieron un aumento sustancial de 300% en la recuperación de energía y de 50% en la remoción de DQO. Por otra parte, Fu et al., (2017) estudiaron la producción de metano e hidrógeno a partir de vinazas de cerveza y encontraron que un sistema de digestión anaerobia de dos etapas tiene un rendimiento de metano 11% mayor y una eficiencia de remoción de DQO 13% mayor, que el de una.

1.2.3. Complejidad en el Control de los Procesos de Digestión Anaerobia

El tratamiento y la reutilización del agua, contribuyen a los esfuerzos para reducir la contaminación del ambiente, y recuperar el agua, sin embargo, la sensibilidad de los sistemas de digestión anaerobia ha probado ser un reto para la obtención de una calidad consistente de agua tratada y una producción estable y sostenida de biogas (Poh, Gouwanda, Mohan, Gopalai, & Tan, 2016).

En las plantas agroindustriales de biogas, los controles de alimentación no han sido tan implantados como en el caso de las plantas de tratamiento de aguas municipales, esto es debido a la falta de un punto de referencia adecuado que ofrezca una operación económicamente redituable que al mismo tiempo garantice la estabilidad. Por lo tanto, los retos deben ser encauzados hacia el desarrollo de dispositivos de medición robusta y de esquemas de control que estimen variables de proceso críticas, (Gaida, D. et al, 2017). De esta forma la confiabilidad en la operación de las plantas de digestión anaerobia mejorará junto con la reducción de costos, el aumento de las utilidades y el cumplimiento a las normas ambientales.

Un problema común para el control de un bioreactor se origina debido a la naturaleza no lineal del proceso que se lleva a cabo en él, considerado intrínsecamente

inestable; lo que hace que las estrategias convencionales de control de retroalimentación no funcionen adecuadamente (Seok, 2003, Poh et al., 2016). Por esta razón, es necesario diseñar esquemas de control, no convencionales y robustos.

Si bien están reportados los beneficios de los sistemas de digestores de dos etapas, sobre los de una etapa en cuanto al mismo tipo de reactor, la cantidad de investigaciones en torno al desarrollo de esquemas de control de sistemas de digestión de dos fases, ha sido limitada. En cuanto a algoritmos de control aplicados a sistemas de digestión anaerobia de dos etapas, se han reportado controladores PID (Von Sachs et al., 2003), control multivariable no lineal basado en observadores (Aguilar-Garnica, et al.; 2009; Aguilar-Garnica et al., 2007), control pasivo no lineal (Dochain y Gonzalez-alvarez, 2014) y control en cascada híbrido (Méndez-Acosta et al., 2016). La **Tabla 1.1**, resume en forma breve los trabajos de control, que se han desarrollado para digestores anaerobios de dos etapas.

Autores	Método de Control	Problema: Regulación	Variable Manipulada	Modelo
Von Sachs, et al., (2003)	PI	Relación de flujo de metano real vs esperado	$Q_{recirc2}$	Balance global
Aguilar-Garnica, et al., (2007)	Basado en observadores	AGV en R2 DQO en R2	$Q_{recirc1}, Q_{recirc2}$	Schoefs, et al 2004, (EDP)
Aguilar-Garnica, et al., (2009)	Control multivariable no lineal	AGV en R1 DQO en R2	$Q_{recirc1}, Q_{recirc2}$	Schoefs, et al 2004, (EDP)
Alcaraz-González, et al., (2014)	Control pasivo no lineal	DQO en R1 AGV en R2	D_1, D_2	Robles-Rodríguez, et al 2013
Méndez-Acosta, et al., (2016)	Control en cascada híbrido	AGV en R1 DQO en R2	D_1, D_2	Robles-Rodríguez, et al 2013

Tabla 1.1 Estado del Arte: Controladores de Digestores Anaerobios de Dos Etapas

Donde: Q_{recirc1} , Q_{recirc2} , flujos de recirculación del reactor acidogénico y metanogénico respectivamente, $D1$, $D2$, tasas de dilución del reactor acidogénico y metanogénico, respectivamente.

La causa más común de falla de un digestor anaerobio es debido a un desbalance entre el proceso de acidogénesis y el de metanogénesis, especialmente en la diferencia entre las velocidades de producción de ácidos grasos volátiles (AGV) y la de consumo de éstos, es entonces cuando se alcanza un nivel de AGV inhibitorio para los metanógenos, es por esta importante razón, que algunos de los esfuerzos para diseñar controladores para digestores anaerobios se han abocado a asegurar la estabilidad del proceso a través de la regulación de los AGV (Seok, 2003, Rincon, Angulo y Olivar, 2009). Otra razón por la cual resulta atractivo utilizar los AGV como la salida de control, es por la dificultad de la medición de la demanda química de oxígeno (DQO), que es una de las variables que más se desean controlar con el fin de satisfacer las normas ambientales. Por esta razón, el interés por medir en forma más práctica y a menor costo la concentración de AGV se ha acrecentado, a este respecto, Robles et al., (2016) utilizaron mediciones en línea de conductividad junto con modelos de regresión lineales para predecir la concentración de bicarbonato y la tasa de producción de metano, durante periodos de arranque y operación normal en una reactor anaeróbico continuo de lecho fijo. Por otra parte, Aceves-Lara et al., (2012), han estimado la concentración de AGV en un proceso piloto de digestión anaerobia continuo, en la etapa de producción de hidrógeno, mediante mediciones en línea de conductividad eléctrica y también, en la etapa de producción de metano, han estimado la concentración de AGV mediante la medición simultánea de pH y conductividad por medio de un modelo no lineal de regresión de redes neuronales. Y adicionalmente, Charnier et al., (2016), combinaron las mediciones de sensores de conductividad y pH, usando métodos no lineales, para estimar en forma más precisa la concentración de AGV.

Lo anterior expuesto demuestra que puede monitorearse para efectos de control un sistema de digestión anaerobia, determinando variables críticas para la estabilidad

del proceso como lo es la concentración de AGV, por medio de mediciones simples de pH y conductividad.

1.3. Hipótesis

- Los métodos optimización no lineal y de control robusto de compensación del error de modelado (MEC, model error compensation), de modo deslizante (SMC, sliding mode control), y control de modo predictivo no lineal basado en modelo (NMPC, nonlinear model predictive control), son capaces de mejorar la operación convencional de los sistemas de digestión anaerobia de dos etapas y reducir el impacto de las perturbaciones.
- El problema de regulación de un sistema de digestión anaerobia de 2 etapas se puede abordar como un problema de control de una sola entrada y una sola salida (SISO, single input single output).
- La regulación de la demanda química de oxígeno (DQO) del reactor metanogénico del sistema de digestión anaerobia (DA) de dos etapas puede lograrse utilizando como salida de control la concentración de ácidos grasos volátiles (AGV) en el reactor acidogénico o la concentración de ácidos grasos volátiles (AGV) en el reactor metanogénico.
- Es factible una implementación futura de los algoritmos de control diseñados basados en MEC, SMC y NMPC, utilizando mediciones directas e indirectas de las salidas de control.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Mejorar la operación convencional de un proceso de DA de dos etapas para un problema de regulación, a través de estrategias de optimización y control robusto.

1.4.2. Objetivos Particulares

- a) Formular y resolver el problema de optimización de minimización de la DQO para cumplir con las leyes ambientales y de maximización de la producción de biogas para mejorar la rentabilidad del proceso.
- b) Diseñar e Implementar numéricamente algoritmos de control robustos para el problema de regulación de demanda química de oxígeno (DQO), basados en
 - Compensación del error de modelado (MEC).
 - Modos deslizantes (SMC)
 - Control predictivo no lineal basado en modelo (NMPC)
- c) Proponer elementos para una futura implementación física de los esquemas de control diseñados.

1.5. Organización del Trabajo

El presente trabajo muestra la aplicación de diversas técnicas de control moderno y robusto para el caso de un sistema de digestión anaerobia de dos fases o etapas, de manera que la organización del trabajo conlleva la siguiente estructura:

En el **Capítulo 1** se describe brevemente el contexto del problema de optimización y control del proceso de digestión anaerobia de 2 etapas de vinazas tequileras; asimismo se mencionan los objetivos, hipótesis y contenido del presente trabajo de tesis.

En el **Capítulo 2**, por una parte, se explican los fundamentos de los sistemas de digestión anaerobia y algunas precisiones para los sistemas de dos etapas. Por otra parte, se presenta el caso de estudio del proceso de digestión anaerobia de dos etapas de vinazas tequileras, incluyendo el modelo de digestión anaerobia y el análisis matemático previo al diseño del control.

En el **Capítulo 3**, primeramente se formula y resuelve el problema de optimización de la planta de digestión anaerobia de dos etapas y secundamente, se formulan los

problemas de control y luego se presentan los fundamentos y se diseñan las estrategias de control robusto para la resolución de éstos.

En el **Capítulo 4**, se implementan numéricamente los algoritmos de control diseñados para la resolución de los problemas de control del sistema de digestión anaerobia de dos etapas.

En el **Capítulo 5**, se realiza un análisis de los resultados de la implementación numérica de los algoritmos de control aplicados a la planta de estudio, en el que se comparan en cuanto a desempeño. Y se emiten recomendaciones y observaciones de los resultados del presente trabajo, para presentar las conclusiones finales y el trabajo futuro de investigación.

Capítulo 2

2. Digestión Anaerobia de Dos Etapas

En este capítulo se revisan los fundamentos de los procesos de digestión anaerobia convencional y de dos etapas. También se presenta el modelo de la planta de estudio de digestión anaerobia de dos etapas de vinazas tequileras.

2.1. Digestión Anaerobia

2.1.1. Introducción al Proceso de Digestión Anaerobia

La digestión anaerobia (DA) es un proceso microbiológico que descompone la materia orgánica sin la presencia de oxígeno, generando como productos principales, por una parte, biogas que principalmente contiene metano y dióxido de carbono, y por otra digestato, que es el sustrato descompuesto (Al Seadi et al., 2008).

El proceso de digestión anaerobia (DA) es complejo y está conformado por 4 subprocesos: hidrólisis, acidogénesis, acetogénesis y metanogénesis. Y son 5, los principales grupos de microorganismos involucrados en una serie específica de reacciones bioquímicas, de acuerdo a Riffat, R., (2013) y a De Lemos, C.A., (2007):

1. **Bacterias fermentativas o acidogénicas**, las cuales son las responsables de las primeras dos etapas de la DA, es decir hidrólisis y acidogénesis.
2. **Bacterias acetogénicas productoras de hidrógeno**, que catabolizan azúcares, alcoholes y ácidos orgánicos a acetato y a dióxido de carbono.
3. **Bacterias acetogénicas y homoacetogénicas consumidoras de hidrógeno**, las cuales usan el hidrógeno y el dióxido de carbono para producir acetato.

4. **Metanógenos (arqueas) reductores de dióxido de carbono**, los cuales utilizan el hidrógeno y el dióxido de carbono para producir metano.
5. **Metanógenos acetoclásticos**, los cuales utilizan el acetato para producir metano y dióxido de carbono.

Los 4 pasos del proceso anaeróbico, así como los diferentes grupos microbianos, antes mencionados, se muestran en la **Figura 2.1**.

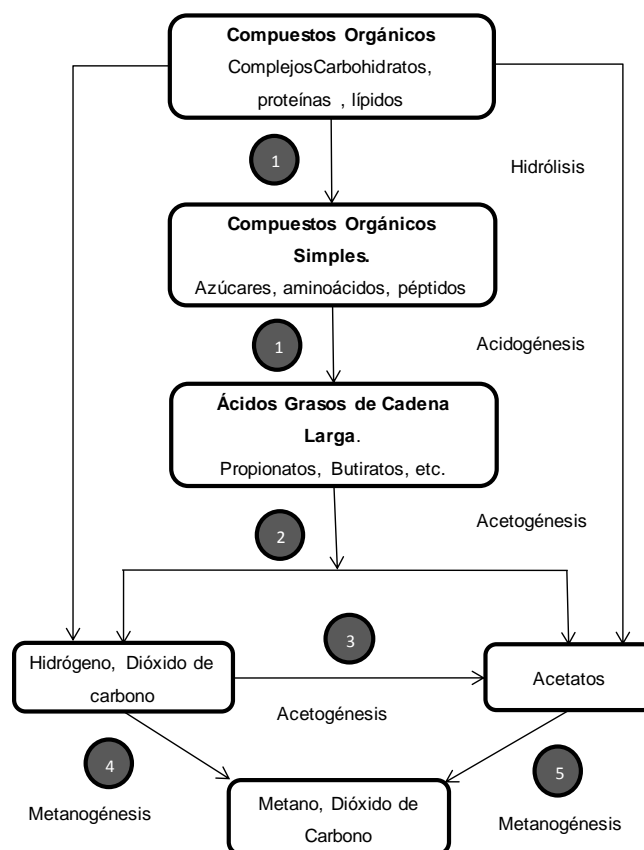


Figura 2.1 Pasos metabólicos involucrados en la digestión anaerobia (Riffat, R., 2013)

2.1.2. Hidrólisis

La primera fase de la digestión anaerobia es un fenómeno de superficie y consiste en la degradación de las partículas poliméricas de material por la acción de exoenzimas que son producidas por bacterias acidogénicas, para su conversión en moléculas pequeñas disueltas, las cuales pueden penetrar las membranas

celulares de las bacterias fermentativas. Los productos de la hidrólisis, es decir, azúcares, aminoácidos, ácidos grasos y alcoholes son los sustratos para otras bacterias acidogénicas. El proceso de la hidrólisis es muy sensible a los cambios de temperatura y se considera el paso de velocidad limitante debido a la limitada área superficial libre de las partículas y a la estructura global del sustrato sólido (De Lemos C.A., 2007, Van Lier, Mahmoud y Zeeman, 2008).

Los factores que más afectan la velocidad y el grado de conversión de la hidrólisis son: temperatura del reactor, tiempo de residencia del sustrato, composición del sustrato, tamaño de las partículas, pH del medio, concentración de ácidos grasos volátiles, entre otros (De Lemos, C.A. 2007)

2.1.3. Acidogénesis

En la acidogénesis los productos de la hidrólisis que relativamente son moléculas pequeñas, se difunden a través de las membranas celulares de las bacterias y posteriormente se fermentan y oxidan anaeróbicamente, para generar como productos principales: ácidos grasos volátiles (AGV) como son el butirato y el propionato, hidrógeno, dióxido de carbono, ácido láctico, etanol y amoníaco. (Van Lier, Mahmoud y Zeeman, 2008).

La acidogénesis es el paso más rápido en la cadena de reacciones anaerobias. La ΔG^0 , de las reacciones de acidificación es la más negativa de todas las reacciones anaerobias y las velocidades de crecimiento de los microorganismos acidogénicos son varias veces a las de los metanogénicos, por esta razón, los reactores anaerobios están sujetos a la acidificación. Una vez que la alcalinidad se consume por los ácidos producidos, el pH disminuye y la concentración de AGV aumenta lo que provoca una inhibición de los microorganismos metanogénicos. (Van Lier, Mahmoud y Zeeman, 2008).

Si la metanogénesis se retrasa por alguna razón y se acumula el hidrógeno, entonces es posible que en lugar de ser el producto principal el acetato, aparezcan

productos más reducidos como los propionatos y butiratos (Van Lier, Mahmoud y Zeeman, 2008).

2.1.4. Acetogénesis

En este paso, la bacterias acetogénicas producen ácido acético, junto con hidrógeno y dióxido de carbono mediante la degradación de los AGV y los alcoholes producidos en la acidogénesis (Riffat, R., 2013).

El metabolismo de las bacterias acetogénicas se inhibe por el hidrógeno que ellas mismas producen. De acuerdo a Van Lier, Mahmoud y Zeeman, (2008) existen estudios que han develado una asociación entre microorganismos acetogénicos productores de hidrógeno y metanogénicos consumidores de éste. Esto es de vital importancia debido a que las reacciones acetogénicas tienen un $\Delta G^0 > 0$, en condiciones estándar. No obstante, bajo las condiciones de digestión estables y normales, el consumo de hidrógeno por parte de los metanógenos es rápido de manera tal que la presión parcial del hidrógeno en el medio es baja del orden de $[10^{-6}, 10^{-4}]$ atm. Esto se puede explicar más fácilmente con la expresión del cambio de la energía libre de Gibbs (2.1) para la degradación del propionato:

$$\Delta G' = \Delta G^0 + RT \ln \left| \frac{[Acetato][CO_2][H_2]^3}{[Propionato]} \right| \quad (2.1)$$

Por otra parte, existen dos formas en la que el hidrógeno se consume en el medio de reacción (De Lemos, C.A. 2007):

- a) A través de los microorganismos metanogénicos que utilizan hidrógeno y dióxido de carbono para producir metano.
- b) Y a través de la formación de ácidos orgánicos (propiónico, butírico) que se forman de la reacción de hidrógeno, dióxido de carbono y ácido acético.

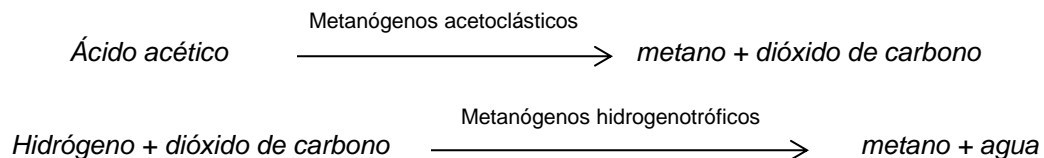
Entre todos los productos metabolizados por las bacterias acidogénicas, sólo el hidrógeno y el acetato pueden ser directamente utilizados por los microorganismos

metanogénicos. Sin embargo, por lo menos 50 % de la DQO biodegradable se convierte en ácidos propiónicos y butíricos, los cuales, después se degradan en ácido acético e hidrógeno, por la acción de las bacterias acetogénicas (De Lemos, C.A. 2007).

2.1.5. Metanogénesis

En esta fase final, las arqueas metanogénicas son las responsables de la producción de metano y dióxido de carbono a partir de los productos intermediarios de las fases anteriores. Aproximadamente 70% del metano generado se origina a partir del acetato mientras el 30% se origina a partir del hidrógeno y dióxido de carbono (Al Seadi, T. 2008).

Las reacciones principales de esta etapa final son dos y en cada una interviene un grupo de arqueas metanogénicas especializadas (De Lemos, C.A. 2007):



Ambos grupos de microorganismos metanogénicos juegan un papel crítico en el curso de la digestión anaerobia, puesto que son los responsables de consumir el hidrógeno producido en las fases anteriores, consecuentemente, la presión parcial de hidrógeno en el medio disminuye, permitiendo que se produzcan las reacciones llevadas a cabo por las bacterias acetogénicas y metanogénicas (De Lemos, C.A. 2007).

La tasa de crecimiento de los metanógenos acetoclásticos es muy baja, esto explica el tiempo largo de arranque de los reactores de digestión anaerobia. Por otra parte, los metanógenos hidrogenotróficos tienen una tasa de crecimiento máxima mucho mayor que los acetoclásticos. Por estas razones los sistemas de

DA de alta velocidad presentan una característica estabilidad (Van Lier, Mahmoud y Zeeman, 2008).

2.2. Parámetros de la Digestión Anaerobia

Los factores críticos que afectan el proceso de digestión anaerobia es decir a la actividad de los microorganismos anaeróbicos se dividen en aquellos factores que son intrínsecos al proceso y en los que son relacionados con la operación.

2.2.1. Factores Intrínsecos a la Digestión Anaerobia

- **Temperatura**

El proceso de DA puede ser efectuado a diferentes temperaturas y son tres rangos los cuales se muestran en la **Tabla 2.1**.

Etapa Térmica	Temperatura de Proceso (°C)	Mínimo Tiempo de Retención (d)
Psicrofílica	< 20	70 a 80
Mesofílica	30 a 42	30 a 40
Termofílica	43 a 55	15 a 20

Tabla 2.1 Rangos de Temperaturas del Proceso de Digestión Anaerobia (Al Seadi, T. 2008, p.23.)

Existe una relación directa entre la temperatura y el tiempo de retención hidráulico. Actualmente, varias plantas operan en la zona termofílica, entre las ventajas de operar en esta zona se encuentran: una destrucción efectiva de patógenos, una velocidad de crecimiento mayor de la población metanogénica, una mejor degradación de sustratos sólidos y un tiempo de retención menor. Sin embargo entre las desventajas se encuentran: un mayor grado de inestabilidad, consumo de energía mayor y el riesgo de inhibición por amoníaco. (Al Seadi, T. 2008).

- **pH**

Este es un factor importante para la DA porque cada enzima se activa en un rango estrecho de pH. El pH tiene efecto tanto en microorganismos acidogénicos como en metanogénicos, y el pH óptimo se encuentra en el rango de 6.5 a 7.6. A este

respecto, si el pH baja a un valor menor 6.3 o aumenta a uno mayor de 7.8, entonces la actividad de los metanógenos se reduce considerablemente. Un valor de pH menor a 6.3 indica una producción anormal de ácidos grasos mientras que un pH por encima de 7.8 indica acumulación de amoníaco. Para mantener un valor deseado de pH se añaden soluciones amortiguadoras de bicarbonato o hidróxido (Riffat, R. 2013).

- **Ácidos Grasos Volátiles (AGV)**

Los ácidos grasos son productos intermediarios producidos durante la acidogénesis, tales como: acetato, propionato, butirato, lactato, entre otros (hasta 6 átomos de C), cuya concentración es una medida de la estabilidad del proceso de digestión. En muchos casos, la inestabilidad del proceso de digestión anaerobia ocurre junto con la acumulación de ácidos grasos volátiles dentro del digestor. Esto se ve reflejado en una disminución del pH, aunque no siempre es así debido a la capacidad de amortiguamiento o dilución del digestor por las diferentes biomásas en el mismo. La experiencia ha demostrado que si dos digestores tienen la misma concentración de AGV, se pueden comportar totalmente diferente, en un caso, uno puede estar trabajando bien y el otro, la concentración de AGV puede ser inhibitoria. Se cree que esto se debe a las diferencias en la composición de las poblaciones de microorganismos entre los dos digestores. Es por esta razón por la que no se recomienda que solo la concentración de AGV se utilice para monitorear el proceso de digestión. (Al Seadi, T. 2008).

- **Amoníaco**

Si la concentración de amoníaco en su forma no ionizada es alta, puede inhibir la actividad de los microorganismos metanogénicos. El efecto inhibitorio se promueve con el incremento del pH y de la temperatura, de tal forma que la etapa termofílica es más sensible a la inhibición que las otras. Cuando un proceso de

digestión es inhibido por amoníaco, un aumento en la concentración de AGV conduce a una disminución en el pH. (Al Seadi, T. 2008).

- **Macro y micronutrientes y compuestos tóxicos**

Los microelementos y los macronutrientes son también de gran importancia en el proceso de digestión anaerobia, la relación óptima de macronutrientes carbono, nitrógeno, fósforo y azufre (C.N.P.S) se ha considerado como: (600:15:5:1). Un proceso de digestión muy rápido y una deficiencia en elementos y nutrientes puede causar inhibición en el proceso (Al Seadi, T. 2008).

2.2.2. Parámetros Operacionales

- **Carga Orgánica**

Este es un parámetro importante debido a que un aumento en la carga orgánica podría ocasionar una sobrecarga y llevar a una falla al digestor, el significado físico de este parámetro es la cantidad de materia orgánica que se puede alimentar por unidad de volumen y tiempo (Abbasi, Tauseef and Abbasi, 2012).

- **Tiempo de Retención Hidráulico**

El tiempo de retención hidráulico es el tiempo que pasa, desde que el material orgánico entra al digestor, es degradado dentro del mismo y finalmente sale (Abbasi, Tauseef and Abbasi, 2012). El tiempo de retención debe ser suficiente para asegurar que la cantidad de microorganismos que es removida no sea mayor a la cantidad generada por reproducción (Al Seadi, T. 2008).

2.3. Digestión Anaerobia de Dos Etapas

De acuerdo a Pohland y Ghosh, (1971), por medio de la separación de fases, una para los microorganismos productores de ácidos y otra para los formadores de metano, se pueden establecer condiciones idóneas para el crecimiento de cada grupo de microorganismos, de manera que se puede mejorar el rendimiento,

eficiencia y estabilidad de cada fase, lo que a su vez permite la implementación de esquemas de monitoreo y control. Adicionalmente con la separación de fases se pueden reducir los efectos inhibitorios de los productos intermedios en este caso los ácidos grasos volátiles. El pH que se supone adecuado para la fase acidogénica se encuentra entre 5 y 6, y para la fase metanogénica entre 6.8 y 7.4 (Ghosh y Klass, 1982).

Con relación al diseño del reactor de cada fase en cuanto a tamaño y tasa de recirculación, éste se basa en los requerimientos de crecimiento cinético de cada grupo de microorganismos. Un diagrama típico para un sistema de digestión anaerobia de dos fases, que no tiene recirculación entre los reactores, se muestra en la **Figura 2.2**.

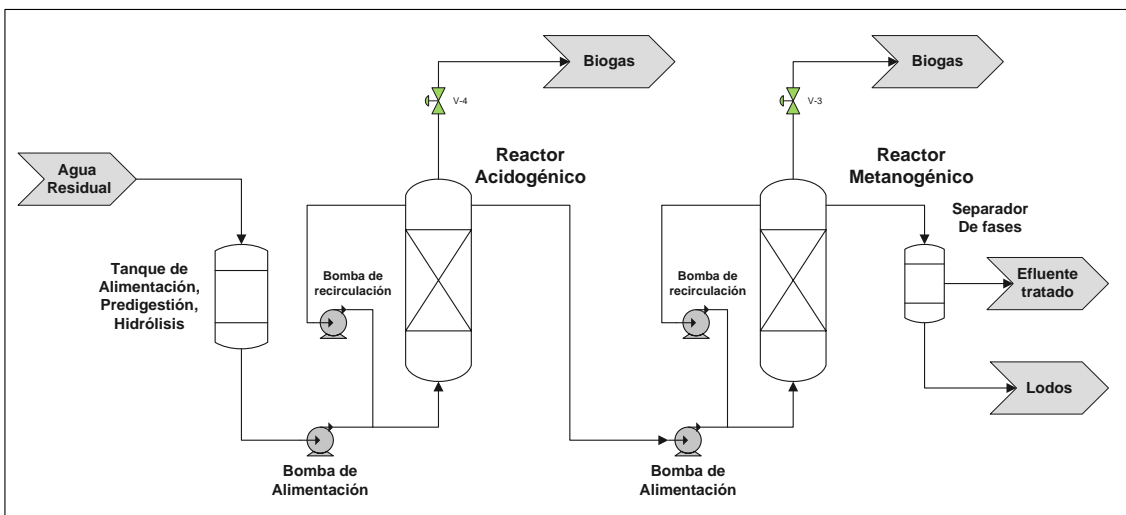


Figura 2.2 Proceso de Digestión Anaerobia de Dos Etapas Típico, Basado en Ghosh y Klass, 1982

Como los productos principales del primer reactor son ácidos grasos, entonces se requiere un control del pH en el segundo reactor, ya que la capacidad de amortiguamiento se excede. Este control puede lograrse mediante neutralización del influente al reactor metanogénico o bien por medio de recirculación en dicho reactor.

En el sistema de dos fases, uno de los objetivos operacionales es que, es necesario que se exceda la velocidad de crecimiento de los metanógenos con una tasa de crecimiento permisible en el primer reactor para asegurar una completa conversión del sustrato a AGV y otros intermediarios, que son utilizables por los metanógenos en el segundo reactor. Lo anterior, también significa que el reactor metanogénico debe operar con un tiempo de retención mucho mayor al del reactor acidogénico, este control cinético del crecimiento de cada grupo de microorganismos se puede lograr mediante la manipulación de las tasas de dilución y de recirculación de cada reactor (Ruggeri, B. et al., 2015).

Autores	Tipo de Reactor	% Recuperación de Energía respecto a 1 Fase	% Remoción DQO respecto a 1 fase	Observaciones
Aslanzadeh et al.,(2014),	CSTR	1.0	1.0	El sistema de 2 etapas resiste más carga orgánica, requiere menor TRH, y un menor volumen de reactor.
Schievano, et al (2014)	Semibatch, Batch	1.08-1.43	-----	
Ruggeri, B. et al., 2015	Batch, CSTR	1.5-2.7		Se obtuvo misma eficiencia que en 1 etapa pero con menor TRH y menor volumen.
Arreola et al (2016)	Batch	4.4	-----	Cada etapa mejora su rendimiento
Yazar, et al (2016)	Batch, Semibatch	4.0	1.53	+ Control de cada fase
Li, et al (2017)	Batch, Semibatch	1.83	1.57	
Fu et al., (2017)	Batch	1.11	1.13	

Tabla 2.2 Ventajas de la Digestión Anaerobia de Dos Etapas Respecto a la de 1 Etapa

En la literatura varios estudios han coincidido en las ventajas de los sistemas de digestión anaerobia de 2 fases o etapas respecto a los de 1 etapa, en la **Tabla 2.2**,

se muestran las ventajas con relación a una mayor recuperación de energía y remoción de DQO, para la degradación de un mismo sustrato.

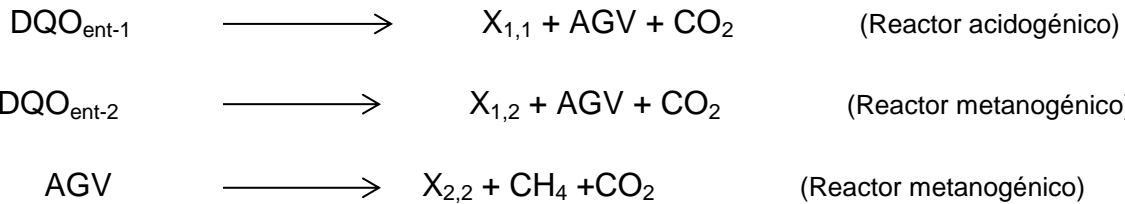
2.4. Modelo de Digestión Anaerobia de 2 Etapas

2.4.1. Preliminares

El modelo de digestión anaerobia de 2 fases o etapas que se utilizará para proponer el diseño de estrategias de optimización y control, que es el objeto de estudio del presente trabajo de tesis, es el de Robles-Rodríguez, C., Alcaraz-González, V., García-Sandoval, J. P., González-Álvarez, V., y Méndez-Acosta, H. O. (2013). Este modelo se ha seleccionado por la importancia del tema de la contaminación causada por las vinazas en la industria del tequila y por la escasez de disponibilidad de modelos para fines de optimización y control. Precisamente el modelo de Robles-Rodríguez, C et al., (2013), está basado en uno más complejo que es el de Palacios-Ruiz et al. (2008), éste último considera balances que no considera el primero, como son: el balance de carbón inorgánico total y el de iones fuertes. Las modificaciones que realiza el modelo de Robles-Rodríguez, C et al., (2013), respecto al de Palacios-Ruiz et al. (2008) se deben a la configuración del sistema de dos fases y a los objetivos que se persiguen de monitoreo y control en el proceso de digestión anaerobia de vinazas tequileras. En ambos modelos se separan las fases, acidogénica y metanogénicas, pero en el de Robles-Rodríguez, C et al., (2013), no existe recirculación que conecte a ambos reactores y considera que existe biomasa acidogénica en el reactor metanogénico debido a que el inóculo de ambos reactores fue el mismo.

2.4.2. Descripción del Modelo

La digestión anaerobia de dos fases o etapas, en la cual la primera consiste en la acidogénesis y la segunda en la metanogénesis, se puede conceptualizar con las siguientes reacciones



Donde:

$\text{DQO}_{\text{ent-1}}$, $\text{DQO}_{\text{ent-2}}$: demanda química de oxígeno que entra al reactor acidogénico y metanogénico respectivamente. AGV: ácidos grasos volátiles.

$X_{1,j}$: biomasa acidogénica, $X_{2,j}$: biomasa metanogénica, $j=1$ reactor acidogénico, $j=2$ reactor metanogénico

Realizando balances de materia para cada especie, para un modelo de reactor continuo idealmente agitado, para las etapas acidogénica (2.2-2.4) y metanogénica (2.5-2.8), se tiene que:

$$\frac{V_1}{v_{0,1}} \frac{dX_{1,1}}{dt} = \mu_{1,1}(S_{1,1})X_{1,1} \frac{V_1}{v_{0,1}} - \alpha_1 X_{1,1} \quad (2.2)$$

$$\frac{V_1}{v_{0,1}} \frac{dS_{1,1}}{dt} = -k_1 \mu_{1,1}(S_{1,1})X_{1,1} \frac{V_1}{v_{0,1}} + (S_{1,0} - S_{1,1}) \quad (2.3)$$

$$\frac{V_1}{v_{0,1}} \frac{dS_{2,1}}{dt} = k_2 \mu_{1,1}(S_{1,1})X_{1,1} \frac{V_1}{v_{0,1}} + (S_{2,0} - S_{2,1}) \quad (2.4)$$

$$\frac{V_2}{v_{0,2}} \frac{dX_{1,2}}{dt} = \mu_{1,2}(S_{1,2})X_{1,2} \frac{V_2}{v_{0,2}} - \alpha_2 X_{1,2} \quad (2.5)$$

$$\frac{V_2}{v_{0,2}} \frac{dX_{2,2}}{dt} = \mu_{2,2}(S_{2,2})X_{2,2} \frac{V_2}{v_{0,2}} - \alpha_2 X_{2,2} \quad (2.6)$$

$$\frac{V_2}{v_{0,2}} \frac{dS_{1,2}}{dt} = -k_3 \mu_{1,2}(S_{1,2})X_{1,2} \frac{V_2}{v_{0,2}} + (S_{1,1} - S_{1,2}) \quad (2.7)$$

$$\frac{V_2}{v_{0,2}} \frac{dS_{2,2}}{dt} = -k_4 \mu_{2,2}(S_{2,2})X_{2,2} \frac{V_2}{v_{0,2}} + k_5 \mu_{1,2}(S_{1,2})X_{1,2} \frac{V_2}{v_{0,2}} + (S_{2,1} - S_{2,2}) \quad (2.8)$$

Con:

$S_{1,j}$ = carga orgánica, demanda química de oxígeno, DQO [=] g/L

$S_{2,j}$ = concentración de ácidos grasos volátiles, AGV [=] mmol/L

$S_{1,0}$ = carga orgánica a la entrada del reactor acidogénico.

$S_{2,0}$ = concentración de ácidos grasos volátiles a la entrada del reactor acidogénico.

V_j = volumen de cada reactor (L), $v_{0,j}$ = flujo volumétrico (L/d).

α_j = son las fracciones de biomasa en fase líquida de cada reactor, que nos permite pasar a una configuración de reactor de lecho fijo ideal, es decir, $\alpha=0$, a una de un reactor continuo de tanque agitado, $\alpha=1$, por lo que este valor está acotado $0 \leq \alpha \leq 1$ y representa la heterogeneidad del sistema.

Ahora con respecto a las cinéticas de crecimiento de los microorganismos se tiene la definición de las velocidades de crecimiento específicas para cada biomasa:

$$\mu_{1,1}(S_{1,1}) = \frac{\mu_{1,1 \max} S_{1,1}}{k_{s1,1} + S_{1,1}} \quad (2.9)$$

$$\mu_{1,2}(S_{1,2}) = \frac{\mu_{1,2 \max} S_{1,2}}{k_{s1,2} + S_{1,2}} \quad (2.10)$$

$$\mu_{2,2}(S_{2,2}) = \frac{\mu_{2,2 \max} S_{2,2}}{k_{s2,2} + S_{2,2} + \left(\frac{S_{2,2}}{k_{I2}}\right)^2} \quad (2.11)$$

Con:

$\mu_{1,1}(S_{1,1})$, representa la cinética tipo Monod de las bacterias acidogénicas, (d^{-1}), en el reactor acidogénico.

$\mu_{1,2}(S_{1,2})$, representa la cinética tipo Monod de las bacterias acidogénicas, (d^{-1}), en el reactor metanogénico.

$\mu_{2,2}(S_{2,2})$, representa la cinética tipo Haldane de las arqueas metanogénicas, (d^{-1}), en el reactor metanogénico.

Por otra parte, k_m , $m=1..5$, son los coeficientes de rendimiento del sistema que relacionan el consumo y generación de AGV's y DQO con respecto al de la biomasa. Es decir, se definen como:

$$k_1 = Y_{S_{1,1}/X_{1,1}} = \frac{S_{1,1}}{X_{1,1}} \quad [=] \frac{g \text{ DQO}}{g \text{ X}_{1,1}} \quad (2.12)$$

$$k_2 = Y_{S_{2,1}/X_{1,1}} = \frac{S_{2,1}}{X_{1,1}} \quad [=] \frac{mmol \text{ AGV}}{g \text{ X}_{1,1}} \quad (2.13)$$

$$k_3 = Y_{S_{1,2}/X_{1,2}} = \frac{S_{1,2}}{X_{1,2}} \quad [=] \frac{g \text{ DQO}}{g \text{ X}_{1,2}} \quad (2.14)$$

$$k_4 = Y_{S_{2,2}/X_{2,2}} = \frac{S_{2,2}}{X_{2,2}} \quad [=] \frac{mmol \text{ AGV}}{g \text{ X}_{2,2}} \quad (2.15)$$

$$k_5 = Y_{S_{2,2}/X_{1,2}} = \frac{S_{2,2}}{X_{1,2}} \quad [=] \frac{mmol \text{ AGV}}{g \text{ X}_{1,2}} \quad (2.16)$$

Los parámetros $\mu_{1,1 \max}$, (d^{-1}) (velocidad de crecimiento máxima), $k_{s1,1}$ ($g \text{ DQO}/L$) (constante de saturación), $\mu_{1,2 \max}$, (d^{-1}), $k_{s1,2}$ ($g \text{ DQO}/L$) corresponden a la cinética de Monod que lleva a cabo la biomasa acidogénica. Y, $\mu_{2,2 \max}$, (d^{-1}), $k_{s2,2}$ ($mmol \text{ AGV}/L$), k_{i2} ($mmol \text{ AGV}/L$)^{1/2} (constante de inhibición), corresponden a la cinética de Haldane, que efectúa la biomasa metanogénica.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, el modelo de Robles-Rodríguez, C et al., (2013), se diseñó bajo las siguientes suposiciones:

- En el reactor acidogénico solo existen microorganismos acidogénicos que se encuentran uniformemente distribuidos.

- En el reactor metanogénico hay presentes microorganismos acidogénicos y metanogénicos.
- Los reactores operan isotérmicamente, $T = 35 \pm 2^\circ C$, y no hay recirculación entre ellos.
- Los AGV están compuestos principalmente por ácido acético.
- El intervalo de pH en el reactor acidogénico es $5.0 \leq pH \leq 5.4$, y en el reactor metanogénico es $7.1 \leq pH \leq 7.5$.

2.4.3. Precisiones Acerca del Sistema Físico

El modelo de Robles-Rodríguez, C et al.,(2013) se diseñó con base en un sistema a escala laboratorio continuo de digestión anaerobia de dos etapas para el procesamiento de vinazas tequileras instalado en la Universidad de Guadalajara (UDG) en el campus CUCEI. Las propiedades de las vinazas tequileras fueron reportadas por Mendez-Acosta et al., (2011), donde es importante resaltar que el 95% de la DQO es soluble con una concentración promedio de 50 g/L. El sistema experimental consta de un tanque de alimentación, un tanque de neutralización, y los reactores acidogénico y metanogénico de lecho fijo; todos hechos de cloruro de polivinilo (PVC). Los reactores cuentan con un soporte de tubos de PVC colocados longitudinalmente en su interior, es cual está constituido por dos placas en forma de cruz para incrementar el área de contacto. Los reactores cuentan con un intercambiador de calor tipo chaqueta para mantener la temperatura constante.

El volumen del reactor metanogénico debe ser mayor al del acidogénico, debido a que se requiere un mayor tiempo de residencia hidráulico porque el crecimiento de las arqueas metanogénicas es menor al de las bacterias acidogénicas, en particular para este caso $V_2/V_1 = 8.67 L/4.44 L = 1.9527$.

El tanque intermedio de neutralización se utiliza para regular el pH del flujo de entrada al reactor metanogénico y para mantener el equilibrio entrada-salida del sistema de reactores. Para el control del pH se utiliza un control on-off, que

suministra por medio de una bomba, una solución de NaOH 1N, la cual se inyecta directamente en el tanque de neutralización, o bien en alguna de las líneas de recirculación de cada reactor. Estas líneas de recirculación, se utilizan para conferir un cierto grado de mezclado a los reactores.

Por otra parte dos sellos hidráulicos tienen la función de actuar como separadores de las fases líquida y gaseosa de los efluentes de cada reactor.

El sistema de digestión anaerobia de dos fases, está instrumentado y automatizado para permitir el monitoreo en línea de las siguientes variables: pH, temperatura, conductividad, presión y flujos de agua residual. Cabe señalar que las mediciones de otras variables de suma importancia en este sistema se obtienen fuera de línea, tales como la DQO y la concentración de AGV, las cuales se determinan por métodos colorimétricos y cromatografía de líquidos de alta presión, respectivamente. Sin embargo, la concentración de AGV últimamente se ha determinado continuamente utilizando un sensor de conductividad y transmisor (Méndez-Acosta et al., 2016).

En la **Figura 2.3** se presenta el diagrama de flujo de proceso del sistema de DA de dos fases, instalado en la planta piloto de la Universidad de Guadalajara (UDG) en el campus CUCEI.

2.4.4. Consideraciones Adicionales del Modelo

El modelo representado por las ecuaciones (2.2)-(2.8), se le pueden realizar las siguientes simplificaciones:

- 1) Sustituir la ecuación (2.17) en cada ecuación de (2.2)-(2.8):

$$\frac{V_j}{v_{0,j}} = \frac{1}{D_j} = \tau_j \quad (2.17)$$

Donde: D_j es la muy utilizada tasa de dilución (d^{-1}) y τ_j el tiempo de retención hidráulico (d).

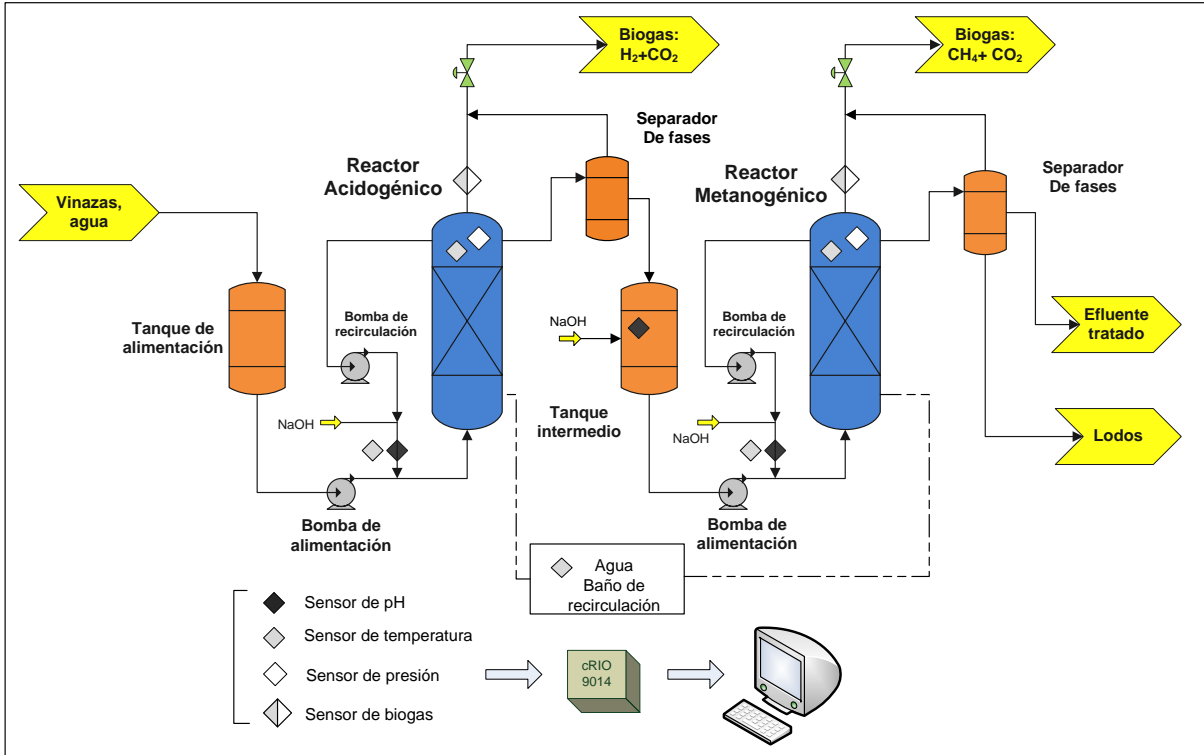


Figura 2.3 Diagrama de Flujo de Planta Piloto de DA de 2 Etapas en la UGD, Campus CUCEI.

2) Como el valor de la biomasa es muy difícil de conocer y como una constante multiplica a cada biomasa, se pueden realizar los siguientes cambios de variables:

$$Z_{1,1} = k_1 X_{1,1} \quad [=] \frac{g DQO}{L} \quad (2.18)$$

$$Z_{1,2} = k_3 X_{1,2} \quad [=] \frac{g DQO}{L} \quad (2.19)$$

$$Z_{2,2} = k_4 X_{2,2} \quad [=] \frac{mmol AGV}{L} \quad (2.20)$$

Las ecuaciones (2.18), (2.19) y (2.20), se sustituyen en el sistema de ecuaciones (2.2)-(2.8).

Por lo tanto, como resultado de realizar las sustituciones antes mencionadas, el sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\dot{Z}_{1,1} = \mu_{1,1}(S_{1,1})Z_{1,1} - \alpha_1 D_1 Z_{1,1} \quad (2.21)$$

$$\dot{S}_{1,1} = (S_{1,0} - S_{1,1})D_1 - \mu_{1,1}(S_{1,1})Z_{1,1} \quad (2.22)$$

$$\dot{S}_{2,1} = (S_{2,0} - S_{2,1})D_1 + \frac{k_2}{k_1} \mu_{1,1}(S_{1,1})Z_{1,1} \quad (2.23)$$

$$\dot{Z}_{1,2} = \mu_{1,2}(S_{1,2})Z_{1,2} - \alpha_2 D_2 Z_{1,2} \quad (2.24)$$

$$\dot{Z}_{2,2} = \mu_{2,2}(S_{2,2})Z_{2,2} - \alpha_2 D_2 Z_{2,2} \quad (2.25)$$

$$\dot{S}_{1,2} = -\mu_{1,2}(S_{1,2})Z_{1,2} + (S_{1,1} - S_{1,2})D_2 \quad (2.26)$$

$$\dot{S}_{2,2} = (S_{2,1} - S_{2,2})D_2 - \mu_{2,2}(S_{2,2})Z_{2,2} + \frac{k_5}{k_3} \mu_{1,2}(S_{1,2})Z_{1,2} \quad (2.27)$$

Que junto con las ecuaciones (2.9)-(2.11) describen al sistema continuo de DA de dos fases. Con:

$$\frac{k_2}{k_1} [=] \frac{mmol\ AGV}{g\ DQO} \qquad \frac{k_5}{k_3} [=] \frac{mmol\ AGV}{g\ DQO}$$

Otra importante consideración del sistema del caso de estudio, es que, como se trata de un sistema continuo, el flujo de entrada a cada reactor debe ser el mismo, de no cumplirse esto, el sistema de reacción no podría operar en estado estable y alguno de los reactores o el tanque intermedio para control de pH se desbordaría o se vaciaría. Por lo tanto, realizando un balance de materia global en el sistema de dos fases, tenemos que:

$$\dot{v}_{0,1} = \dot{v}_{0,2} = V_1 D_1 = V_2 D_2 \quad (2.28)$$

Y considerando a β como la relación entre los volúmenes de cada reactor:

$$\beta = V_2 / V_1 \quad (2.29)$$

Utilizando esta última relación (2.29) en la ecuación (2.28), se tiene que:

$$D_1 = \beta D_2 \quad (2.30)$$

La ecuación (2.30), entonces relaciona las tasas de dilución del reactor acidogénico con la del metanogénico, esto es para este sistema, en el que los dos reactores operan en serie, en el que no hay conexión entre los mismos, por ende es requerido el equilibrio entrada-salida dado por (2.30).

La ecuación (2.30) debe sustituirse en el sistema (2.21) a (2.27), dando como resultado el siguiente sistema de ecuaciones (2.31), que constituye el modelo de Robles-Rodríguez, C et al., (2013), en la forma en la que se utilizará para diseñar las estrategias de optimización y control, en el presente trabajo:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_{1,1} \\ \dot{S}_{1,1} \\ \dot{S}_{2,1} \\ \dot{Z}_{1,2} \\ \dot{Z}_{2,2} \\ \dot{S}_{1,2} \\ \dot{S}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1,1}(S_{1,1})Z_{1,1} \\ -\mu_{1,1}(S_{1,1})Z_{1,1} \\ \frac{k_2}{k_1}\mu_{1,1}(S_{1,1})Z_{1,1} \\ \mu_{1,2}(S_{1,2})Z_{1,2} \\ \mu_{2,2}(S_{2,2})Z_{2,2} \\ -\mu_{1,2}(S_{1,2})Z_{1,2} \\ -\mu_{2,2}(S_{2,2})Z_{2,2} + \frac{k_5}{k_3}\mu_{1,2}(S_{1,2})Z_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 Z_{1,1} \beta \\ (S_{1,0} - S_{1,1}) \beta \\ (S_{2,0} - S_{2,1}) \beta \\ -\alpha_2 Z_{1,2} \\ -\alpha_2 Z_{2,2} \\ (S_{1,1} - S_{1,2}) \\ (S_{2,1} - S_{2,2}) \end{bmatrix} [D_2] \quad (2.31)$$

2.5. Análisis Dinámico del Sistema de DA de 2 Fases

2.5.1. Determinación de Puntos Fijos

A continuación, para tener una visión de los estados estacionarios del sistema, se obtienen analíticamente los puntos de equilibrio del modelo representado por (2.31). Para la determinación de los puntos de equilibrio las derivadas de las ecuaciones (2.21) a (2.27) se igualan a cero.

Utilizando bajo este concepto (2.21) se obtiene:

$$\mu_{1,1}(S_{1,1})^* Z_{1,1}^* - \alpha_1 D_1 Z_{1,1}^* = Z_{1,1}^* \left(\frac{\mu_{1,1\max} S_{1,1}^*}{k_{s1,1} + S_{1,1}^*} - \alpha_1 D_1 \right) = 0$$

$$\mu_{1,1}(S_{1,1})^* = \alpha_1 D_1 \quad (2.32)$$

$$S_{1,1}^* = \frac{\alpha_1 D_1 k_{s1,1}}{\mu_{1,1\max} - \alpha_1 D_1} \quad (2.33)$$

Considerando (2.22), resolviendo para $Z_{1,1}^*$ y sustituyendo (2.32), se tiene que:

$$Z_{1,1}^* = \frac{(S_{1,0} - S_{1,1}^*) D_1}{\mu_{1,1}(S_{1,1})^*} = \frac{S_{1,0} - S_{1,1}^*}{\alpha_1} \quad (2.34)$$

Se sustituye en (2.23) las ecuaciones (2.32) y (2.34), y luego resolviendo para $S_{2,1}^*$, se obtiene:

$$\frac{k_2}{k_1} \alpha_1 D_1 Z_{1,1}^* + (S_{2,0} - S_{2,1}^*) D_1 = \frac{k_2}{k_1} \alpha_1 D_1 \left(\frac{S_{1,0} - S_{1,1}^*}{\alpha_1} \right) + (S_{2,0} - S_{2,1}^*) D_1$$

$$S_{2,1}^* = \frac{k_2}{k_1} (S_{1,0} - S_{1,1}^*) + S_{2,0} \quad (2.35)$$

De la ecuación (2.24) de $Z_{1,2}$, se puede obtener el valor de $S_{1,2}^*$, sustituyendo (2.10), esto es para el caso que $Z_{1,2}^* \neq 0$:

$$(\mu_{1,2}(S_{1,2})^* - \alpha_2 D_2) Z_{1,2}^* = 0$$

$$\mu_{1,2}(S_{1,2})^* = \alpha_2 D_2 \quad (2.36)$$

$$S_{1,2}^* = \frac{\alpha_2 D_2 k_{s1,2}}{\mu_{1,2\max} - \alpha_2 D_2} \quad (2.37)$$

En la ecuación (2.26), se resuelve para $Z_{1,2}^*$ y se sustituye la ecuación (2.36):

$$Z_{1,2}^* = \frac{(S_{1,1}^* - S_{1,2}^*) D_2}{\mu_{1,2}(S_{1,2})^*} = \frac{S_{1,1}^* - S_{1,2}^*}{\alpha_2} \quad (2.38)$$

Para el caso que $Z_{1,2}^* = 0$, entonces esto implica que $S_{1,1}^* = S_{1,2}^*$.

Por otro lado, de la ecuación (2.25), se tiene que:

$$\mu_{2,2}(S_{2,2})^* = \alpha_2 D_2 \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.39) y desarrollando, se obtiene:

$$S_{2,2}^{*2} + k_{I2}^2 \left(1 - \frac{\mu_{2,2max}}{\alpha_2 D_2}\right) S_{2,2}^* + k_{s2,2} k_{I2}^2 = 0 \quad (2.40)$$

Las dos soluciones de (2.40) son:

$$S_{2,2}^{*-} = -\frac{k_{I2}^2}{2} \left(1 - \frac{\mu_{2,2max}}{\alpha_2 D_2}\right) - k_{I2} \sqrt{-k_{s2,2} + \frac{k_{I2}^2}{4} \left(1 - \frac{\mu_{2,2max}}{\alpha_2 D_2}\right)^2} \quad (2.41)$$

$$S_{2,2}^{*+} = -\frac{k_{I2}^2}{2} \left(1 - \frac{\mu_{2,2max}}{\alpha_2 D_2}\right) + k_{I2} \sqrt{-k_{s2,2} + \frac{k_{I2}^2}{4} \left(1 - \frac{\mu_{2,2max}}{\alpha_2 D_2}\right)^2} \quad (2.42)$$

Entonces, se tienen dos valores de $S_{2,2}^*$, y uno debe corresponder al caso que $Z_{1,2}^* \neq 0$ y otro para el caso $Z_{1,2}^* = 0$.

En la ecuación (2.27), sustituimos la (2.36), (2.38) y (2.39) y en este resultado se resuelve para cada valor de $Z_{2,2}^*$ de manera que:

$$0 = (S_{2,1}^* - S_{2,2}^*) D_2 - \alpha_2 D_2 Z_{2,2}^* + \frac{k_5}{k_3} \alpha_2 D_2 \left(\frac{S_{1,1}^* - S_{1,2}^*}{\alpha_2}\right) \quad (2.43)$$

$$Z_{2,2}^{*+} = \frac{(S_{2,1}^* - S_{2,2}^{*+})}{\alpha_2} + \frac{k_5}{k_3} \left(\frac{S_{1,1}^* - S_{1,2}^*}{\alpha_2}\right) \quad (2.44)$$

En (2.43) se utilizó $S_{1,1}^* = S_{1,2}^*$ es decir, $Z_{1,2}^* = 0$ y en (2.44) el caso en que $Z_{1,2}^* \neq 0$.

En resumen, los dos vectores de los puntos fijos o de equilibrio del sistema de estudio están dados por (2.45a)-(2.45g) y (2.45h)-(2.45n).

Entonces se tienen dos puntos de equilibrio y en uno de ellos no existe biomasa acidogénica en el reactor metanogénico y si esto ocurre, la biomasa metanogénica que se calcula con (2.45l) debería ser negativa, es decir, que ha ocurrido el fenómeno de lavado en este reactor.

El punto de equilibrio que no se consideró, en este apartado, es la solución trivial cuando $Z_{1,1}^* = 0$.

$$\begin{bmatrix} Z_{1,1}^* \\ S_{1,1}^* \\ S_{2,1}^* \\ Z_{1,2}^* \\ Z_{2,2}^{\pm} \\ S_{1,2}^* \\ S_{2,2}^{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_{1,0} - S_{1,1}^*}{\alpha_1} \\ \frac{\alpha_1 D_1 k_{s1,1}}{\mu_{1,1\max} - \alpha_1 D_1} \\ \frac{k_2}{k_1} (S_{1,0} - S_{1,1}^*) + S_{2,0} \\ \frac{S_{1,1}^* - S_{1,2}^*}{\alpha_2} \\ \frac{(S_{2,1}^* - S_{2,2}^{\pm})}{\alpha_2} + \frac{k_5}{k_3} \left(\frac{S_{1,1}^* - S_{1,2}^*}{\alpha_2} \right) \\ \frac{\alpha_2 D_2 k_{s1,2}}{\mu_{1,2\max} - \alpha_2 D_2} \\ -\frac{k_{I2}^2}{2} \left(1 - \frac{\mu_{2,2\max}}{\alpha_2 D_2} \right) - k_{I2} \sqrt{-k_{s2,2} + \frac{k_{I2}^2}{4} \left(1 - \frac{\mu_{2,2\max}}{\alpha_2 D_2} \right)^2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (2.45a) \\ (2.45b) \\ (2.45c) \\ (2.45d) \\ (2.45e) \\ (2.45f) \\ (2.45g) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{1,1}^* \\ S_{1,1}^* \\ S_{2,1}^* \\ Z_{1,2}^* \\ Z_{2,2}^{\pm} \\ S_{1,2}^* \\ S_{2,2}^{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{S_{1,0} - S_{1,1}^*}{\alpha_1} \\ \frac{\alpha_1 D_1 k_{s1,1}}{\mu_{1,1\max} - \alpha_1 D_1} \\ \frac{k_2}{k_1} (S_{1,0} - S_{1,1}^*) + S_{2,0} \\ 0 \\ \frac{(S_{2,1}^* - S_{2,2}^{\pm})}{\alpha_2} \\ S_{1,1}^* \\ -\frac{k_{I2}^2}{2} \left(1 - \frac{\mu_{2,2\max}}{\alpha_2 D_2} \right) + k_{I2} \sqrt{-k_{s2,2} + \frac{k_{I2}^2}{4} \left(1 - \frac{\mu_{2,2\max}}{\alpha_2 D_2} \right)^2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (2.45h) \\ (2.45i) \\ (2.45j) \\ (2.45k) \\ (2.45l) \\ (2.45m) \\ (2.45n) \end{array}$$

2.5.2. Simulación del Modelo y Cálculo de los Puntos de Equilibrio

Los parámetros para simular el modelo (2.31) fueron reportados por Robles-Rodríguez, C et al.,(2013), y también fueron utilizados por (Méndez-Acosta et al., 2016).

Considerando los siguientes parámetros típicos de entradas de proceso:

$$S_{1,0} = 27 \frac{g DQO}{L} \quad (2.46)$$

$$S_{2,0} = 50 \frac{mmol AGV}{L} \quad (2.47)$$

$$D_2 = 0.160 d^{-1} \quad (2.48)$$

$$D_1 = \beta D_2 = 1.9527(0.160) = 0.3124 d^{-1} \quad (2.49)$$

A continuación en la **Tabla 2.3**, se presentan los parámetros del modelo de Robles-Rodríguez, C et al.,(2013):

Reactor Acidogénico		Reactor Metanogénico	
$\mu_{1,1 max}$	0.27	$\mu_{1,2 max}$	0.50
$k_{s1,1}$	24	$k_{s1,2}$	3.5
α_1	0.13	$\mu_{2,2 max}$	0.29
$\frac{k_2}{k_1}$	3.5	$k_{s2,2}$	16
β	1.9527	k_{I2}	27
		α_2	0.38
		$\frac{k_5}{k_3}$	0.9

Tabla 2.3 Parámetros del Modelo de Digestión Anaerobia de 2 Etapas de Vinazas Tequileras.

Mediante la aplicación de las ecuaciones (2.45), se obtienen los siguientes vectores de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 & [Z_{1,1}^* S_{1,1}^* S_{2,1}^* Z_{1,2}^* Z_{2,2}^{*+} S_{1,2}^* S_{2,2}^{*+}]^T & (2.50) \\
 & = [175.003, 4.249, 129.626, 0.0, -6879.63, 4.249, 2743]^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [Z_{1,1}^* S_{1,1}^* S_{2,1}^* Z_{1,2}^* Z_{2,2}^{*-} S_{1,2}^* S_{2,2}^{*-}]^T & (2.51) \\
 & = [175.003, 4.249, 129.626, 9.908, 338.852, 0.484, 4.250]^T
 \end{aligned}$$

De los dos puntos fijos obtenidos sólo el segundo tiene sentido físico, puesto que se tiene una biomasa metanogénica negativa.

Simulando el sistema completo utilizando las mismas entradas de proceso y los parámetros de la **Tabla 2.3**, se obtienen los mismos resultados que se obtuvieron analíticamente, que se muestran en la **Figura 2.4**.

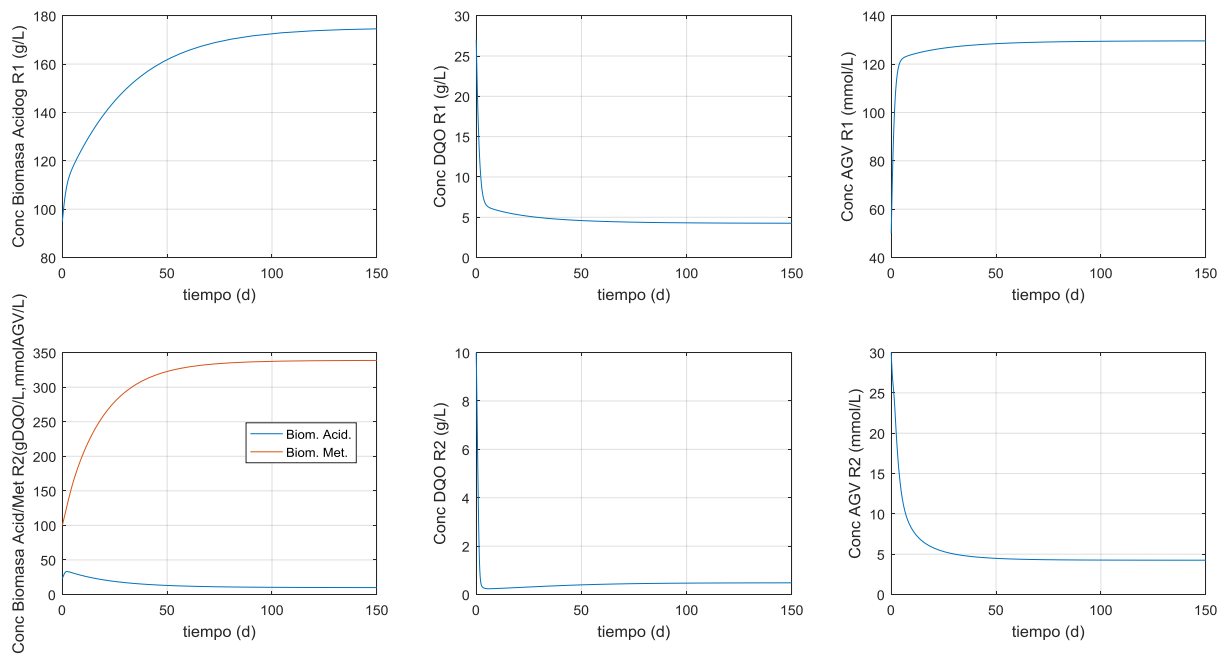


Figura 2.4 Punto de Equilibrio con Sentido Físico Sistema de DA de 2 Etapas

2.5.3. Linealización y Valores Propios

Si se considera un modelo no lineal donde “x” es un vector de “n” variables de estado y “u” es un vector de “m” variables de entrada de control y “y” es un vector de “r” variables de salida de control, de manera que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$y_r = g_r(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)$$

Y en notación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.54)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (2.55)$$

Mediante una expansión en series de Taylor del sistema (2.54), se puede llegar a la siguiente forma linealizada alrededor de un punto crítico, en el espacio de estados (Bequette, B. W., 1998):

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{B}\mathbf{u}' \quad (2.56)$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{C}\mathbf{x}' + \mathbf{D}\mathbf{u}' \quad (2.57)$$

Como se entiende que el modelo está en su forma de variables de desviación y como usualmente la salida de control no es función de la entrada de control, entonces finalmente el modelo linealizado queda de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.58)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.59)$$

Los elementos de las matrices de linealización están dados de la siguiente manera (Bequette, B. W., 1998):

$$A_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x_i, u} \quad (2.60)$$

$$B_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{x,u_i} \quad (2.61)$$

$$C_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{x_i,u} \quad (2.62)$$

Para nuestro caso de estudio la matriz A es:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mu_{1,1} - \alpha_1 D_1 & \frac{k_{s1,1} \mu_{1,1} \max Z_{1,1}}{(k_{s1,1} + S_{1,1})^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{1,1} & -D_1 - \frac{-k_{s1,1} \mu_{1,1} \max Z_{1,1}}{(k_{s1,1} + S_{1,1})^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{k_1} \mu_{1,1} & \frac{k_2 (k_{s1,1} \mu_{1,1} \max Z_{1,1})}{k_1 (k_{s1,1} + S_{1,1})^2} & -D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_{1,1} - \alpha_1 D_1 & 0 & \frac{k_{s1,2} \mu_{1,2} \max Z_{1,2}}{(k_{s1,2} + S_{1,2})^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{2,2} - \alpha_2 D_2 & 0 & \frac{\mu_{2,2} \max \left(k_{s2,2} - \left(\frac{S_{2,2}}{K_{I2}} \right)^2 \right) Z_{2,2}}{\left(k_{s2,2} + S_{2,2} + \left(\frac{S_{2,2}}{K_{I2}} \right)^2 \right)^2} \\ 0 & D_2 & 0 & -\mu_{1,2} & 0 & -D_2 - \frac{k_{s1,2} \mu_{1,2} \max Z_{1,2}}{(k_{s1,2} + S_{1,2})^2} & 0 \\ 0 & 0 & D_2 & \frac{k_5}{k_3} \mu_{1,2} & -\mu_{2,2} & \frac{\left(\frac{k_5}{k_3} \right) k_{s1,2} \mu_{1,2} \max Z_{1,2}}{(k_{s1,2} + S_{1,2})^2} & -D_2 - \frac{\mu_{2,2} \max \left(k_{s2,2} - \left(\frac{S_{2,2}}{K_{I2}} \right)^2 \right) Z_{2,2}}{\left(k_{s2,2} + S_{2,2} + \left(\frac{S_{2,2}}{K_{I2}} \right)^2 \right)^2} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Con A:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Con B:

$$B = \begin{bmatrix} (-\alpha_1 Z_{1,1})\beta \\ (S_{1,0} - S_{1,1})\beta \\ (S_{2,0} - S_{2,1})\beta \\ -\alpha_2 Z_{1,2} \\ -\alpha_2 Z_{2,2} \\ S_{1,1} - S_{1,2} \\ S_{2,1} - S_{2,2} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Si se considera que el objetivo de un digestor anaerobio es procesar el agua residual para cumplir con las normas ambientales y así reducir la contaminación al ambiente, es decir regular la DQO a cierto nivel, entonces C está dado por:

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (2.67)$$

Con x :

$$x = [Z_{1,1}, S_{1,1}, S_{2,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, S_{1,2}, S_{2,2}]^T \quad (2.68)$$

Como entrada de control se considera la tasa de dilución del reactor metanogénico. La tasa de dilución del reactor acidogénico está dada una vez definida la del reactor metanogénico y está dada por (2.30). Por lo tanto, u para el sistema SISO, está dada por:

$$u = D_2 \quad (2.69)$$

Considerando los parámetros de la **Tabla 2.3** y las entradas de proceso de la **Sección 2.5.2** (2.46), (2.47), (2.48) y (2.49), se calcularon las matrices jacobianas A y B evaluadas en el punto de equilibrio que tiene sentido físico, de dos formas; por una parte, por medio de sustitución numérica en (2.63) a (2.66) y por otra, mediante la aproximación numérica en Matlab.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.4210 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0406 & -1.7334 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1422 & 4.9735 & -0.3124 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0921 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.8186 \\ 0 & 0.1600 & 0 & -0.0608 & 0 & -1.2521 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1600 & 0.0547 & -0.0608 & 0.9829 & -3.9786 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

$$B = \begin{pmatrix} -44.4248 \\ 44.4248 \\ -155.4867 \\ -3.7651 \\ -128.7641 \\ 3.7651 \\ 125.3755 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Ahora, ya que se dispone de las matrices del sistema linealizado alrededor de los puntos fijos, procederemos a determinar la naturaleza de los puntos fijos mediante el cálculo de los eigenvalores o valores propios, los cuales se obtienen resolviendo:

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (2.72)$$

Los valores propios que resultan de resolver (2.72) con las matrices A y B antes obtenidas son:

$$\lambda = \begin{pmatrix} -3.9194 \\ -1.6995 \\ -1.1966 \\ -0.0340 \\ -0.0555 \\ -0.0592 \\ -0.3124 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Por lo tanto, como todos los valores propios del sistema (2.58) son negativos, la naturaleza del único punto fijo que tiene sentido físico, es que, es un atractor estable.

2.5.4. Condiciones de Lavado

En los reactores biológicos un parámetro de suma importancia es la tasa de dilución o también llamada carga hidráulica volumétrica, la cual se define como el volumen de agua residual $\frac{m^3}{d}$ aplicada en forma diaria al reactor por unidad de volumen (m^3), es decir (De Lemos, A.C., 2007):

$$\frac{v_0}{V} = D = \frac{1}{\tau} \quad (2.74)$$

La ecuación (2.74) es sencillamente la forma recíproca de la (2.17)

La tasa de dilución es muy importante porque en todo reactor biológico existe pérdida de biomasa la cual es “lavada” o acarreada con el efluente. De manera que si la tasa de dilución es muy alta entonces por una parte, el tiempo de retención no es suficiente para el crecimiento y estabilización de los sólidos. Y por otra, hay pérdida excesiva de biomasa debido a las altas velocidades (De Lemos, A.C., 2007).

Matemáticamente, el fenómeno de lavado debe ocurrir cuando la biomasa $Z^* = 0$, pero en nuestro caso, en el que el sistema consta de 2 reactores en serie, el primero que contiene biomasa acidogénica y el segundo que contiene tanto acidogénica como metanogénica, podemos considerar las siguientes condiciones que ocasionarán lavado de la biomasa en cada reactor.

Caso (A), ocurre lavado en el reactor acidogénico:

$$Z_{1,1}^* = 0 \quad (2.75)$$

Caso (M), ocurre lavado en el reactor metanogénico:

$$Z_{2,2}^{*-} = 0 \quad (2.76)$$

- Caso (A)

Si se considera la ecuación (2.45a), para que se cumpla (2.75) es necesario que

$$S_{1,1}^* = S_{1,0} \quad (2.77)$$

Sustituyendo (2.77) y (2.30) en (2.45b) y luego resolviendo para D_2 , se tiene:

$$D_{2,A} = \frac{\mu_{1,1\max} S_{1,0}}{\alpha_1 \beta (k_{s1,1} + S_{1,0})} \quad (2.78)$$

- Caso (M)

Si se considera (2.45e) y se aplica (2.76), el valor de D_{2B} depende de $S_{1,1}^*$, $S_{1,2}^*$, $S_{2,1}^*$ y $S_{2,2}^{*-}$. Por lo que si se sustituye (2.30), (2.45b), (2.45c), (2.45f) y (2.45g) en (2.45e) considerando la condición (2.76), es posible resolver numéricamente para D_2 la ecuación no lineal resultante.

Utilizando los parámetros de la **Tabla 2.3** y las entradas de proceso (2.46) y (2.47) de la **Sección 2.5.2**, se llega a los siguientes resultados para cada caso (**Tabla 2.4**). Estos valores de tasas de dilución que ocasionan lavado también se corroboraron por medio de simulación, la cual se muestra en las **Figura 2.5** y en la **Figura 2.6**.

Caso	Tasa de Dilución (d^{-1}) Reactor Acidogénico (D_1)	Tasa de Dilución (d^{-1}) Reactor Metanogénico (D_2)
$\beta = 1.9527$		
A	$D_{1A} = \beta D_{2A} = 1.0995$	$D_{2A} = 0.5631$
M	$D_{1B} = \beta D_{2B} = 1.1497$	$D_{2B} = 0.5888$

Tabla 2.4 Resultados de las Condiciones de Lavado Sistema de DA de 2 Etapas

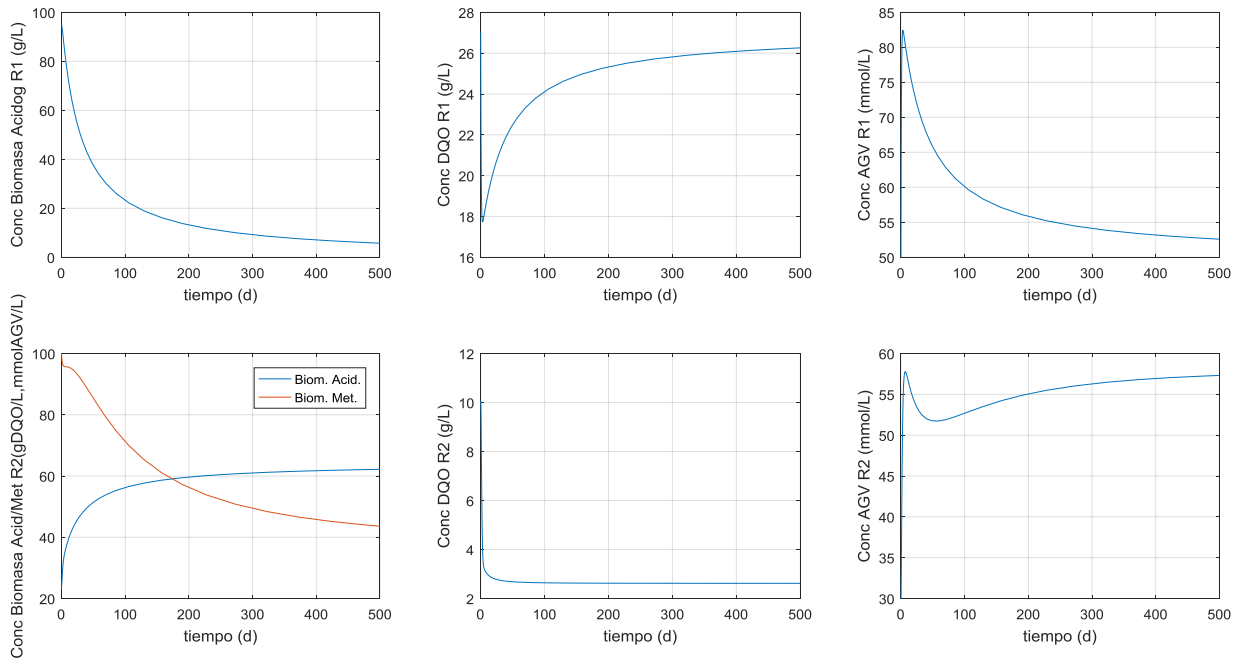


Figura 2.5 Condición de lavado del reactor acidogénico (Caso A)

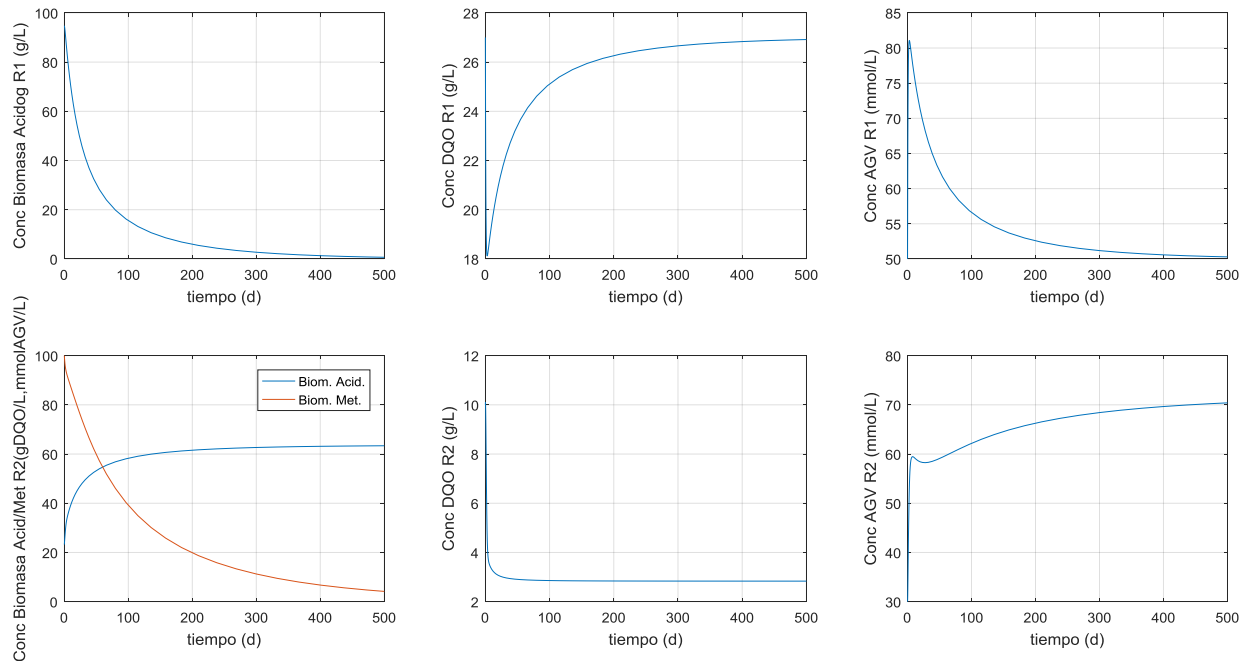


Figura 2.6 Condición de lavado del reactor metanogénico (Caso M)

En la **Figura 2.5**, la condición de lavado del reactor acidogénico no ocasiona el lavado del metanogénico, sin embargo, en la **Figura 2.6**, cuando ocurre el lavado del reactor metanogénico también ocurre el del acidogénico, pues $D_{2M} > D_{2A}$. Para fines de aplicación de un controlador en el que se utilice como entrada de control, la velocidad de dilución, ésta debe estar acotada de tal forma que no ocurra el lavado de ninguno de los dos reactores, por lo que se tiene que:

$$D_{2max} = \min(D_{2A}, D_{2M}) = 0.56 d^{-1} \quad (2.79)$$

$$D_{1max} = \beta D_{2max} = 1.10 d^{-1} \quad (2.80)$$

Capítulo 3

3. Métodos de Optimización y Control Robusto

En este capítulo, primeramente se presentan las bases para resolver el problema de optimización al que nos enfrentamos en el presente trabajo y se resuelve el problema de optimización de programación no lineal. Segundamente, se abordan los tipos de algoritmos de control con los que se diseñarán los esquemas de control para la planta de estudio de digestión anaerobia de dos etapas.

3.1. Optimización

Los problemas de optimización en ingeniería química son descritos a través de variables discretas y continuas, su formulación se hace con base en ecuaciones algebraicas. A este respecto estos problemas se denominan *Problemas de Optimización Enteros Mixtos* y de acuerdo a Biegler, L.T. (2010) una clasificación de estos problemas de optimización que son de nuestro interés se muestra en la **Figura 3.1**.

La formulación más general según la **Figura 3.1** es la que considera un problema de optimización de programación no lineal entero mixto es decir:

$$\begin{aligned} & \min_{x,y} f(x,y) && (3.1) \\ \text{s. a.} & \quad h(x,y) = 0 \\ & \quad g(x,y) \leq 0 \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \{0,1\}^t \end{aligned}$$

Donde $f(x,y)$ es la función objetivo, $h(x,y)$ son las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema, $g(x,y)$ son restricciones de desigualdad que definen normalmente especificaciones del proceso. Cabe señalar, que la representación finita de este problema puede ser el resultado de una discretización a larga escala, en tiempo y espacio de ecuaciones diferenciales.

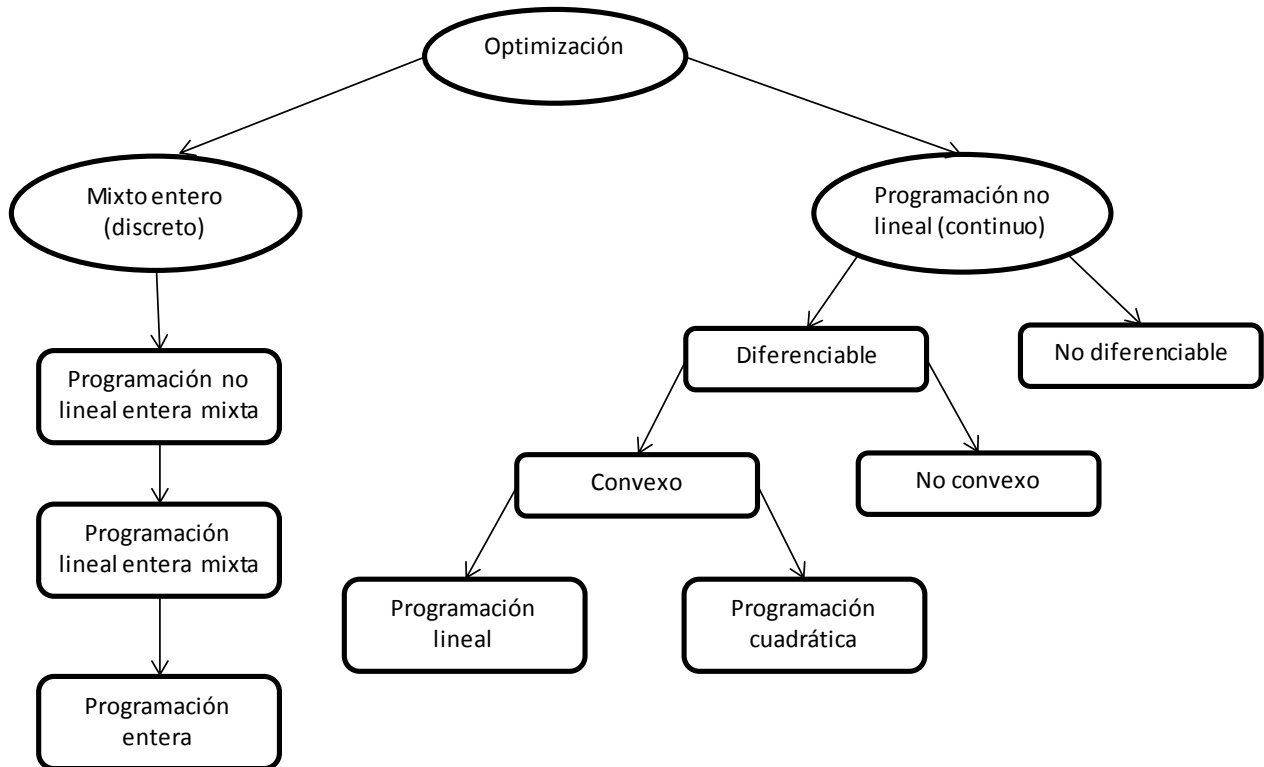


Figura 3.1 Tipos de Problemas de Optimización (Biegler, L.T. 2010)

Si en el problema (3.1) todas las funciones f, g, h son lineales, éste se convierte en un problema de programación lineal entero mixto, un caso particular ocurre cuando todas las variables son enteras, entonces el problema se convierte en un problema de programación entera.

Por otra parte si no hay variables enteras y/o 0/1, entonces el problema (3.1) se reduce a un problema de programación no lineal, el cual está dado por la siguiente formulación:

$$\begin{aligned}
 & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\
 \text{s. a.} \quad & h(x) = 0 \\
 & g(x) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

El problema (3.2) puede ser convexo en el que cualquier solución local es solución global y no convexo, en el que pueden existir varias soluciones locales en cierta vecindad alrededor de un determinado punto.

Si en un problema convexo las funciones objetivo y de restricciones son lineales éste se convierte en un problema de programación lineal. Por otra parte, si a la función objetivo de los problemas de programación lineal se le agrega un término cuadrático, entonces surge un problema de programación cuadrática.

Para el caso de estudio de la digestión anaerobia continua de dos etapas, se está interesado en realizar un optimización estática, es decir, que se considerará el modelo matemático en estado estacionario lo cual da lugar a funciones algebraicas no lineales que constituyen algunas de las restricciones de los problemas de optimización de programación no lineal que formulemos.

En nuestro caso de estudio, se tiene interés en dos problemas por separado:

- a) Minimizar la DQO a la salida del reactor metanogénico, para asegurar cumplir con regulaciones ambientales.
- b) Maximizar la producción de biogas en el reactor metanogénico, para tener una mayor recuperación energética e incentivo económico.

3.1.1. Minimización de la DQO

La función objetivo que busca minimizar la DQO del efluente tratado en el sistema de DA de 2 etapas es la siguiente:

$$J(x) = \left(1 - \frac{S_{1,0} - S_{1,2}}{S_{1,0}}\right)^2 = \left(\frac{S_{1,2}}{S_{1,0}}\right)^2 \quad (3.3)$$

La cual define la fracción de DQO no procesada por el sistema, la cual se pretende minimizar. Otra forma, que es equivalente, es sólo minimizar $J(x) = S_{1,2}$.

Una vez definida la función objetivo, las restricciones del problema de programación no lineal que se abordarán son de dos tipos: de igualdad, conformadas por (2.31) en su forma estática y de desigualdad, constituidas por las cotas inferiores y superiores de cada variable de decisión. De esta manera, la

formulación del problema de optimización de programación no lineal viene dada por (3.5).

En términos de nomenclatura de control de procesos, es conveniente realizar un cambio de variable. De esta forma se tiene que en el espacio de estados:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T = [Z_{1,1}, S_{1,1}, S_{2,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, S_{1,2}, S_{2,2}]^T \quad (3.4)$$

$$\min_x J(x) = \left(\frac{x_6}{x_{2,0}} \right)^2 \quad (3.5a)$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} \mu_{1,1}(x_2)x_1 \\ -\mu_{1,1}(x_2)x_1 \\ \frac{k_2}{k_1}\mu_{1,1}(x_2)x_1 \\ \mu_{1,2}(x_6)x_4 \\ \mu_{2,2}(x_7)x_5 \\ -\mu_{1,2}(x_6)x_4 \\ \frac{k_5}{k_3}\mu_{1,2}(x_6)x_4 - \mu_{2,2}(x_7)x_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 x_1 & 0 \\ x_{2,0} - x_2 & 0 \\ x_{3,0} - x_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 x_4 \\ 0 & -\alpha_2 x_5 \\ 0 & x_2 - x_6 \\ 0 & x_3 - x_7 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5b)$$

$$x_i - x_i^U \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.5c)$$

$$x_i^L - x_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (3.5d)$$

En (3.5b) se ha incluido como una restricción adicional la ecuación (2.30), desde luego que $x_8 = u_1 = D_1$ y $x_9 = u_2 = D_2$. También en (3.5b), $\mu_{1,1}(x_2), \mu_{1,2}(x_6), \mu_{2,2}(x_7)$, están dados por (2.9), (2.10) y (2.11) respectivamente.

3.1.2. Maximización del Flujo de Biogas

En relación al problema de optimización que busca maximizar el flujo de biogas, no hay una variable explícita en el modelo (2.31), no obstante, la producción de biogas está directamente relacionada con el crecimiento de biomasa metanogénica. Por lo tanto, para efectos del presente trabajo, se considerarán

equivalentes, la maximización de la biomasa metanogénica y el flujo de biogas, de modo que la función objetivo del problema antes mencionado es:

$$J(x) = Z_{2,2} \quad (3.6)$$

La formulación del problema de maximización de la biomasa metanogénica y por ende, del flujo de biogas es la siguiente:

$$\max_x J(x) = x_5 \quad (3.7a)$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} \mu_{1,1}(x_2)x_1 \\ -\mu_{1,1}(x_2)x_1 \\ \frac{k_2}{k_1}\mu_{1,1}(x_2)x_1 \\ \mu_{1,2}(x_6)x_4 \\ \mu_{2,2}(x_7)x_5 \\ -\mu_{1,2}(x_6)x_4 \\ \frac{k_5}{k_3}\mu_{1,2}(x_6)x_4 - \mu_{2,2}(x_7)x_5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 x_1 & 0 \\ x_{2,0} - x_2 & 0 \\ x_{3,0} - x_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 x_4 \\ 0 & -\alpha_2 x_5 \\ 0 & x_2 - x_6 \\ 0 & x_3 - x_7 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.7b)$$

$$x_i - x_i^U \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (3.7c)$$

$$x_i^L - x_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (3.7d)$$

Como se puede observar las restricciones de los dos problemas de optimización son las mismas.

3.1.3. Solución de los Problemas de Optimización

Antes de resolver los problemas (3.5) y (3.7) se deben de definir los valores de las cotas de cada variable. Para esto, se utilizarán como base, resultados experimentales y simulaciones del modelo, de acuerdo a lo reportado por Robles-Rodríguez, C., (2012). De manera que los vectores x^U y x^L , son:

$$\begin{aligned}
 x^L = \begin{pmatrix} 5 \\ 0.5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ y_{ref} \\ 1 \\ 0.10 \\ 0.05 \end{pmatrix} & \quad (3.8a) \\
 & \quad (3.8b) \\
 & \quad (3.8c) \\
 & \quad (3.8d) \\
 & \quad (3.8e) \\
 & \quad (3.8f) \\
 & \quad (3.8g) \\
 & \quad (3.8g) \\
 & \quad (3.8h)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^U = \begin{pmatrix} 400 \\ S_{1,0} \\ 300 \\ 350 \\ 500 \\ 5 \\ 80 \\ D_{1,max} \\ D_{2,max} \end{pmatrix} & \quad (3.9a) \\
 & \quad (3.9b) \\
 & \quad (3.9c) \\
 & \quad (3.9d) \\
 & \quad (3.9e) \\
 & \quad (3.9f) \\
 & \quad (3.9g) \\
 & \quad (3.9g) \\
 & \quad (3.9h)
 \end{aligned}$$

Los valores de $D_{1,max}$ y $D_{2,max}$ están dados por el estudio de las condiciones de lavado (**Sección 2.5.4**, y (2.79), (2.80)) y cuyos valores son 1.1 d^{-1} y 0.56 d^{-1} , respectivamente. En la ecuación (3.8f) se muestra y_{ref} que es la variable que se desea regular o salida de control, que en este caso es el valor de referencia o “set point” de DQO del efluente tratado en el sistema de DA de 2 etapas, y el cual se encuentra en el rango $[0.25, 2.0]$ (g/L).

Para la solución del problema de programación no lineal se utilizó el *optimtool* de Matlab R2016b (Optimization Toolbox 7.5), seleccionando en las opciones como algoritmo de optimización el método de punto interior. Este método se utilizó porque dió mejores resultados en cuanto a convergencia que los otros métodos disponibles en Matlab (Active set, SQP, etc). En la **Tabla 3.1**, se muestran los resultados de los problemas de optimización.

Como se puede observar en la **Tabla 3.1**, los resultados de ambos problemas de optimización son iguales, para cada valor de referencia de DQO. En los dos problemas de optimización la cota inferior para el valor de DQO del efluente tratado (x_6) y que es el valor de referencia (y_{ref}), tiene mucha influencia sobre los resultados. Se puede deducir, entonces, que es posible la minimización de la DQO y la maximización de flujo de biogas, simultáneas en este tipo de sistemas continuos.

Reactor	Descripción de la Variable			Min de DQO $y_{ref}=0.5$	Max. Prod Biogas y_{ref} $=0.5$	Min de DQO $y_{ref}=1.0$	Max. Prod Biogas $y_{ref}=$ 1.0
1	Z ₁₁	x ₁	Biomasa Acid.	173.922	173.922	137.698	137.698
	S ₁₁	x ₂	DQO	4.390	4.390	9.099	9.099
	S ₂₁	x ₃	AGV	129.134	129.134	112.652	112.652
2	Z ₁₂	x ₄	Biomasa Acid.	10.237	10.237	21.314	21.314
	Z ₂₂	x ₅	Biomasa Met.	337.454	337.454	289.259	289.259
	S ₁₂	x ₆	DQO	0.500	0.500	1.000	1.000
	S ₂₂	x ₇	AGV	4.403	4.403	10.023	10.023
1	D ₁	x ₈	Velocidad Dil.	0.321	0.321	0.571	0.571
2	D ₂	x ₉	Velocidad Dil.	0.164	0.164	0.292	0.292
Valor de la Función Objetivo (J)				0.00034	337.454	0.00137	289.259

Tabla 3.1 Resultados de los Problemas de Optimización

A este respecto se resolvió el problema de optimización utilizando la siguiente función objetivo combinada:

$$J(x) = \left(\frac{x_6}{x_{2,0}} \right)^2 - (x_5)^2 \quad (3.10)$$

Los resultados obtenidos de este último problema de optimización fueron los mismos que los de la **Tabla 3.1**.

Como se puede observar de la **Tabla 3.1**, para un valor de referencia de DQO de 0.5 (g/L), la velocidad de dilución del reactor metanogénico de 0.16d⁻¹, es relativamente baja y está algo alejada del valor que ocasiona lavado de 0.56d⁻¹, esto es bueno ya que permite tener flexibilidad en la operación ante alguna contingencia fuerte. El mismo razonamiento aplica para el reactor acidogénico.

Para el caso en que se tiene una cota inferior de x₆ o valor de referencia de DQO de 1.0 g/L, es evidente que las tasas de dilución de cada reactor se incrementan

(0.29 y $0.57 d^{-1}$), pero, aun así se encuentran algo alejadas de los valores que ocasionan el lavado de cada reactor.

Concluyendo con respecto a la optimización del sistema continuo de digestión anaerobia de 2 etapas, podemos decir que se minimiza la DQO a la salida del sistema al mismo tiempo que se maximiza la biomasa metanogénica y la producción de biogas y la mejor opción es cuando $D_2 = 0.164d^{-1}$, pues la cantidad de biogas es la mayor y la DQO del efluente tratado es la menor.

3.2. Métodos de Control Robusto

En esta sección se detallarán los fundamentos de los métodos de control que se pretenden aplicar al proceso de digestión anaerobia de 2 etapas. Antes de comenzar a explicar los métodos de control es necesario definir que para el diseño de un controlador se deben de seguir los siguientes pasos (Albertos y Sala, 2004)

- Seleccionar las variables a controlar y a manipular
- Seleccionar los pares de entradas y salidas de control
- Seleccionar una estructura de control y especificar el tipo de controlador
- Implementación numérica y validación.
- Implementación física.

Siguiendo los pasos antes mencionados, la variable que se desea controlar o regular que constituye la salida de control, es la concentración de demanda química de oxígeno (DQO) a la salida del sistema es decir, a la salida del reactor metanogénico, la cual en términos de la nomenclatura empleada es, $y = x_6$. Este es el objetivo primordial del controlador.

En cuanto a las variables a manipular, se considerará la tasa de dilución del reactor metanogénico, como ya vimos, existe una relación algebraica que se debe de cumplir en el sistema de digestión anaerobia de 2 etapas para que opere de manera continua, esta relación está dada por (2.30). Por lo tanto sólo se puede

manipular alguna de las dos tasas de dilución del sistema de reactores, debido a que la otra estará dada por (2.30), de esto también concluimos que este no es un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO, multiple inputs and outputs) sino que es un sistema de una sola entrada ($u_2 = D_2$) y una sola salida ($y = x_6$), (SISO, single input and single output).

Por otra parte, es de nuestro interés explorar el caso en que en lugar de utilizar como salida de control a la DQO del reactor metanogénico (x_6), se use otra variable que es más fácil de medir en forma continua, como lo es la concentración de ácidos grasos volátiles ya sea en el reactor acidogénico (x_3) o en el metanogénico (x_7). Y aunque la salida de control será la concentración de AGV, el objetivo principal seguirá siendo el de regular la DQO a la salida del sistema.

En cuanto a la estructura de control se utilizarán algoritmos de lazo cerrado y se pretende utilizar 3 métodos de control moderno los cuales son:

- Control por compensación del error de modelado (MEC, Model Error Compensation),
- Control de modo deslizante (SMC, Sliding Mode Control).
- Control predictivo No lineal basado en modelo (NMPC, Nonlinear Model Predictive Control)

3.2.1. Control por Compensación del Error de Modelado, MEC.

Las ideas en torno al control robusto por compensación del error de modelado (MEC, modelling error compensation), las empezó introduciendo Sun et al. (1994), quienes propusieron un método de diseño para controladores robustos para sistemas lineales de una entrada y una salida (SISO). El enfoque en el diseño se basa en un compensador del error de modelado, en el que la idea central es compensar el error debido a la incertidumbre mediante la determinación del error de modelado utilizando las señales de entrada y salida de la planta. Aunado a la retroalimentación nominal, otro lazo de retroalimentación se introduce, que incluye

el error de modelado y esta retroalimentación es explícitamente proporcional al error paramétrico, que es la fuente de la incertidumbre (Puebla et al., 2004).

Por otra parte, Alvarez-Ramírez, (1999), utilizó el enfoque de control por compensación del error de modelado (MEC) en sistemas no lineales que se pueden linealizar por retroalimentación linealizada. En este trabajo, el término incierto que representa el error de modelado se considera como un estado extra, el cual se estima por medio de un observador de alta ganancia. Las ventajas de este enfoque, son que: el estimador dota al sistema de cierto grado de adaptabilidad y la incertidumbre no lineal no requiere ser parametrizada. Alvarez-Ramirez, Fernandez, y Suarez, (2002) y Alvarez-Ramirez, Morales, y Cervantes, (1998), analizaron la configuración de un controlador PI robusto para la estabilización y seguimiento de señales para sistemas no lineales, y encontraron que un controlador MEC podría ser equivalente a un controlador PI, de esta manera determinaron relaciones entre las constantes de sintonizado de ambos tipos de control. Adicionalmente, se concluyó que es imprescindible contar con un término integral en la ley de control para lograr la estabilización de señales.

La extensión del enfoque del control (MEC) ha sido aplicada con éxito (Puebla y Alvarez-Ramirez, 2008, Puebla, Alvarez-Ramirez, y Cervantes, 2003) a varios tipos de sistemas de parámetros distribuidos.

El algoritmo (MEC) que se presentará y utilizará está basado en las aplicaciones realizadas por Puebla et al., (2011).

Consideremos un sistema autónomo de grado relativo 1 de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u(t) \quad (3.11)$$

$$y = Cx = h(x) \quad (3.12)$$

Donde:

$x \in X \subset \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, g(x) \neq 0$, son funciones suaves, $h(x)$, un campo escalar suave, $y \in \mathbb{R}$ es la salida medida de control del sistema, $u(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C es la matriz de estados controlados. Se considera el caso (SISO) de una sola entrada y una sola salida de control, es decir, $y = x_k$, donde “k” denota al estado que se desea regular.

Si se particiona el modelo (3.11) en la parte que incluye el estado a controlar ($y=x_k$) y todos los demás estados ($z=x_n, n=1,2,\dots,m,; m \neq k$), es decir $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$, se obtiene el siguiente sistema en el espacio de estados:

$$\frac{dy}{dt} = f_1(y, z) + g_1(y, z)u(t) \quad (3.13)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(y, z, u) \quad (3.14)$$

El error de regulación se puede definir de la siguiente manera:

$$e(t) = y(t) - y_{ref}(t) \quad (3.15)$$

Donde $y_{ref}(t)$ es la referencia de la salida de control.

Diferenciando la ecuación (3.15) se obtiene:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dy_{ref}(t)}{dt} \quad (3.16)$$

Por otra parte el modelo conformado por (3.13) y (3.14) no es perfecto, por lo que, la incertidumbre se puede expresar en función de un error de modelado, el cual se puede definir como:

$$e_{modelado} = \eta(t) = \dot{y} - \check{y} \quad (3.17)$$

$$\eta(t) = (f_1(y, z) + g_1(y, z)u(t)) - (\check{f}_1(y, z) + \check{g}_1(y, z)u(t)) \quad (3.18)$$

Las funciones $\check{f}_1(y, z)$ y $\check{g}_1(y, z)$, son los valores estimados de sus funciones correspondientes.

Sustituyendo la ecuación (3.13) en la (3.18), se tiene que:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \eta(t) + \check{f}_1(y, z) + \check{g}_1(y, z)u(t) \quad (3.19)$$

El objetivo de control consiste en llevar el error de regulación a cero, por lo que utilizando una ley de control inversa que asegure esto ($\frac{de}{dt} = -\tau_c^{-1}e$), se tiene que:

$$u(t) = -\frac{1}{\check{g}_1(y, z)} \left(\eta(t) + \check{f}_1(y, z) + \tau_c^{-1}e - \frac{dy_{ref}(t)}{dt} \right) \quad (3.20)$$

La constante $\tau_c > 0$, es una constante de tiempo de lazo cerrado.

Ahora bien, la ecuación (3.20) contiene dos problemas, el primero es: ¿cómo determinar $\eta(t)$? y el segundo es: ¿qué función se va a considerar para $\check{f}_1(y, z)$?

Con respecto a este último una posible solución consistiría en considerar un comportamiento de primer orden de la entrada de control, es decir, que en términos del dominio en el tiempo y la frecuencia se tienen las siguientes dos representaciones:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_p}{\tau_0 s + 1} \quad (3.21)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_0}y(t) + \frac{k_p}{\tau_0}u(t) \quad (3.22)$$

Donde, $k_p \neq 0$ y $\tau_0 > 0$, son la ganancia y la constante de tiempo del modelo de primer orden.

Con relación a la determinación de $\eta(t)$, término que agrupa las incertidumbres del modelo y que se considerará como un nuevo estado, se propone utilizar un observador de orden reducido de la siguiente forma:

$$\frac{d\check{\eta}(t)}{dt} = \tau_e^{-1}(\eta(t) - \check{\eta}(t)) \quad (3.23)$$

Donde:

τ_e^{-1} es una constante de tiempo de estimación.

$\eta(t)$ es la incertidumbre real del modelo.

$\check{\eta}(t)$ es la incertidumbre estimada.

Despejando de la ecuación (3.19) $\eta(t)$ y sustituyendo en este resultado las funciones $f_1(y, z)$ y $g_1(y, z)$ de (3.22) :

$$\eta(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_0}y(t) - \frac{k_p}{\tau_0}u(t) \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.24) en (3.23):

$$\frac{d\check{\eta}(t)}{dt} = \tau_e^{-1} \left(\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_0}y(t) - \frac{k_p}{\tau_0}u(t) - \check{\eta}(t) \right) \quad (3.25)$$

Re arreglando (3.25) se obtiene:

$$\tau_e \frac{d\check{\eta}(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_0}y(t) - \frac{k_p}{\tau_0}u(t) - \check{\eta}(t) \quad (3.26)$$

Si se introduce una nueva variable:

$$w(t) = \tau_e \check{\eta}(t) - y(t) \quad (3.27)$$

Y derivando (3.27), se tiene que:

$$\frac{dw(t)}{dt} = \tau_e \frac{d\check{\eta}(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \quad (3.28)$$

Si se utilizan las ecuaciones (3.27), (3.28) en la (3.26), se obtiene un filtro de primer orden, que sirve como un estimador del error de modelado o incertidumbre.

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_0}y(t) - \frac{k_p}{\tau_0}u(t) - \tau_e^{-1}(w(t) + y(t)) \quad (3.29)$$

Las condiciones iniciales de la ecuación (3.29) son las siguientes que se derivan de la ecuación (3.27) puesto que al inicio las incertidumbres estimadas son cero:

$$w(0) = -y(0) \quad (3.30)$$

La ley de control tiene la siguiente forma, en la que se han sustituido las formas de las funciones $f_1(y, z)$ y $g_1(y, z)$ de (3.22):

$$u(t) = -\frac{\tau_0}{k_p} \left(-\frac{1}{\tau_0} y(t) + \dot{\eta}(t) + \tau_c^{-1} e(t) - \frac{dy_{ref}(t)}{dt} \right) \quad (3.31)$$

La forma final del controlador MEC consiste de las ecuaciones (3.27), (3.29) y (3.31). En (3.31) se ha sustituido $\eta(t)$ por su estimado $\dot{\eta}(t)$.

En cuanto a la sintonización del controlador, de acuerdo a Puebla et al., (2004) se tiene la siguiente regla:

$$\tau_e < \frac{1}{2} \tau_c \quad (3.32)$$

3.2.2. Control de Modo Deslizante, SMC

El control de modo deslizante (Sliding Mode Control) tiene como característica más relevante que puede generar algoritmos de control robustos que son invariantes bajo ciertas condiciones, es decir, el sistema se mantiene insensible a ciertos tipos de perturbaciones e incertidumbres. Una característica básica del SMC es la naturaleza discontinua de su acción de control, que tiene como función principal realizar una acción de relevo entre dos estructuras diferentes para obtener la dinámica deseada del sistema, conocida como dinámica de modo deslizante. Otra característica del control de modo deslizante es su capacidad para reducir el “chattering” que son oscilaciones de frecuencia y amplitud finita, las cuales son causadas por las acciones de control de alta frecuencia bajo condiciones reales o no ideales, como la parte no modelada de la dinámica. Por esta razón en los últimos años se ha utilizado el control de modo deslizante de alto orden (Kunusch, Puleston y Mayosky, 2012).

Considere el sistema no lineal conformado por (3.11) y (3.12), con $u(t)$ posiblemente discontinua y también $s(x): X \rightarrow \mathbb{R}$ como una función suave de restricción, diseñada de acuerdo a los objetivos de control y cuyo gradiente es: $\nabla s = \frac{\partial s}{\partial x}$. Entonces la superficie $s(x)$ en X de dimensión $(n-1)$ para un sistema SISO, que se denomina superficie relevadora o deslizante, está definida por:

$$\zeta = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n : s(x) = 0\} \quad (3.33)$$

La reducción en orden de la superficie deslizante es una característica de los sistemas de control de modo deslizante, que quiere decir que las trayectorias del sistema se mantendrán en el subespacio de menor dimensión que el espacio generado por los “n” estados, esto es una vez que se alcanza el régimen deslizante (Kunusch et al, 2012).

Con el fin de alcanzar dicho régimen se puede proponer una ley de control de estructura variable, en la cual se impone una acción de control discontinua “u”, es decir:

$$u = \begin{cases} u^+(x) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad \text{con } u^+ \neq u^- \quad (3.34)$$

En la **Figura 3.2** se muestran las trayectorias del sistema, desde cada lado de la superficie deslizante, también se indica la dirección del vector gradiente de $s(x)$, por lo que de acuerdo a dicha figura, podemos afirmar en forma local, lo siguiente:

$$\begin{cases} \dot{s}(x) < 0 & \text{si } s(x) > 0 \\ \dot{s}(x) > 0 & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

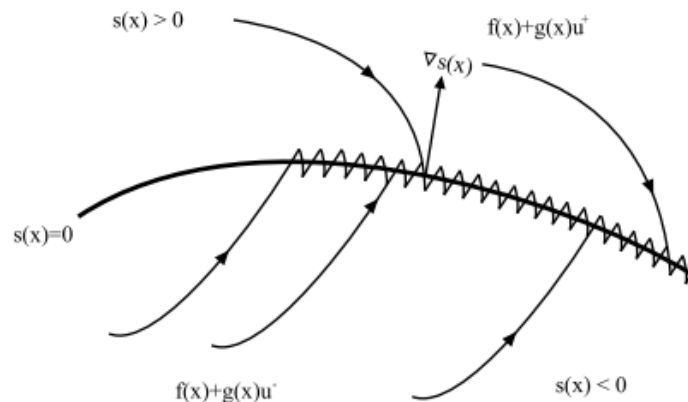


Figura 3.2 Superficie Deslizante y Trayectorias del Sistema (Kunusch et al, 2012)

Si se dan las condiciones (3.34) y/o (3.35), las trayectorias del sistema alcanzarán la superficie deslizante y después de lo cual, se mantendrán en la vecindad de

ésta, por lo tanto se puede considerar que se alcanzó un régimen deslizante en ζ cuando se cumpla (3.35). Es importante que la variable deslizante $s(x)$ sea de grado relativo uno, con respecto a $u(t)$, esto es para asegurar que la acción discontinua de control tenga influencia sobre el signo de $\dot{s}(x)$, como lo podemos constatar si $\dot{s}(x)$ se expresa en términos de la derivada de Lie:

$$\dot{s}(x) = \mathcal{L}_{f+gu}s = \mathcal{L}_f s + \mathcal{L}_g s \cdot u \quad \text{con } \mathcal{L}_g s \neq 0 \quad (3.36)$$

La expresión (3.34) se puede reescribir como:

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow +0} \mathcal{L}_{f+gu} s_+ < 0 \\ \lim_{s \rightarrow -0} \mathcal{L}_{f+gu} s_- > 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Desde luego (3.34) ó (3.36) se puede simplificar en:

$$\dot{s}(x)s(x) < 0 \quad (3.38)$$

La parte medular de (3.38), (3.37) ó (3.35) es que la tasa de cambio de la restricción o superficie deslizante $s(x)$, evaluada en la dirección del campo de control $(f+gu)$, es tal que asegura un cruce de la superficie desde cada lado de ésta, esto es, utilizando la ley de control (3.34). Esta condición una vez que se cumple convierte a la superficie ζ en invariante y por lo tanto, esta característica dota de robustez al control de modo deslizante, ante la presencia de perturbaciones e incertidumbres dinámicas (Slotine J, Li W. 1991).

Ahora bien, con el fin de caracterizar las trayectorias de estado una vez que se alcanza el régimen deslizante, se aplicará el método del control equivalente el cual originalmente fue desarrollado por Utkin (1977), este método de regularización considera lo siguiente (Kunusch et al, 2012):

$$\begin{cases} s(x) = 0 \\ \dot{s}(x) = \mathcal{L}_f s + \mathcal{L}_g s \cdot u_{eq} = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Donde $u_e(x)$ es una ley de control equivalente suave, la cual se determina de (3.39):

$$u_{eq}(x) = - \left. \frac{\mathcal{L}_f s}{\mathcal{L}_g s} \right|_{s(x)=0} \quad (3.40)$$

Si se sustituyen (3.40) y las expresiones de las derivadas de Lie en el sistema (3.11), se obtiene una descripción de la dinámica de los movimientos que ocurren en la superficie invariante ζ . Entonces se tiene que:

$$\dot{x} = \left[I - g \left[\frac{\partial s}{\partial x} g \right]^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right] f(x) \quad (3.41)$$

Por otra parte como bien se mencionó, una parte fundamental del control de modo deslizante es el diseño de la superficie deslizante y una forma usual está dada por la siguiente ecuación (Slotine J, Li W. 1991):

$$s(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e(t) \quad (3.42)$$

Donde, λ es una constante estrictamente positiva, $e(t)$ es el error de regulación y $n=1,2,\dots$ es una constante que tiene relación con el orden relativo del sistema. Otra forma en la que se puede diseñar la superficie deslizante, y en la que sólo se reemplaza la variable de interés, es (Slotine J, Li W. 1991):

$$s(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.43)$$

Para terminar esta sección, se presentará en forma sucinta el concepto de modo deslizante de alto orden (HOSM, higher order sliding modes). Este concepto presentado por Fridman y Levant (2002) se introdujo con el fin de reducir el fenómeno de “chattering” u oscilaciones de alta frecuencia en la vecindad de $s(x)$, lo cual es una de las desventajas del control de modo deslizante de primer orden. Entonces el objetivo de este tipo de control de alto orden, se centra en hacer lo más suave posible el comportamiento de las trayectorias de estado en dicha vecindad y entonces el modo deslizante de orden “ r ” está definido por:

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} \quad (3.44)$$

Y el orden deslizante “ r ” representa el número de derivadas totales continuas de $s(x)$ (incluyendo la cero) en la vecindad del modo deslizante. Entonces si $r=1$, tenemos $s(x) = 0$, con $\dot{s}(x)$ siendo discontinua.

Con relación a la reducción del fenómeno de “chattering”, si se desea implementar la ley de control discontinua (3.34) de la fase para alcanzar el régimen deslizante, es común utilizar la función “signo”, que para nuestro caso solo consideraremos esta parte:

$$\text{sign}(f(x)) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad x \neq 0 \quad (3.45)$$

Ante la presencia de varios tipos incertidumbres, constantes de tiempo pequeñas de los actuadores, entre otros factores; se produce el fenómeno antes dicho en la vecindad de la superficie deslizante. Y una forma de reducir este problema pero que puede comprometer la robustez del control de modo deslizante es utilizar en lugar de la función signo (3.45), una aproximación continua con una alta ganancia en la capa límite, es decir, funciones sigmoides o funciones de saturación como la que se muestra en la **Figura 3.3** (Perruquetti, W.y Barbot J.P. (2002).

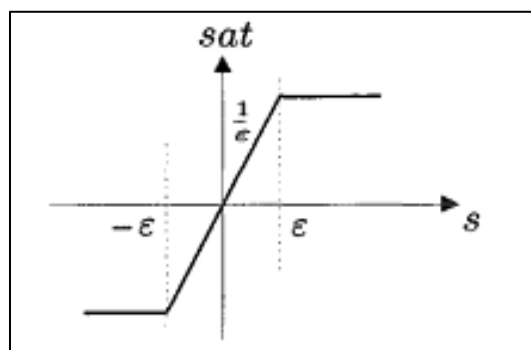


Figura 3.3 Función de Saturación, $\text{sat}(s)$ (Perruquetti, W.y Barbot J.P. (2002).

A continuación, se presentan los algoritmos de control de modo deslizante específicos que se aplicarán a la planta continua de digestión anaerobia de dos etapas.

3.2.2.1. Control de Modo Deslizante con Aproximación del Proceso de Primer Orden

El algoritmo de control que se detallará en las siguientes líneas está basado en el trabajo de Abu-Rmileh, Garcia-Gabin y Zambrano (2010), quienes aplicaron un controlador SMC para la regulación de glucosa en la diabetes tipo 1 y también en el trabajo de Musmade, Munje, y Patre (2011), que diseñaron un controlador SMC para un problema de regulación de un fermentador. Por otra parte, Tham, Ramachandran, y Hussain, (2003), aplicaron un algoritmo de control SMC que no hace la suposición de un proceso de primer orden, a un bioreactor continuo, en el que utilizaron un enfoque determinístico e híbrido.

La ley de control de modo deslizante consta de dos partes, una parte que se basa en que se alcance la superficie deslizante y la otra que se mantenga en ésta. La superficie deslizante que describe el comportamiento global para el seguimiento del proceso se considerará de la forma de (3.43) considerando un proceso de primer orden, es decir $n=1$. Entonces la forma de la superficie deslizante es:

$$s(t) = e(t) + \lambda \int_0^t e(\tau) d\tau = 0 \quad (3.46)$$

En la que $e(t)$ es el error de estado

Aplicando la condición de control equivalente (3.39) se tiene que:

$$\dot{s}(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t) = 0 \quad (3.47)$$

La ley de control que llevará el valor de la variable controlada a su valor de referencia y que satisface (3.39) es decir, alcanzando el modo deslizante es:

$$u(t) = u_c + u_d \quad (3.48)$$

Donde, $u_c(t)$ es la parte de la ley de control equivalente y $u_d(t)$ es la parte de la ley de control de corrección y que incorpora un elemento relevador no lineal.

Si el modelo del sistema de reactores biológicos se aproxima a un modelo de primer orden sin retraso, en el dominio del tiempo su representación es (3.22).

Y Además, definiendo el error de estado como (3.15) y derivando esta ecuación considerando $y_{ref}(t)$ constante, se tiene que:

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) \quad (3.49)$$

Utilizando la relación (3.47) que describe la dinámica de las trayectorias, una vez alcanzada la superficie invariante, sustituyendo en ésta la ecuación (3.49) se obtiene:

$$\dot{y}(t) + \lambda e(t) = 0 \quad (3.50)$$

Y luego sustituyendo en (3.50) la ecuación (3.22) con $u(t) = u_c(t)$, y resolviendo para $u_c(t)$, se tiene:

$$u_c(t) = \left(-\lambda e(t) + \frac{1}{\tau_0} y(t) \right) \frac{\tau_0}{k_p} \quad (3.51)$$

Ahora bien, para determinar la parte de la entrada de control relevadora correctora, se puede proponer de la siguiente manera, que incluye una función de saturación para la reducción del “chattering”:

$$u_d(t) = k_d \text{Sat}(s(t), \varepsilon) \quad (3.52)$$

$$\text{sat}(s, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{s}{\varepsilon} & \text{si } |s| < \varepsilon \\ \text{sgn}(s) & \text{si } |s| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.53)$$

Donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro de sintonización, que se utiliza para reducir el “chattering”.

La ley de control completa con la inclusión de (3.51) y (3.52) en (3.48) queda como:

$$u(t) = \left(-\lambda e(t) + \frac{1}{\tau_0} y(t) \right) \frac{\tau_0}{k_p} + k_d \text{Sat}(s(t), \varepsilon) \quad (3.54)$$

Por otra parte, para los valores iniciales de λ y k_d en la sintonización se utilizaron las siguientes relaciones (Abu-Rmileh et al., 2010):

$$k_d = \frac{1}{10k_p} \quad (3.55)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\tau_0} \quad (3.56)$$

3.2.2.2. Control de Modo Deslizante Libre de Modelo

El algoritmo de control deslizante libre de modelo que se aplicará está basado en lo realizado por Precup, Radac, Roman, y Petriu, (2017).

El control libre de modelo es una técnica orientada a datos que utiliza una aproximación lineal local del modelo del proceso, que es válida para una pequeña ventana de tiempo, un estimador de alta velocidad es utilizado para actualizar la estimación (Precup et al., 2017).

Primeramente, se considera el modelo de un proceso de primer orden para el diseño de un controlador PI ($\alpha > 0$):

$$\dot{y}(t) = F(t) + \alpha u(t) \quad (3.57)$$

Donde $F(t)$ es un término que representa la incertidumbre del modelo.

Definiendo al error de estado como lo hemos hecho antes mediante (3.15).

La ley de control para un controlador PI inteligente que asegure que el error se lleve a cero debe tener la forma:

$$u(t) = \frac{1}{\alpha} (-\check{F}(t) + \dot{y}_{ref}(t) - k_p e(t) - k_I \int_0^t e(\tau) d\tau) \quad (3.58)$$

Donde $\check{F}(t)$ es el estimado de $F(t)$.

Y el estimado de $\dot{y}(t)$, $\frac{d\check{y}(t)}{dt}$, está dado por:

$$\frac{d\check{y}(t)}{dt} = \check{F}(t) + \alpha u(t) \quad (3.59)$$

El error de estimación de $F(t)$, $e_{est}(t)$, cuyo valor para fines prácticos, se puede considerar despreciable, se define como:

$$e_{est}(t) = \frac{dy(t)}{dt} - \frac{d\check{y}(t)}{dt} = F(t) - \check{F}(t) \quad (3.60)$$

Sustituyendo (3.59) en (3.58) y luego sumando y restando $\frac{dy(t)}{dt}$, se tiene que:

$$\alpha u(t) = \alpha u(t) - \frac{d\check{y}(t)}{dt} + \dot{y}_{ref}(t) - k_p e(t) - k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{d\check{y}(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right) + \left(\frac{dy(t)}{dt} - \dot{y}_{ref}(t) \right) + k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau = 0 \quad (3.62)$$

Usando (3.15) y (3.60) en (3.62), se obtiene:

$$\dot{e}(t) + k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau = e_{est}(t) \quad (3.63)$$

Por otra parte, proponiendo una ley de control de modo deslizante no basada en modelo, a la ley de control PI inteligente (3.58) se le añade una señal de control aumentada, de tal forma que:

$$u(t) = \frac{1}{\alpha} \left(-\check{F}(t) + \dot{y}_{ref}(t) - k_p e(t) - k_I \int_0^t e(\tau) d\tau \right) + u_{aug}(t) \quad (3.64)$$

Bajo el mismo razonamiento para llegar a (3.64), entonces se puede afirmar que:

$$\dot{e}(t) + k_p e(t) + k_I \int_0^t e(\tau) d\tau = e_{est}(t) + \alpha u_{aug}(t) \quad (3.65)$$

Para combinar la ley de control libre de modelo con el control de modo deslizante, se consideran los cambios de variables:

$$x_1(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (3.66)$$

$$x_2(t) = e(t) \quad (3.67)$$

De acuerdo a (3.66) y (3.67), se puede expresar (3.65) como:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (3.68)$$

$$\dot{x}_2(t) = -k_I x_1(t) - k_p x_2(t) + \alpha u_{aug}(t) + e_{est}(t) \quad (3.69)$$

Si se considera el siguiente diseño de la superficie deslizante para la ley de control $u_{aug}(t)$:

$$s(t) = x_1(t) + T x_2(t) \quad (3.70)$$

Donde $T > 0$ es el parámetro de diseño que define el comportamiento deseado del sistema de control sobre la superficie deslizante.

Por diseño del control de modo deslizante, la entrada de control aumentada consiste de una parte equivalente y otra de corrección, es decir:

$$u_{aug}(t) = u_{eq}(t) + u_{corr}(t) \quad (3.71)$$

Aplicando la condición de control equivalente (3.39) a (3.71)

$$\dot{s}(t) = \dot{x}_1(t) + T \dot{x}_2(t) = 0 \quad (3.72)$$

Introduciendo (3.66) y (3.67) en (3.72):

$$\dot{s}(t) = -k_I T x_1(t) + (1 - k_p T) x_2(t) + \alpha T u_{aug}(t) + T e_{est}(t) = 0 \quad (3.73)$$

Haciendo en (3.73), $u_{aug}(t) = u_{eq}(t)$ y resolviendo para $u_{eq}(t)$:

$$u_{eq}(t) = \frac{1}{\alpha T} [k_I T x_1(t) - (1 - k_p T) x_2(t) - T e_{estmax}(t)] \quad (3.74)$$

Como $e_{est}(t)$ es desconocido, éste se reemplazó en (3.74) por el valor de e_{estmax} , que es un límite y funge como parámetro de diseño.

Para satisfacer la condición de existencia y de alcance del control de modo deslizante, la cual es: $s(t)\dot{s}(t) < 0$ y para disminuir los efectos de “chattering”, se propone la siguiente expresión para $u_{corr}(t)$:

$$u_{corr}(t) = -\frac{\eta}{\alpha T} Sat(s(t), \varepsilon) \quad (3.75)$$

Donde la función de saturación $Sat(s(t), \varepsilon)$ está definida por (3.53), y $\eta > 0, \varepsilon > 0$, son el factor de convergencia y espesor de la capa límite respectivamente.

Sustituyendo (3.74) y (3.75) en (3.71) y luego de esto, sustituyendo (3.66) y (3.67), se obtiene:

$$u_{aug}(t) = \frac{1}{\alpha} \left[k_I \int_0^t e(\tau) d\tau - \left(\frac{1}{T} - k_p \right) e(t) - e_{estmax} \right] - \frac{\eta}{\alpha T} Sat(s(t), \varepsilon) \quad (3.76)$$

Sustituyendo (3.76) en (3.64) se obtiene la expresión para la entrada de control:

$$u(t) = \frac{1}{\alpha} \left(-\check{F}(t) + \dot{y}_{ref}(t) - \frac{e(t)}{T} - e_{estmax} - \frac{\eta}{T} Sat(s(t), \varepsilon) \right) \quad (3.77)$$

Finalmente, para la estimación de $\check{F}(t)$ se introduce un observador de orden reducido para garantizar que el error de estimación tienda a cero:

$$\frac{de_{est}(t)}{dt} = -\tau_e^{-1} e_{est}(t) \quad (3.78)$$

Donde $\tau_e > 0$ es una constante de tiempo de estimación.

La ecuación (3.78) se convierte de acuerdo con (3.60) y $\frac{dF(t)}{dt} = 0$ en:

$$\frac{d\check{F}(t)}{dt} = \tau_e^{-1} (F(t) - \check{F}(t)) \quad (3.79)$$

Sustituyendo (3.57) en (3.79) y reorganizando los términos:

$$\tau_e \frac{d\check{F}(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} = -\alpha u(t) - \check{F}(t) \quad (3.80)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.80) lo podemos sustituir por una nueva variable, la cual se puede definir como:

$$w(t) = \tau_e \check{F}(t) - y(t) \quad (3.81)$$

De tal forma que a partir de (3.81) se obtiene el lado izquierdo de (3.80):

$$\frac{dw(t)}{dt} = \tau_e \frac{d\check{F}(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \quad (3.82)$$

Sustituyendo (3.81) y (3.82) en (3.80), se obtiene:

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\alpha u(t) - \tau_e^{-1}(w(t) + y(t)) \quad (3.83)$$

A partir de (3.82) se pueden obtener nuevos valores de $\check{F}(t)$ mediante (3.81), es decir $\check{F}(t) = \tau_e^{-1}(w(t) + y(t))$; las condiciones iniciales de (3.82) son $w(0) = -y(0)$. El procedimiento para estimar $\check{F}(t)$ se basó en las ideas de Puebla & Alvarez-Ramirez, (2008) del controlador MEC de la **Sección 3.2.1**.

3.2.3. Control Predictivo No lineal Basado en Modelo (NMPC)

En los últimos años, se ha demostrado que el control de modo predictivo basado en modelo aplicado a procesos químicos es una buena opción para procesos no lineales complejos. Patwardhan, Rawlings, y Edgar, (1990), Sistu y Bequette, (1991), Silva y Kwong, (1999) aplicaron algoritmos NMPC para el caso de reactores químicos continuos. Y en lo que respecta a los algoritmos de NMPC aplicados a los biorreactores y específicamente para el caso de los digestores anaerobios, se han publicado algunos trabajos. Silva y Kwong, (1999) aplicaron un algoritmo NMPC a un fermentador continuo utilizando como objetivo de control la maximización de la productividad de las células producto en una estrategia simultánea con elementos finitos de colocación equidistante. Attar y Haugen, (2017), aplicaron un algoritmo NMPC a un digestor anaerobio basado en el modelo AM2, el objetivo de la optimización fue maximizar la producción de metano mediante el control del caudal de alimentación. Con base en la investigación previa de NMPC aplicada a la digestión anaerobia, proponemos un enfoque de control NMPC para los sistemas de digestión anaerobia continua en dos etapas, para el problema de control de regulación de DQO, demanda química de oxígeno.

El MPC (model predictive control) se basa en resolución de un problema de optimización que desde luego toma en cuenta un conjunto de restricciones, sobre las entradas de control manipulables y los pronósticos de los estados del proceso, los cuales se realizan en un intervalo de tiempo finito denominado horizonte de predicción. Sólo la primera de acciones de control predichas es implementada en

la planta y luego el problema de optimización es resuelto de nuevo con mediciones actualizadas de las variables de proceso y con un horizonte recorrido en el tiempo. La función objetivo la cual es una función de costo, se minimiza en cada problema de optimización en todo el horizonte de predicción (Allgöwer, Badgwell, Qin, Rawlings, y Wright, (1999).

Una parte esencial de un controlador MPC es el modelo de la planta, y si éste es no lineal, lo cual se traduce en un conjunto de restricciones no lineales, entonces el MPC es denominado no lineal o bien control predictivo basado en modelo no lineal (NMPC, nonlinear model predictive control). El uso de modelos no lineales con respecto a los lineales, en un algoritmo MPC es atractivo porque es posible aumentar la calidad de las predicciones y por ende el desempeño del controlador (Allgöwer et al., 1999).

Teniendo en cuenta que el MPC usa estados actuales en la función objetivo, la solución maneja de hecho, los datos de retroalimentación en cada paso de tiempo, por lo tanto, el algoritmo MPC converge a una estrategia de lazo cerrado. Esta característica del horizonte móvil de MPC, es la que lo distingue de los controladores clásicos (Huang, Qi y Murshed, 2013).

La primera formulación MPC que presentaremos se refiere a un problema SISO de regulación, regido por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\min_{u_k^N} J = \int_{t_k}^{t_k+T_p} e^2 dt = \sum_{j=0}^N \left[\|x_{k+j|k} - x_{k+j}^{ref}\|_Q^2 + \|u_{k+j|k} - u_{k+j}^{ref}\|_R^2 + \|\Delta u_{k+j|k}\|_S^2 \right]$$

$$\text{s.a.} \tag{3.84a}$$

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x_{0|k} = x_k \tag{3.84b}$$

$$y = g(x) \tag{3.84c}$$

$$x_{min} \leq x_{k+j|k} \leq x_{max} \quad j \in [0, N] \tag{3.84d}$$

$$u_{min} \leq u_{k+j|k} \leq u_{max} \quad j \in [0, N - 1] \tag{3.84e}$$

Donde $x_{k+j|k}$ es el estado predicho, x_{k+j}^{ref} es la referencia del estado, u_{k+j}^{ref} es la referencia de la entrada de control, N es el horizonte de predicción sobre el cual los estados futuros son calculados y la función objetivo “ J ” es minimizada. Nótese que en la función objetivo se incluye un término de penalización en la señal de control, $\Delta u_{k+j|k}$. Q , R y S , son matrices de ponderación en las normas de los vectores. Se está utilizando la notación con doble índice en las variables internas (estados, las salidas y las entradas de control) predichas del controlador en el instante de tiempo k , donde el primer índice indica valores en el tiempo predichos en el controlador empezando en $j=0$ por cada instante de tiempo real k . El segundo índice denota el instante de tiempo en el que la predicción es hecha. Las longitudes correspondientes del horizonte de control y de predicción se consideran iguales. En cada instante de tiempo k , se aplica el primer elemento de la secuencia de solución $u_k^N = \{u_{k|k}, u_{k+1|k}, \dots, u_{k+N-1|k}\}$ del problema de optimización de lazo abierto (3.84), esto es:

$$u_k = u_{k|k}^* \quad (3.85)$$

Las variables que utilicen un solo índice se utilizarán para representar estados, entradas y salidas de control que ya han sido implementados y medidos en el tiempo actualizado k .

La función objetivo (3.84a), se puede formular en función de las variables de la salida de control de modo que se obtiene:

$$\min_{u_k^N} J = \int_{t_k}^{t_k+T_p} e^{\lambda t} dt = \sum_{j=0}^N \left[\|g(x_{k+j|k}) - y_{k+j}^{ref}\|_Q^2 + \|u_{k+j|k} - u_{k+j}^{ref}\|_R^2 + \|\Delta u_{k+j|k}\|_S^2 \right] \quad (3.86)$$

Para implementar el algoritmo de control NMPC conformado por (3.86), (3.84b)-(3.84e), se tiene que resolver un problema de optimización no convexo en línea. Lo anterior puede resultar difícil debido a que la solución del problema debe estar

lista antes del tiempo de muestreo del proceso. Otro factor muy importante es que para resolver el problema de optimización antes mencionado, éste debe transformarse en un problema completamente discreto, y una vez hecho esto, se puede seguir el siguiente procedimiento (Huang, Qi y Murshed, 2013):

- Obtener las mediciones actuales del proceso.
- Estimar los estados no medidos utilizando el modelo no lineal discreto del sistema.
- Calcular el conjunto de futuras entradas que minimizan la función objetivo J , en el horizonte de predicción (M) sin violar alguna de las restricciones, esto es aplicando (3.86), (3.84b)-(3.84e).
- Implementar la primera acción de control de la secuencia óptima de la solución del problema de optimización de lazo abierto.
- Repetir los pasos 1 a 4 en cada intervalo de tiempo.

Este procedimiento más algunos de los problemas que se pueden encontrar en la implementación de un controlador NMPC se muestran en la **Figura 3.4**.

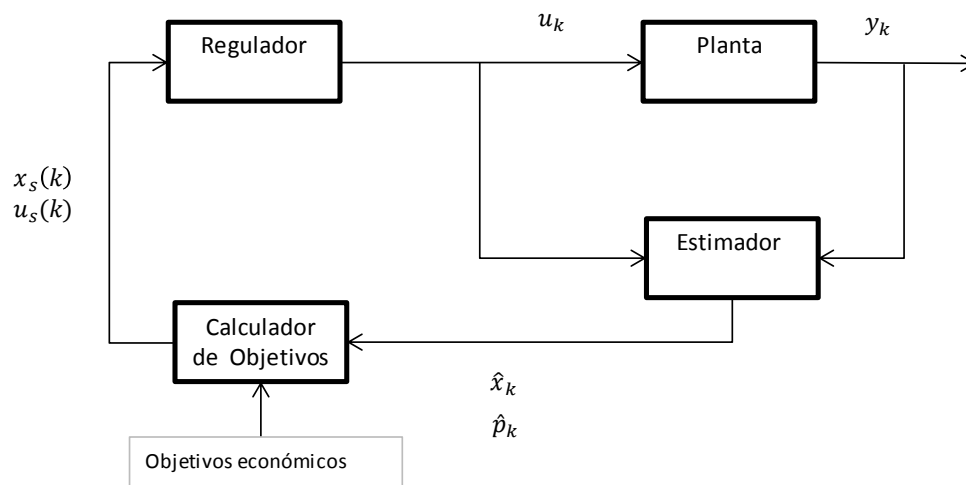


Figura 3.4 Controlador NMPC con Regulator, Estimator y Calculador de Objetivos (Allgöwer et al., 1999)

El regulador tiene la función de resolver el problema de optimización y calcular las entradas de control, la referencia o estado estable al cual conduce el regulador es determinado por el calculador de objetivos, esto se hace de acuerdo a ciertos objetivos económicos y con los estados actuales del proceso. El estimador, por otra parte, con base en las mediciones disponibles del proceso y las entradas de control, determina los estados actuales del proceso y las perturbaciones modeladas. En nuestro caso, el NMPC que se desarrollará cuenta con el regulador y la planta, por lo que se supone que todos los estados del proceso están disponibles en cada paso del tiempo.

En la siguiente sección se abordará el problema de discretización del sistema de ODE's que está dado por (3.84b).

3.2.3.1. Discretización de Modelos: Método de Colocación Ortogonal en Elemento Finito.

Aunque los modelos no lineales son continuos por naturaleza es necesario su discretización para su utilización en los algoritmos NMPC, y el método que utilizaremos para este efecto es el de Colocación Ortogonal en Elemento Finito. Esto es, porque el método de colocación ortogonal normal representa una forma discretizada de las ODE's con un horizonte de predicción de 1, del problema (3.81). En vista de que, es necesario utilizar más elementos de predicción para lograr un comportamiento estable del controlador NMPC, se hace necesario aplicar el método de colocación ortogonal en elemento finito. La aplicación de este método ha sido presentada por Meadows y Rawlings, (1997) y Huang, Qi y Murshed, (2013) y para mayor detalle, el lector puede referirse a estas dos fuentes.

Un sistema de la forma (3.84b), con un número de elementos de predicción N , en el tiempo, puede representarse como un sistema algebraico no lineal de la forma

$$\check{A}\check{X} = \Delta t' \check{F}(\check{X}, \check{U}) \quad (3.87)$$

Donde \check{A} es una matriz de entradas constantes, de colocación, cuadrada de tamaño $(4N + 1) \times (4N + 1)$ considerando 3 puntos internos de colocación y en la que N es el número de elementos finitos que es igual al horizonte de predicción. Las entradas de la matriz \check{A} , es decir, las matrices A_0 y A , se pueden consultar en el **Anexo 1**. Las formas de las matrices \check{A} , \check{X} , $\check{F}(\check{X}, \check{U})$ son:

$$\check{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & A & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\check{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{4N,1} & x_{4N,2} & \cdots & x_{4N,n} \\ x_{4N+1,1} & x_{4N+1,2} & \cdots & x_{4N+1,n} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$F(\check{X}, \check{U}) = \begin{bmatrix} x_{init}^T \\ f^T(x_{2*}^T, u_0, t_2) \\ f^T(x_{3*}^T, u_0, t_3) \\ f^T(x_{4*}^T, u_0, t_4) \\ f^T(x_{5*}^T, u_0, t_5) \\ f^T(x_{6*}^T, u_1, t_6) \\ \vdots \\ f^T(x_{4N*}^T, u_{N-2}, t_{4N}) \\ f^T(x_{4N+1*}^T, u_{N-1}, t_{4N+1}) \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\check{U} = [u_0^T, u_1^T, \dots, u_{N-1}^T]^T \quad (3.91)$$

$\Delta t'$, es el tamaño del elemento finito y representa un cambio de variable el cual se debe de agregar a (3.87) con el fin de considerar intervalos de muestreo diferentes de $[0,1]$.

El primer subíndice de $x_{i,j}$, denota el punto de colocación en la discretización total y el segundo hace referencia al estado. Algo muy importante a considerar es que, como se observa en (3.90), en cada elemento finito que consta de 3 puntos internos de colocación, la entrada de control predicha a lo largo de cada elemento

se mantiene constante. También, en (3.90), $x_{i_*}^T$ denota al estado completo que se evalúa en cada función f de (3.84b) y en cada punto de la discretización e instante de tiempo interno en el horizonte de predicción.

Finalmente, la formulación NMPC con el modelo continuo discretizado adquiere la siguiente forma:

$$\min_{u_k^N} J(x_k^T, u_k, t_k) \quad (3.92a)$$

s.a.

$$y = g(x) \quad (3.92b)$$

$$\check{A}\check{X} = \Delta t' \check{F}(\check{X}, \check{U}) \quad (3.92c)$$

$$x_{k+j|k} \in \mathcal{X} \quad j \in [0, N] \quad (3.92d)$$

$$u_{k+j|k} \in \mathcal{U} \quad j \in [0, N-1] \quad (3.92e)$$

$$\Delta u_{k+j|k} \in \Delta \mathcal{U} \quad j \in [0, N-1] \quad (3.92f)$$

Con:

$$J(x_k^T, u_k, t_k) = \sum_{j=0}^N \sum_{k=4j+1}^{4j+5} \check{c}_k \left[\|g(x_{k+j|k}) - y_{k+j}^{ref}\|_Q^2 + \|u_{k+j|k} - u_{k+j}^{ref}\|_R^2 + \|\Delta u_{k+j|k}\|_S^2 \right] \quad (3.92g)$$

$$\mathcal{X} := \{x_{k+j|k} \in \mathbb{R}^n | x_{min} \leq x_{k+j|k} \leq x_{max}\} \quad (3.92h)$$

$$\mathcal{U} := \{u_{k+j|k} \in \mathbb{R}^m | u_{min} \leq u_{k+j|k} \leq u_{max}\} \quad (3.92i)$$

$$\Delta \mathcal{U} := \{\Delta u_{k+j|k} \in \mathbb{R}^m | \Delta u_{min} \leq \Delta u_{k+j|k} \leq \Delta u_{max}\} \quad (3.92j)$$

Donde, los coeficientes \check{c}_k son los pesos de cuadratura, correspondientes a polinomios de Legendre de tercer orden, cuyo detalle puede consultarse en el **Anexo 1**. Véase que en (3.92g) la sumatoria interna se realiza sobre los puntos internos de colocación de un elemento finito y la sumatoria externa corresponde a cada elemento finito.

3.2.3.2. Control Predictivo No Lineal Robusto Basado en Modelo.

Sin duda alguna, la incertidumbre en los modelos afecta la operación del proceso ocasionando pérdidas en la eficiencia y en la economía de los procesos. El tipo de incertidumbre que se considerará en este trabajo es finita e invariante en el tiempo, es decir que sus valores son conocidos y están acotados por un valor mínimo y uno máximo. Una vez especificado el tipo de incertidumbre, se procede a realizar una formulación robusta de optimización, tomando en cuenta que en nuestro caso se trata de un problema de optimización no lineal, una forma de tomar en cuenta el efecto de la incertidumbre del modelo en optimización es mediante el despliegue de escenarios. Este enfoque consiste en discretizar el intervalo de incertidumbre que es $[X^U, X^L]$ en un número de escenarios N_s . En cada escenario el valor del parámetro incierto permanece constante, por lo que, en lugar de resolver un solo problema de optimización, como cada restricción del proceso está en función de los escenarios considerados por los parámetros inciertos, en realidad se tiene que resolver N_s problemas de optimización determinísticos (Rodríguez-Pérez, Flores-Tlacuahuac, Ricardez-Sandoval, y Lozano, 2018).

La formulación de un NMPC robusto multiescenario de acuerdo a (Rodríguez-Pérez et al., 2018), considerada en este trabajo es:

$$\min_{x_i, u} \Omega = \sum_i^{N_s} w_i J_i(x_i, u, \theta_i) \quad (3.93a)$$

s.a.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, u, \theta_i) \quad (3.93b)$$

$$h_i(x_i, u, \theta_i) \leq 0 \quad (3.93c)$$

$$x^L \leq x_i \leq x^U \quad (3.93d)$$

$$u^L \leq u \leq u^U \quad (3.93e)$$

Donde J es la función objetivo, $x \in \mathbb{R}^{N_x}$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^{N_u}$ es el vector de variables manipulables, $\theta \in \mathbb{R}^{N_p}$ es el conjunto de parámetros inciertos, w es una función de pesos, f son las funciones que representan el comportamiento dinámico del proceso y h es un conjunto de restricciones para cumplir requerimientos de calidad. L y U , representan los límites inferior y superior de las variables de optimización. El subíndice i denota un determinado escenario

Capítulo 4

4. Control Aplicado a la Planta de DA de 2 Etapas.

En el presente Capítulo se realizará la aplicación de los algoritmos de control que se abordaron en el capítulo anterior, para el diseño de un controlador específico y su implementación numérica para el sistema de digestión anaerobia de dos etapas de vinazas tequileras.

4.1. Consideraciones Generales para la Implementación Numérica

El objetivo final del controlador que se diseñará es la regulación de la DQO del efluente tratado, aunque en forma independiente se considerarán los casos de regulación de la concentración de AGV en el reactor acidogénico y en el metanogénico; por separado, para aun así, cumplir con el requerimiento de calidad de DQO del efluente tratado del sistema. Por ende, son tres casos independientes los que se abordarán para el diseño de los controladores.

Por otra parte, recordemos que el sistema de la planta continua de estudio es un sistema SISO, en el que sólo se puede tener como variable manipulable una de las dos tasas de dilución correspondientes a cada reactor, esta condición o restricción algebraica está dada por (2.30), es decir. $D_1 = \beta D_2$.

Usando una nomenclatura típica de los trabajos de control, nos permitimos hacer el siguiente cambio de variable que ya se había hecho antes en la **Sección 3.1.1**:

$$x(t)^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T = [Z_{1,1}, S_{1,1}, S_{2,1}, Z_{1,2}, Z_{2,2}, S_{1,2}, S_{2,2}]^T \quad (3.4)$$

$$u^T = [u_1, u_2]^T = [D_1, D_2]^T \quad (4.1)$$

El modelo al cual se le aplicarán los esquemas de control está formado por (4.2) a (4.6):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mu_{1,1}(x_2)x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ k_2 \\ k_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k_5 & -1 \\ k_3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{1,2}(x_6)x_4 \\ \mu_{2,2}(x_7)x_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_1 x_1 \\ x_{2,0} - x_2 \\ x_{3,0} - x_3 \end{bmatrix} u_1 \\ \begin{bmatrix} -\alpha_2 x_4 \\ -\alpha_2 x_5 \\ x_2 - x_6 \\ x_3 - x_7 \end{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$u_1 = \beta u_2 \quad (4.3)$$

$$\mu_{1,1}(x_2) = \frac{\mu_{1,1} \max x_2}{k_{s1,1} + x_2} \quad (4.4)$$

$$\mu_{1,2}(x_6) = \frac{\mu_{1,2} \max x_6}{k_{s1,2} + x_6} \quad (4.5)$$

$$\mu_{2,2}(x_7) = \frac{\mu_{2,2} \max x_7}{k_{s2,2} + x_7 + \left(\frac{x_7}{k_{I2}}\right)^2} \quad (4.6)$$

Para la implementación numérica de cada algoritmo de control basado en el modelo anterior se utilizarán los parámetros de la **Tabla 2.3**, los valores de (2.46) y (2.47) que representan condiciones típicas de entrada de las vinazas tequileras.

Para probar cada algoritmo de control se seguirá la siguiente secuencia de acontecimientos, para estudiar sus propiedades de robustez:

- Con base en los resultados obtenidos en la optimización estática realizada en la **Sección 3.1**, esto es, utilizando $D_2 = 0.164d^{-1}$ y $D_1 = \beta D_2 = 1.9527(0.164d^{-1}) = 0.320d^{-1}$, simularemos el proceso en el intervalo de tiempo $[0, 100]d$ con condiciones iniciales $[94.79, 27, 50, 23.2, 100, 10, 30]$, hasta que se alcancen los puntos de equilibrio.
- En el intervalo A de $[100, 200]d$, se activará el controlador en lazo cerrado, con un valor de referencia para la salida de control de $y_{ref,A} = x_{6,ref,A} = 0.25 \text{ g/L}$.

- c) En el intervalo B de $[200, 300]d$, ocurre al inicio un cambio de punto de referencia en la salida de control de 300% esto es: $y_{ref,B} = x_{6,ref,B} = 1.00 \text{ g/L}$.
- d) En el intervalo C de $[300, 400]d$, ocurre al inicio una perturbación en las condiciones de entrada de DQO y AGV, que consiste en un 20% de incremento en sus respectivos valores, esto es, para DQO: $S_{1,0,C} = x_{2,0,C} = 1.2 \left(27 \frac{\text{g}}{\text{L}} \right) = 32.4 \text{ g/L}$ y para AGV: $S_{2,0,C} = x_{3,0,C} = 1.2 \left(50 \frac{\text{mmol}}{\text{L}} \right) = 60 \text{ mmol/L}$. Al mismo tiempo, es requerido un cambio de 50% de incremento en el punto de referencia de DQO, es decir: $y_{ref,C} = x_{6,ref,C} = 1.5 \text{ g/L}$.
- e) En el intervalo D de $[400, 500]d$, tiene lugar una perturbación en las condiciones de entrada del proceso, aumentando un 25%, esto es para DQO: $S_{1,0,D} = x_{2,0,C} = 1.25 \left(32.4 \frac{\text{g}}{\text{L}} \right) = 40.5 \text{ g/L}$, y para AGV: $S_{2,0,C} = x_{3,0,C} = 1.25 \left(60 \frac{\text{mmol}}{\text{L}} \right) = 75 \text{ mmol/L}$.

En la **Figura 4.1**, se muestra la progresión que se desea probar con los algoritmos de control que se implementarán.

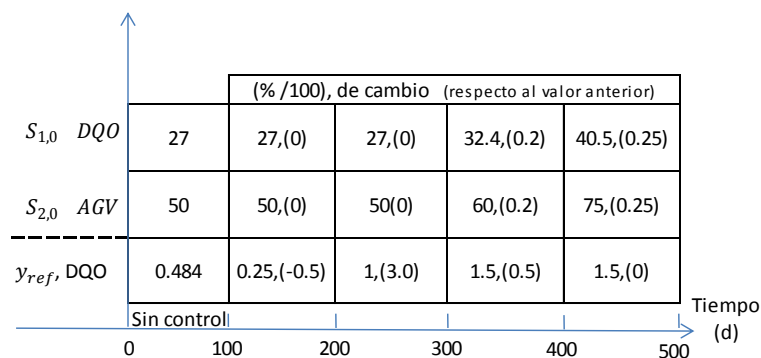


Figura 4.1. Cambios de Puntos de Referencia y Condiciones de Entrada de los Controladores

Por otra parte, las entradas de control deben estar acotadas por los siguientes valores que se obtuvieron en la **Sección 2.5.4**, de manera que se prevenga el fenómeno de lavado en cualquiera de los dos reactores:

$$u_{1,min} \leq u_1 \leq u_{1,max} \rightarrow 0.10 \leq u_1 \leq 1.10 \quad (4.7)$$

$$u_{2,min} \leq u_2 \leq u_{2,max} \rightarrow 0.05 \leq u_2 \leq 0.56 \quad (4.8)$$

En los problemas de regulación que se tratarán, se asumirá un valor de referencia constante, es decir:

$$\frac{dy_{ref}(t)}{dt} = 0 \quad (4.9)$$

En cuanto a la programación de los algoritmos de control se utilizará Matlab R2016b, en la integración se utilizará la función ode23s para sistemas rígidos.

4.2. Implementación del Controlador MEC

En esta sección se aplicará a la planta de estudio, el algoritmo MEC de la **Sección 3.2.1**, considerando los 3 casos de regulación antes mencionados.

4.2.1. Caso 1: Salida de Control, DQO del Efluente Tratado.

Aplicando el algoritmo de control MEC de la **Sección 3.2.1**, y todas las consideraciones de la **Sección 4.1**, obtenemos la siguiente ley de control.

De (3.27) resolviendo para $\bar{\eta}$ se tiene que:

$$\check{\eta}(t) = \tau_e^{-1}(w(t) + y(t)) \quad (4.10)$$

$$y = x_6 \quad (4.11)$$

Definiendo el error con (3.15):

$$e(t) = y(t) - y_{ref} \quad (4.12)$$

Utilizando (3.29) y (3.31):

$$u(t) = -\frac{\tau_0}{k_p} \left(-\frac{1}{\tau_0} y(t) + \check{\eta}(t) + \tau_c^{-1} e(t) \right) \quad (4.13)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_0} y(t) - \frac{k_p}{\tau_0} u(t) - \tau_e^{-1}(w(t) + y(t)) \quad (4.14)$$

Como puede observarse $u(t)$ en (4.13), depende de $\dot{\eta}(t)$, pero esta variable puede determinarse antes con (4.10), con un valor inicial de $w(t)$ (ya que $w(0) = -y(0)$). Una vez implementada la entrada de control $u(t)$ en el proceso, resolviendo simultáneamente el modelo (4.2) junto con (4.14), entonces se obtienen nuevos valores de la salida medible del proceso ($y = x_6$) y de $w(t)$, por lo que se establece el lazo cerrado de control.

Cabe mencionar que los valores de k_p y τ_0 , fueron determinados por un método de identificación empírica el cual se detalla en el **Anexo 2**, aquí, sólo se presentarán los valores que se obtuvieron con dicho método. Adicionalmente se probaron valores de τ_e y τ_c , tomando como referencia (3.32).

Los valores definitivos de la sintonización del controlador MEC aparecen en la **Tabla 4.1**.

Parámetro	Valor	Unidad
k_p	3.689	(g/L)d
τ_0	0.55	d
τ_e	0.2	d
τ_c	1.33	d

Tabla 4.1 Parámetros de Sintonización del Controlador MEC, Salida de Control (DQO)

A continuación se muestran los resultados de la implementación numérica del controlador MEC. Primero se muestra en la **Figura 4.2**, la comparación de los mejores valores que se determinaron para τ_c y τ_e , con otros valores que utilizan el valor límite de la regla (3.32), aquí se puede observar que entre menor sea el valor de τ_e con respecto al de τ_c , cumpliendo con (3.32), el controlador ya no presenta oscilaciones y es más estable tanto en la entrada como en la salida de control.

En la **Figura 4.3**, también se comparan los mejores valores de τ_c y τ_e , con otro grupo de valores. En esta ocasión se elige un valor de τ_c , más bajo que el mejor caso y se utiliza el valor límite de τ_e mediante (3.32). Indudablemente, de la

Figura 4.3, el controlador se vuelve más agresivo y se alcanza mucho más rápido cada punto de referencia.

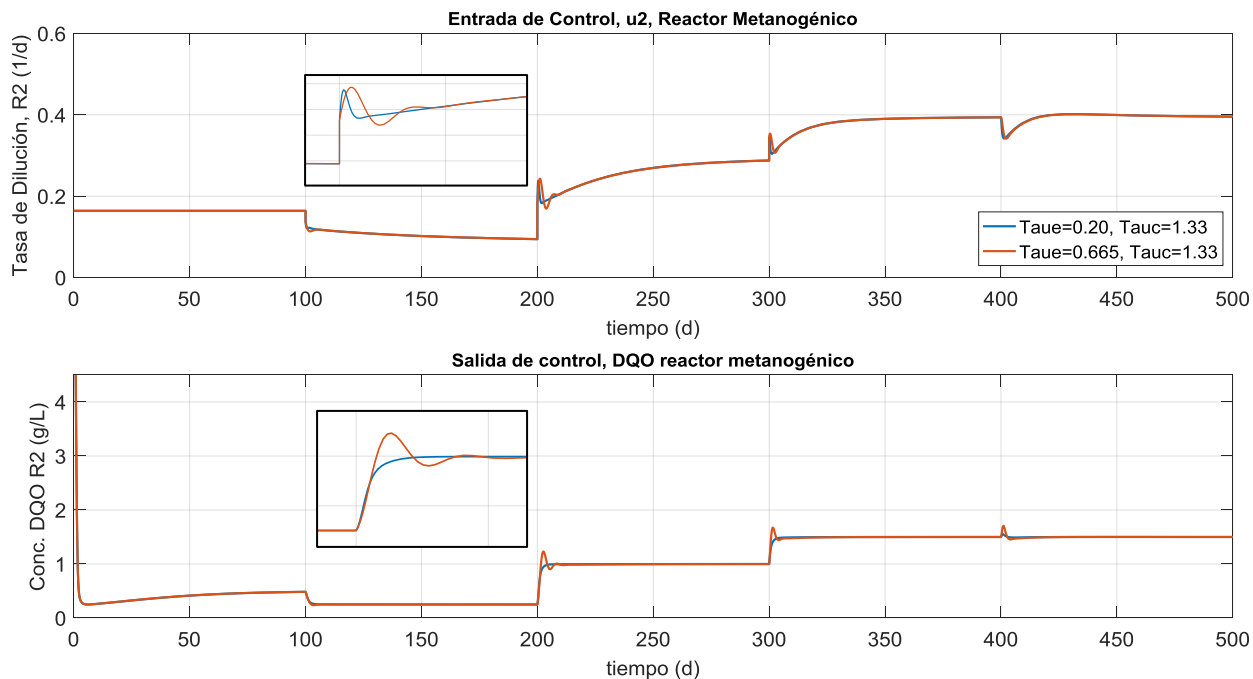


Figura 4.2 Sintonización del Controlador MEC (1), Regulación de DQO

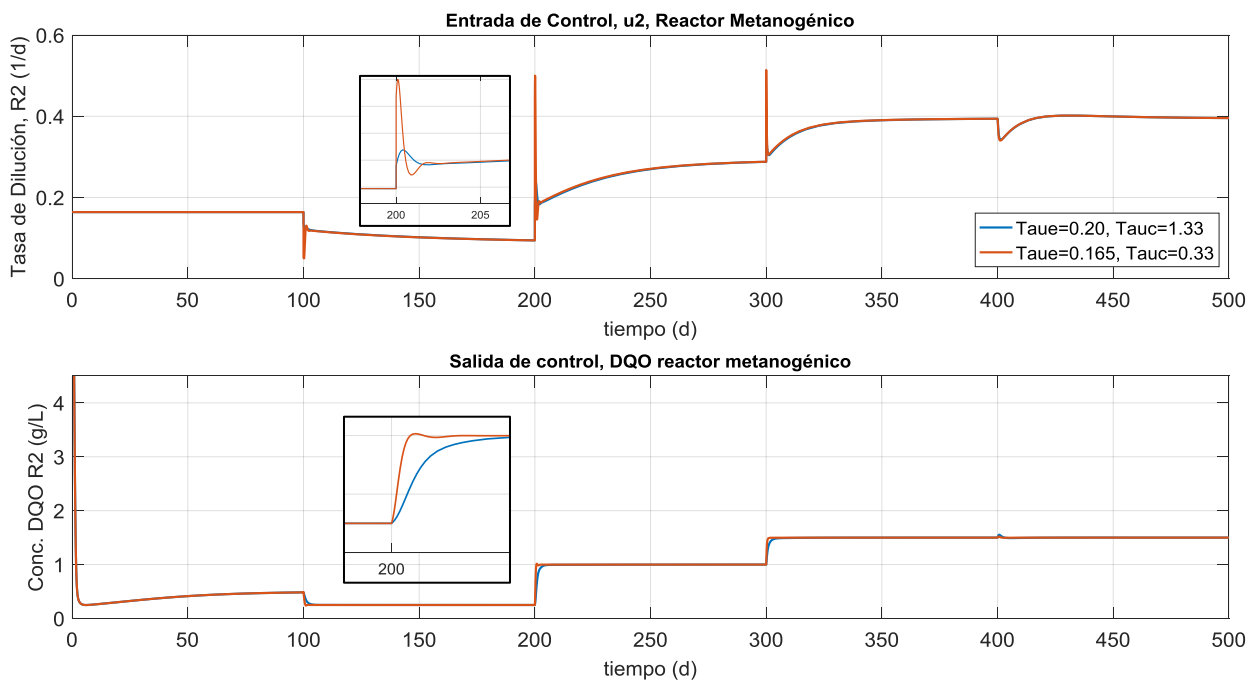


Figura 4.3 Sintonización del Controlador MEC (2), Regulación de DQO

Sin embargo, la desventaja es que la entrada de control tiende a saturarse al inicio, aunque no se alcanza la condición de lavado $D_{2max} = 0.56 d^{-1}$, este salto podría dañar los componentes físicos del sistema.

El comportamiento de las entradas y salidas de control, con los mejores valores de los parámetros de sintonización se muestran en la **Figura 4.4**, aquí se ha incluido también, las concentraciones de ácidos grasos volátiles (AGV) en cada reactor, pues son variables de estado cuyo monitoreo es de vital importancia para el desempeño del sistema de digestión anaerobia de 2 etapas.

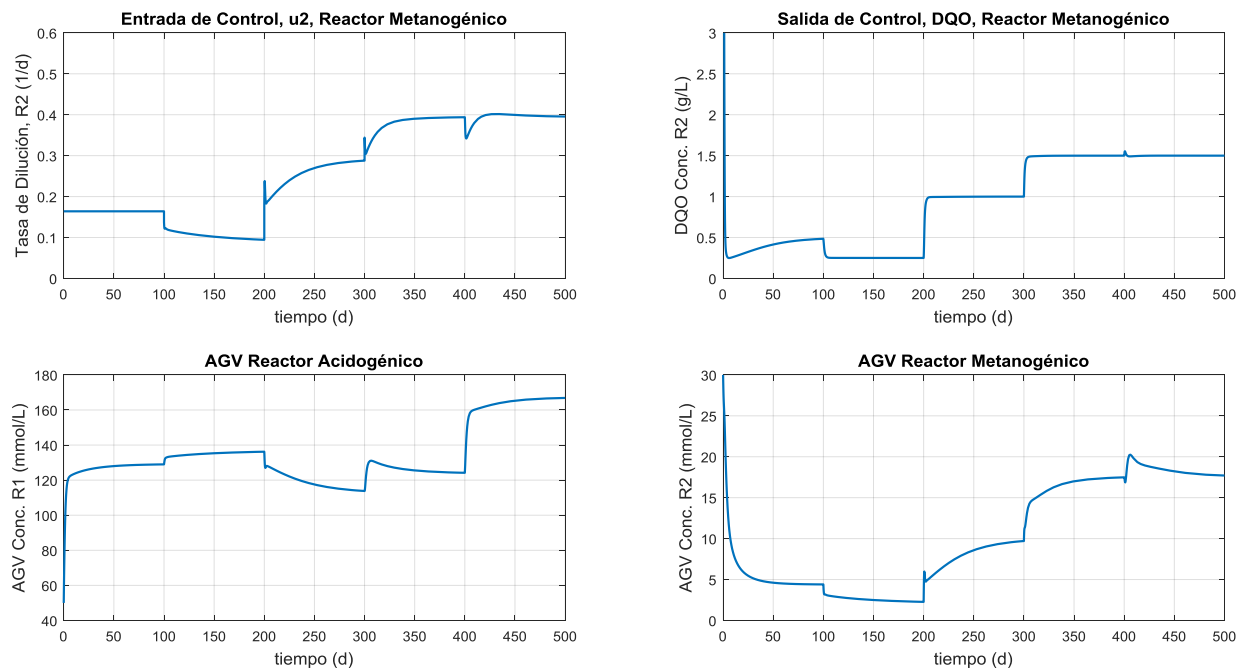


Figura 4.4 Resultados del Controlador MEC, Regulación de DQO

En la **Figura 4.4**, puede observarse, que el controlador MEC para el caso de regulación de la DQO del efluente tratado, cumple sus objetivos, se alcanzan los puntos de referencia $y_{ref}^T = [0.25, 1.0, 1.5, 1.5]^T$. Recordemos que en los primeros 100 días, el controlador no está activo, luego en el intervalo (A) de $[100, 200]d$, se activa el controlador con un valor de referencia de DQO de 0.25 g/L, posteriormente en el intervalo (B) de $[200, 300]d$, se requiere un cambio brusco en

el punto de referencia de 0.25 g/L a 1.0 g/L. Luego de esto, en el intervalo (C) $[300, 400]d$, se le pide al controlador un nuevo cambio en el punto de referencia de 1.0 g/L a 1.5 g/L, y simultáneamente ocurre una perturbación en el proceso de aumento de 20% en las concentraciones de entrada de DQO y AGV de la alimentación al sistema. Por último, en el intervalo (D) $[400, 500]d$, solo ocurre una nueva perturbación en la condiciones de entrada del proceso, en esta ocasión un incremento de 25% en las concentraciones de DQO y AGV de entrada.

Como puede observarse de la **Figura 4.4**, el perfil de la entrada de control es suave, con un pequeño salto al inicio de los intervalos B y C. Todos los valores de la entrada de control están lejos de la condición de lavado ($D_{2max} = 0.56 d^{-1}$), por lo que se está operando el sistema en forma segura. En cuanto a los AGV tanto en el reactor acidogénico como en el metanogénico, su comportamiento es estable, estabilizándose relativamente rápido, sólo en el intervalo D, por el tipo de perturbación que tuvo lugar, la concentración de AGV's en ambos reactores se incrementa considerablemente, sin ocasionar inhibición en el crecimiento del consorcio metanogénico en el segundo reactor, lo cual puede observarse en la **Figura 4.5** que incluye todos los estados del sistema.

En el intervalo D en la **Figura 4.4** se muestran las propiedades de robustez del controlador MEC, pues un cambio considerable en las condiciones de entrada, no tuvieron mucho efecto en la salida de control. Y en la **Figura 4.6**, se demuestra que aunque haya tenido lugar esta perturbación fuerte, el controlador todavía es capaz de regular la DQO a un valor menor que 1.5 g/L, que es 1.0 g/L.

4.2.2. Caso 2: Salida de Control, AGV en el Reactor Acidogénico.

En el proceso de digestión anaerobia, no es tan fácil disponer de mediciones continuas de DQO, por lo que una opción es utilizar como salida de control a la concentración de AGV en el reactor acidogénico, y aunque algunos investigadores

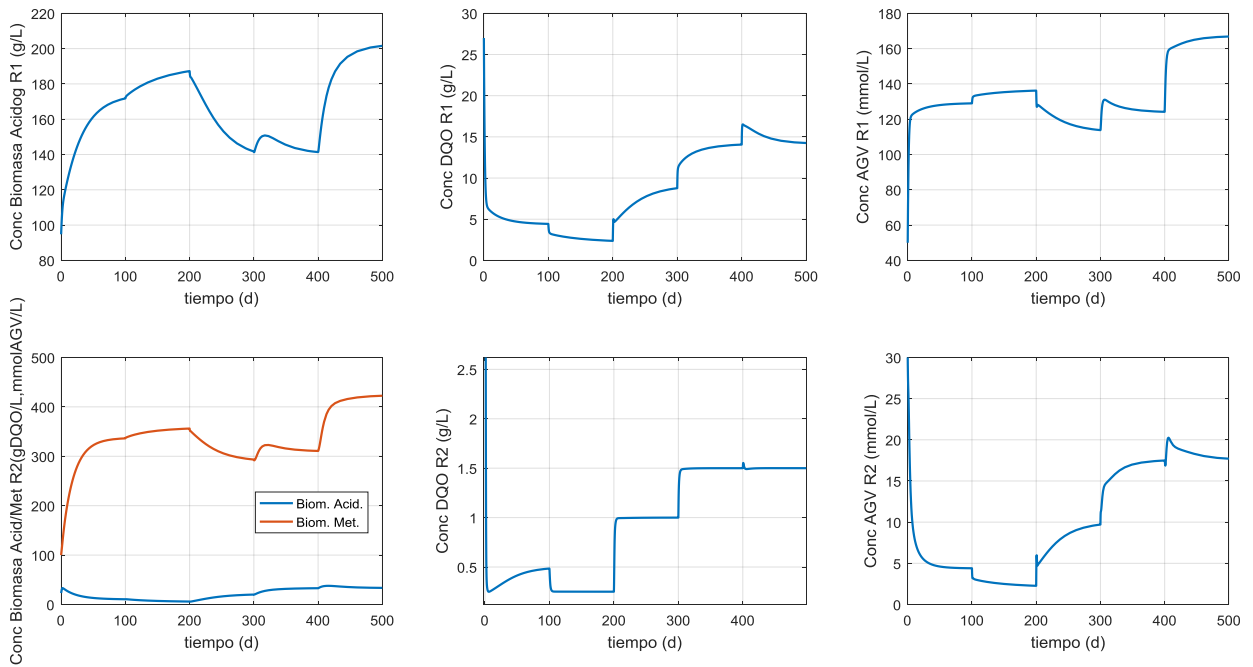


Figura 4.5 Resultados del Controlador MEC, Estados Completos.

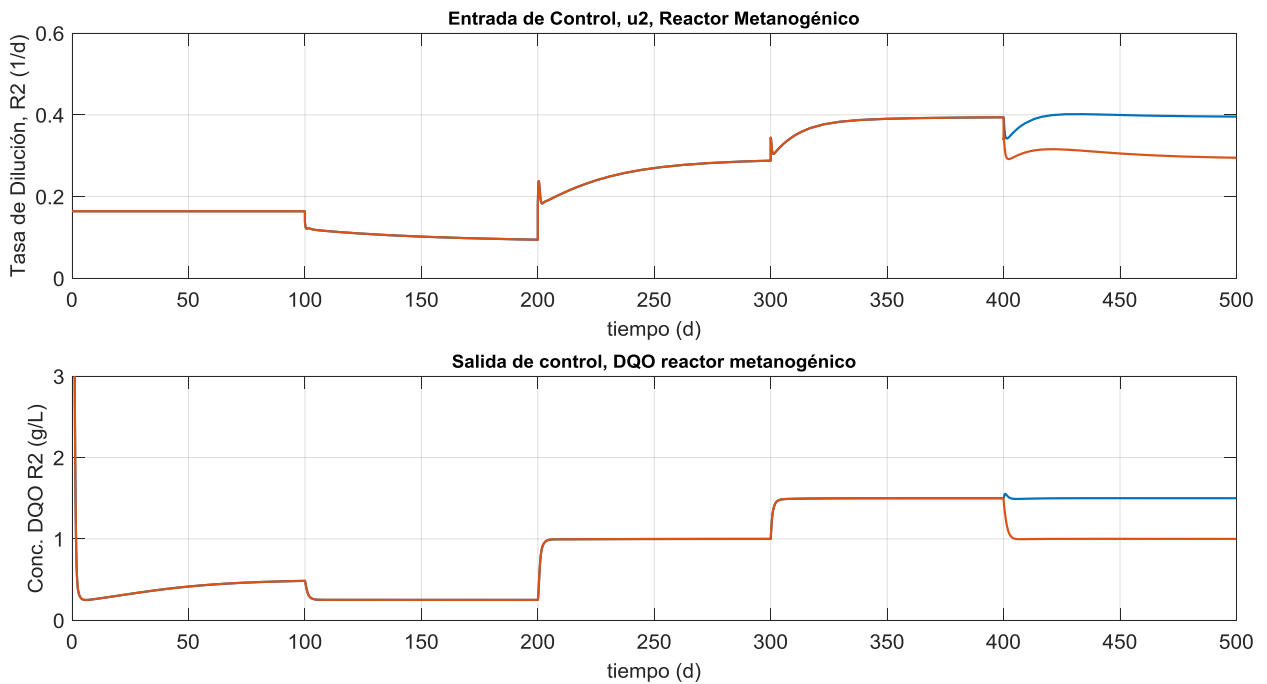


Figura 4.6 Resultados del Controlador MEC, Cambio de Punto de Referencia.

como Méndez-Acosta et al., (2016) han utilizado el control en cascada para regular tanto AGV en el primer reactor como DQO en el segundo, en este trabajo se propondrá regular los AGV en el reactor acidogénico y cumplir con los requerimientos de calidad en función de DQO del efluente tratado, considerando este problema como SISO.

Una de las razones por las cuales se ha apostado a utilizar como salida de control a los AGV, es que es posible su medición continua a través de la conductividad (Charnier et al., 2016), Aceves-Lara et al., 2012).

Un problema en la implementación de este esquema de control que utiliza $y = x_3$, es que no se conoce y_{ref} , para este fin, se resolverá un problema de optimización estática que considere dentro de las restricciones de desigualdad (3.5d) para x_6 el valor de DQO que se desea alcanzar (y_{ref} , en el caso 1) y utilizando como restricciones de igualdad el modelo (3.5b) y como función objetivo, la minimización de la DQO del reactor metanogénico la cual está dada por (3.5a). Lo anterior implica que este problema de optimización debe ser resuelto antes de la implementación del algoritmo de control o bien en línea.

Una vez calculados los puntos de referencia podemos aplicar el algoritmo de control MEC de la **Sección 3.2.1**, junto con todas las consideraciones de la **Sección 4.1**. La ley de control para este caso está constituida por (4.10), (4.12), (4.13) y (4.14) y la ecuación de la salida de control (4.15) que es:

$$y = x_3 \tag{4.15}$$

De igual manera que el **Caso 1**, los valores de k_p y τ_0 , fueron determinados por un procedimiento de identificación empírica cuyos detalles se pueden consultar en el **Anexo 2**. Para este problema de control se determina u_1 y luego u_2 usando (4.3), a diferencia del **Caso 1**, esto es porque la tasa de dilución u_1 es la variable manipulable del reactor acidogénico. En la **Figura 4.7** se muestran los resultados de la sintonización del controlador MEC, en ésta se puede observar el efecto de la

variación en el parámetro τ_e . Y en la **Figura 4.8** se puede observar el efecto en la variación de τ_c . Los parámetros definitivos de sintonización se muestran en la **Tabla 4.2**

El comportamiento del sistema con los mejores valores de parámetros de sintonización se presenta en la **Figura 4.9**, en la que se pueden observar las propiedades de robustez del controlador MEC, ya que ante cambios importantes en los puntos de referencia y perturbaciones en la alimentación del proceso, el sistema se comporta estable en los AGV del reactor acidogénico o salida de control, a la vez que la entrada de control tiene un perfil suave sin llegar a saturarse.

Parámetro	Valor	Unidad
k_p	-53.08	(mmol/L)d
τ_0	0.78	d
τ_e	0.5	d
τ_c	15	d

Tabla 4.2 Parámetros de Sintonización del Controlador MEC, Salida de Control (AGV en R1)

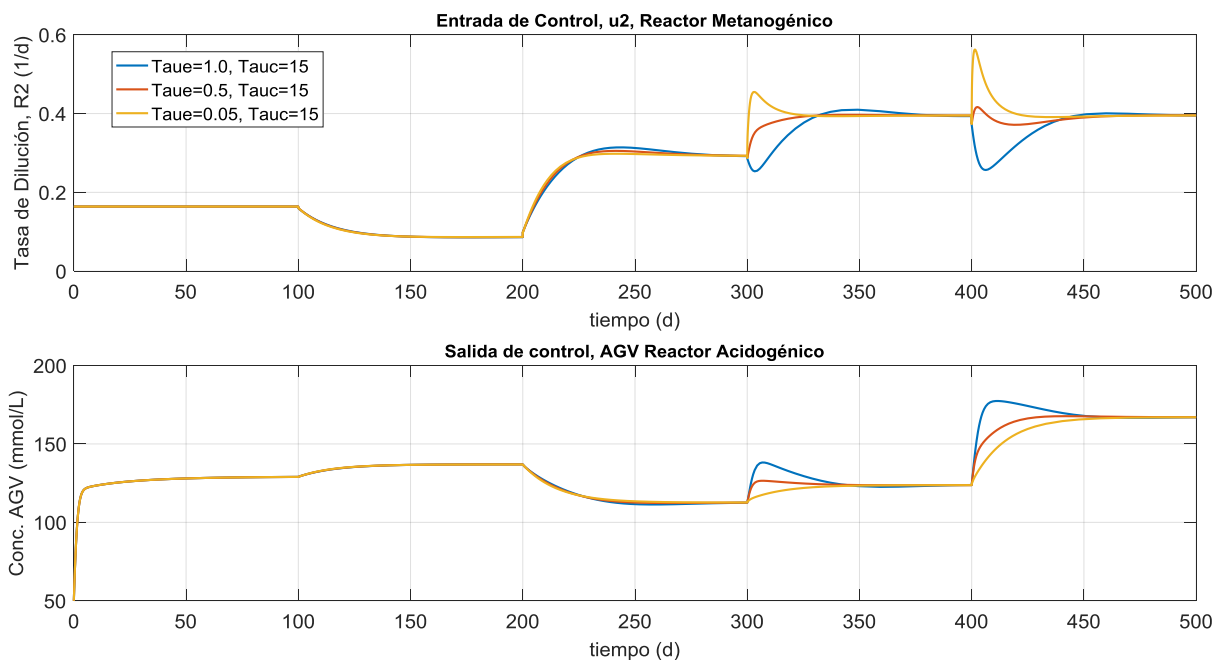


Figura 4.7 Sintonización del Controlador MEC (1), Regulación de AGV en R1

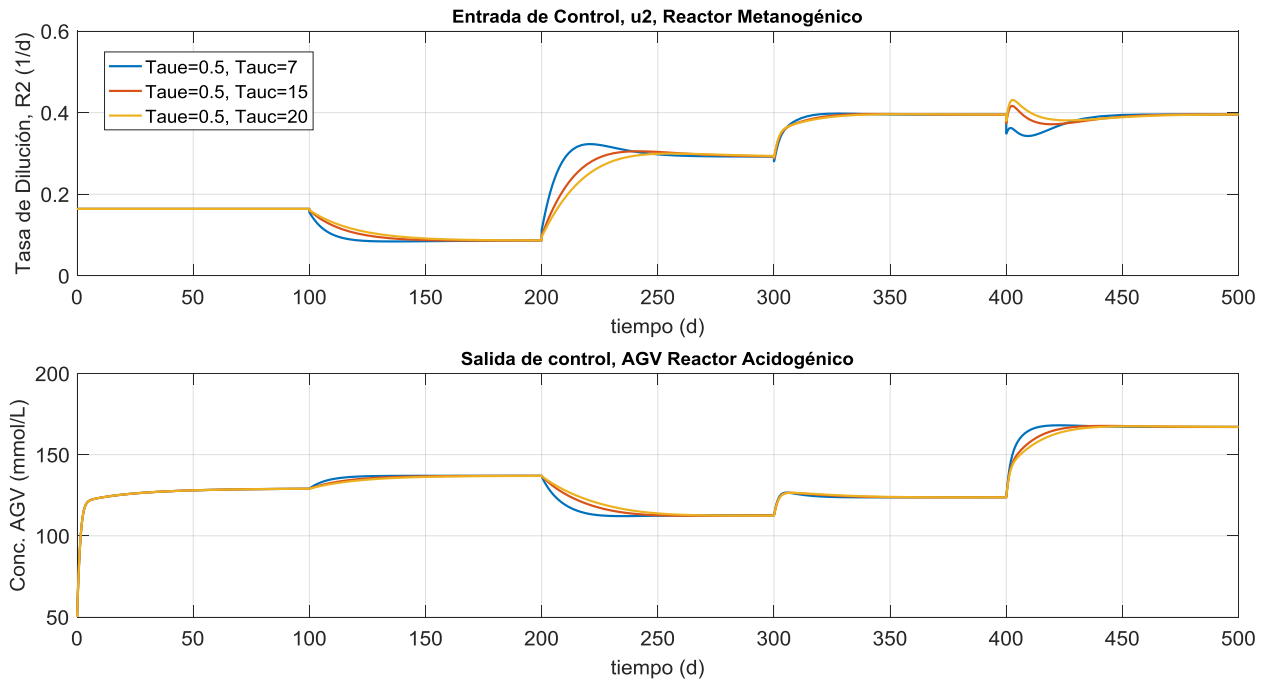


Figura 4.8 Sintonización del Controlador MEC (2), Regulación de AGV en R1

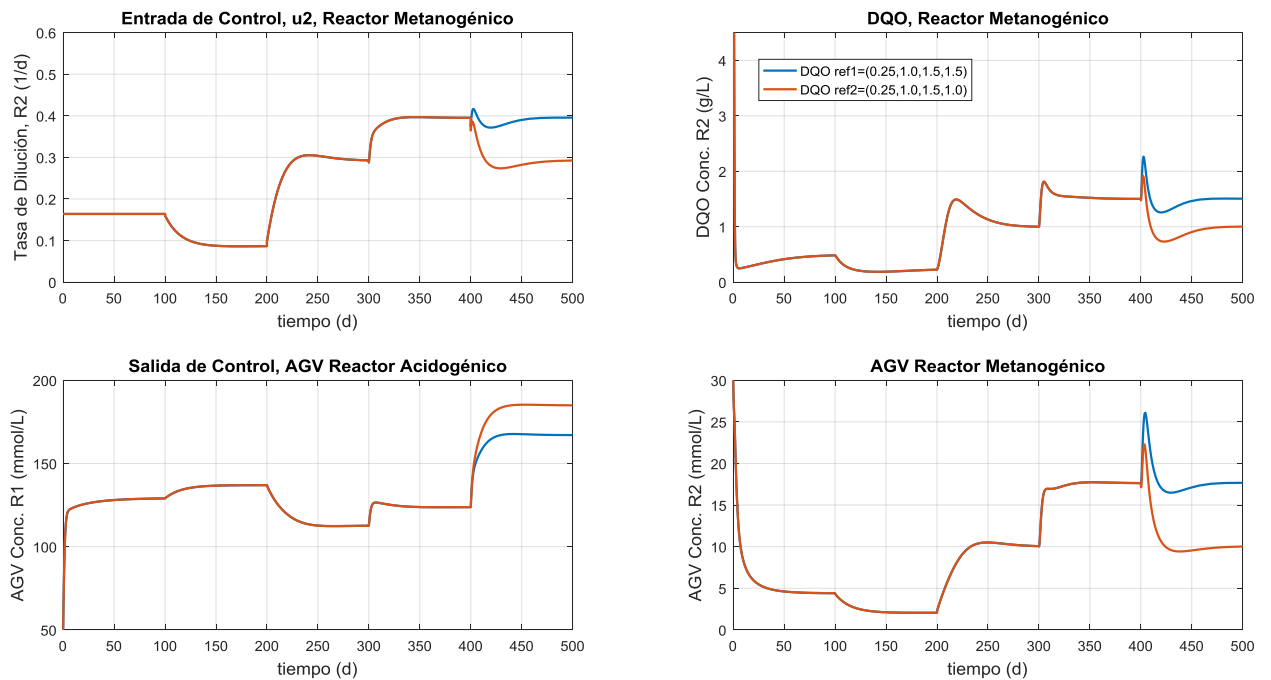


Figura 4.9 Resultados del Controlador MEC, Regulación de AGV en R1

En la **Figura 4.9**, también se incluyen los estados de concentración de AGV y DQO en el reactor metanogénico. Y en cuanto a los requerimientos de calidad del efluente tratado, se puede observar que se cumple el objetivo, aunque se presentan picos de DQO de aproximadamente 2 g/L y tarda aproximadamente 50 d en estabilizarse para alcanzar el objetivo de DQO.

4.2.3. Caso 3: Salida de Control, AGV en el Reactor Metanogénico.

Como hemos visto, en los procesos de digestión anaerobia de dos etapas es común el monitoreo y regulación de la concentración de AGV en la fase acidogénica, esto es debido a que es posible inhibir el crecimiento de las arqueas metanogénicas con altas concentraciones de AGV. Sin embargo, lo anterior no puede decirse con respecto a la concentración de AGV en la fase metanogénica, por lo que no se ha encontrado en el estado del arte esta situación para el caso de procesos de digestión anaerobia de dos etapas. Por lo tanto, aquí proponemos la posibilidad de utilizar como salida de control en el caso de problemas de regulación a la concentración de AGV en la fase metanogénica. De igual forma, que en el **Caso 2**, aquí se tiene la ventaja de disponer de una medición continua de AGV por medio de conductividad.

Análogamente al caso de la regulación de AGV en el reactor metanogénico, también se tiene la dificultad de no conocer y_{ref} , por lo que se aplicará el mismo procedimiento que el **Caso 2**. Y para el algoritmo MEC de este tipo de problema de regulación, de igual manera que el **Caso 2**, se aplicarán las mismas ecuaciones (4.10), (4.12), (4.13) y (4.14) y adicionalmente para este caso se tiene la ecuación de la salida de control (4.16):

$$y = x_7 \tag{4.16}$$

Los puntos de referencia calculados en cada intervalo, correspondientes a los 3 casos de problema de regulación, pueden consultarse en la **Tabla 4.3**.

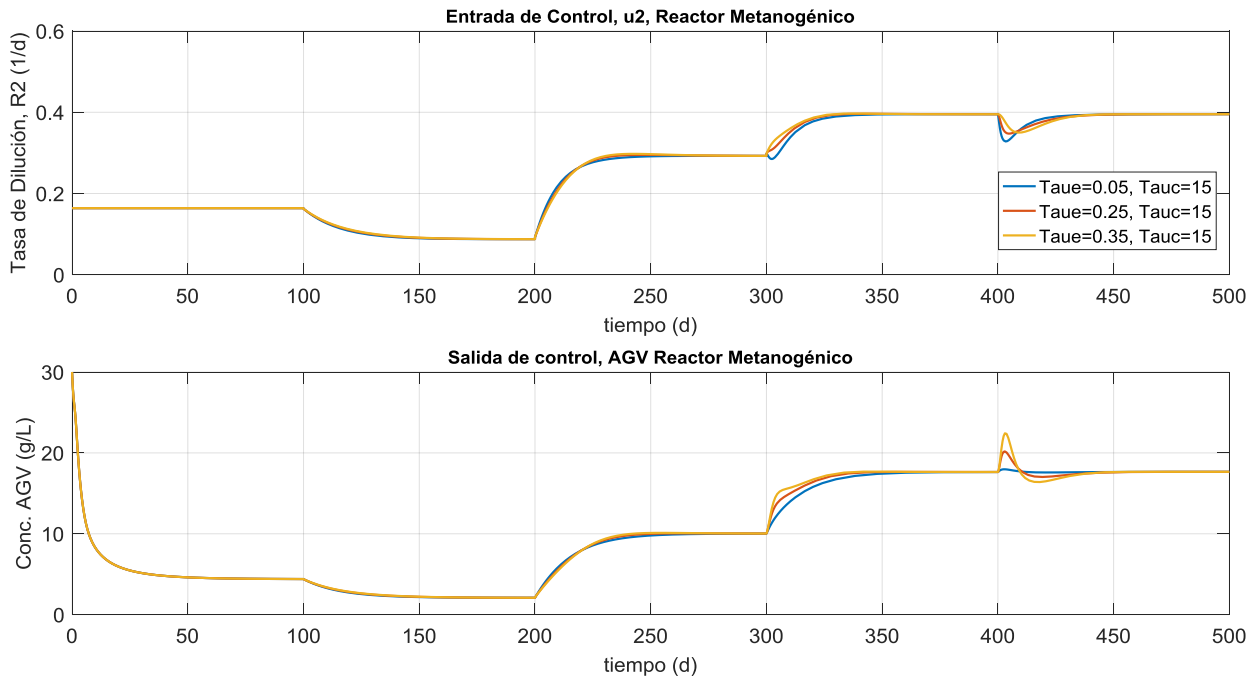


Figura 4.10 Sintonización del Controlador MEC (1), Regulación de AGV en R2

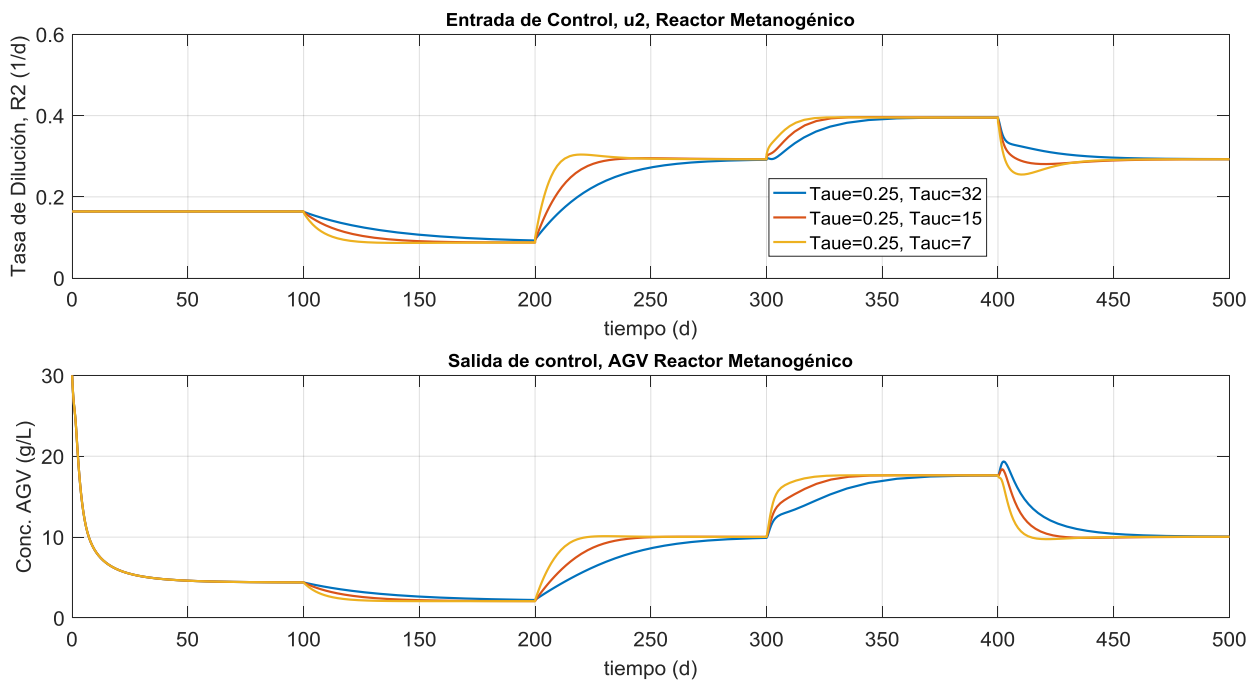


Figura 4.11 Sintonización del Controlador MEC (2), Regulación de AGV en R2

Intervalo	$S_{1,0}$ (DQO)	$S_{2,0}$ (AGV)	Meta DQO	$y_{ref} $ $y = x_3$	$y_{ref} $ $y = x_7$	$y_{ref} $ $y = x_6$
A	27	50	0.25	136.929	2.084	0.25
B	27	50	1.0	112.652	10.023	1.0
C	32.4	60	1.5	123.745	17.638	1.5
D ₁	40.5	75	1.5	167.049	17.660	1.5
D ₂	40.5	75	1.0	184.857	10.040	1.0

Tabla 4.3 Puntos de Referencia de los 3 Casos de Regulación

Con respecto a los valores de k_p y τ_0 , se determinaron por un método de identificación empírica, detallado en el **Anexo 2**. Los valores definitivos de la sintonización del controlador se muestran en la **Tabla 4.4**.

Parámetro	Valor	Unidad
k_p	35.06	(mmol/L)d
τ_0	0.35	d
τ_e	0.25	d
τ_c	32	d

Tabla 4.4 Parámetros de Sintonización del Controlador MEC, Salida de Control (AGV en R2)

La **Figura 4.10** y la **Figura 4.11**, muestran los efectos en la variación de los parámetros τ_c y τ_e .

Los resultados con los valores definitivos de la sintonización se muestran en la **Figura 4.12**, que incluye los principales estados a monitorear. En esta figura se observa que el comportamiento en general es menos agresivo que el caso de regulación de AGV en el reactor acidogénico. Aquí la DQO del reactor metanogénico se estabiliza más rápido y con picos menos agresivos que el caso de regulación de AGV en el primer reactor para cumplir los requerimientos de calidad. También se observan mejores propiedades de robustez para cambios de puntos de referencia y perturbaciones de entrada que el **Caso 2**. No obstante, la regulación de AGV en el segundo reactor alcanza de manera lenta su punto de

referencia, lo cual para nuestro fin es benéfico, puesto que lo que se desea es una estabilización rápida de la DQO del efluente tratado.

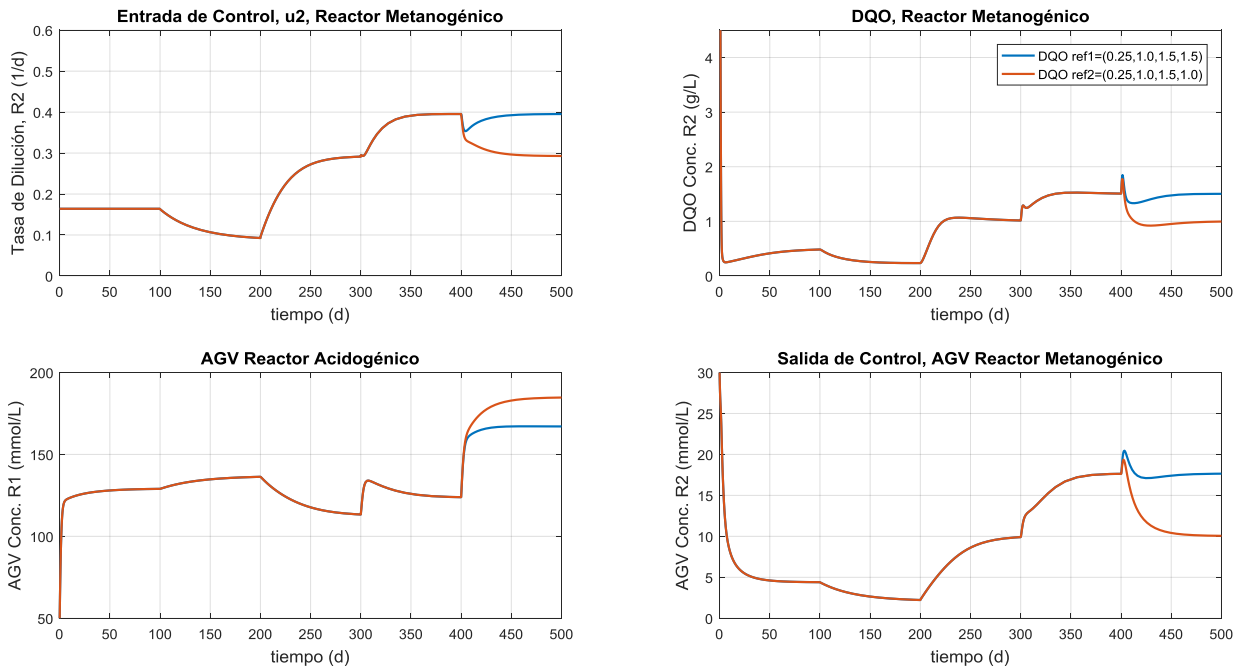


Figura 4.12 Resultados del Controlador MEC, Regulación de AGV en R2

4.3. Implementación del Controlador SMC, Aprox.1er Orden

En esta sección se implementará numéricamente en la planta de digestión anaerobia de dos etapas, el algoritmo SMC de la **Sección 3.2.2.1**, en la que se utilizó un modelo de primer orden para representar el proceso.

4.3.1. Caso 1: Salida de Control, DQO del Efluente Tratado.

Aplicando el algoritmo SMC de la **Sección 3.2.2.1**, se utiliza la ecuación de la variable deslizante (3.46) y la ley de control dada por (3.53) y (3.54). El error de regulación se define simplemente como $e = y - y_{ref}$, como lo hemos hecho antes. Entonces el algoritmo de control está formado por:

$$s(t) = e(t) + \lambda \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (4.17)$$

$$y = x_6 \quad (4.18)$$

$$u(t) = \left(-\lambda e(t) + \frac{1}{\tau_0} y(t) \right) \frac{\tau_0}{k_p} + k_d \text{Sat}(s(t), \varepsilon) \quad (4.19)$$

En (4.19) los valores de k_p y τ_0 son los mismos que en la **Sección 4.2.1**.

En cuanto a la sintonización del controlador SMC, el parámetro que afecta más el desempeño de éste, es λ . La **Figura 4.13** presenta la comparación de dos valores de λ donde el valor de este parámetro positivo debe ser lo suficientemente grande.

La **Figura 4.14** presenta el comportamiento dinámico del sistema con los valores definitivos de sintonización, incluyendo dos juegos de valores de referencias. Como se puede observar de esta figura, el comportamiento del controlador SMC es agresivo, el punto de referencia se alcanza muy rápido pero a costa de un comportamiento agresivo inicial en la entrada de control causando saturación en ésta, lo cual puede dañar a los componentes físicos del proceso.

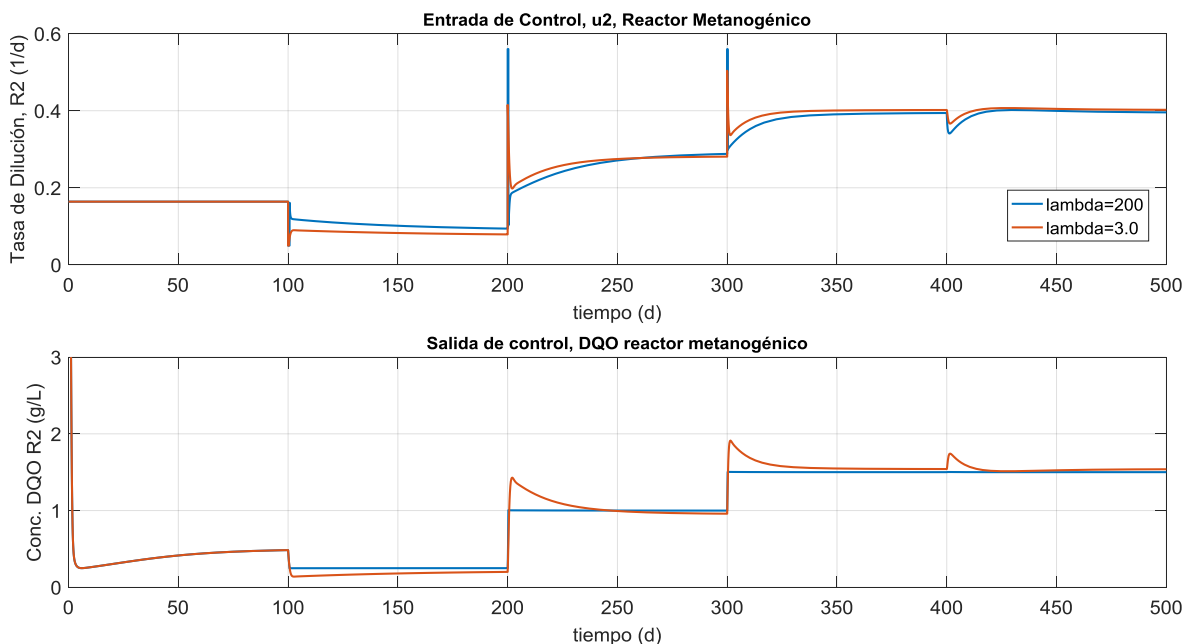


Figura 4.13 Sintonización del Controlador SMC 1er Orden, Regulación de DQO en R2

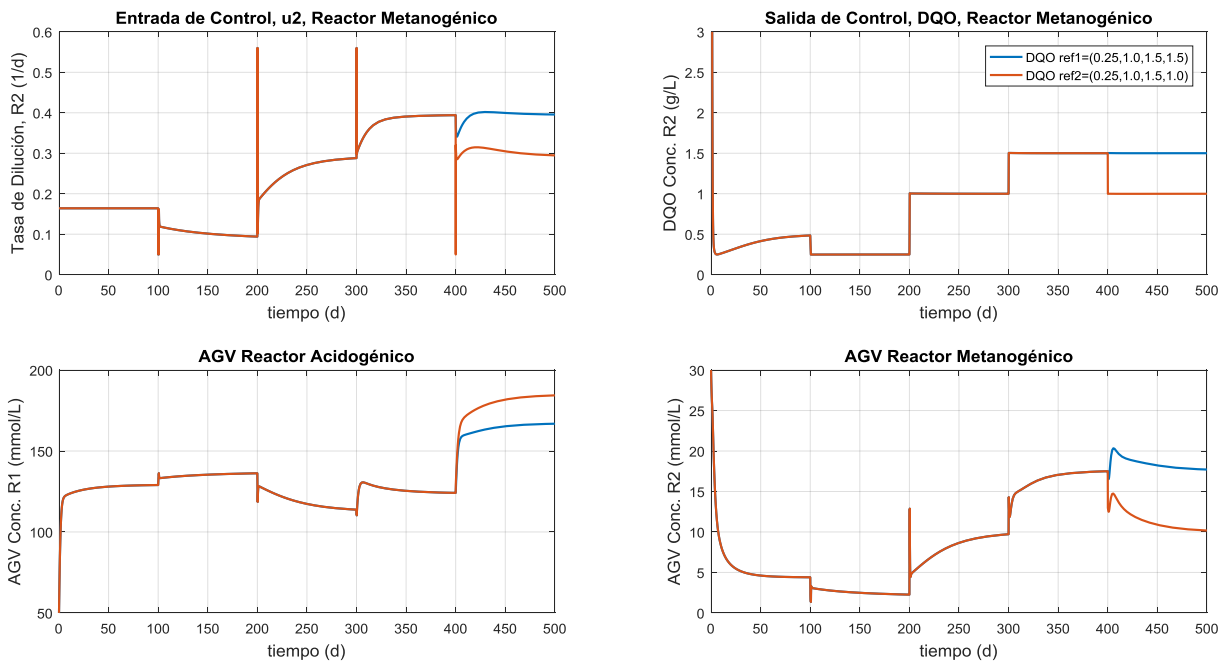


Figura 4.14 Resultados del Controlador SMC 1er Orden, Regulación de DQO en R2

Los valores finales de los parámetros del controlador se muestran en la **Tabla 4.5**.

Parámetro	Valor	Unidad
k_p	3.689	(g/L)d
τ_0	0.55	d
k_d	-0.00249	1/d
λ	200	1/d
ε	0.05	g/L

Tabla 4.5 Parámetros de Sintonización del Controlador SMC 1er Orden, Regulación DQO en R2

4.3.2. Caso 2: Salida de Control, AGV en el Reactor Acidogénico.

En este caso la salida de control es la concentración de AGV en el reactor acidogénico, por lo que se utilizarán las mismas consideraciones que en la **Sección 4.2.2**, esto es en cuanto a parámetros de la identificación empírica y a la determinación de los puntos de referencia. Por otra parte, el algoritmo de control es el mismo que la sección anterior, sólo difieren en la ecuación de la salida de control que para este caso está dada por (4.20).

$$y = x_3 \tag{4.20}$$

En la **Figura 4.15** se muestra la sintonización del controlador, en la que se puede observar que un valor bajo de λ provoca que no se alcance el valor de referencia y valores más bajos aún provocan inestabilidad. Los parámetros definitivos de la sintonización del controlador SMC de primer orden se muestran en la **Tabla 4.6**.

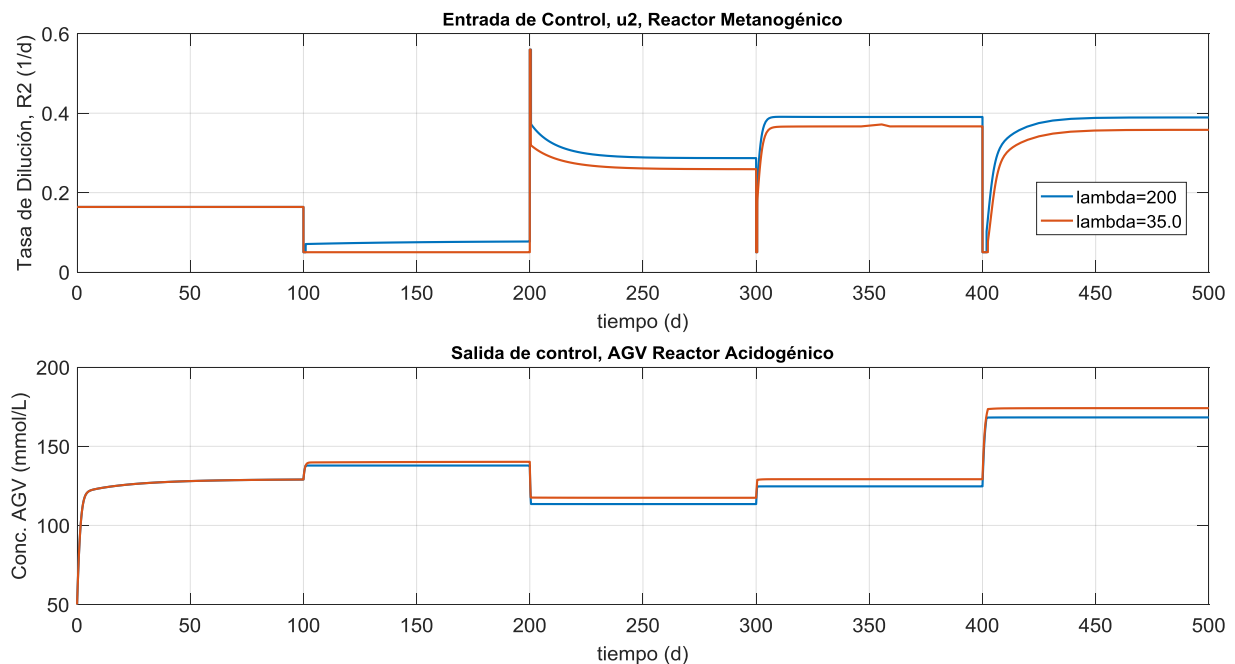


Figura 4.15 Sintonización del Controlador SMC 1er Orden, Regulación de AGV en R1

Parámetro	Valor	Unidad
k_p	-53.0847	(mmol/L)d
τ_0	0.78	d
k_d	-0.00249	1/d
λ	200	1/d
ε	0.05	mmol/L

Tabla 4.6 Parámetros de Sintonización del Controlador SMC 1er Orden, Regulación AGV en R1

El comportamiento de los principales estados del sistema en la implementación del controlador SMC se muestra en la **Figura 4.16**, en la cual se pueden observar las propiedades de robustez para los cambios de puntos de referencia y

perturbaciones. De hecho, se alcanzan de una forma muy rápida los puntos de referencia, sin embargo el comportamiento de la DQO de la salida del sistema presenta algunos sobredisparos momentáneos, en los cuales se sobrepasa la norma de calidad (max 2.0 g/L) para después estabilizarse en el valor deseado de calidad del efluente.

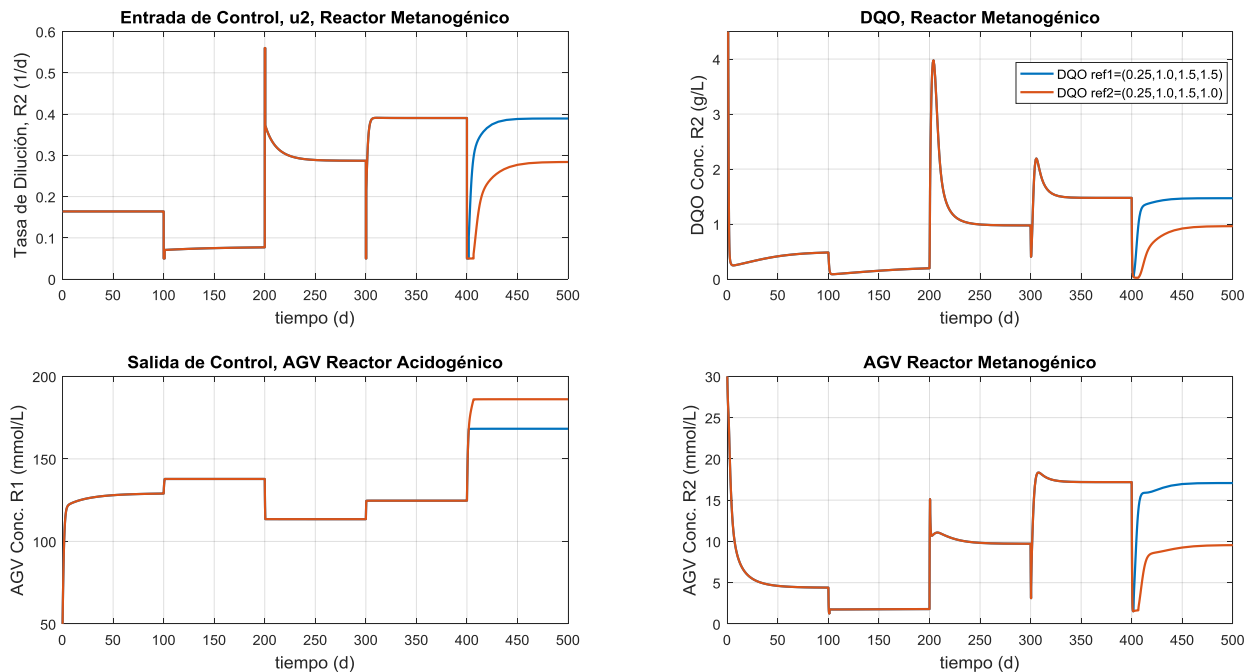


Figura 4.16 Resultados del Controlador SMC 1er Orden, Regulación de AGV en R1

4.3.3. Caso 3: Salida de Control, AGV en el Reactor Metanogénico.

En este problema de regulación la salida de control es la concentración de AGV en el reactor metanogénico, y las consideraciones serán las de la **Sección 4.2.3**, con los mismos parámetros del modelo de primer orden y puntos de referencia calculados. Y el algoritmo de control es el mismo que en la **Sección 4.3.1** y la **Sección 4.3.2**. La ecuación de la salida de control para este problema es:

$$y = x_7 \tag{4.21}$$

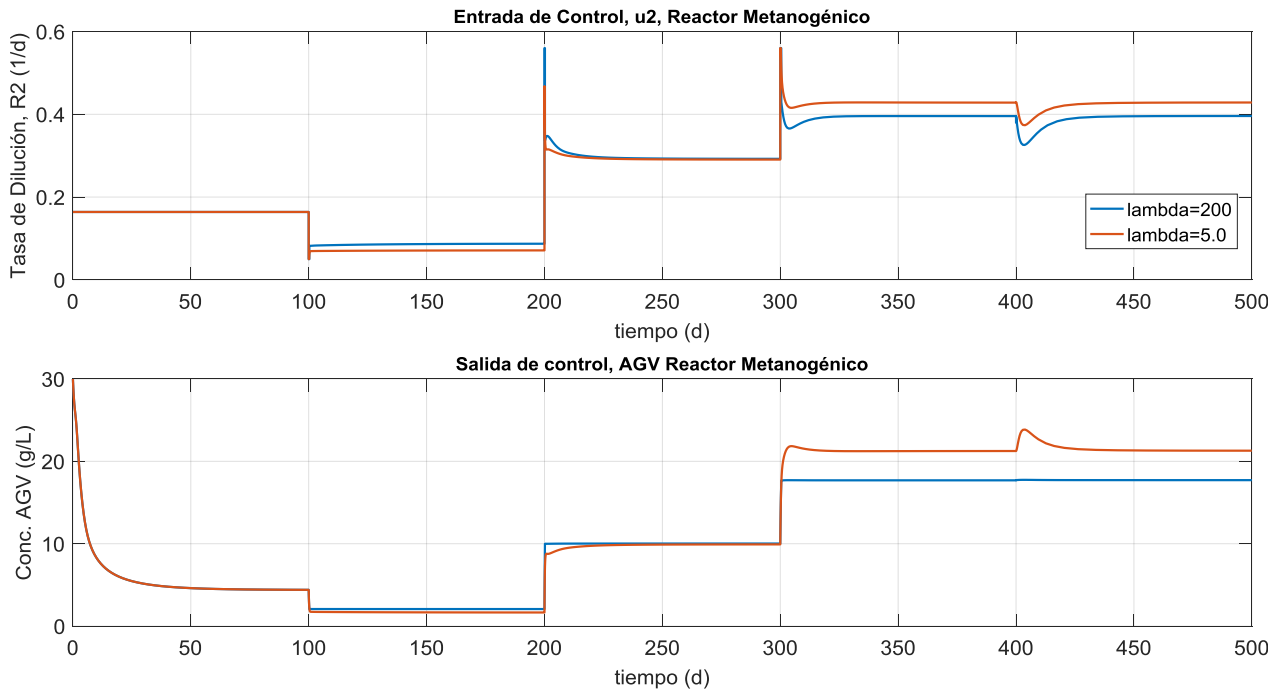


Figura 4.17 Sintonización del Controlador SMC 1er Orden, Regulación de AGV en R2

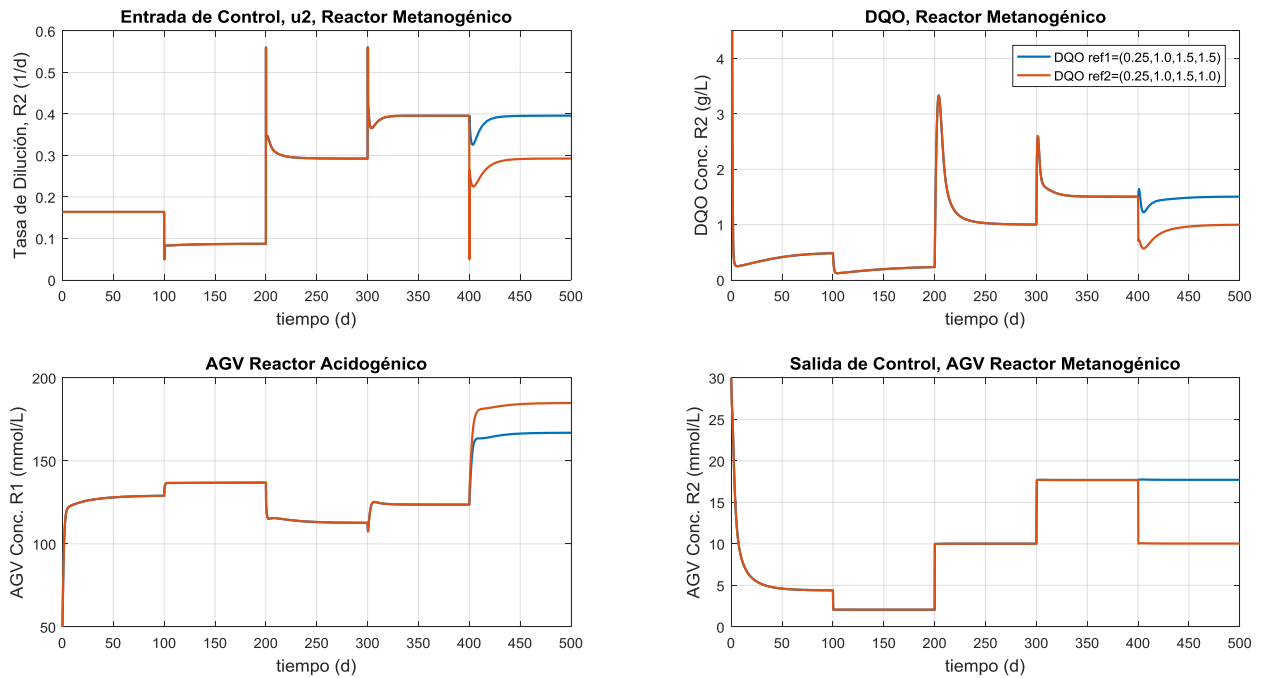


Figura 4.18 Resultados del Controlador SMC 1er Orden, Regulación de AGV en R2

La sintonización del controlador se muestra en la **Figura 4.17**, en la que se muestra el efecto del parámetro de mayor importancia λ , un valor bajo de éste hace inestable el proceso. Y en la **Figura 4.18** se presentan los resultados de la implementación del controlador SMC de primer orden utilizando los parámetros de la **Tabla 4.7**. De igual manera que en los casos anteriores de implementación de un controlador SMC, se sigue la misma tendencia de comportamiento agresivo con picos tanto en la entrada de control para lograr alcanzar rápidamente el valor de referencia de AGV como en la DQO en la corriente de salida del proceso

Parámetro	Valor	Unidad
k_p	35.0609	(mmol/L)d
τ_0	0.35	d
k_d	-0.00249	1/d
λ	200	1/d
ε	0.05	mmol/L

Tabla 4.7 Parámetros de Sintonización del Controlador SMC 1er Orden, Regulación AGV en R2

4.4. Implementación del Controlador SMC Libre de Modelo

Esta sección consiste en la implementación numérica en el sistema de digestión anaerobia de dos etapas del algoritmo SMC libre de modelo de la **Sección 3.2.2.2**.

4.4.1. Caso 1: Salida de Control, DQO del Efluente Tratado

Aplicando el algoritmo SMC de la **Sección 3.2.2.2**, se utiliza la ecuación de la variable deslizante (3.70), pero en la siguiente forma:

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + Te(t) \quad (4.21)$$

La ley de control en este problema de regulación está dada por (3.77), a continuación se muestra esta misma ecuación pero haciendo $\dot{y}_{ref}(t) = 0$:

$$u(t) = \frac{1}{\alpha} \left(-\check{F}(t) - \frac{e(t)}{T} - e_{estmax} - \frac{\eta}{T} Sat(s(t), \varepsilon) \right) \quad (4.22)$$

Para determinar $\check{F}(t)$ se utiliza un observador de orden reducido (3.78), que con base en las ecuaciones (3.81) y (3.83) se tiene que:

$$\check{F}(t) = \tau_e^{-1}(w(t) + y(t)) \quad (4.23)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = -\alpha u(t) - \tau_e^{-1}(w(t) + y(t)) \quad (4.24)$$

$$\text{Con: } w(0) = -y(0)$$

$$y = x_6 \quad (4.25)$$

La implementación del algoritmo SMC libre de modelo está basada en las ecuaciones (4.21) a (4.25).

En cuanto a la sintonización, los parámetros que se consideran más importantes y que tienen un mayor efecto son τ_e y T . En cuanto a τ_e un valor alto provocará que no se llegue al valor de referencia, por lo que este parámetro debe tener un valor relativamente bajo. El efecto de T es más importante, y un valor bajo hará muy agresivo al controlador y conforme se aumenta se tardará más en alcanzar el punto de referencia, hasta que un valor demasiado alto causará inestabilidad en el sistema. El efecto del parámetro T se puede observar en la **Figura 4.19**, se observa en esta figura que un valor bajo de T , causa un salto indeseable al inicio en la entrada de control.

Los parámetros definitivos de la sintonización se muestran en la **Tabla 4.8**.

El comportamiento de los principales estados en la implementación del controlador SMC libre de modelo utilizando los parámetros definitivos de la sintonización aparece en la **Figura 4.20**. En esta figura se observa la robustez del controlador para soportar perturbaciones y para cambios grandes en los puntos de referencia, sin presentar un comportamiento agresivo en la entrada de control.

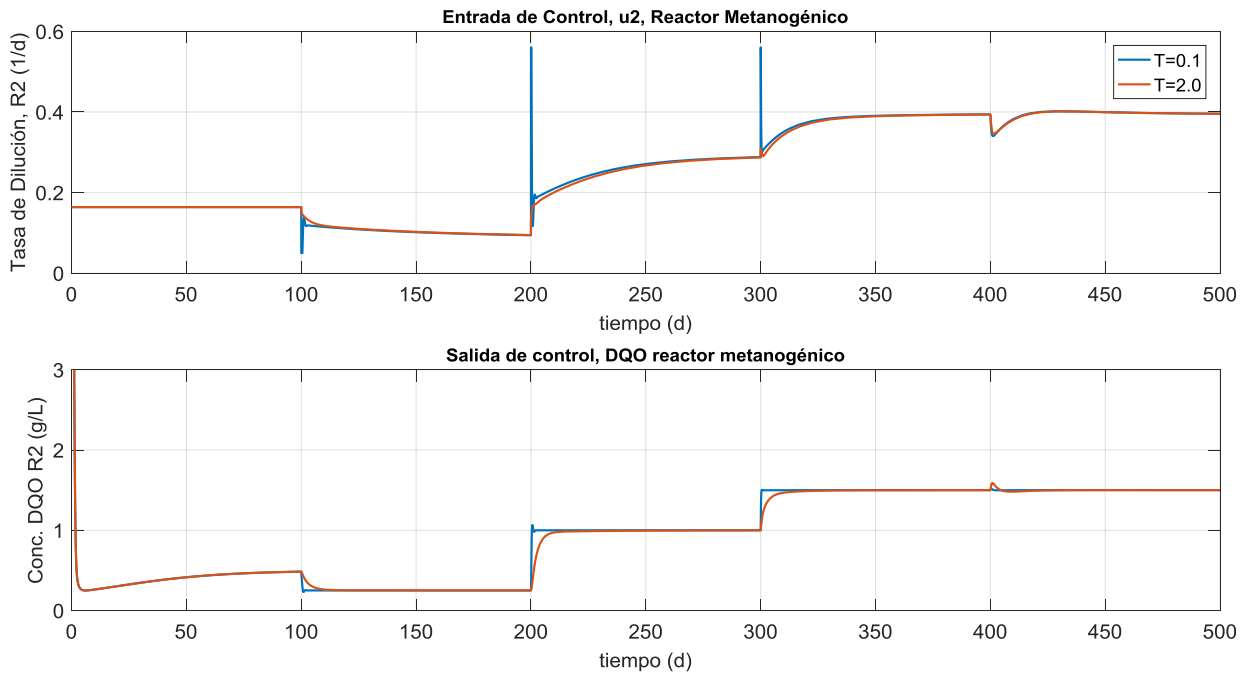


Figura 4.19 Sintonización del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación de DQO en R2

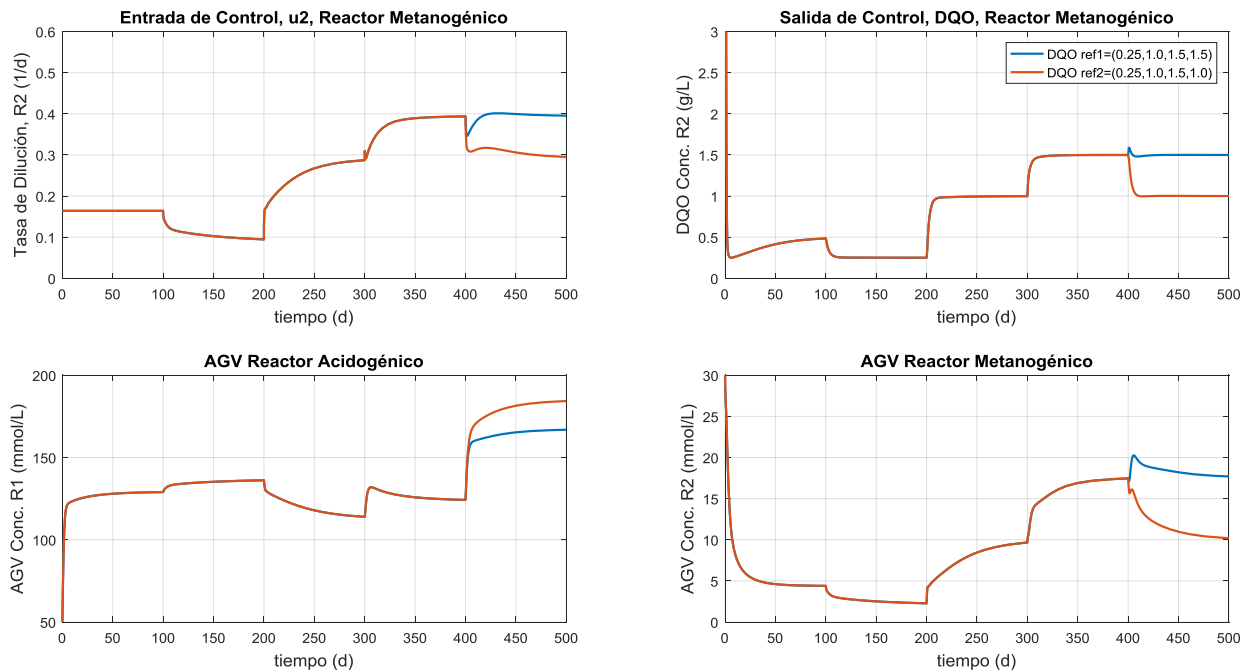


Figura 4.20 Resultados del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación de DQO en R2

Parámetro	Valor	Unidad
T	2	d
e_{estmax}	0.0001	(g/Ld)
α	11.5	g/L
η	0.0001	(g/Ld)
ε	0.5	g/L
τ_e	0.25	d

Tabla 4.8 Parámetros del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación DQO en R2

4.4.2. Caso 2: Salida de Control, AGV en el Reactor Acidogénico

En este caso se desea regular la concentración AGV en el reactor acidogénico a un conjunto de puntos de referencia que se determinan resolviendo un problema de optimización estática, éstos son los mismos que en la **Sección 4.2.2** y **Sección 4.3.2** y cuyos valores se encuentran en la **Tabla 4.3**. El algoritmo de control para este problema de regulación es el mismo que el caso o sección anterior, y la ecuación de la salida de control es la misma que (4.15) y (4.20).

En cuanto a la sintonización del controlador, el efecto en la variación de los parámetros no se presenta, pues los cambios no se ven muy reflejados en el desempeño del controlador. A este respecto se encontró que un valor menor que $T = -0.2$ empieza a provocar inestabilidad y que $\tau_e > |T|$ para que sea estable, estos resultados se encontraron realizando varias corridas.

Parámetro	Valor	Unidad
T	-0.1	d
e_{estmax}	0.0001	(g/Ld)
α	11.5	g/L
η	0.0001	(g/Ld)
ε	0.05	g/L
τ_e	0.25	d

Tabla 4.9 Parámetros del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación AGV en R1

Los parámetros del controlador SMC se muestran en la **Tabla 4.9** y los resultados de la implementación del mismo en la **Figura 4.21**.

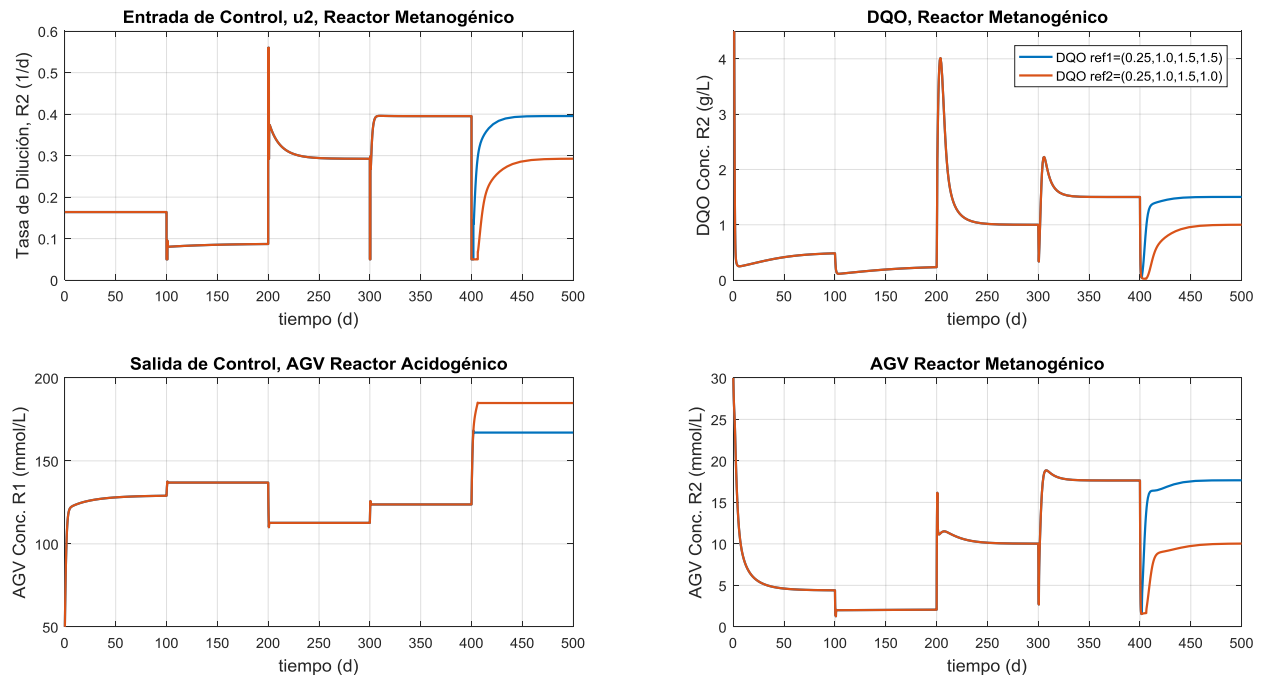


Figura 4.21 Resultados del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación de AGV en R1

4.4.3. Caso 3: Salida de Control, AGV en el Reactor Metanogénico

Aquí se abordará el mismo problema de regulación de la concentración de AGV en el reactor metanogénico que en la **Sección 4.3.3**, por lo que las consideraciones son las mismas en cuanto a puntos de referencia y ecuación de salida de control, y el algoritmo aplicado en este caso es el mismo que las secciones anteriores.

La sintonización del controlador se muestra en la **Figura 4.22**, en la que se muestra el efecto del parámetro T , en este caso se seleccionó el valor mayor de T , porque es el que da un comportamiento más estable y con menos picos al inicio de la DQO del reactor metanogénico, esta misma situación sucedió en la implementación del controlador MEC en la **Sección 4.2.3**. Sin embargo la variable controlada alcanza su valor de referencia muy lentamente. Los parámetros definitivos del controlador en la implementación se muestran en la **Tabla 4.10**.

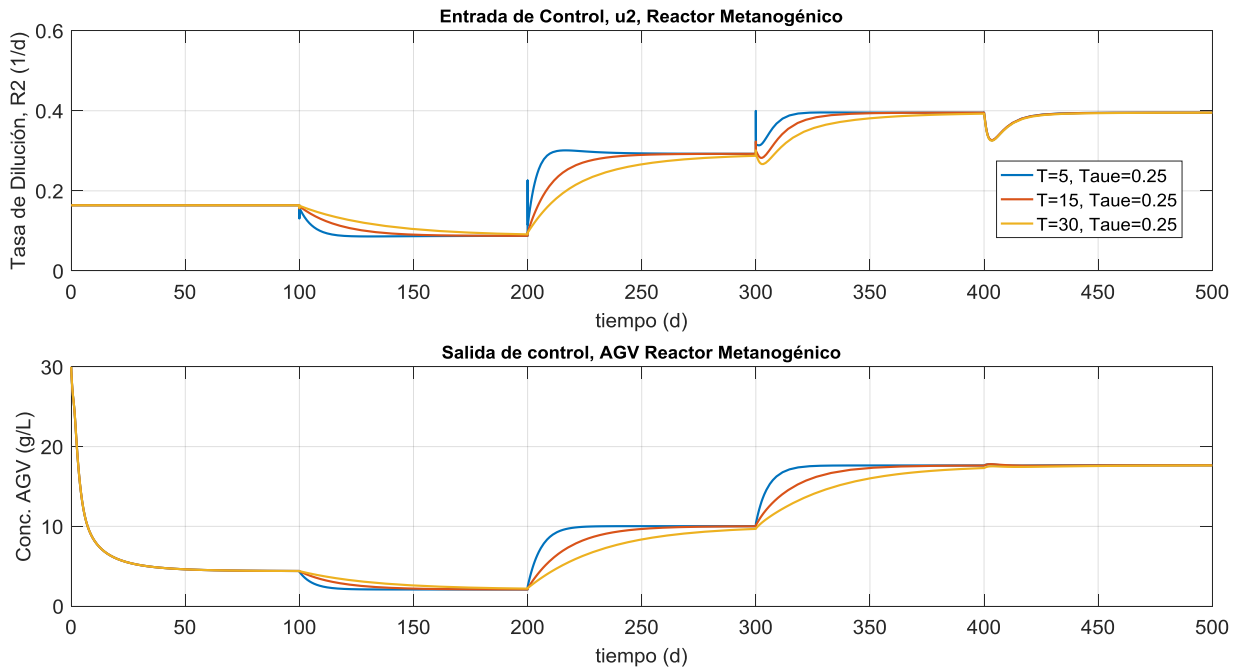


Figura 4.22 Sintonización del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación de AGV en R2

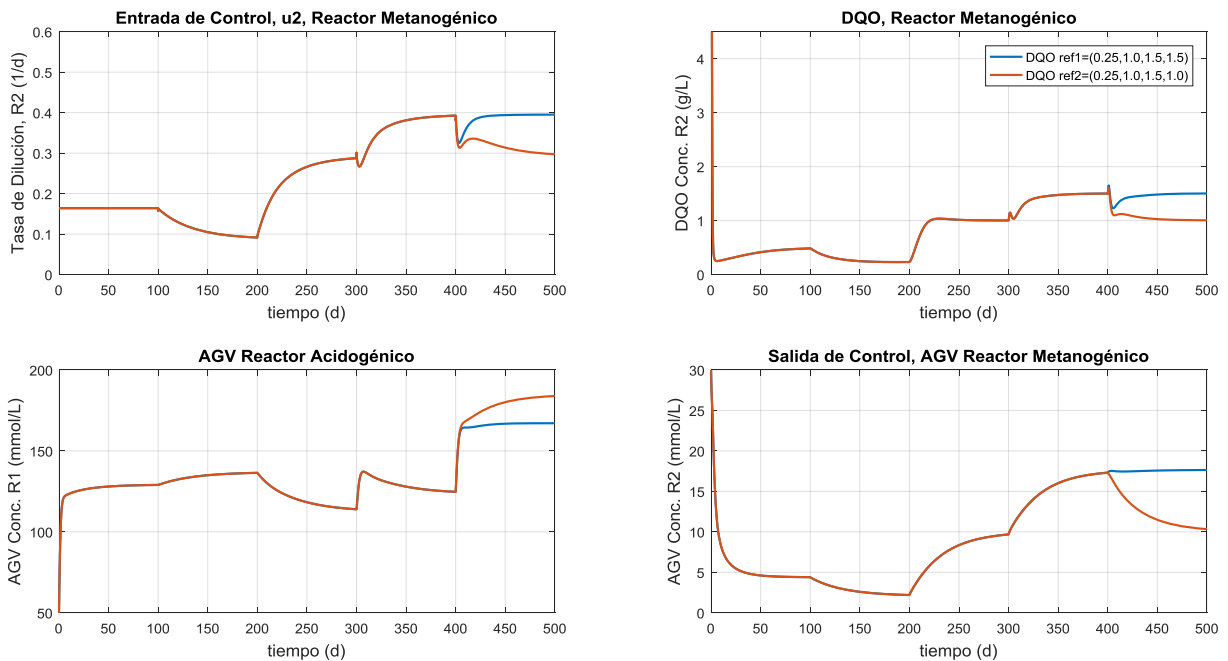


Figura 4.23 Resultados del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación de AGV en R2

En la **Figura 4.23** de resultados de desempeño del controlador SMC, se muestran las propiedades de robustez de éste ante las perturbaciones en las condiciones de

entrada al procesos, esto aunque los cambios de puntos de referencia se efectúan en forma un poco lenta.

Parámetro	Valor	Unidad
T	30	d
e_{estmax}	0.0001	(g/Ld)
α	11.5	g/L
η	0.0001	(g/Ld)
ε	0.5	g/L
τ_e	0.25	d

Tabla 4.10 Parámetros del Controlador SMC Libre de Modelo, Regulación AGV en R2

4.5. Implementación del Controlador NMPC

En esta sección se implementará el algoritmo NMPC que se describió en la **Sección 3.2.3**. A diferencia de los algoritmos de control anteriores, el NMPC requiere que todos los estados estén disponibles al resolver en cada paso de tiempo el problema de optimización específico de acuerdo a un horizonte de predicción definido. Por esta razón, no se abordarán los casos de regulación de AGV en cada reactor, sino que sólo se considerará el problema de regulación de DQO a la salida del proceso.

La ley de control que aplicaremos consiste en resolver el problema de optimización dado por (3.86) y (3.84b)-(3.84e), aunque esta es sólo una parte del algoritmo pues incluye los pasos que se describen en la **Sección 3.2.3**.

Aplicando el algoritmo antes mencionado al caso específico del sistema de digestión anaerobia de dos etapas del proceso de vinazas del tequila, se tiene que:

$$\min J = \sum_{j=0}^N [(y_{k+j|k} - y_{k+j}^{ref})^2] = \sum_{j=0}^N [(x_{6,k+j|k} - y_{ref})^2] \quad (4.26)$$

$$u_{2,k}^N = \{u_{2,k|k}, u_{2,k+1|k}, \dots, u_{2,k+N-1|k}\}$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1,1}(x_2)x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{k_2}{k_1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ \frac{k_5}{k_3} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{1,2}(x_6)x_4 \\ \mu_{2,2}(x_7)x_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_1 x_1 \\ x_{2,0} - x_2 \\ x_{3,0} - x_3 \end{bmatrix} \beta \\ \begin{bmatrix} -\alpha_2 x_4 \\ -\alpha_2 x_5 \\ x_2 - x_6 \\ x_3 - x_7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} u_2 \quad (4.27)$$

$$y = x_6 \quad (4.28)$$

$$x_{min} \leq x_{k+j|k} \leq x_{max} \quad j \in [0, N] \quad (4.29)$$

$$u_{2,min} \leq u_{2,k+j|k} \leq u_{2,max} \quad j \in [0, N - 1] \quad (4.30)$$

Para resolver el problema de optimización (4.26)-(4.30) en cada paso de tiempo, el modelo (4.27) necesita discretizarse. Aquí se empleará el método descrito en la **Sección 3.2.3.1**, colocación ortogonal en elemento finito, cuyos detalles se pueden consultar en el **Anexo 1**. Como se puede observar, en la función objetivo solo se ha incluido la variable de la salida de control.

En la siguiente sección nos ocupamos del método empleado de sintonización del controlador NMPC.

4.5.1. Sintonización del Controlador NMPC

Los parámetros del controlador NMPC son el horizonte de predicción (N), el horizonte de control (M), el tiempo de muestreo (d_c) y el tamaño de elemento finito (d_t). Aquí consideraremos $N = M$, y primero se estudiará el efecto del horizonte de predicción, de antemano se sabe que un valor bajo puede causar inestabilidad. En la **Figura 4.24** se muestran varios valores de N , considerando $d_t = d_c = 1d$, y el punto de referencia es $y_{ref} = 2.0 \text{ g/L}$ para estas pruebas.

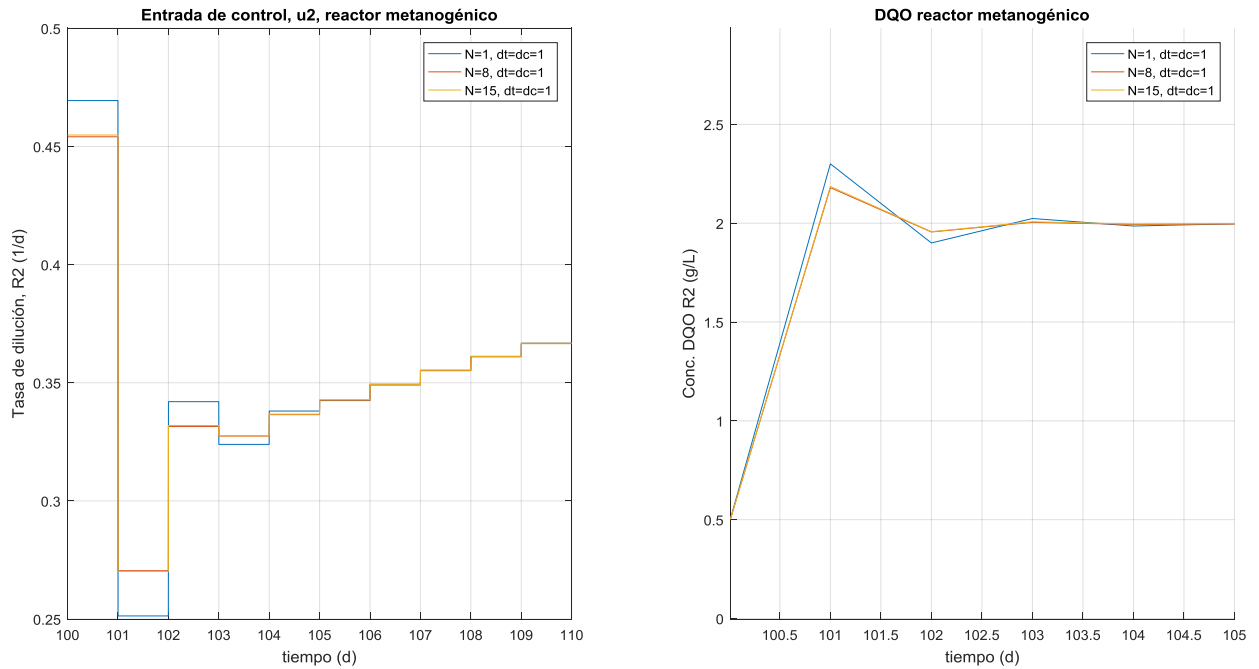


Figura 4.24 Sintonización del Controlador NMPC, Efecto de (N), Regulación de DQO en R2

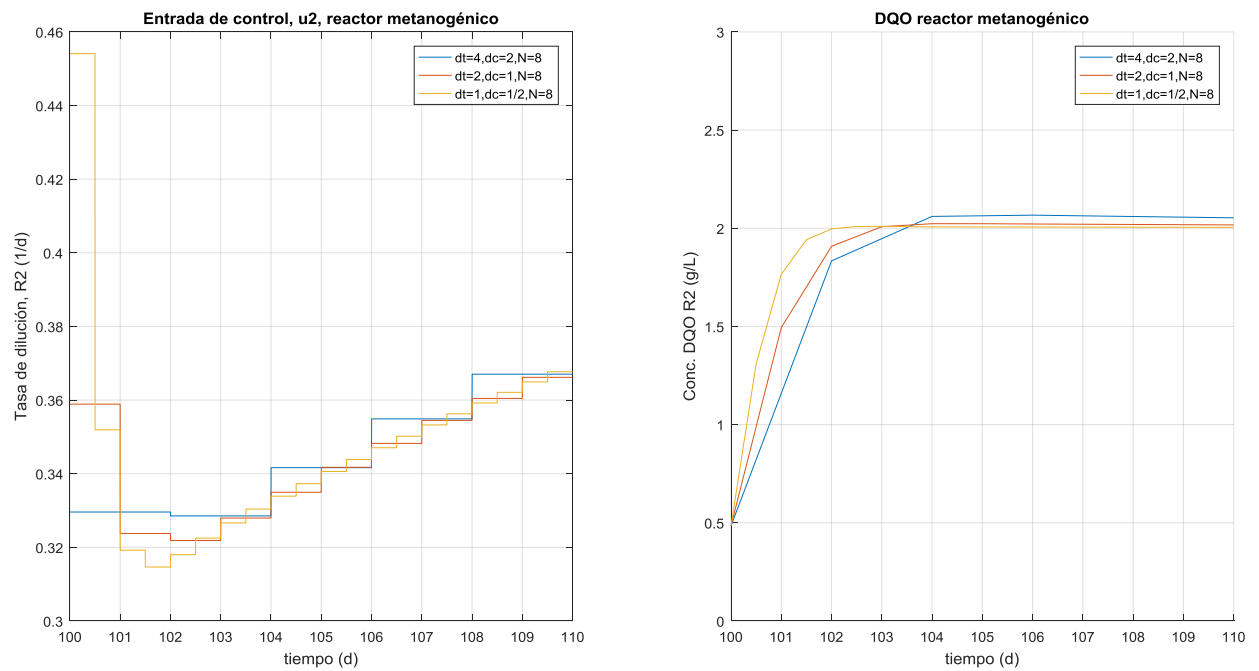


Figura 4.25 Sintonización del Controlador NMPC, Efecto de (dc y dt), Regulación de DQO en R2

De la **Figura 4.24**, se puede deducir que un valor adecuado de horizonte de predicción es $N = 8$, pues no difieren mucho en la predicción $N=8$ y $N=15$.

Por otra parte, en la **Figura 4.25**, se analiza el efecto del tiempo de muestreo considerando la relación con la longitud del elemento finito: $d_c = \left(\frac{1}{2}\right)d_t$, en esta figura se puede observar que un valor bajo de $d_c = 0.5 d$, causa un sobredisparo al inicio, en la entrada de control, pero en cuanto a la salida de control, se alcanza más rápidamente el punto de referencia. En cambio, cuando $d_c = 2 d$, el controlador se comporta menos agresivo, con una entrada de control y salida de control, lentas, inclusive sin llegar al punto de referencia. Por estas razones, se selecciona $d_c = 1 d$.

En la **Figura 4.26** se analiza el efecto de que el tiempo de muestreo sea mayor que la longitud del elemento finito, como se puede observar en esta figura, cuando esto sucede el comportamiento es inestable tanto en la entrada como en la salida de control.

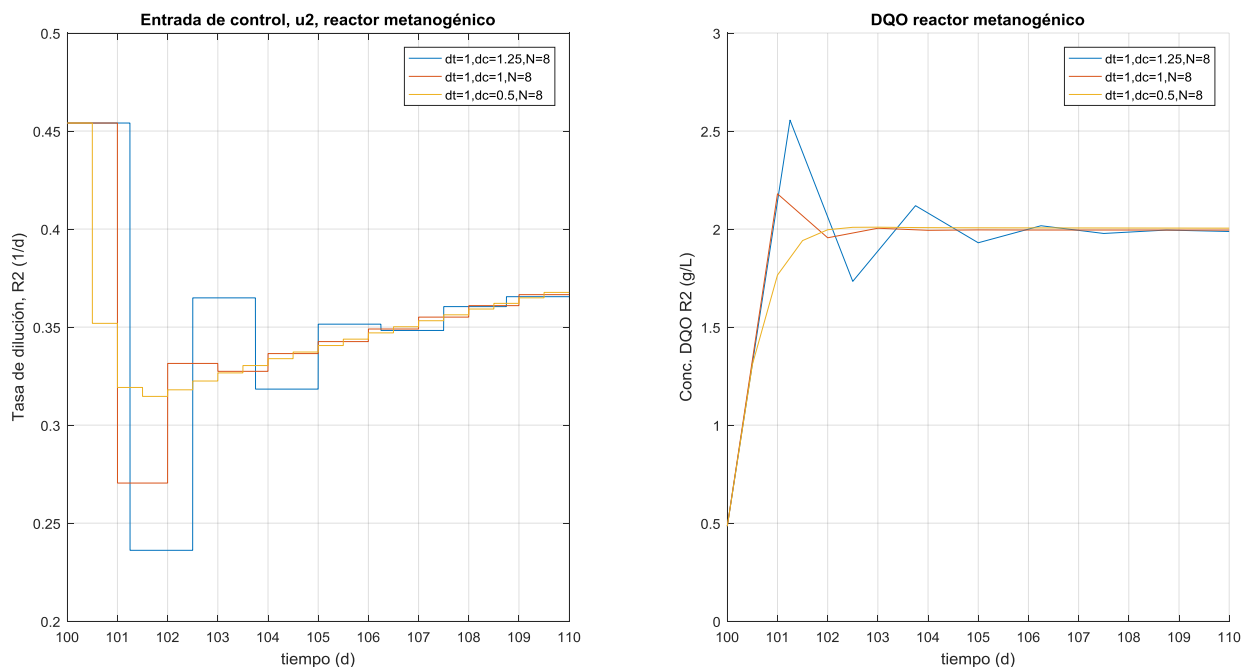


Figura 4.26 Sintonización del Controlador NMPC, Inestabilidad en la Regulación de DQO en R2

Los parámetros definitivos del controlador NMPC son:

$$[N, d_c, d_t] = [8, 1, 2] \quad d \quad (4.31)$$

Para la implementación del algoritmo NMPC, en cuanto a las restricciones de desigualdad, se consideró solo la condición de no negatividad.

En la siguiente sección se presentarán los resultados de la implementación del algoritmo NMPC con los resultados de sintonización obtenidos y las consideraciones antes mencionadas.

4.5.2. Resultados de la Implementación del Algoritmo NMPC

En la **Figura 4.27** se muestra los resultados obtenidos de la implementación del controlador **NMPC**, como se había dicho antes, se está considerando que se dispone de todos los estados en cada tiempo de muestreo. En esta figura se observa el comportamiento suave de la entrada de control y un buen desempeño del controlador para alcanzar rápidamente los puntos de referencia y estabilizarse.

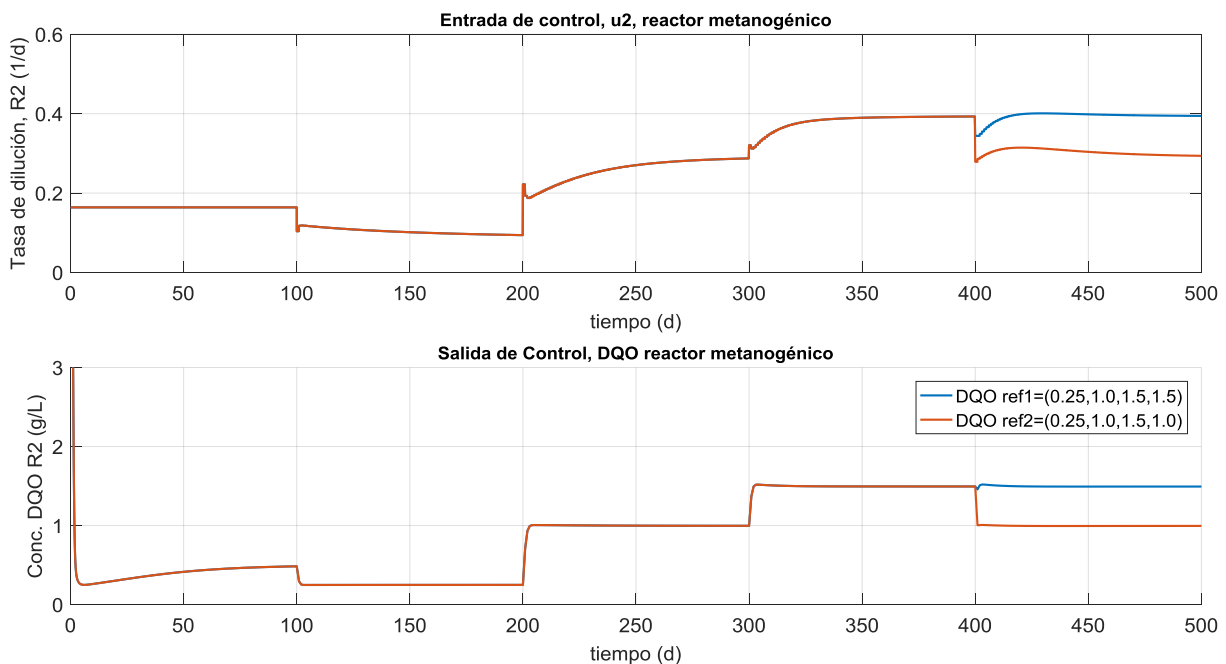


Figura 4.27 Resultados de Controlador NMPC, Entradas y Salidas en la Regulación de DQO en R2

Y como se puede observar en la **Figura 4.27** y **Figura 4.28**, se realizaron dos corridas, que solo difieren en el punto de referencia del último intervalo. Además, en la **Figura 4.28** se incluyen los demás estados de suma importancia del proceso que son las concentraciones de AGV, y se puede observar su estabilización sin picos, lo cual es una ventaja para asegurar que no ocurra inhibición del crecimiento de los microorganismos metanogénicos, lo que también implica una operación estable del sistema de dos etapas.

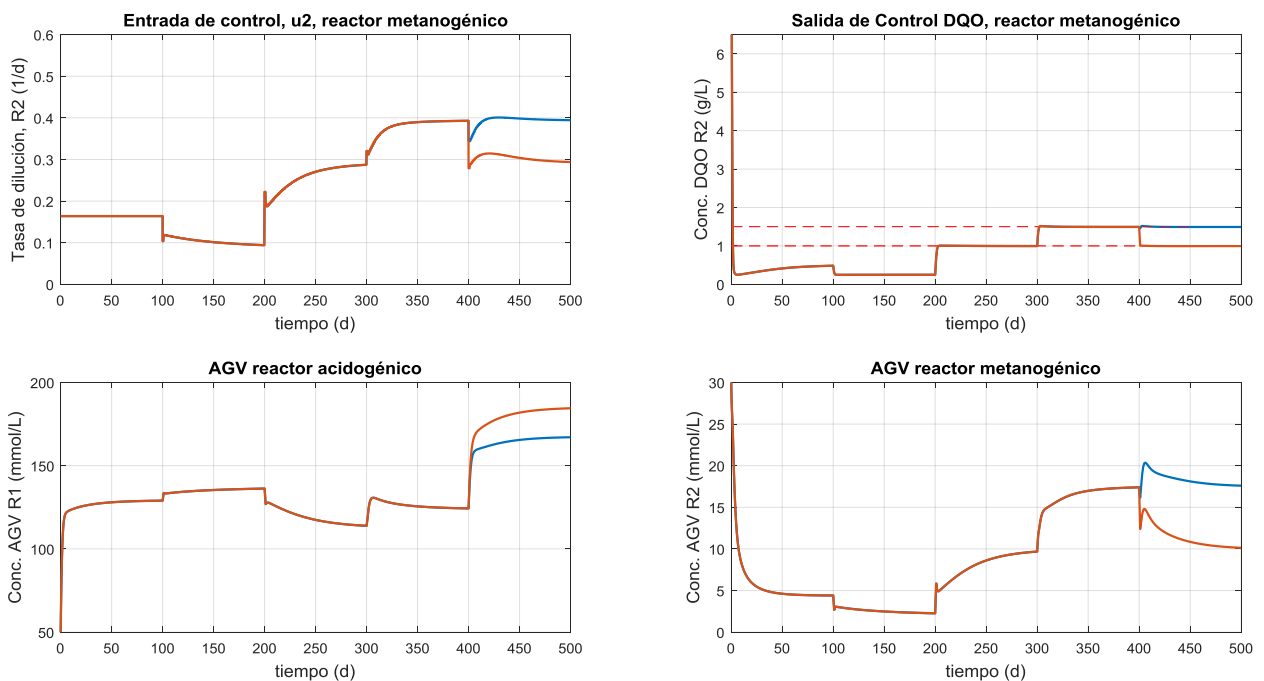


Figura 4.28 Resultados de Controlador NMPC, Regulación de DQO en R2

En la siguiente Capítulo se realizará una comparación de los resultados de los distintos controladores implementados numéricamente.

Capítulo 5

5. Análisis de Resultados Y Conclusiones

En este capítulo, primero se realizará una comparación en el desempeño de los controladores implementados numéricamente. Seguido de lo anterior, se sentarán las bases conceptuales para una futura implementación física en planta de los esquemas de control diseñados. Y finalmente, se presentarán las conclusiones de la presente disertación.

5.1. Comparación de los Controladores Implementados

La comparación del desempeño de los controladores se realizará para cada problema de regulación por separado y en forma cualitativa.

5.1.1. Problema de Regulación de DQO

Para el problema de regulación de DQO a la salida del sistema, es decir, en el reactor metanogénico, la comparación del desempeño de los controladores siguientes: MEC, SMC con aproximación de primer orden, SMC libre de modelo y NMPC; se muestra en la **Figura 5.1**, en la que se muestran los estados de mayor relevancia y la entrada de control. De esta figura, es evidente que el comportamiento del controlador SMC basado en una aproximación de primer orden no es muy adecuado para una implementación física debido a los sobredisparos en la entrada de control los cuales no se pudieron eliminar. En cuanto a los controladores NMPC, SMC libre de modelo y MEC su comportamiento para este problema de regulación es similar tanto en la entrada como en salida de control, sin embargo, un acercamiento a los 200 d, cuando ocurre un cambio en el punto de referencia de 0.25 g/L a 1.0 g/L se muestra en la **Figura 5.2**, y revela que el controlador MEC y el NMPC tienen un buen desempeño muy similar, ya que en ambos se alcanza rápidamente el punto de referencia, sin tener un salto agresivo al inicio en la entrada de control.

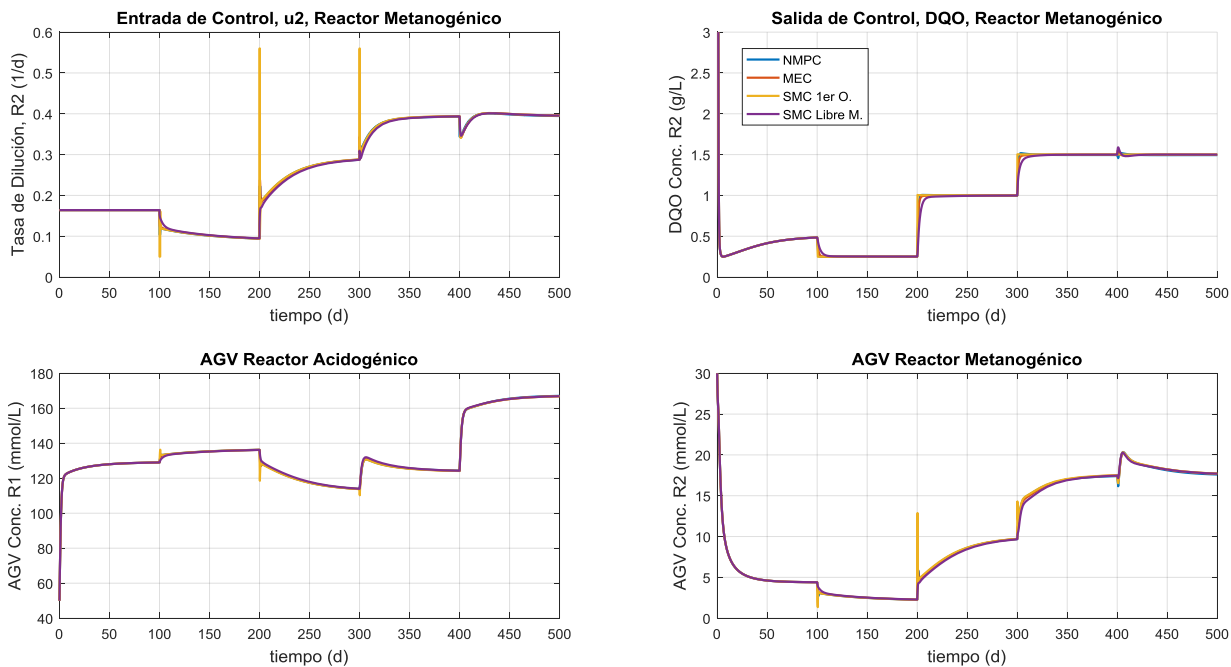


Figura 5.1 Comparación del Desempeño de los Controladores, Regulación de DQO en R2

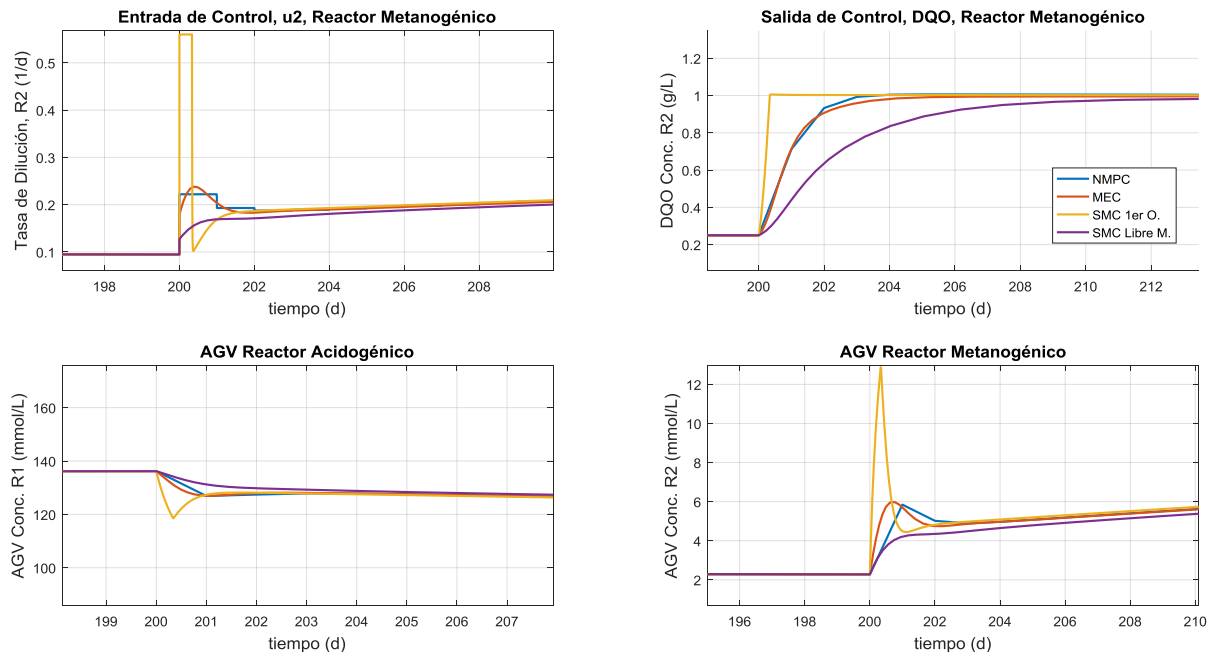


Figura 5.2 Comparación del Desempeño de los Controladores, Regulación de DQO en R2

Por otro lado, el controlador SMC libre de modelo tiene un comportamiento más lento que los otros, y en cuanto a la capacidad para soportar perturbaciones en las

condiciones de entrada, como lo es el evento que ocurre a los 400 d, éste es el menos robusto según el comportamiento en la salida de control de la **Figura 5.1**.

5.1.2. Problema de Regulación de AGV en el Reactor Acidogénico

Para el problema de regulación de AGV en el reactor acidogénico, se compararon los controladores MEC, SMC con aproximación de primer orden y SMC libre de modelo, los resultados de la comparación de estos tres controladores se muestra en la **Figura 5.3** en toda la corrida en la que se probó su desempeño.

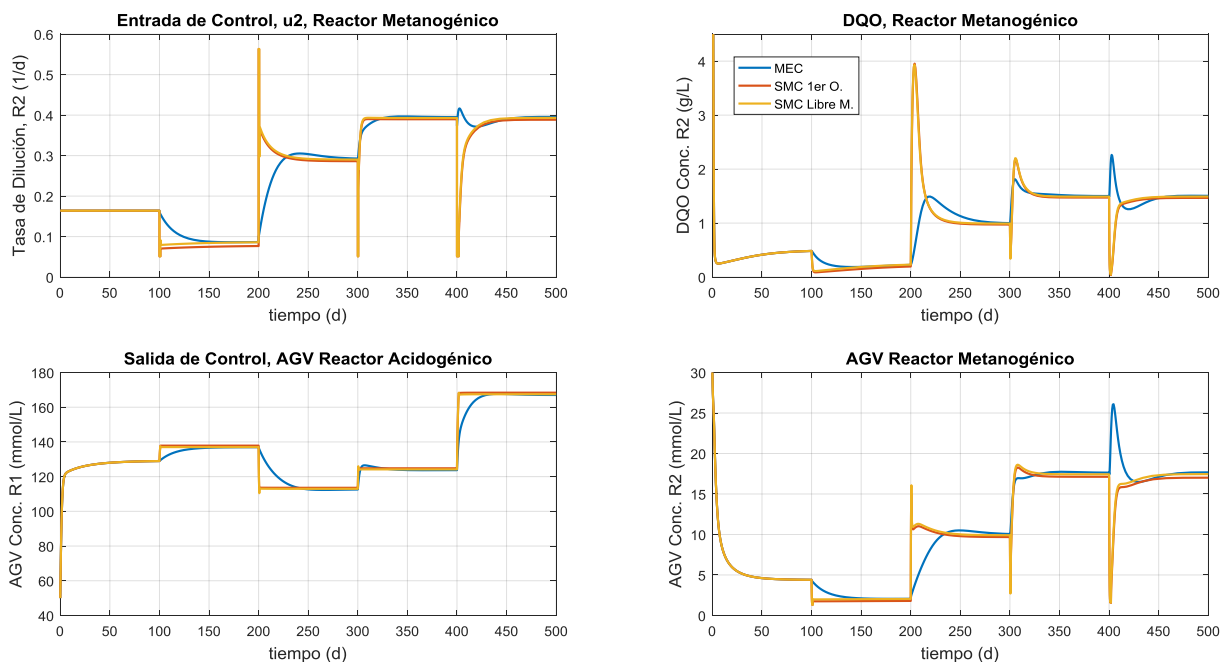


Figura 5.3 Comparación del Desempeño de los Controladores, Regulación de AGV en R1

También en la **Figura 5.3** podemos ver que el comportamiento de la salida de control de los controladores SMC es sumamente rápido para alcanzar los puntos de referencia, esto va de la mano con la situación muy indeseable de unos sobredisparos en la entrada de control y en la DQO y en la concentración de AGV del reactor metanogénico. Por lo tanto los esquemas de control SMC de regulación de AGV en el reactor acidogénico no son factibles. Y el controlador MEC en este caso presenta un pico de AGV en el segundo reactor a los 400 d.

En la **Figura 5.4** se muestra el detalle de la implementación de los tres controladores antes mencionados, y en la que se puede observar que el comportamiento del controlador MEC es mucho mejor que el de los SMC para este problema de regulación en específico, ya que no presenta picos en la entrada y en la salida de control, además el comportamiento en la DQO del reactor metanogénico es suave aunque tarda un tiempo considerable de 50 d en estabilizarse y llegar al valor requerido de calidad.

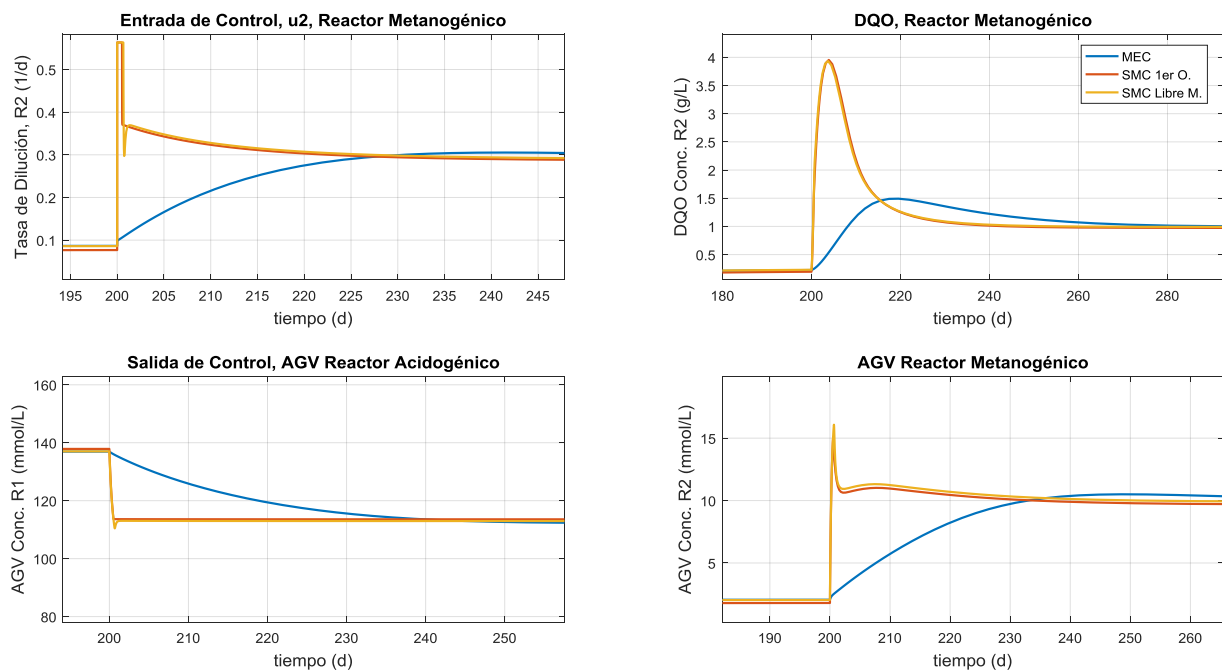


Figura 5.4 Comparación del Desempeño de los Controladores, Regulación de AGV en R1

5.1.3. Problema de Regulación de AGV en el Reactor Metanogénico

En la **Figura 5.5** se muestra la comparación de la entrada, salida de control y concentración de AGV de los esquemas de control MEC, SMC con aproximación de primer orden y SMC libre de modelo, para el problema de regulación de AGV en el reactor metanogénico.

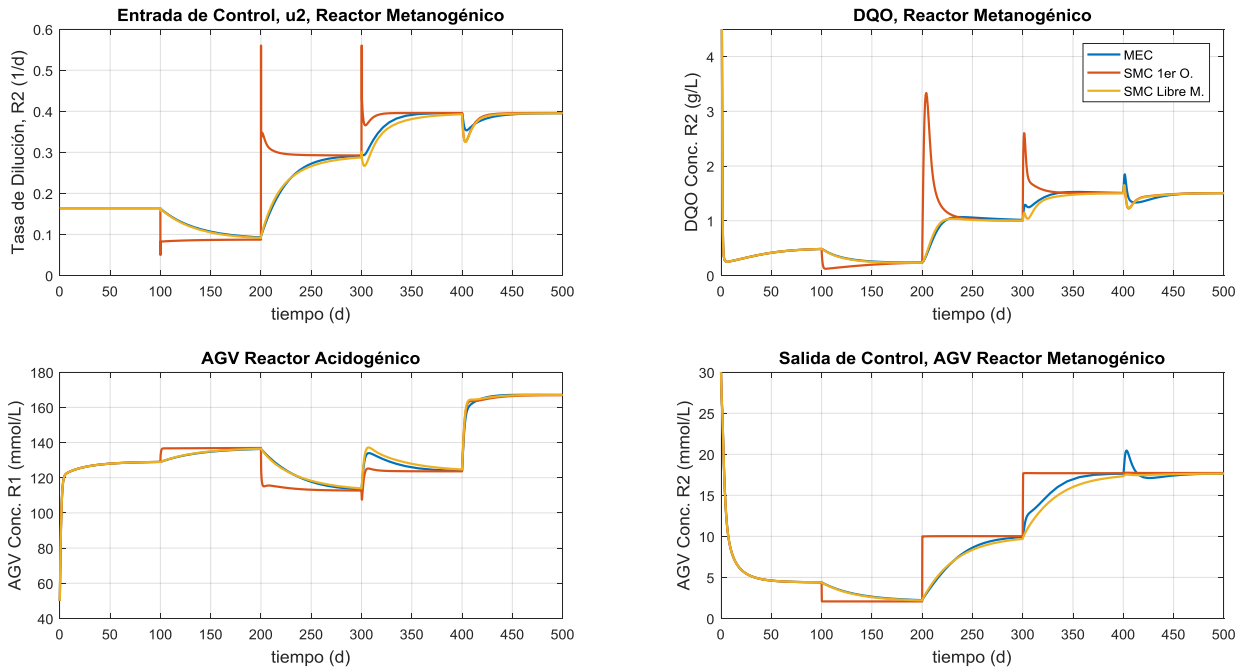


Figura 5.5 Comparación del Desempeño de los Controladores, Regulación de AGV en R2

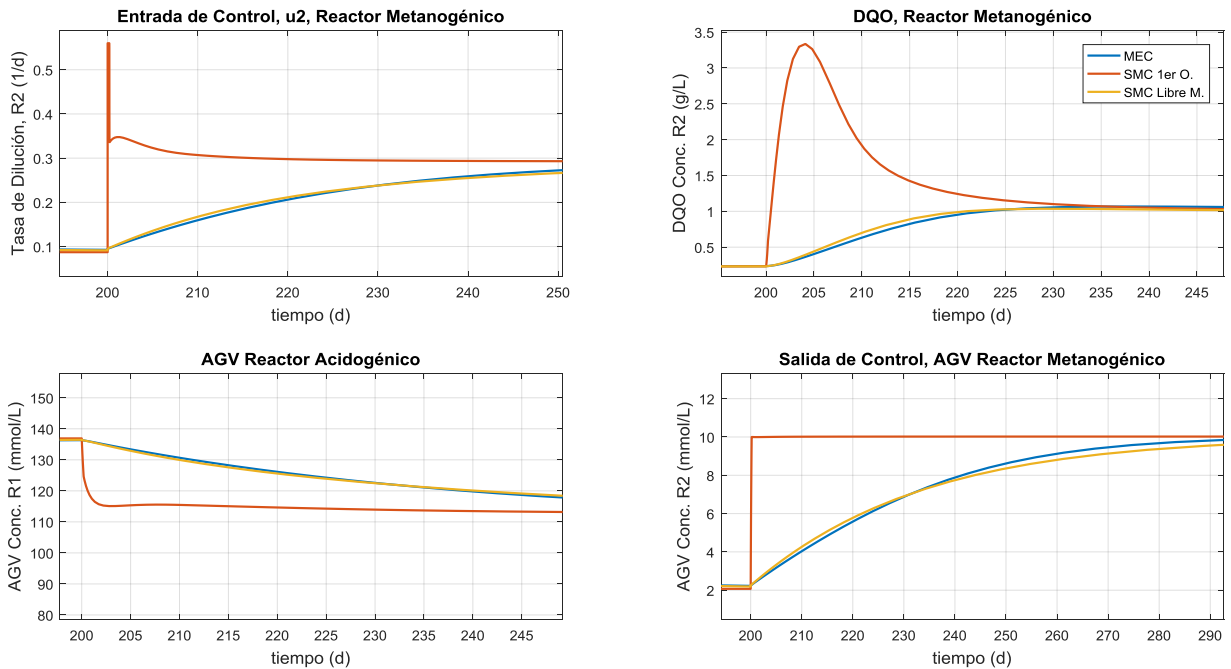


Figura 5.6 Comparación del Desempeño de los Controladores, Regulación de AGV en R2

En la **Figura 5.5** se observa que el controlador SMC con aproximación de primer orden es mucho más rápido que el controlador SMC libre de modelo y el MEC,

este exceso de rapidez que no se pudo disminuir en la sintonización, es causado por un comportamiento demasiado agresivo en la entrada de control, que también ocasiona picos en la DQO del reactor metanogénico. Por estas razones este controlador no es factible para el proceso en cuestión en la práctica. El detalle de lo antes mencionado puede observarse en la **Figura 5.6**.

Por otra parte, el comportamiento en la salida y entrada de control del controlador MEC y SMC libre de modelo es muy similar en este problema de regulación como puede observarse en la **Figura 5.6**, ambos son algo lentos para alcanzar los puntos de referencia puesto que la entrada de control es lenta y suave. En cuanto al perfil de DQO, éste es suave y se alcanzan los valores deseados de calidad en 30 d aproximadamente. Y en lo que se refiere a los AGV en el reactor acidogénico, no se presentan picos que pudieran inhibir a los metanógenos.

Ante una perturbación en las condiciones de entrada del proceso, el controlador SMC libre de modelo es más robusto que el MEC para este problema de regulación, como puede observarse en la **Figura 5.5** en las gráficas de DQO y AGV en el reactor metanogénico.

5.2. Bases Conceptuales para la Implementación Física de los Controladores.

En esta parte, se analizan algunos aspectos básicos para una posible implementación física de los esquemas de control que se diseñaron y aplicaron numéricamente para la planta de digestión anaerobia de dos etapas de vinazas tequileras.

La implementación numérica de los algoritmos de control diseñados en este trabajo, se realizó utilizando métodos de integración de paso variable en Matlab, en específico el método de la función Ode23s el cual está basado en un método implícito modificado de Rosenbrock de segundo y tercer orden, con control del error para sistemas rígidos (Ashino, Nagase y Vaillancourt, 2000). Aunque la

integración es más exacta y eficiente que los métodos de paso fijo, para una posible implementación física se tiene que analizar el paso de integración máximo que asegure estabilidad utilizando métodos de paso fijo, puesto que las mediciones de la salida de control se realizan en intervalos fijos de tiempo.

En nuestro caso, se realizará un análisis de los pasos de integración máximos de los controladores MEC, SMC con aproximación de primer orden y SMC libre de modelo. En cuanto al controlador NMPC el problema para su implementación física futura es disponer de todos los estados en cada paso del tiempo, por lo que se debe de trabajar en el desarrollo de estimadores de estados para aquellas variables que no estén disponibles en cada intervalo de tiempo.

En la determinación de los pasos de integración se utilizaron 2 métodos de integración de paso fijo, el método Runge-Kutta de 4° orden y el método de Michelsen (Michelsen, M., 1976), que se recomienda para sistemas de ODE's rígidos. A continuación en la **Tabla 5.1** se muestran los resultados de los pasos máximos de integración de cada algoritmo de control con cada problema de regulación.

Según la **Tabla 5.1**, el controlador MEC es el que tiene los mayores pasos de integración en los tres problemas de regulación tratados en este trabajo. En cuanto a los problemas de regulación de AGV en cada reactor, el controlador MEC podría permitir inclusive mediciones en tres turnos por día y en cuanto al problema de regulación de DQO, este controlador permitiría 4 mediciones en un día.

El controlador SMC con aproximación de primer orden, está lejos de ser atractivo para una implementación física por sus pasos de integración bajos.

Problema de Regulación	Algoritmo de Control	Tamaño de "h" (h) RK4	Tamaño de "h" (h) Michelsen
DQO (x_6)	MEC	6	24
	SMC Aprox. 1er Orden	0.12	0.18
	SMC Libre de Modelo	2.4	3.6
AGV (x_3)	MEC	12	30
	SMC Aprox. 1er Orden	0.048	0.072
	SMC Libre de Modelo	0.72	1.2
AGV (x_7)	MEC	8.16	24
	SMC Aprox. 1er Orden	0.24	0.24
	SMC Libre de Modelo	1.2	2.4

Tabla 5.1 Pasos Máximos de Integración de los Algoritmos de Control

En cuanto a la implementación física del controlador SMC libre de modelo, para el problema de regulación de DQO, el paso de integración es bajo en comparación al del MEC, por lo que no se recomienda para este caso. Pero en lo que se refiere a los problemas de regulación de AGV en el reactor acidogénico y en el metanogénico, los pasos de integración no son tan bajos si consideramos que se puede estimar la concentración de AGV con conductividad y pH, por lo que podría ser factible una implementación física basada en la determinación de AGV con conductividad.

5.3. Conclusiones, Recomendaciones y Trabajo Futuro

En esta sección se presentan los comentarios finales acerca de los resultados obtenidos en este trabajo, también se emiten observaciones y recomendaciones, con el fin de complementar los hallazgos aquí presentados; consecuentemente se comentan las líneas de investigación futuras relativas al presente trabajo.

5.3.1. Conclusiones y Recomendaciones

- En el problema de optimización estática que se resolvió se maximizó el flujo de biogas y al mismo tiempo se minimizó la DQO de la corriente de salida

del proceso, esto se pudo efectuar a una tasa de dilución relativamente baja con la condición de que se cumpliera con un nivel alto en la calidad del agua tratada.

- En la resolución del problema de control de regulación de la DQO de la corriente de salida del proceso, el controlador SMC con aproximación de primer orden tuvo un desempeño inaceptable por los cambios bruscos en la entrada de control. Y por otra parte el desempeño de los controladores SMC libre de modelo, MEC y NMPC fue muy aceptable por los perfiles de entrada de control suaves y porque la salida de control alcanzó rápida y exitosamente su punto de referencia.
- En cuanto al problema de regulación de AGV en el reactor acidogénico sólo el controlador MEC tuvo un buen desempeño, aunque el perfil de la DQO del efluente del segundo reactor tuvo un incremento que alcanzó el valor límite de calidad del agua de 2 g/L.
- En cuanto al problema de regulación de AGV en el reactor metanogénico, los controladores MEC y SMC libre de modelo mostraron un desempeño exitoso en cuanto que no se presentaron picos indeseables de AGV en el reactor acidogénico y en la DQO de salida del reactor metanogénico. Sin embargo, la salida de control se alcanza lentamente y el comportamiento en la DQO de la corriente de salida se estabiliza más rápidamente en el valor deseado que en el caso de la regulación de concentración de AGV en el reactor acidogénico.
- De lo anterior expuesto y basándonos en las dinámicas de los estados, entonces el regular lentamente los AGV en los dos reactores significa una estabilización rápida de la DQO de la corriente de salida del proceso. Y al contrario, una regulación rápida de los AGV implica un comportamiento con incrementos indeseables en la DQO de la corriente de salida.
- En este trabajo, se ha logrado obtener un perfil adecuado de la DQO de la corriente de salida, regulando la concentración de AGV como salida de

control específicamente para un sistema de digestión anaerobia de dos etapas. La regulación de la concentración de AGV en el reactor acidogénico resulta más lógica que el caso de regulación de AGV's en el reactor metanogénico, pues de lo que se trata es de evitar la inhibición de los microorganismos metanogénicos y garantizar la estabilidad completa en la operación de los dos reactores. Sin embargo, los resultados obtenidos de la regulación de AGV's en el reactor metanogénico son mejores en términos de estabilización de la DQO de salida que los del caso de regulación de AGV's en el reactor acidogénico, esto último podría ser engañoso en la realidad.

- En cuanto al estudio que se realizó para explorar una posible implementación física futura en la planta piloto de procesamiento de vinazas tequileras, el algoritmo de control que resultó más factible fue el MEC, para los tres problemas de regulación resueltos.

5.3.2. Trabajo Futuro

- El desempeño del controlador NMPC fue bueno y muy similar al controlador MEC, sin embargo, para poder implementarlo se requiere de estimadores de estados por lo menos para todas las biomasas y alguna de las dos DQO's del modelo. Por lo tanto, el diseño de estimadores de estados para NMPC constituye una línea de investigación futura.
- Para el caso del problema de regulación de la concentración de AGV en el reactor metanogénico, se requiere de mayor investigación para fundamentar esta idea y definir su factibilidad.
- Es recomendable realizar una optimización dinámica de la planta de estudio de dos etapas, así como por medio de optimización determinar el valor óptimo de la variable β que depende del dimensionamiento de los reactores.

- Es deseable explorar el efecto de la incertidumbre de los parámetros que dotan de mayor sensibilidad al sistema de estudio

Bibliografía

- Abbasi, T., Tauseef, S., Abbasi, S. (2012). *Biogas Energy*. Londres: Springer.
- Abu-Rmieleh, A., Garcia-Gabin, W., & Zambrano, D. (2010). Internal model sliding mode control approach for glucose regulation in type 1 diabetes. *Biomedical Signal Processing and Control*, 5, 94–102.
- Aceves-Lara, C. A., Latrille, E., Conte, T., & Steyer, J. P. (2012). Online estimation of VFA, alkalinity and bicarbonate concentrations by electrical conductivity measurement during anaerobic fermentation. *Water Science and Technology*, 65, 1281–1289.
- Aguilar-Garnica, E., Dochain, D., Alcaraz-González, V., Dramé, A. K., & González-Álvarez, V. (2007). COD and VFA's control in a two-phase anaerobic digestion process. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 10, 67–72.
- Aguilar-Garnica, E., Dochain, D., Alcaraz-González, V., & González-Álvarez, V. (2009). A multivariable control scheme in a two-stage anaerobic digestion system described by partial differential equations. *Journal of Process Control*, 19, 1324–1332.
- Albertos, P., & Sala, a. (2004). *Multivariable Control Systems. Book*. doi:10.1007/b97506
- Allgöwer, F., Badgwell, T. A., Qin, J. S., Rawlings, J. B., & Wright, S. J. (1999). Nonlinear Predictive Control and Moving Horizon Estimation — An Introductory Overview. *Advances in Control*, 391–449.
- Al Seadi, T. (2008), *Biogas Handbook*. Esbjerg: University of Southern Denmark.
- Alvarez-Ramírez, J. (1999). Adaptive control of feedback linearizable systems: A modelling error compensation approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9, 361–377.

- Alvarez-Ramirez, J., Fernandez, G., & Suarez, R. (2002). A PI controller configuration for robust control of a class of nonlinear systems. *Journal of the Franklin Institute*, 339, 29–41.
- Alvarez-Ramirez, J., Morales, A., & Cervantes, I. (1998). Robust Proportional - Integral Control, 4740–4747.
- Arreola-Vargas, J., Flores-Larios, A., González-Álvarez, V., Corona-González, R. I., & Méndez-Acosta, H. O. (2016). Single and two-stage anaerobic digestion for hydrogen and methane production from acid and enzymatic hydrolysates of Agave tequilana bagasse. *International Journal of Hydrogen Energy*, 41, 897–904.
- Ashino, R., Nagase, M., Vaillancourt, R. (2000). Behind and Beyond the Matlab ODE Suite. *Computers & Mathematics with Applications*, 40, 491-512.
- Attar, S., & Haugen, F. A. (2017). Simulation of a model-based predictive control system to optimize the methane production of a biogas reactor, 1590–1595.
- Bequette, B.W., (2002). *Process Control, Modelling, Design and Simulation*. New Jersey: Prentice Hall, pp.112-116.
- Biegler, L.T., (2010). *Nonlinear Programming: Concepts, Algorithms, and Applications to Chemical Processes*. Philadelphia: SIAM, pp.1-6.
- Carvajal-Zarrabal, O., Nolasco-Hipólito, C., Barradas-Dermitz, D. M., Hayward-Jones, P. M., Aguilar-Uscanga, M. G., & Bujang, K. (2012). Treatment of vinasse from tequila production using polyglutamic acid. *Journal of Environmental Management*, 95, S66–S70.
- Charnier, C., Latrille, E., Lardon, L., Miroux, J., & Steyer, J. P. (2016). Combining pH and electrical conductivity measurements to improve titrimetric methods to determine ammonia nitrogen, volatile fatty acids and inorganic carbon concentrations. *Water Research*, 95, 268–279.

- De Baere, L. (2006). Will anaerobic digestion of solid waste survive in the future? *Water Science and Technology*, 53, 187–194.
- De Lemos, C. (2007). Volume Four, Anaerobic Reactors. Londres: IWA Publishing.
- Demirel, B., & Yenigün, O. (2002). Two-phase anaerobic digestion processes: A review. *Journal of Chemical Technology and Biotechnology*, 77, 743–755.
- Dochain, V. A. D., & Gonzalez-alvarez, V. (2014). Passive control of a Two-stages Anaerobic Digestion Process.
- Ferral-Pérez, H., Torres Bustillos, L. G., Méndez, H., Rodríguez-Santillan, J. L., & Chairez, I. (2016). Sequential Treatment of Tequila Industry Vinasses by Biopolymer-based Coagulation/Flocculation and Catalytic Ozonation. *Ozone: Science & Engineering*, 9512, 1–12.
- Finlayson, B.A. (1980). Nonlinear Analysis in Chemical Engineering, McGraw-Hill Chemical Engineering Series, McGraw-Hill International Book Co.
- Fridman, L., & Levant, A. (2002). Higher Order Sliding Modes. In W. Perruquetti & J. Barbot, Sliding Mode Control in Engineering (1st ed.). New York: Marcel Dekker, pp.1-15.
- Fu, S.-F., Xu, X.-H., Dai, M., Yuan, X.-Z., & Guo, R.-B. (2017). Hydrogen and methane production from vinasse using two-stage anaerobic digestion. *Process Safety and Environmental Protection*, 107, 81–86.
- Gaida, D., Wolf, C., & Bongards, M. (2017). Feed control of anaerobic digestion processes for renewable energy production: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 68, 869–875.
- Ghosh, S. & Klass, D. (1982). Two phase anaerobic digestion. US Patent, 4318993.
- Huang, B., Qi, Y., Murshed, A. (2013). Oxide fuel cells: first principle and data

based approaches. Chichester: John Wiley and Sons, pp.121-142.

Kunusch, C., Puleston, P., Mayosky, M., (2012). Sliding Mode Control of PEM Fuel Cells. Londres: Springer, pp.35-49.

Li, W., Loh, K. C., Zhang, J., Tong, Y. W., & Dai, Y. (2016). Two-stage anaerobic digestion of food waste and horticultural waste in high-solid system. *Applied Energy*. doi:10.1016/j.apenergy.2017.05.042

López-López, A., Davila-Vazquez, G., León-Becerril, E., Villegas-García, E., & Gallardo-Valdez, J. (2010). Tequila vinasses: Generation and full scale treatment processes. *Reviews in Environmental Science and Biotechnology*, 9, 109–116.

Lora Grando, R., de Souza Antune, A. M., da Fonseca, F. V., Sánchez, A., Barrena, R., & Font, X. (2017). Technology overview of biogas production in anaerobic digestion plants: A European evaluation of research and development. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 80, 44–53.

Meadows, E., & Rawlings, J. (1997). Model Predictive Control. In M. Henson & D. Seborg, Nonlinear process control. New Jersey: Prentice Hall PTR, pp. 233-264.

Méndez-Acosta, H. O., Campos-Rodríguez, A., González-Álvarez, V., García-Sandoval, J. P., Snell-Castro, R., & Latrille, E. (2016). A hybrid cascade control scheme for the VFA and COD regulation in two-stage anaerobic digestion processes. *Bioresource Technology*, 218, 1195–1202.

Méndez-Acosta, H.O., García-Sandoval, J.P., González-Álvarez, V., Alcaraz-Gonzalez, V., Jauregui-Jauregui, J.P., 2011. Regulation of the organic pollution level in anaerobic digesters by using off-line cod measurements. *J. Bioresour. Technol.* 102, 7666–7672.

Michelsen, M.L. (1976). An efficient general purpose method for the integration of

stiff ordinary differential equations. *AIChE Journal*, 22, 594-597.

- Musmade, B. B., Munje, R. K., & Patre, B. M. (2011). Design of Sliding Mode Controller to Chemical Processes for Improved Performance. *International Journal of Control & Automation*, 4, 15–32.
- Palacios-Ruiz, B., Méndez-Acosta, H., Alcaraz-González, V., González-Álvarez, V., y Pelayo-Ortiz, C. (2008). Modelo dinámico para un proceso de digestión anaerobia en dos etapas. *XXIX Encuentro Nacional de la AMIDIQ*, 10, 406–412.
- Patwardhan, A. A., Rawlings, J. B., & Edgar, T. F. (1990). Nonlinear Model Predictive Control. *Chemical Engineering Communications*, 87, 123–141.
- Poh, P. E., Gouwanda, D., Mohan, Y., Gopalai, A. A., & Tan, H. M. (2016). Optimization of Wastewater Anaerobic Digestion Using Mechanistic and Meta-heuristic Methods: Current Limitations and Future Opportunities. *Water Conservation Science and Engineering*, 1, 1–20.
- Pohland, F. G., & Ghosh, S. (1971). Developments in Anaerobic Stabilization of Organic Wastes- the Two-Phase Concept. *Environmental Letters*, 1(4), 255–266.
- Precup, R.-E., Radac, M.-B., Roman, R.-C., & Petriu, E. M. (2017). Model-free sliding mode control of nonlinear systems: Algorithms and experiments. *Information Sciences*, 381, 176–192.
- Puebla, H., & Alvarez-Ramirez, J. (2008). Suppression of stick-slip in drillstrings: A control approach based on modeling error compensation. *Journal of Sound and Vibration*, 310, 881–901.
- Puebla, H., Alvarez-Ramirez, J., & Cervantes, I. (2003). A simple tracking control for Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 50, 280–284.

- Puebla, H., Hernandez-Suarez, R., Hernandez-Martinez, E., Gonzalez-Brambila, M. (2011). Robust Control Approaches for Synchronization of Biochemical Oscillators. In *Robust Control, Theory and Applications*, 655-678. Edited by Andrzej Bartoszewicz, Editorial Intech, Croatia. (ISBN 978-953-307-229-6). DOI: 10.5772/15965.
- Riffat, R. (2013). *Fundamentals of Wastewater Treatment and Engineering*. Londres: IWA Publishing, CRC Press.
- Rincon, A., Angulo, F., & Olivar, G. (2009). Control of an anaerobic digester through normal form of fold bifurcation. *Journal of Process Control*, 19, 1355–1367.
- Robles, A., Latrille, E., Ribes, J., Bernet, N., & Steyer, J. P. (2016). Electrical conductivity as a state indicator for the start-up period of anaerobic fixed-bed reactors. *Water Science and Technology*, 73, 2294–2300.
- Robles-Rodríguez, C., Alcaraz-González, V., García-Sandoval, J. P., González-Álvarez, V., y Méndez-Acosta, H. O. (2013). Modelling and parameter estimation of a two-stage anaerobic digestion system for the treatment of tequila vinasses. In *Proceedings of Anaerobic Digestion Congress AD13*, España.
- Robles-Rodríguez, C. (2012), *Estimación de Parámetros de un Modelo de Digestión Anaerobia en Dos Etapas*. Tesis de Maestría, Universidad de Guadalajara, CUCEI.
- Rodríguez-Pérez, B. E., Flores-Tlacuahuac, A., Ricardez-Sandoval, L., & Lozano, F. J. (2018). Optimal Water Quality Control of Sequencing Batch Reactors Under Uncertainty. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 57, 9571–9590.
- Ruggeri, B., Tommasi, T., Sanfilippo, S., (2015). BioH₂ & BioCH₄ Through

- Anaerobic Digestion. Londres: Springer-Verlag. pp.161-188.
- Schievano, A., Tenca, A., Lonati, S., Manzini, E., & Adani, F. (2014). Can two-stage instead of one-stage anaerobic digestion really increase energy recovery from biomass? *Applied Energy*, 124, 335–342.
- Schievano, A., Tenca, A., Scaglia, B., Merlino, G., Rizzi, A., Daffonchio, D., ... Agraria, I. (2012). Two-Stage vs Single-Stage Thermophilic Anaerobic Digestion: Comparison of Energy Production and Biodegradation Efficiencies. *Environmental Science & Technology*, 46, 8502–8510.
- Seghezzo, L., Zeeman, G., Van Lier, J. B., Hamelers, H. V. M., & Lettinga, G. (1998). A review: The anaerobic treatment of sewage in UASB and EGSB reactors. *Bioresource Technology*, 65, 175–190.
- Seok, J. (2003). Hybrid adaptive optimal control of anaerobic fluidized bed bioreactor for the de-icing waste treatment. *Journal of Biotechnology*, 102, 165–175.
- Silva, R.G., Kwong, W.H. (1999). Nonlinear Model Predictive Control of Chemical Processes. *Br az. J. Chem. Eng*, 16, 83-99.
- Sistu, P. B., & Bequette, B. W. (1991). Nonlinear predictive control of uncertain processes: Application to a CSTR. *AIChE Journal*, 37, 1711–1723.
- Slotine, J., Li, W., (1991). *Applied Nonlinear Control*. New jersey: Prentice Hall, pp.277-289.
- Sun, J.; Olbrot, A.W. & Polis. M.P. (1994). Robust stabilization and robust performance using model reference control and modeling error compensation. *IEEE Transactions Automatic Control*, 39, 630-635
- Tham, H. J., Ramachandran, K. B., & Hussain, M. A. (2003). Sliding Mode Control for a Continuous Bioreactor. *Chemical and Biochemical Engineering Quarterly*,

17, 267–275.

Utkin, V.I. (1977) “Variable structure systems with sliding modes: a survey”, IEEE Transactions on Automatic Control, 22, 212–222.

Van Lier, J., Mahmoud, N. and Zeeman, G. (2008). Anaerobic Wastewater Treatment. In: M. Henze, M. Van Loosdrecht, G. Ekama and D. Brdjanovic, ed., Biological Wastewater Treatment. Principles, Modelling and Design, 1st ed. Londres: IWA Publishing, pp.415-421.

Von Sachs, J., Meyer, U., Rys, P., & Feitkenhauer, H. (2003). New approach to control the methanogenic reactor of a two-phase anaerobic digestion system. *Water Research*, 37, 973–982.

Yazar, E., Cirik, K., Ozdemir, S., Akman, D., Cuci, Y., & Cinar, O. (2016). Optimization of Two-Stage and Single-Stage Anaerobic Reactors Treating Cheese Whey. *Journal of Engineering Sciences*, 19, 25–36.

Anexo I: Método de Colocación Ortogonal en Elemento Finito

El método de colocación ortogonal para resolver ecuaciones diferenciales se basa en que cualquier función puede ser aproximada por medio de polinomios de interpolación cuyos nodos corresponden a las raíces de un conjunto de polinomios ortogonales (Meadows y Rawlings, 1997, Huang, Qi y Murshed, 2013).

Si se considera un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{I-1}$$

La primera derivada de un sistema de ecuaciones puede aproximarse por medio de colocación ortogonal por medio de:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{I-2}$$

Donde A (I-8) es la matriz de colocación ortogonal de aproximación de la primera derivada que depende del número de puntos de colocación. El detalle para el cálculo de las entradas de la matriz A , para con diferentes casos de la cantidad de puntos internos de colocación se puede encontrar en Finlayson, B.A. (1980).

Se considerará para efectos del presente trabajo el caso de 3 puntos internos de colocación, de manera que los puntos de los nodos en el intervalo escalado $[0,1]$ que incluyen las raíces de los polinomios de Legendre trasladados son:

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\} = \{0.0, 0.1127, 0.5, 0.8873, 1.0\} \tag{I-3}$$

Y los pesos de la cuadratura correspondientes a la aproximación con los polinomios de Legendre con 3 puntos internos de colocación son:

$$\{c_1, c_2, c_3\} = \{0.277, 0.444, 0.277\} \tag{I-4}$$

El elemento de colocación con los puntos de colocación se muestra en la **Figura I-**

1

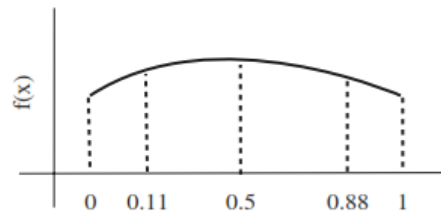


Figura I.0.1 Aproximación de una Función con 3 Puntos de Colocación y Horizonte de Predicción de 1. Huang, Qi y Murshed, (2013)

Si u es constante una solución aproximada para un solo elemento finito de la ecuación (I-1) se puede obtener resolviendo la ecuación no lineal:

$$A_0 X = F(X, u) \quad \text{I-5}$$

Con:

$$X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \cdots & x_{3,n} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & \cdots & x_{4,n} \\ x_{5,1} & x_{5,2} & \cdots & x_{5,n} \end{bmatrix} \quad \text{I-6}$$

$$F(X, U) = \begin{bmatrix} x_{init}^T \\ f^T(x_{2*}^T, u, t_2) \\ f^T(x_{3*}^T, u, t_3) \\ f^T(x_{4*}^T, u, t_4) \\ f^T(x_{5*}^T, u, t_5) \end{bmatrix} \quad \text{I-7}$$

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 14.79 & -2.67 & 1.88 & -1 \\ -5.32 & 3.87 & 2.07 & -1.29 & 0.68 \\ 1.5 & -3.23 & 0 & 3.23 & -1.5 \\ -0.68 & 1.29 & -2.07 & -3.87 & 5.32 \\ 1 & -1.88 & 2.67 & -14.79 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{I-8}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.32 & 3.87 & 2.07 & -1.29 & 0.68 \\ 1.5 & -3.23 & 0 & 3.23 & -1.5 \\ -0.68 & 1.29 & -2.07 & -3.87 & 5.32 \\ 1 & -1.88 & 2.67 & -14.79 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{I-9}$$

La matriz A contiene los pesos de colocación de aproximación de la primera derivada y A_0 , contiene el subíndice 0 para enfatizar que la primera fila representa a las condiciones iniciales de (I-1).

El primer subíndice de $x_{i,j}$ denota los puntos de colocación en el intervalo de muestreo y el segundo significa el estado, x_{init} es la condición inicial de los estados, u es constante en el intervalo de tiempo y la variable t se requiere para modelos variantes en el tiempo, pero para modelos invariantes puede ser omitida.

Para intervalos de tiempo diferentes de $[0,1]$, $\Delta t'$, se puede considerar un cambio de variable, tal que:

$$A_o X = \Delta t' F(X, u) \quad \text{I-10}$$

La formulación dada por (I-10) se puede utilizar para discretizar un sistema de ecuaciones diferenciales en un sistema de ecuaciones algebraico no lineal que a su vez se puede utilizar en una formulación MPC como restricciones de igualdad con un horizonte de predicción $N = 1$. Para un horizonte de predicción de N , la aproximación por medio de colocación ortogonal puede ser extendida para N elementos finitos, entonces la formulación se convierte en:

$$\check{A}\check{X} = \Delta t' \check{F}(\check{X}, \check{U}) \quad \text{I-11}$$

Con:

$$\check{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{4N,1} & x_{4N,2} & \cdots & x_{4N,n} \\ x_{4N+1,1} & x_{4N+1,2} & \cdots & x_{4N+1,n} \end{bmatrix} \quad \text{I-12}$$

$$F(\check{X}, \check{U}) = \begin{bmatrix} x_{init}^T \\ f^T(x_{2*}^T, u_0, t_2) \\ f^T(x_{3*}^T, u_0, t_3) \\ f^T(x_{4*}^T, u_0, t_4) \\ f^T(x_{5*}^T, u_0, t_5) \\ f^T(x_{6*}^T, u_1, t_6) \\ \vdots \\ f^T(x_{4N*}^T, u_{N-2}, t_{4N}) \\ f^T(x_{4N+1*}^T, u_{N-1}, t_{4N+1}) \end{bmatrix} \quad \text{I-13}$$

$$\check{U} = [u_0^T, u_1^T, \dots, u_{N-1}^T]^T \quad \text{I-14}$$

$$\check{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & A & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{I-15}$$

La matriz \check{A} es particionada y está definida por medio de la combinación de A_0 y A , su estructura es casi diagonal y presenta traslapos en los elementos adyacentes en las fronteras de cada elemento finito. Para el caso de $N = 2$, y tres puntos internos de colocación, la matriz \check{A} tiene la siguiente forma:

$$\check{A}|_{N=2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.32 & 3.87 & 2.07 & -1.29 & 0.68 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & -3.23 & 0 & 3.23 & -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.68 & 1.29 & -2.07 & -3.87 & 5.32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.88 & 2.67 & -14.79 & 0 & 14.79 & -2.67 & 1.88 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.32 & 3.87 & 2.07 & -1.29 & 0.68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & -3.23 & 0 & 3.23 & -1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.68 & 1.29 & -2.07 & -3.87 & 5.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.88 & 2.67 & -14.79 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{I-16}$$

Como se puede observar el (I-16), el elemento que se traslapa en el punto en común de los dos elementos finitos, corresponde a la suma de los elementos de las matrices A que se traslapan.

En cada elemento finito la entrada de control u_i se mantiene constante

La representación gráfica de la aproximación de una función por medio de colocación ortogonal con N elementos finitos, es decir con un horizonte de predicción de N , se muestra en la **Figura I-2**.

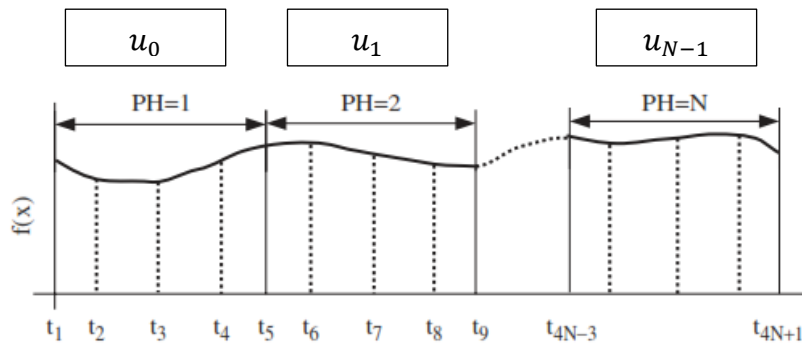


Figura I.0.2 Aproximación de una Función con 3 Puntos de Colocación y Horizonte de Predicción de N. Huang, Qi y Murshed, (2013)

Anexo II: Método de Identificación Empírica

El método de identificación empírica se lleva a cabo de la siguiente manera (Smith y Corripio, 1997):

Con el control manual aplicar un cambio escalón en la entrada de control $m(t)=u(t)$ que es la señal de salida del controlador, la magnitud del cambio no debe ser muy alta como para que el proceso se comporte inestablemente ni muy baja, como para que no se vea reflejado y no pueda ser medida la señal.

Registre la señal de salida del transmisor $c(t)=y(t)$ y obtenga una gráfica de esta señal con respecto al tiempo (**Figura II-1**). No debe haber perturbaciones cuando se realice este procedimiento.

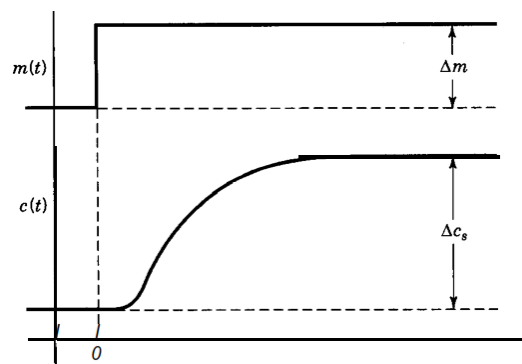


Figura II.0.1 Curva del Comportamiento Dinámico en una Prueba de Identificación Empírica. (Smith y Corripio 1997)

Lo siguiente es relacionar la gráfica con los parámetros de un modelo de primer orden sin tiempo muerto, el cual tiene como función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_p}{\tau_0 s + 1} \quad \text{II-1}$$

La ganancia del modelo de primer orden se calcula como:

$$k_p = \frac{\Delta c_s}{\Delta m} = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} \quad \text{II-2}$$

Donde los valores inicial y final de $y(t)$, corresponden a valores en estado estable.

Y la constante de tiempo τ está dada por:

$$\tau_0 = (t|_{0.632\Delta y+y_1}) - t_1 \quad \text{II-3}$$

La ecuación (II-3) se explica mejor con la **Figura II-2**, en la que $t_0 = 0$, pues no se está considerando tiempo muerto en el presente trabajo.

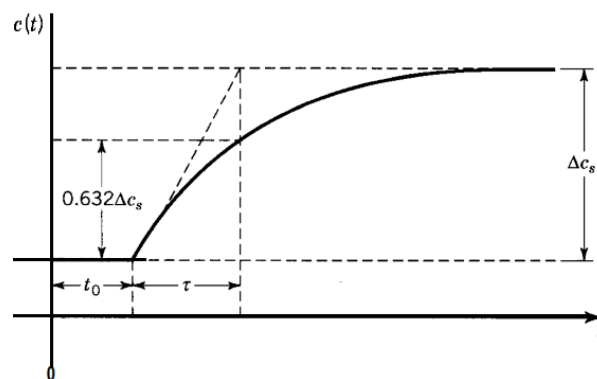


Figura II.0.2 Definición gráfica de τ en una prueba de identificación empírica para ajuste a un modelo de primer orden sin tiempo muerto (Smith y Corripio 1997).

A continuación, se presentan los cálculos de las pruebas de identificación empírica para cada caso de problema de control abordado en este trabajo, es decir, para el Caso I: $y = x_6$, el Caso II: $y = x_3$ y el Caso III: $y = x_7$. En cada prueba el cambio escalón de la entrada de control $u(t)$ fue un incremento de 10% respecto a los valores que resultaron de resolver el problema de optimización estática, que son: $u_1 = 0.320 \text{ d}^{-1}$ y $u_2 = 0.164 \text{ d}^{-1}$. La simulación consideró las condiciones iniciales [94.79, 27, 50, 23.2, 100, 10, 30] y una vez transcurridos 150 d, se aplicó el cambio escalón, dejando estabilizar el proceso durante 100 d más.

- **Caso I.** Regulación de DQO en el Reactor Metanogénico, $y = x_6$, $u = D_2 = u_2$

$$k_p = \frac{x_{6,2} - x_{6,1}}{u_{2,2} - u_{2,1}} = \frac{(0.5566 - 0.4961)}{0.1(0.164)} = 3.689 \quad \text{II-4}$$

$$x_{6@t_0} = x_{6,1} + 0.632(x_{6,2} - x_{6,1}) = 0.4961 + 0.632(0.5566 - 0.4961) = \quad \text{II-5}$$

$$x_{6@t_0} = 0.5343$$

$$t|_{t_0} = 150.55 \quad \text{II-6}$$

$$\tau_0 = t|_{t_0} - t_1 = 150.55 - 150.0 = 0.55 \quad \text{II-7}$$

La respuesta en la salida de control durante el cambio escalón en la entrada de control se puede visualizar en la **Figura II-3**.

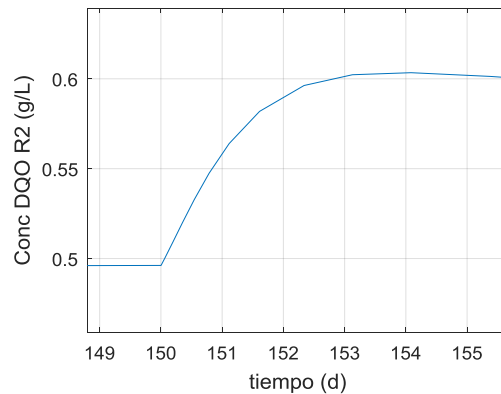


Figura II.0.3 Respuesta de la Salida, $y = x_6$, por efecto del cambio escalón en u_2

- **Caso II.** Regulación de AGV en el Reactor Acidogénico, $y = x_3$, $u = D_1 = u_1$

En este caso la tasa de dilución que corresponde a este reactor es $u_1 = D_1$, y los parámetros de la identificación empírica dependen del cambio escalón en esta variable, que a su vez está ligada con $u_1 = D_2$, por medio de la relación: $u_1 = \beta u_2$.

$$k_p = \frac{x_{3,2} - x_{3,1}}{(u_{2,2} - u_{2,1})\beta} = \frac{(127.4 - 0.4961)}{0.1(0.164)(1.9527)} = -53.084 \quad \text{II-8}$$

$$x_{3@t_0} = x_{3,1} + 0.632(x_{3,2} - x_{3,1}) = 129.1 + 0.632(127.4 - 129.1) = \quad \text{II-9}$$

$$x_{3@t_0} = 128.025$$

$$t|_{t_0} = 150.78 \quad \text{II-10}$$

$$\tau_0 = t|_{t_0} - t_1 = 150.78 - 150.0 = 0.78 \quad \text{II-11}$$

La gráfica correspondiente al comportamiento en la respuesta de la salida debido al cambio escalón en la entrada de control se muestra en la **Figura II-4**.

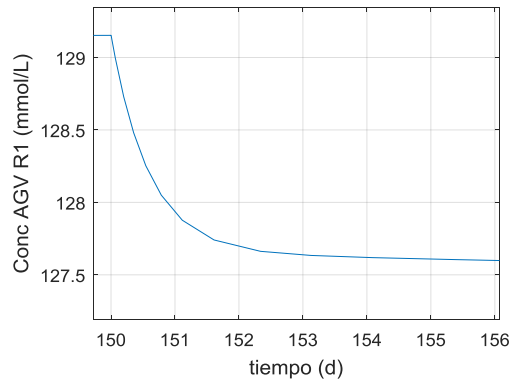


Figura II.0.4 Respuesta de la Salida, $y = x_3$, por efecto del cambio escalón en u_1

- **Caso III.** Regulación de AGV en el Reactor Metanogénico, $y = x_7$, $u = D_2 = u_2$.

$$k_p = \frac{x_{7,2} - x_{7,1}}{(u_{2,2} - u_{2,1})} = \frac{(4.963 - 4.388)}{0.1(0.164)} = 35.06 \quad \text{II-12}$$

$$x_{7@t_0} = x_{7,1} + 0.632(x_{7,2} - x_{7,1}) = 4.388 + 0.632(4.963 - 4.388) = \quad \text{II-13}$$

$$x_{7@t_0} = 4.7514$$

$$t|_{t_0} = 150.35 \quad \text{II-14}$$

$$\tau_0 = t|_{t_0} - t_1 = 150.35 - 150.0 = 0.35 \quad \text{II-15}$$

La gráfica correspondiente para este proceso de identificación empírica es la **Figura II.5.**

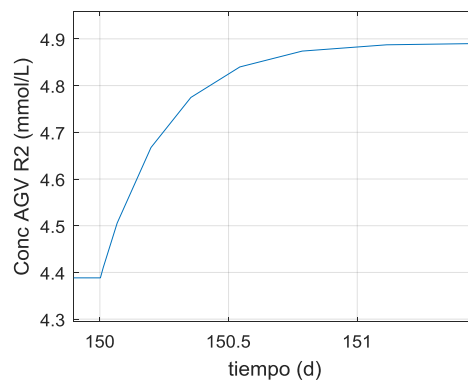


Figura II.5 Respuesta de la Salida, $y = x_7$, por efecto del cambio escalón en u_2

Anexo III: Programas de Matlab

Implementación del Algoritmo MEC en Matlab R2016b, Caso de Regulación de DQO en el reactor metanogénico. Son 3 archivos los que conforman el programa, de los cuales la rutina principal es:

teqvinandigestermainprogmecontrol_outputfunc_midtank

Y el archivo que contiene el modelo es: *teqtsangigestermec_midtank*. Y se tiene otro archivo para extraer la entrada de control durante la integración, que es: *andigester_outputfunc_midtank*.

teqvinandigestermainprogmecontrol_outputfunc_midtank

```

clc
clear all
tic
% Control Robusto usando MEC
global mu11max ks11 k21 S1ent S2ent a1
global mu12max ks12 mu22max ks22 ki2 a2 k35
global beta yref2c D10 D20
% Reactor acidogénico
mu11max=0.27; k21=3.5; ks11=24; S1ent=27; S2ent=50; a1=0.13;
% Reactor metanogénico
mu12max=0.50; ks12=3.5; mu22max=0.29; ks22=16; ki2=27; a2=0.38; k35=0.9;
V1=4.44;
V2=8.67;
beta=V2/V1;
%D20=0.1834;
D20=0.164;
D10=beta*D20;
%% Solución de ODE
vectin1=[94.79; S1ent; S2ent; 23.2; 100; 10; 30; -10];
options=odeset('OutputFcn',@andigester_outputfunc_midtank);
Finish1=500;
yref2c=[0.25 1.0 1.5 1.5];
[t,x]=ode23s(@teqtsangigestermec_midtank,[0 Finish1],vectin1,options);
tasdil1=tasdil1(:,1:end-1);
tasdil2=tasdil2(:,1:end-1);
%% Gráficas
disp([t,x]);
figure (1)
subplot(2,2,1);
plot(t',tasdil2,'LineWidth',1.5);
%xlabel('time (days)','FontSize',16); ylabel('Dilution rate, R2
(1/d)','FontSize',16);
xlabel('tiempo (d)','FontSize',12); ylabel('Tasa de Dilución, R2
(1/d)','FontSize',12);

```

```

xlim([0 Finish1]); ylim([0.0 0.60]);
grid on; hold on;
%title('Control input, u2, Methanogenic reactor','FontSize',16);
title('Entrada de Control, u2, Reactor Metanogénico','FontSize',12);
subplot(2,2,2);
plot(t,x(:,6),'LineWidth',1.5);
%xlabel('time (days)','FontSize',16); ylabel('COD Conc. R2
(g/L)','FontSize',16);
xlabel('tiempo (d)','FontSize',12); ylabel('DQO Conc. R2
(g/L)','FontSize',12);
xlim([0 Finish1]); ylim([0.0 3.0]);
grid on; hold on;
%title('Control Output, COD, Methanogenic reactor','FontSize',16);
%legend('NMPC','MEC','SMC 1er O.','SMC Libre M. ');
title('Salida de Control, DQO, Reactor Metanogénico','FontSize',12);
subplot(2,2,3);
plot(t,x(:,3),'LineWidth',1.5);
%xlabel('time (days)','FontSize',16); ylabel('VFA Conc. R1
(mmol/L)','FontSize',16);
xlabel('tiempo (d)','FontSize',12); ylabel('AGV Conc. R1
(mmol/L)','FontSize',12);
xlim([0 Finish1]);
grid on; hold on;
%title('VFA Acidogenic Reactor','FontSize',16);
title('AGV Reactor Acidogénico','FontSize',12);
subplot(2,2,4);
plot(t,x(:,7),'LineWidth',1.5);
%xlabel('time (days)','FontSize',16); ylabel('VFA Conc. R2
(mmol/L)','FontSize',16);
xlabel('tiempo (d)','FontSize',12); ylabel('AGV Conc. R2
(mmol/L)','FontSize',12);
xlim([0 Finish1]);
grid on; hold on;
%title('VFA Methanogenic reactor','FontSize',16);
title('AGV Reactor Metanogénico','FontSize',12);
%%
    figure (3)
subplot(2,3,1);
plot(t,x(:,1),'LineWidth',1.5); grid on; hold on; xlabel('tiempo (d)');
ylabel('Conc Biomasa Acidog R1 (g/L)'); xlim([0 Finish1]);
subplot(2,3,2);
plot(t,x(:,2),'LineWidth',1.5); grid on; hold on; xlabel('tiempo (d)');
ylabel('Conc DQO R1 (g/L)'); xlim([0 Finish1]);
subplot(2,3,3);
plot(t,x(:,3),'LineWidth',1.5); grid on; hold on; xlabel('tiempo (d)');
ylabel('Conc AGV R1 (mmol/L)'); xlim([0 Finish1]);
subplot(2,3,4);
plot(t,x(:,4),'LineWidth',1.5); grid on; hold on;
plot(t,x(:,5),'LineWidth',1.5); grid on; hold on; xlabel('tiempo (d)');
ylabel('Conc Biomasa Acid/Met R2 (gDQO/L,mmolAGV/L)'); xlim([0 Finish1]);
legend('Biom. Acid.','Biom. Met. ');
subplot(2,3,5);
plot(t,x(:,6),'LineWidth',1.5); grid on; hold on; xlabel('tiempo (d)');
ylabel('Conc DQO R2 (g/L)'); xlim([0 Finish1]); ylim([0.5 3.0]);

```

```

subplot(2,3,6);
plot(t,x(:,7),'LineWidth',1.5); grid on; hold on; xlabel('tiempo (d)');
ylabel('Conc AGV R2 (mmol/L)'); xlim([0 Finish1]);
%%
    figure (2)
subplot(2,1,1);
plot(t',tasdil2,'LineWidth',1.5); grid on; hold on;
set(gca,'fontsize',14);
xlabel('tiempo (d)','FontSize',14); ylabel('Tasa de Dilución, R2
(1/d)','FontSize',14); xlim([0 Finish1]); ylim([0 0.6]);
title('Entrada de Control, u2, Reactor Metanogénico','FontSize',13);
%legend('Tauc=0.20, Tauc=1.33','Tauc=0.165, Tauc=0.33');
%legend('NMPC','MEC','SMC ler O.','SMC Libre M. ');
subplot(2,1,2);
plot(t,x(:,6),'LineWidth',1.5); grid on; hold on; set(gca,'fontsize',14);
xlabel('tiempo (d)','FontSize',14); ylabel('Conc. DQO R2
(g/L)','FontSize',14); xlim([0 Finish1]); ylim([0 3.0]);
%legend('Tauc=0.20, Tauc=1.33','Tauc=0.165, Tauc=0.33');
title('Salida de control, DQO reactor metanogénico','FontSize',13);
toc

```

teqtsangigestermec_midtank

```

function [dxdt]=teqtsangigestermec_midtank(t,x)
global mullmax ks11 k21 S1ent S2ent a1
global mu12max ks12 mu22max ks22 ki2 a2 k35
global u1 u2 beta yref2c D20
dxdt=zeros(8,1);
tauc2=1.33;
taue2=0.20;
tau2=0.55;
kp2=3.6890;
if (t >= 400)
    S1ent=27*1.2*1.25; S2ent=50*1.2*1.25;
    yref2=yref2c(4);
else
    if (t >= 300)
        S1ent=27*1.2; S2ent=50*1.2;
        yref2=yref2c(3);
    else
        if (t >= 200)
            S1ent=27*1; S2ent=50*1;
            yref2=yref2c(2);
        else
            S1ent=27; S2ent=50;
            yref2=yref2c(1);
        end
    end
end
end
y2=x(6);
e2=y2-yref2;
eta2=(1/taue2)*(x(8)+y2);
if (t>=100)
    u2=- (tau2/kp2)*(-(y2/tau2)+(e2/tauc2)+eta2);
    if u2<=0.05

```

```

        u2=0.05;
    end
    if (u2>=0.56)
        u2=0.56;
    end
else
    u2=D20;
end
u1=beta*u2;
mu11=(mu11max*x(2))/(ks11+x(2));
mu12=(mu12max*x(6))/(ks12+x(6));
mu22=(mu22max*x(7))/(ks22+x(7)+(x(7)/ki2)^2);
dxdt(1)=mu11*x(1)-a1*beta*u2*x(1);
dxdt(2)=(S1ent-x(2))*beta*u2-mu11*x(1);
dxdt(3)=(S2ent-x(3))*beta*u2+k21*mu11*x(1);
dxdt(4)=mu12*x(4)-a2*u2*x(4);
dxdt(5)=mu22*x(5)-a2*u2*x(5);
dxdt(6)=-mu12*x(4)+(x(2)-x(6))*u2;
dxdt(7)=(x(3)-x(7))*u2-mu22*x(5)+k35*mu12*x(4);
dxdt(8)=(1/tau2)*y2-(kp2/tau2)*u2-eta2;
end

```

andigester_outputfunc_midtank

```

function status = andigester_outputfunc_midtank(t,x,flag,u1,u2)
global u1 u2 beta
persistent k tasdil1 tasdil2
status = 0;
    if isempty(k)
        k=0;
    end
tasdil1(k+1)=beta*u2;
tasdil2(k+1)=u2;
assignin('base','tasdil1',tasdil1)
assignin('base','tasdil2',tasdil2)
k=k+1;
end

```