



Universidad de  
Castilla-La Mancha



RSME2022  
Ciudad Real

Congreso Bienal de la

# Real Sociedad Matemática Española

Del 17 al 21 de Enero

## LIBRO DE RESÚMENES

## Y

## ACTIVIDADES

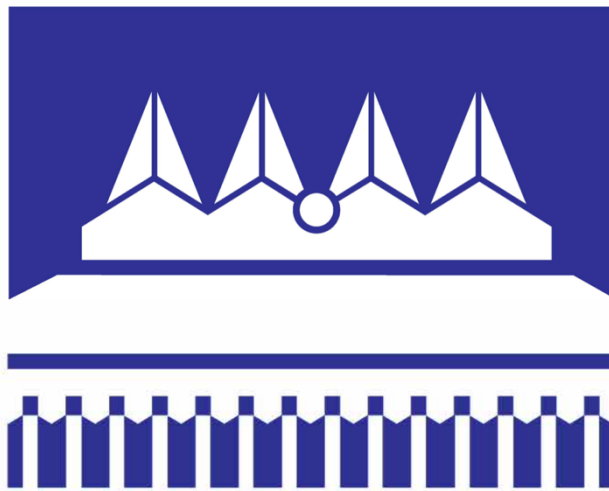
Organizan:



# Índice general

<b>1. Comités</b>	<b>3</b>
1.1. Comité de Honor . . . . .	4
1.2. Comité Científico . . . . .	5
1.3. Comité Organizador . . . . .	6
<b>2. Sesiones plenarias</b>	<b>7</b>
2.1. Antonio Alarcón (Universidad de Granada) . . . . .	8
2.2. Kari Astala (Aalto University) . . . . .	9
2.3. Marta Casanellas (U. Politècnica de Catalunya) . . . . .	10
2.4. Diego Córdoba (ICMAT) . . . . .	11
2.5. Laura Costa (Universitat de Barcelona) . . . . .	12
2.6. Javier Fernández de Bobadilla (BCAM) . . . . .	13
2.7. María Ángeles García Ferrero (BCAM) . . . . .	14
2.8. Gabor Lugosi (Universitat Pompeu Fabra) . . . . .	15
2.9. Teresa Martínez-Seara (U. Politècnica de Catalunya) . . . . .	16
2.10. Svitlana Mayboroda (University of Minnesota) . . . . .	17
2.11. Daniel Peralta (ICMAT) . . . . .	18
2.12. Víctor M. Pérez-García (UCLM) . . . . .	19
2.13. Daniel Sanz Alonso (The University of Chicago) . . . . .	20
<b>3. Sesiones especiales</b>	<b>21</b>
3.1. Álgebra computacional y aplicaciones . . . . .	22
3.2. Álgebras no asociativas . . . . .	35
3.3. Análisis complejo y teoría de operadores . . . . .	48
3.4. Análisis geométrico . . . . .	61
3.5. Combinatorics and computation in commutative algebra . . . . .	73
3.6. Dinámica no autónoma y aplicaciones . . . . .	90
3.7. Diseño óptimo de experimentos . . . . .	102
3.8. El papel de las matemáticas ante los objetivos de desarrollo sostenible . . . . .	111
3.9. Free boundary problems in physics and biology . . . . .	120
3.10. Geometría algebraica: la aplicada, la computacional y la numérica . . . . .	133
3.11. Geometría convexa . . . . .	150
3.12. Geometry, mechanics and control . . . . .	161

3.13. Inverse problems for partial differential equations: from analysis to applications . . . . .	170
3.14. Matemáticas de la teoría de la información . . . . .	182
3.15. Mathematical models and numerical simulation in fluid dynamics . . . . .	207
3.16. Métodos iterativos en la resolución de problemas no lineales . . . . .	225
3.17. Métodos numéricos en ecuaciones en derivadas parciales y aplicaciones . . . . .	235
3.18. Métodos numéricos para la física y la ingeniería . . . . .	252
3.19. Polinomios ortogonales, funciones especiales y aplicaciones . . . . .	263
3.20. Recent trends in the analysis of non-local and non-linear equations . . . . .	276
3.21. Red advances in linear algebra and matrix analysis . . . . .	292
3.22. Red de geometría algebraica y singularidades . . . . .	305
3.23. Red de análisis funcional y aplicaciones . . . . .	322
3.24. Teoría de números . . . . .	335
3.25. Topological structures in algebra, combinatorics and geometry and their applications . . . . .	348
3.26. Experiencias docentes . . . . .	361
<b>4. Pósteres</b>	<b>362</b>
<b>5. Conferencias divulgativas e informativas</b>	<b>413</b>
5.1. El espejismo de la mayoría (Eduardo Sáenz de Cabezón, Universidad de la Rioja) . . . . .	414
5.2. Leonardo Torres Quevedo: el ingeniero total (Francisco A. González Redondo, Universidad Complutense de Madrid) . . . . .	415
5.3. La Matemática y la Historia de [todas y cada una de] las ciencias...contadas en 45 minutos (Francisco A. González Redondo, Universidad Complutense de Madrid) . . . . .	417
5.4. Mejora de la terminología matemática en el Diccionario de la lengua española: una colaboración entre la RSME y la RAE (M. Victoria Otero Espinar, U. de Santiago de Compostela). . . . .	419
<b>6. Mesas Redondas</b>	<b>420</b>
6.1. Matemátic@s español@s en el mundo:ayudas a la investigación . . . . .	421
6.2. Un camino con aristas: del doctorado a la empresa y de la empresa al doctorado . . . . .	422
6.3. El acceso a la profesión docente en secundaria: situación y perspectivas . . . . .	424
6.4. Divulgación en internet y redes sociales . . . . .	426
6.5. Influencia de los indicadores bibliométricos en el desarrollo profesional en matemáticas . . . . .	427
<b>7. Exposiciones</b>	<b>428</b>
7.1. Leonardo Torres Quevedo . . . . .	429
7.2. Póster/Prisma Mujeres y Matemáticas . . . . .	433



**COMITÉS**

## COMITÉ DE HONOR

**Diana Morant** (Ministra de Ciencia e Innovación)

**Pilar Alegría Continente** (Ministra de Educación y Formación Profesional)

**Eva María Masías Avís** (Alcaldesa de Ciudad Real)

**José Manuel Caballero Serrano** (Presidente de la Diputación de Ciudad Real)

**José Julián Garde López-Brea** (Rector de la Universidad de Castilla - La Mancha)

## COMITÉ CIENTÍFICO

**PRESIDENTE: Pablo Pedregal** (Universidad de Castilla - La Mancha)

**Enrique Artal** (Universidad de Zaragoza)

**Antonio Campillo** (Universidad de Valladolid)

**María Josefa Cánovas** (Universidad Miguel Hernández de Elche)

**Begoña Barrios** (Universidad de La Laguna)

**Ángel Ferrández Izquierdo** (Universidad de Murcia)

**Francisco López** (Universidad de Granada)

**José María Martell** (ICMat)

**Eulalia Nualart** (Universidad Pompeu Fabra)

**Luz Roncal** (BCAM)

**Xavier Ros-Otón** (Universitat Zurich)

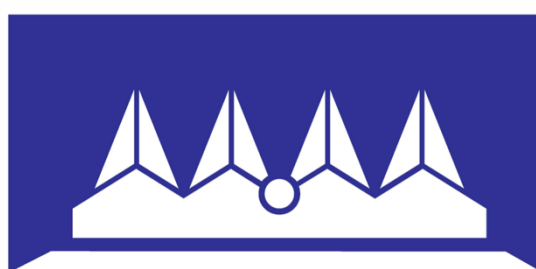
## COMITÉ ORGANIZADOR

**PRESIDENTA: Henar Herrero**

**Ernesto Aranda Ortega  
José Carlos Bellido Guerrero  
Juan Belmonte Beitia  
Alberto Donoso Bellón  
Gabriel Fernández Calvo  
María Cruz Navarro Lérica  
Helia Pereira Serrano  
Francisco Pla Martos**

**COLABORADORES:**

**David G. Aragonés González  
María Arias Almansa  
Emilio Barajas España  
Jesús Bosque Martínez  
Irene Caracena Alejo  
Elena Castellanos Rosado  
Jesús Cortés Velasco  
Javier Cueto García  
María González de la Rubia  
Juan Jiménez Sánchez  
Juan López Matilla  
Darío Martínez Martínez  
Beatriz Ocaña Tienda  
Carmen Ortega Sabater  
Julián Pérez Beteta**



**SESIONES PLENARIAS**



## Complete complex hypersurfaces in the ball

A. ALARCÓN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Geometría y Topología e Instituto de Matemáticas (IMAG), Universidad de Granada (Spain).*  
*E-mail: alarcon@ugr.es.*

### Resumen

In 1977 Paul Yang [1] posed the question whether there are complex submanifolds in a complex Euclidean space which are bounded and complete in the classical sense of Riemannian geometry. The answer is yes, there are. In this talk we will review the history of this problem and explain, without requiring the audience to have specialized knowledge, some of the recent progresses in the topic.

### Referencias

- [1] P. Yang. *Curvatures of complex submanifolds of  $C^n$* . J. Differential Geom. 12(4) (1977-1978), 499–511.

## Burkholder integrals, restricted quasiconvexity and energy functionals in non-linear elasticity

K. ASTALA<sup>1</sup>, D. FARACO<sup>2</sup>, A. GUERRA<sup>3</sup>, J. KRISTENSEN<sup>4</sup>,  
A. KOSKI<sup>5</sup>

<sup>1</sup> *University of Helsinki. E-mail: kari.astala@helsinki.fi.*

<sup>2</sup> *Universidad Autonoma de Madrid. E-mail: daniel.faraco@uam.es.*

<sup>3</sup> *Institute of Advanced Study. E-mail: aguerra@ias.edu.*

<sup>4</sup> *University of Oxford. E-mail: jan.kristensen@maths.ox.ac.uk.*

<sup>5</sup> *Universidad Autonoma de Madrid. E-mail: aleksis.koski@gmail.com.*

### Resumen

The Burkholder functional  $B_p$  gives a particularly interesting candidate to test Morrey's conjecture in two dimensions, i.e. if every rank-one convex integrand or functional in  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  is quasiconvex.

In this talk on our joint work in preparation, we extend [1] and show that  $B_p$  is quasiconvex at matrices  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  with  $B_p(A) < 0$ , when tested with Sobolev maps with  $B_p(Df) \leq 0$ . This has immediate corollaries on quasiconvexity of energy functionals in non-linear elasticity where, to avoid cavitation and interpenetration of matter, natural minimisers are Sobolev homeomorphisms.

### Referencias

- [1] K. Astala, T. Iwaniec, I. Prause, E. Saksman, *O Burkholder integrals, Morrey's problem and quasi-conformal mappings*, J. Amer. Math. Soc. 25 (2012), 507–531.

## La filogenética vista desde el álgebra

M. CASANELLAS<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya (Spain). E-mail: marta.casanellas@upc.es.*

<sup>2</sup> *Centre de Recerca Matemàtica (Spain).*

### Resumen

La filogenética estudia la historia evolutiva de las especies de nuestro planeta. La evolución de las especies se puede representar en un árbol filogenético donde las hojas representan especies actuales y los nodos interiores sus especies ancestrales. Este estudio se hace a partir del genoma de las especies y tiene impacto más allá del conocimiento científico: sirve para determinar el origen de patógenos, para establecer políticas de preservación de la biodiversidad y para la trazabilidad de células cancerígenas entre otras aplicaciones.

Es habitual modelizar la sustitución de nucleótidos mediante un proceso de Markov sobre el árbol filogenético. Estos procesos pueden verse como aplicaciones polinomiales en términos de los parámetros de sustitución. En esta charla mostraremos como esta aproximación a la filogenética da paso al uso de técnicas algebraicas para la reconstrucción filogenética (véase [1, 2]). Veremos también que añadir condiciones semi-algebraicas puede mejorar los métodos de reconstrucción filogenética (véase [3]).

Finalmente, basándonos en [4] discutiremos las ventajas y desventajas de esta aproximación a la filogenética y mostraremos resultados en datos reales y simulados.

### Referencias

- [1] E. S. Allman and J. A. Rhodes. *Phylogenetic invariants*. In Gascuel, O. and Steel, M. A., editors, *Reconstructing Evolution*. Oxford University Press, 2007.
- [2] M. Casanellas and J. Fernández-Sánchez. *Relevant phylogenetic invariants of evolutionary models*. *J. Mathématiques Pures et Appliquées* (2011), 96, 207–229.
- [3] M. Casanellas, J. Fernández-Sánchez, and M. Garrote-López. *SAQ: semi-algebraic quartet reconstruction method*. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics* (2021), 1–28. (early acces).
- [4] M. Casanellas, J. Fernández-Sánchez, and J. Roca-Lacostena. *The embedding problem for Markov matrices*. *Publicacions Matemàtiques* (2021), to appear.

## Finite time singularities for incompressible fluids

DIEGO CÓRDOBA

*Instituto de Ciencias Matemáticas CSIC-UAM-UCM-UC3M (Spain). E-mail: dcg@icmat.es.*

### Resumen

The search for singularities in incompressible flows has become a major challenge in the area of non-linear partial differential equations and is relevant in applied mathematics, physics and engineering. The basic fluid dynamics systems that we consider in this lecture are Euler equations, Darcy's law and the surface quasi-geostrophic equations. The fundamental questions to address are local existence, uniqueness, global-existence of solutions or on the other hand, formation of singularities. We will review some recent developments on the above topics.

## Ulrich bundles

L. COSTA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona (Spain). E-mails: costa@ub.edu.*

### Resumen

More than ten years ago, David Eisenbud and Frank-Olaf Schreyer posed the question whether any smooth projective variety is the support of an Ulrich bundle. In spite the theory of Ulrich bundles has become a very active area of research, this problem is still open. During the talk we will review some contributions to it and we will see how Ulrich bundles appear in multiple scenarios as commutative algebra, algebraic geometry or physics. We will see that the construction of Ulrich bundles has received inputs from a priori unrelated areas and that, at the same time, has motivated other problems and conjectures in these other areas.

### Referencias

- [1] L. Costa, R.M. Miró-Roig, J. Pons-Llopis, *Ulrich bundles: from commutative algebra to algebraic geometry*, Studies in Mathematics **77**, De Gruyter (2021).
- [2] David Eisenbud, Frank-Olaf Schreyer and Jerzy Weyman, *.Resultants and Chow forms via exterior syzygies*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 537-579 .

## Singularities, contact loci and Floer Homology and the Zariski multiplicity conjecture

J. FERNÁNDEZ DE BOBADILLA<sup>1</sup>, T. PELKA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *BCAM, Bilbao (Spain). E-mail: jbobadilla@bcamath.org.*

### Resumen

The lecture will start with some two old Singularity Theory conjectures by Zariski, stop to show how one of them was disproved, and gradually evolve to show how Symplectic Topology, Floer theory and hybrid log-tropical- classical spaces helps with the positive solution of the Zariski multiplicity conjecture (the one that remained open) for families of isolated singularities, and to a better understanding of the truth behind the disproved one.

## The Calderón problem for local and nonlocal Schrödinger equations

MARÍA ÁNGELES GARCÍA-FERRERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *BCAM - Basque Center for Applied Mathematics, Alameda de Mazarredo 14, 48009 Bilbao (Spain).*  
*E-mail: mgarcia@bcamath.org.*

### Resumen

The classical Calderón problem is the inverse problem which the electrical impedance tomography is based on. Equivalently, we may consider the inverse problem of determining the potential of the Schrödinger equation from boundary measurements. Some crucial questions about this kind of problems can be studied by exploiting Runge approximation results for the corresponding operators, which are based on unique continuation or antilocal properties.

In this talk we will see the idea of these arguments in the study of the stability improvements for a Calderón problem for the acoustic Helmholtz equation [2].

We will also compare the classical Calderón problem with its nonlocal counterpart. In particular, we will consider nonlocal operators which “see” conical domains and which are generators of stable processes. We will see the implications of directional antilocality for the approximation theorems and for the associated Calderón problem and we will discuss the new phenomena which arise [1].

Finally, we will talk about further implications of the unique continuation in other inverse problems involving nonlocal operators [3].

These are joint works with Giovanni Covi, Angkana Rüland and Wiktorija Zatoń.

### Referencias

- [1] G. Covi, M.Á. García-Ferrero, A. Rüland, *The Calderón problem for nonlocal Schrödinger equations with homogeneous, directionally antilocal principal symbols*, arXiv preprint 2109.14976.
- [2] M.Á. García-Ferrero, A. Rüland, W. Zatoń, *Runge approximation and stability improvement for a partial data Calderón problem for the acoustic Helmholtz equation*, *Inverse Probl. Imaging* (2021) 1–31.
- [3] M.Á. García-Ferrero, A. Rüland, *On two methods for quantitative unique continuation results for some nonlocal operators*, *Commun. Part. Diff. Eq.* 45:11 (2020) 1512–1560.

## Arqueología de árboles: búsqueda de la raíz y transmisión

GÁBOR LUGOSI<sup>1 2 3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Economía y Empresa, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona (Spain), E-mail: gabor.lugosi@upf.edu,*

<sup>2</sup> *ICREA, Pg. Lluís Companys 23, 08010 Barcelona (Spain)*

<sup>3</sup> *Barcelona School of Economics*

### Resumen

A menudo redes – por ejemplo redes sociales y redes de comunicación – se modelan mediante procesos aleatorios en los que los nodos se agregan uno por uno, de acuerdo con una regla aleatoria simple. Los árboles de apego uniformes y preferenciales se encuentran entre los ejemplos más simples de estas redes de crecimiento dinámico. En esta charla estudiamos algunos problemas estadísticos sobre el descubrimiento del pasado del árbol cuando uno se observa el árbol en su estado presente. Presentamos algunos resultados que demuestran que, incluso en redes gigantes se conserva mucha información sobre el origen de la red. En particular, estudiaremos el problema de encontrar la raíz y el problema de la transmisión (“broadcasting”).

### Referencias

- [1] S. Bubeck, L. Devroye, and G. Lugosi. *Finding Adam in random growing trees*. *Random Structures and Algorithms*, 50:158–172, 2017.
- [2] L. Addario-Berry, L. Devroye, G. Lugosi, and V. Velona. *Broadcasting on random recursive trees*. *Annals of Applied Probability*, 2021, to appear.



## About the non-existence of small breathers in Klein-Gordon equations

O. GOMIDE<sup>1</sup>, M. GUARDIA<sup>2</sup>, T.M-SEARA<sup>2</sup> CH. ZENG<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpt. Math., Universidad Federal de Goiania, Goiania, Brazil E-mail: otaviomarc@ufg.br.*

<sup>2</sup> *Dpt. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona. E-mails: marcel.guardia@upc.edu, tere.m-seara@upc.edu.*

<sup>3</sup> *School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA. E-mail: zengch@math.gatech.edu.*

### Resumen

Breathers are solutions of evolutionary PDEs, which are periodic in time and spatially localized. They are known to exist for the sine-Gordon equation but are believed to be rare in other Klein-Gordon equations. When the spatial dimension is equal to one, exchanging the roles of time and space variables (in the so-called spatial dynamics framework), breathers can be interpreted as homoclinic solutions to steady solutions (in an infinite dimensional space of periodic in time solutions). Thus arise from the intersections of the stable and unstable manifolds of the steady states.

In this talk, we shall study small breathers of the nonlinear Klein-Gordon equation generated in an unfolding bifurcation as a pair of eigenvalues collide at the origin when a parameter (temporal frequency) varies. Due to the presence of the oscillatory modes, generally the finite dimensional stable and unstable manifolds do not intersect in the infinite dimensional phase space, but with an exponentially small splitting (relative to the amplitude of the breather) in this singular perturbation problem of multiple time scales.

We will explain how to obtain an asymptotic formula for the distance between the stable and unstable manifold of the steady solutions when the steady solution has weakly hyperbolic one dimensional stable and unstable manifolds. This formula allows to say that for a wide set of Klein-Gordon equations breathers do not exist.

Due to the exponential small splitting, classical perturbative techniques cannot be applied to this problem.

### Referencias

- [1] O.M.L. Gomide, M. Guardia, T. M-Seara, Ch. Zeng. *On small breathers of nonlinear Klein-Gordon equations via exponentially small homoclinic splitting*. Preprint at archiv: <https://arxiv.org/pdf/2107.14566.pdf>

## The landscape law and wave localization

S. MAYBORODA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *University of Minnesota (USA). E-mail: svtlana@math.umn.edu.*

### Resumen

Complexity of the geometry, randomness of the potential, and many other irregularities of the system can cause powerful, albeit quite different, manifestations of localization, a phenomenon of sudden confinement of waves, or eigenfunctions, to a small portion of the original domain. In the present talk we show that behind a possibly disordered system there exists a structure, referred to as a landscape function, which can predict the location and shape of the localized eigenfunctions, a pattern of their exponential decay, and deliver accurate bounds for the corresponding eigenvalues. In particular, we establish the first non-asymptotic estimates from above and below on the integrated density of states of the Schrödinger operator using a counting function for the minima of the localization landscape.

## Universal computation and hydrodynamics

D. PERALTA-SALAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid (Spain). E-mail: dperalta@icmat.es.*

### Resumen

Is hydrodynamics capable of performing computations? or in other words, does there exist a fluid flow that can simulate any computer algorithm? This intriguing question was first formulated by C. Moore in 1991, and has been open for decades. In recent years, this problem has been revisited by T. Tao in relation with the celebrated blow-up problem in fluid mechanics: if such a universal “fluid computer” exists, it may be feasible to use it to design an initial datum that develops singularities when evolving with the Euler or Navier-Stokes equations. In this talk I will show how to construct stationary and time-dependent solutions of the Euler equations that are Turing complete, i.e., they can simulate any Turing machine. A striking consequence of these results is the existence of undecidable fluid particle paths, in the sense that there is no general algorithm to decide whether the trajectories of the flow starting at certain points will reach a certain (explicit) open set. This is a manifestation of complexity in hydrodynamics very different from the theory of chaos. This is based on the joint works [1, 2, 3, 4].

### Referencias

- [1] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, F. Presas. *Universality of Euler flows and flexibility of Reeb embeddings*. Preprint.
- [2] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas, F. Presas. *Constructing Turing complete Euler flows in dimension 3*. Proc. Natl. Acad. Sci. 118 (2021) e2026818118.
- [3] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas. *Turing universality of the incompressible Euler equations and a conjecture of Moore*. Int. Math. Res. Notices, to appear.
- [4] R. Cardona, E. Miranda, D. Peralta-Salas. *Computability and Beltrami fields in Euclidean space*. Preprint.

## Dinámica evolutiva en cáncer: Una aproximación matemática

VÍCTOR M. PÉREZ GARCÍA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratorio de Oncología Matemática, Dpto. de Matemáticas, E.TS. Industriales e Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería, Edificio Politécnico, Avenida de Camilo José Cela, 3. Universidad de Castilla-La Mancha (Spain). E-mail: victor.perezgarcia uclm.es.*

### Resumen

Muchos sistemas naturales son sistemas complejos compuestos de un elevado número de subsistemas que interactúan entre ellos. A pesar de su complejidad intrínseca, en ocasiones aparecen relaciones sencillas entre variables macroscópicas que describen correctamente aspectos de estos sistemas. Uno de los casos más notables son las llamadas leyes de escala, que relacionan una propiedad  $Z$  de un sistema, por ejemplo biológico, con su tamaño  $M$  de modo algebraico  $Z = \alpha M^\beta$  [1].

En esta charla presentaré evidencias que demuestran la existencia de leyes de escala universales en cáncer [2] y cómo estas implican un aumento de la agresividad del tumor con el tiempo que conduce a un crecimiento explosivo a medida que avanza la enfermedad. Las observaciones pueden entenderse utilizando diferentes tipos de modelos matemáticos inspirados en la biología que incorporan dinámica evolutiva genética [2]. La mayoría de los fenómenos observados pueden describirse utilizando modelos simplificados basados en ecuaciones en derivadas parciales no locales.

Explicaré cómo los enfoques matemáticos conducen al descubrimiento de diferentes biomarcadores, esto es, variables cuantitativas que proporcionan información sobre el pronóstico enfermedad, y que se han validado utilizando datos de imágenes médicas [3]. También discutiré problemas matemáticos abiertos que surgen en el contexto de esta investigación.

### Referencias

- [1] G. West, *Scale: The Universal Laws of Life and Death in Organisms, Cities and Companies*. Penguin, 2017.
- [2] V. M. Pérez-García, G. F. Calvo, J. J. Bosque y col., *Universal scaling laws rule explosive growth in human cancers*, Nature Physics 16 (2020) 1232-1237.
- [3] J. Jiménez-Sánchez, J. J. Bosque, G. A. Jiménez-Londoño, D. Molina-García, A. Martínez-Rubio, J. Pérez-Beteta, C. Ortega-Sabater, A. F. Honguero-Martínez, A. M. García-Vicente, G. F. Calvo, V. M. Pérez-García. *Evolutionary dynamics at the tumor edge reveals metabolic imaging biomarkers*. Proceedings of the National Academy of Sciences 118(6) (2021) e2018110118.

# Representaciones de procesos Gaussianos con elementos finitos y grafos

D. SANZ-ALONSO<sup>1</sup>, R. YANG <sup>1</sup>

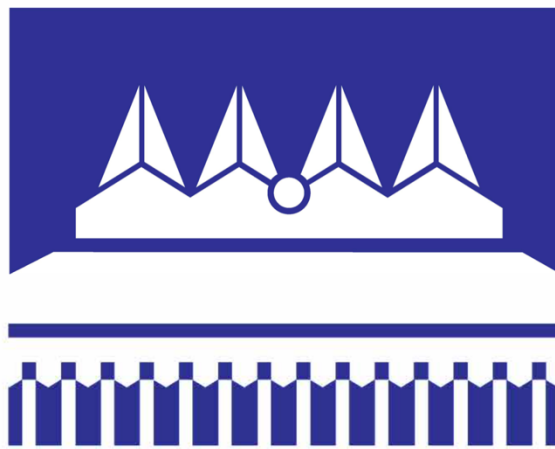
<sup>1</sup> *Department of Statistics, University of Chicago. E-mails: sanzalonso@uchicago.edu and yry@uchicago.edu.*

## Resumen

Los procesos Gaussianos son un importante modelo para funciones aleatorias en matemática aplicada y computacional, estadística y aprendizaje de máquinas. Sin embargo, los métodos basados en procesos Gaussianos no escalan bien cuando se dispone de muchas observaciones, debido al costo de factorizar una matriz de covarianza densa. En estadística espacial, una técnica común para mejorar el escalado es representar procesos de Matérn usando elementos finitos, obteniendo una aproximación con matriz de precisión dispersa. En la primera parte de esta charla presentaré nuevos resultados de esta técnica con aplicaciones a regresión y clasificación con muchas observaciones. Mostraré que, bajo hipótesis de regularidad, las matrices que se han de factorizar se pueden reducir sin empeorar el error en la estimación. En la segunda parte de la charla, introduciré representaciones de procesos Gaussianos basadas en grafos, que permiten extender de manera substancial la aplicabilidad importante pero limitada de las técnicas basadas en elementos finitos. Presentaré un análisis de error y estudiaré la concentración de la medida posterior en aprendizaje semi-supervisado. Concluiré la charla demostrando la versatilidad de las técnicas de grafos en aplicaciones en regresión, clasificación y problemas inversos, donde los nodos del grafo representan muestras de variedades desconocidas.

## Referencias

- [1] D. Sanz-Alonso and R. Yang *The SPDE approach to Matérn fields: graph representations*, Statistical Science, to appear 2021+.
- [2] D. Sanz-Alonso and R. Yang *Unlabeled data help in graph-based semi-supervised learning: a Bayesian nonparametrics perspective*. arXiv preprint arXiv:2008.11809.
- [3] D. Sanz-Alonso and R. Yang *Finite element representations of Gaussian processes: Balancing Numerical and Statistical Accuracy*. arXiv preprint arXiv:2109.02777.
- [4] J. Harlim, D. Sanz-Alonso and R. Yang *Kernel methods for Bayesian elliptic inverse problems on manifolds*. SIAM/ASA J. Uncertainty Quantification, 8(4), 1414-1445, (2020).



# SESIONES ESPECIALES

## ÁLGEBRA COMPUTACIONAL Y APLICACIONES

### ORGANIZADORES

**Manuel Ladra** (Universidad de Santiago de Compostela)

**Francisco Castro Jiménez** (Universidad de Sevilla)

**Carlos D'Andrea** (Universitat de Barcelona)

**Ana Romero** (Universidad de La Rioja)

## Nuevo módulo de Kenzo para el cálculo de sistemas espectrales de fibraciones simpliciales

D. MIGUEL<sup>1</sup>, A. GUIDOLIN<sup>2</sup>, A. ROMERO<sup>1</sup>, J. RUBIO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Spain). E-mails: damigutr@unirioja.es, ana.romero@unirioja.es, julio.rubio@unirioja.es.*

<sup>2</sup> *KTH Royal Institute of Technology, Stockholm (Sweden). E-mail: guidolin@kth.se.*

### Resumen

En este trabajo presentamos, como continuación a [4] y [5], un nuevo módulo del sistema de álgebra computacional Kenzo [1] dedicado al cálculo de nuevos sistemas espectrales [2]. Dado un conjunto simplicial, podemos considerar las construcciones de sus espacios de lazos y clasificante, junto con las fibraciones universales asociadas [3]. A partir de cada una de ellas, combinándolas con la fibración inicial, construimos dos sistemas espectrales que relacionan sucesiones espectrales de Serre y de Eilenberg–Moore.

Para definir los sistemas espectrales, utilizamos filtraciones generalizadas sobre *downsets* en  $\mathbb{Z}^2$ . Dichas filtraciones se definen en ciertos complejos de tipo Bar y Cobar, que son los que originan las sucesiones espectrales de Eilenberg–Moore [6]. La implementación abarca complejos de cadenas de tipo infinito, mediante la técnica de homología efectiva [7].

### Referencias

- [1] X. Dousson, J. Rubio, F. Sergeraert, Y. Siret, *The Kenzo Program*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/sergerar/Kenzo/>. 1999.
- [2] B. Matschke, *Successive spectral sequences*. <http://arxiv.org/abs/1308.3187v1>. 2013.
- [3] J.P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Van Nostrand Mathematical Studies, University of Chicago Press. 1967.
- [4] D. Miguel, A. Guidolin, A. Romero, J. Rubio, *Constructing new spectral systems from simplicial fibrations*. Short communication in ISSAC 2021.
- [5] D. Miguel, A. Guidolin, A. Romero, J. Rubio, *Effective spectral systems relating Serre and Eilenberg–Moore spectral sequences*. Preprint. 2021.
- [6] J. McCleary, *User’s guide to spectral sequences*. Publish or Perish. 1985.
- [7] J. Rubio, F. Sergeraert, *Constructive Algebraic Topology*. Bulletin des Sciences Mathématiques 126, 389-412. 2002.



## Survey on resolution of algebraic ODEs

J. CARAVANTES<sup>1</sup>, J. R. SENDRA<sup>1</sup>, D. SEVILLA<sup>2</sup>, C. VILLARINO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidad de Alcalá, Dpto. Física y Matemáticas, Alcalá de Henares, Madrid, Spain. E-mails: [jorge.caravantes@uah.es](mailto:jorge.caravantes@uah.es), [rafael.sendra@uah.es](mailto:rafael.sendra@uah.es), [carlos.villarino@uah.es](mailto:carlos.villarino@uah.es).

<sup>2</sup> Centro Universitario de Mérida, Universidad de Extremadura, Spain. E-mail: [sevillad@unex.es](mailto:sevillad@unex.es).

### Resumen

In this talk we will survey the topic of resolution of algebraic ODEs, a class of differential equations to which one can apply results and algorithms of Algebraic Geometry. In particular, we will describe the application of a radical reparametrization algorithm by the authors to the simplification of ODEs with radical coefficients [1].

Articles by other authors on the topic of algebraic ODEs will also be discussed, from seminal work of Ngô and Winkler [2] to more recent ones on solutions by Puiseux series [3].

### Referencias

- [1] J. Caravantes, J. R. Sendra, D. Sevilla, C. Villarino, *Transforming ODEs and PDEs from Radical Coefficients to Rational Coefficients*, *Mediterr. J. Math.* 18, 96 (2021), DOI 10.1007/s00009-021-01703-x.
- [2] L.X. Châu Ngô, F. Winkler, *Rational general solutions of first order non-autonomous parametrizable ODEs*, *J. of Symb. Comput.* 45-12 (2010), pp. 1426–1441, DOI 10.1016/j.jsc.2010.06.018.
- [3] J. Cano, S. Falkensteiner, D. Robertz, J. R. Sendra, *Algebraic and Puiseux series solutions of systems of autonomous algebraic ODEs of dimension one in several variables*, preprint (2021), arxiv:2110.05558.

## Cálculo de invariantes en semigrupos numéricos

GUADALUPE MÁRQUEZ<sup>1</sup>, JOSÉ MARÍA TORNERO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail: gmarquez@us.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Álgebra, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail: tornero@us.es.

### Resumen

Un semigrupo numérico es un conjunto de enteros cerrado para la suma, que contiene al cero, y cuyo complemento en  $\mathbb{N}$  es finito ( $\mathbb{N}$  es el conjunto de enteros no negativos). Estudiaremos algunos casos particulares de semigrupos numéricos utilizando los invariantes clásicos. En particular nos centraremos en utilizar como herramienta el conjunto de Apéry.

### Referencias

- [1] Delgado, M.; García-Sánchez, P.A.; Morais, J.: NumericalSgps: a GAP package on numerical semigroups. (<http://www.gap-system.org/Packages/numericalsgps.html>).
- [2] García-Sánchez, P.A.; Rosales, J.C.: *Numerical semigroups*. Springer, 2009.
- [3] Lipman, J.: Stable ideals and Arf rings. *Amer. J. Math.* **93** (1971) 649–685.
- [4] Márquez-Campos, G.; Ojeda, I.; Tornero, J.M.: On the computation of the Apéry set of numerical monoids and affine semigroups. *Semigroup Forum* **91** (2015) 139–158.
- [5] Rosales, J.C.; García-Sánchez, P.A.; García-García, J.I.; Branco, M.B.: Saturated numerical semigroups. *Houston J. Math.* **30** (2004) 321–330.

## The embedding problem for Markov matrices

J. FERNÁNDEZ-SÁNCHEZ<sup>1</sup>, M. CASANELLAS<sup>1</sup>,  
J. ROCA-LACOSTENA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpt. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya (Spain).*  
*E-mails: [jesus.fernandez.sanchez@upc.edu](mailto:jesus.fernandez.sanchez@upc.edu), [marta.casanellas@upc.edu](mailto:marta.casanellas@upc.edu),  
[jordi.roca.lacostena@upc.edu](mailto:jordi.roca.lacostena@upc.edu).*

### Resumen

Modelling evolution is the first and one of the most fundamental steps in phylogenetics and it is where the crucial hypotheses that should lead to reconstruct the evolutionary history are assumed. There are several approaches one might take and it is natural to ask which conditions must be required for evolutionary models to fit the real evolutionary processes. For instance, under a Markov process, which are the plausible structures for transition matrices in a given DNA substitution model? Should any Markov matrix with such structure be considered as a biologically realistic transition matrix? These and similar questions lead to the study of the *embedding problem* for Markov matrices [1], which attempts to characterize those Markov matrices that can be written as the exponential of some rate matrix (a Markov generator).

The embedding problem is an old problem, and so far it had been solved for matrices of size  $2 \times 2$  or  $3 \times 3$ . In this talk, we discuss this problem and review the last results obtained in two different lines (see [2]). First, for matrices of any size, we give a bound on the number of Markov generators in terms of the spectrum of the Markov matrix. Based on this, we establish a criterion for deciding whether a generic Markov matrix (different eigenvalues) is embeddable and propose an algorithm that lists all its Markov generators. Then, motivated and inspired by recent results on substitution models of DNA, we focus in the  $4 \times 4$  case and completely solve the embedding problem for any Markov matrix.

### Referencias

- [1] G. Elfving, *Zur Theorie der Markoffschen Ketten. Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, vol. 2(8). (1937).
- [2] M. Casanellas, J. Fernández-Sánchez, J. Roca-Lacostena. *The embedding problem for Markov matrices*. To appear in *Publicacions Matemàtiques* (2022). <http://arxiv.org/abs/2005.00818>

## Coloraciones de grafos y cuerpos finitos

PILAR BENITO<sup>1</sup>, JAVIER RÁNDEZ IBÁÑEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Centro Científico Tecnológico, Madre de Dios 53, Logroño, Spain. E-mail: pilar.benito@unirioja.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Centro Científico Tecnológico, Madre de Dios 53, Logroño, Spain. E-mail: javier.randez@alum.unirioja.es.*

### Resumen

En 1955, A. M. Gleason y R. E. Greenwood [2] introducen un método pionero en la construcción de coloraciones propias de grafos mediante el uso de la estructura de los cuerpos finitos. Su objetivo era encontrar cotas inferiores para números de Ramsey bicolor, como se explica e ilustra de forma muy didáctica en [1]. Su método está basado en la localización de particiones del grupo multiplicativo  $\mathbb{F}^\times$  de un cuerpo finito  $\mathbb{F}$  para colorear grafos completos etiquetados con los elementos del grupo aditivo  $(\mathbb{F}, +)$ . Las particiones buscadas están formadas por subconjuntos libres de sumas obtenidos mediante clases de grupos de restos de potencias de  $\mathbb{F}^\times$ . Generalizaciones y aplicaciones del método de coloreado basado en grupos y particiones libres de sumas se pueden ver en [3, 4]. A lo largo de esta charla, daremos una justificación algebraica sobre la validez del método de coloración de Gleason-Greenwood, explicaremos sus limitaciones y presentaremos un algoritmo en SAGE que lo simula.

### Referencias

- [1] E. FERNÁNDEZ MORAL, L. RONCAL, Los números de Ramsey y el álgebra, *La Gaceta de la RSME*, 2012.
- [2] A. M. GLEASON, R. E. GREENWOOD, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canad. J. Math.* 7, 1955, 1-7.
- [3] R. HILL, R. W. IRVING, On group partitions associated with lower bounds for symmetric Ramsey numbers, *Europ. J. Combinatorics* (1982) 3, 35-50.
- [4] A. P. STREET, W. D. WALLIS, Sum-free sets, coloured graphs and designs, *J. Austral. Math. Soc.*, 1976, 35-53.

## Generalized Inverse Bohemian Matrices

JUANA SENDRA<sup>1</sup>, LAUREANO GONZÁLEZ-VEGA<sup>1</sup>, J. RAFAEL  
SENDRA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Métodos Cuantitativos, CUNEF Universidad, Madrid (Spain).

E-mails: [juana.sendra@cunef.edu](mailto:juana.sendra@cunef.edu), [laureano.gonzalez@cunef.edu](mailto:laureano.gonzalez@cunef.edu).

<sup>2</sup> Universidad de Alcalá, Dpto. de Física y Matemáticas, Alcalá de Henares, Madrid (Spain).

E-mail: [rafael.sendra@uah.es](mailto:rafael.sendra@uah.es).

### Resumen

This talk combines two different areas within the field of matrix analysis and applications. On the one hand, we work with Bohemian matrices (i.e matrices which entries belong to a finite subset of a ring) and, on the other hand, with generalized inverse matrices. More precisely, for certain type of structured  $\{0, 1, -1\}$ -matrices, we present a complete description of the inner Bohemian inverses over any population containing the set  $\{0, 1, -1\}$ . In addition, when the population is exactly  $\{0, 1, -1\}$  we provide explicit formulas for the number of inner Bohemian matrices of this type of matrices. The results presented here can be seen as a first step towards the analysis of rhapsodic generalized inverses, and they are part of the paper *Inner Bohemian Inverses* (see [4]).

### Referencias

- [1] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications, Second edition*, Springer, New York, 2003.
- [2] E.Y.S. Chan, R.M. Corless, L. Gonzalez-Vega, J.R. Sendra, J. Sendra, S. E. Thornton, *Upper Hessenberg and Toeplitz Bohemians*. Linear Algebra Appl. 601 (2020) 372–100.
- [3] R.M. Corless, S.E. Thornton, *The Bohemian eigenvalue project*. ACM Commun. Comput. Algebra 50 (2016) 158–160.
- [4] E.Y.S. Chan, R.M. Corless, L. Gonzalez-Vega, J.R. Sendra, J. Sendra. *Inner Bohemian Inverses* (submitted to Applied Mathematics and Computation).
- [5] P. S. Stanimirović, R. Behera, J. K. Sahoo, D. Mosaic, J. R. Sendra, J. Sendra, A. Lastra. *Computing tensor generalized inverses via specialization and rationalization*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas (2021) 115:116 pp.1–16.

## Semimódulos de valoración sobre el anillo local de una rama singular con un par de Puiseux

PATRICIO ALMIRÓN<sup>1</sup>, M. ALBERICH-CARRAMIÑANA<sup>2</sup>, J.J. MOYANO-FERNÁNDEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI) y Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid (Spain). E-mail: palmiron@ucm.es.*

<sup>2</sup> *Institut de Robòtica i Informàtica Industrial (IRI, CSIC-UPC) y Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech (Spain) E-mail: maria.alberich@upc.edu.*

<sup>3</sup> *Universitat Jaume I, Campus de Riu Sec, Departamento de Matemáticas y Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló. E-mail: moyano@uji.es.*

### Resumen

En esta charla caracterizaremos algunos conjuntos de valoración de módulos sobre el anillo local de una rama singular con un par de Puiseux. Llamaremos a dichos conjuntos de valoración semimódulos crecientes. Veremos que, a partir de la representación planar de los gaps del semigrupo de la curva, podemos obtener un algoritmo geométrico que permite obtener todos los posibles semimódulos crecientes. En particular, veremos que dicho conjunto posee estructura de árbol. Además, la clasificación de estos semimódulos nos permitirá deducir algunas propiedades de los módulos de diferenciales de Kahler de la rama. Este es un trabajo conjunto [1] con Maria Alberich-Carramiñana y Julio José Moyano-Fernández.

### Referencias

- [1] M.Alberich-Carramiñana, P. Almirón, J.J. Moyano-Fernández: *Curve singularities with one Puiseux pair and value sets of modules over their local rings*, Preprint <https://arxiv.org/abs/2105.07943>.

## GeoGebra Discovery: de la verificación al descubrimiento automático de teoremas de geometría

M. PILAR VÉLEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Escuela Politécnica Superior, Universidad Antonio de Nebrija, Madrid (Spain).*  
*E-mail: pvelez@nebrija.es*

### Resumen

El software de geometría dinámica GeoGebra incluye, desde 2016, diversas herramientas y comandos (**Relation**, **LocusEquation**, **Prove**, **ProveDetails** y **Envelope**) para demostrar y descubrir automáticamente teoremas en construcciones de geometría plana [2]. Estas herramientas están basadas en algoritmos de cálculo simbólico [1].

Presentamos aquí algunas mejoras y nuevas herramientas con un enfoque diferente, aunque complementario: ampliar las capacidades de razonamiento automatizado de GeoGebra hacia la consecución de una especie de programa geométrico mecánico que no requiera la intervención humana para la determinación y posterior verificación de una gran cantidad de propiedades geométricas en una figura dada. Este enfoque se ha logrado en una versión experimental de GeoGebra, denominada *GeoGebra Discovery* (<https://github.com/kovzol/geogebra/releases>).

Así, *GeoGebra Discovery* formula automáticamente las propiedades que tiene una figura, sin requerir ninguna intervención del usuario, salvo señalar algunos objetos en la figura. Esto se logra a través de dos herramientas de alto nivel (**Discover** y **Relation**) y el comando de bajo nivel **Compare** (incluyendo relaciones de desigualdad [3]). Se ilustrará con ejemplos la capacidad y limitaciones de estas herramientas para obtener mecánicamente teoremas sobre una figura en *GeoGebra Discovery*.

### Referencias

- [1] Kovács, Z., Recio, T., Vélez, M.P. *Detecting truth, just on parts*. Revista Matemática Complutense 32(2), (2019) 451–474.
- [2] Z. Kovács, T. Recio, T., M.P. Vélez. *Automated reasoning tools with GeoGebra: What are they? What are they good for?*. En: P. R. Richard, M. P. Vélez, S. van Vaerenbergh (eds). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*, Mathematics Education in the Digital Era, 17, Springer, 2021.
- [3] Z. Kovács, R. Vajda. *GeoGebra and the realgeom Reasoning Tool*. En: CEUR Workshop Proceedings 2752, PAAR+SC-Square 2020 Workshop, Paris, France, 204–219, 2020.

(1) Ayuda PID2020-113192GB-I00 (Visualización matemática: fundamentos, algoritmos y aplicaciones) financiada por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033

## Base Points and Polynomial Surface Reparametrizations

SONIA PÉREZ-DÍAZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad de Alcalá, Departamento de Física y Matemáticas. E-28871 Madrid, Spain. E-mail: sonia.perez@uah.es.*

### Resumen

We present an algorithm for reparametrizing birational surface parametrizations into birational polynomial surface parametrizations without base points, if they exist. For this purpose, we impose a transversality condition to the base points of the input parametrization. Furthermore, we need some properties concerning base points. In particular, we show that the multiplicity of the base points locus of a projective rational surface parametrization can be expressed as the degree of the content of a univariate resultant. We use the degree formula relating the degree of the surface, the degree of the parametrization, the base points multiplicity, and the degree of the rational map induced by the parametrization. In addition, we extend both formulas to the case of dominant rational maps of the projective plane and describe how the base point loci of a parametrization and its reparametrizations are related. The results presented are based on the papers [1] and [2].

Supported by the Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades - Agencia Estatal de Investigación/PID2020-113192GB-I00 (Mathematical Visualization: Foundations, Algorithms and Applications). The author belongs to the Research Group ASYNACS (Ref.CCEE2011/R34).

### Referencias

- [1] D. Cox, S. Pérez-Díaz, J. R. Sendra. *On the base point locus of surface parametrizations: formulas and consequences*. Accepted. Communications in Mathematics and Statistics. 2021.
- [2] S. Pérez-Díaz, J. R. Sendra. *Computing birational polynomial surface parametrizations without Base Points..* Ann. Mathematics. DOI: 10.3390/math8122224. Vol. 8, 2224. 2020.



## Hacia un autómata geométrica

T. RECIO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Escuela Politécnica Superior, Universidad Antonio de Nebrija, Madrid (Spain). E-mails: trecio@nebrija.es.*

### Resumen

En el contexto de nuestro trabajo hacia el desarrollo de un autómata geométrica, en el seno del proyecto PID2020-113192GB-I00 (Visualización matemática: Fundamentos, Algoritmos y Aplicaciones), se describirán una serie de problemas y actuaciones pendientes:

- restringir y controlar la complejidad exponencial de una búsqueda abierta de teoremas, modelar dicha búsqueda imitando algunas formas humanas de conjeturar.
- discriminar algunos resultados como triviales vs. interesantes, midiendo, por algún medio puramente matemático, la dificultad de un teorema en el ámbito de la geometría euclídea elemental.
- mejorar algunas cuestiones fundamentales, relativas a nuestro enfoque hacia el razonamiento automatizado, orientado a la geometría algebraica: manejo de condiciones de no degeneración, casos de “cierto en parte”, proposiciones reales versus complejas, etc.
- reconsiderar el cálculo automático de lugares geométricos y su taxonomía, mediante la consideración de componentes constructibles, en lugar de algebraicas, desarrollando una taxonomía de lugares con parámetros.
- explorar aplicaciones en el contexto de la visualización de objetos geométricos: realidad aumentada, análisis de obras de arte, ayuda a personas con discapacidad visual, diseño de mecanismos de barras, ...

Algunas de estas cuestiones han sido tratadas de manera parcial e inconexa en trabajos anteriores de miembros del equipo del proyecto, en relación con la implementación en GeoGebra de las herramientas de Relación, Demuestra, EcuaciónLugar, Compara, Descubre, etc. Diversos ejemplos y una bibliografía bastante amplia y actualizada de la situación actual aparece en [1].

### Referencias

- [1] F. Botana, Z. Kovács, T. Recio, M.P. Vélez. *Hacia un autómata geométrica*, La Gaceta de la RSME, Vol. 23, Núm. 2 (2020), 343–371.

## Conjeturas y resultados sobre curvas proyectivas planas singulares

J. ROÉ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dept. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona (Spain). E-mail: jroe@mat.uab.cat.*

### Resumen

La geometría de las curvas proyectivas planas es, en principio, un tema bien estudiado y conocido; sin embargo, numerosas cuestiones sobre la *existencia* de curvas con grado y singularidades prefijadas (constantes de Seshadri y de Harbourne, cono de Mori), así como *propiedades de sus espacios de parámetros* (función de Hilbert de esquemas cerodimensionales, variedades de Severi) resultan sorprendentemente difíciles de dilucidar. Haremos un repaso al estado actual de los problemas abiertos más relevantes, partiendo de las conjeturas de Nagata [Nagata(1959)] y Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz [Segre(1962)], [Ciliberto & Miranda(2001)].

Entre las contribuciones más recientes nos entretendremos en los enfoques propuestos por [Dimca et al.(2021)], [Ciliberto & Miranda(2021)], [Ciliberto et al.(2021)] y las opciones que éstos abren para posibles ataques computacionales a las conjeturas mencionadas.

### Referencias

- [Ciliberto & Miranda(2001)] Ciliberto, C. & Miranda, R. *The Segre and Harbourne-Hirschowitz conjectures*. In Ciliberto, Ciro (ed.) et al., Applications of algebraic geometry to coding theory, physics and computation. Proceedings of the NATO advanced research workshop, Eilat, Israel, February 25-March 1, 2001. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. NATO Sci. Ser. II, Math. Phys. Chem. 36, 37-51 (2001).
- [Ciliberto & Miranda(2021)] Ciliberto, C. & Miranda, R. *Non effective planar linear systems at the boundary of the Mori cone*, 2021, arXiv:2111.02923
- [Ciliberto et al.(2021)] Ciliberto, C., Miranda, R., & Roé, J. *Irrational nef rays at the boundary of the Mori cone for very general blowups of the plane*, 2021.
- [Dimca et al.(2021)] Dimca, A., Harbourne, B., & Sticlaru, G. *On the Bounded Negativity Conjecture and singular plane curves*, 2021, arXiv:2101.07187
- [Nagata(1959)] Nagata, M. *On the 14-th problem of Hilbert*. Am. J. Math. 81, 766-772 (1959).
- [Segre(1962)] Segre, B. *Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica*. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. Mat. 20, 67-85 (1962); Atti Convegno Int. Geometria algebrica, Torino 1961, 15-33 (1962).

## Distribución de puntos en el plano proyectivo real

PEDRO LÓPEZ-GÓMEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria (Spain).*  
*E-mail: lopezpr@unican.es.*

### Resumen

En los últimos tiempos, el problema de la distribución de puntos en diferentes espacios ha atraído la atención de la comunidad matemática tanto por su interés teórico como por sus numerosas aplicaciones prácticas. En esta línea, uno de los casos que ha suscitado mayor interés es el de la esfera usual  $\mathbb{S}^2$ . No en vano, el problema 7 de la lista de Smale ([4]) pide, *grosso modo*, encontrar una colección de puntos en  $\mathbb{S}^2$  que estén bien distribuidos, en el sentido de que su energía logarítmica sea mínima. Este problema fue planteado originalmente en 1993 por Shub y Smale ([3]), quienes probaron que a partir de una colección de puntos que minimizan la energía logarítmica es posible generar una sucesión de polinomios cuyos ceros estén bien condicionados.

La distribución de puntos en esferas y otros espacios es un campo actualmente muy activo (véase la monografía [2], que contiene los resultados más relevantes hasta la fecha). Si bien en el caso de  $\mathbb{S}^2$  disponemos de procedimientos constructivos para generar colecciones de puntos con baja energía (véase [1]), no ocurre lo mismo en todos los espacios. En concreto, uno de los espacios más básicos para los que, sin embargo, no se dispone siquiera de candidatos a colecciones de puntos bien distribuidos es el plano proyectivo real. En esta charla introduciremos el problema de la distribución de puntos en este último espacio.

### Referencias

- [1] C. Beltrán y U. Etayo (2020). *The Diamond Ensemble: A constructive set of points with small logarithmic energy*. Journal of Complexity, 59, 101471.
- [2] S. V. Borodachov, D. P. Hardin y E. B. Saff (2019). *Discrete Energy on Rectifiable Sets*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.
- [3] M. Shub y S. Smale (1987). *Complexity of Bezout's Theorem: III. Condition Number and Packing*. Journal of Complexity, 9, 4–14.
- [4] S. Smale (1998). *Mathematical Problems for the Next Century*. The Mathematical Intelligencer, 20, nº 2, 7–15.

## ÁLGEBRAS NO ASOCIATIVAS

### ORGANIZADORAS

**Cristina Draper Fontanals** (Universidad de Málaga)

**Yolanda Cabrera Casado** (Universidad de Málaga)

## Las álgebras de evolución perfectas y simples son finitamente universales

CRISTINA COSTOYA<sup>1</sup>, PANAGIOTE LIGOURAS<sup>2</sup>, ALICIA TOCINO<sup>3</sup>,  
ANTONIO VIRUEL<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *CITIC Research Center, Ciencias de la Computación y Tecnologías de la Información, Universidad da Coruña (Spain). E-mail: cristina.costoya@udc.es.*

<sup>2</sup> *I.I.S.S. "Da Vinci-Agherino Noci, BA (Italy). E-mail: ligouras@alice.it.*

<sup>3</sup> *Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga (Spain). E-mails: alicia.tocino@uma.es, viruel@uma.es.*

### Resumen

En esta charla se muestra que las álgebras de evolución sobre cualquier cuerpo son finitamente universales. Esto es, dado cualquier grupo finito  $G$  existen infinitas álgebras de evolución perfectas  $X$  tales que  $\text{Aut}(X) \cong G$ . La demostración se basa en la construcción de un functor covariante de la categoría de grafos simples finitos (no orientados) a la categoría de álgebras de evolución perfectas finitas. Además, se prueba que este hecho también ocurre para álgebras de evolución simples cuando trabajamos sobre un cuerpo lo suficientemente grande.

### Referencias

- [1] Yolanda Cabrera Casado, Mercedes Siles Molina, and M. Victoria Velasco, *Evolution algebras of arbitrary dimension and their decompositions*, Linear Algebra Appl. 495 (2016), 122-162.
- [2] Cristina Costoya, Panagiote Ligouras, Alicia Tocino and Antonio Viruel, *Regular evolution algebras are universally finite*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc. (2021).
- [3] Alberto Elduque and Alicia Labra, *Evolution algebras, automorphisms, and graphs*, Linear and Multilinear Algebra, 69:2 (2021), 331-342.

## Semicuerpos con grupo de automorfismos prefijado

ALEJANDRO PIÑERA NICOLÁS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo (Spain). E-mail: apnicolas@uniovi.es.*

### Resumen

Un semicuerpo es una estructura algebraica dotada de dos operaciones binarias que satisface los axiomas de cuerpo salvo, quizá, los de conmutatividad y asociatividad del producto. Este tipo de anillos de división finitos aparece de forma natural en el contexto de la geometría, pues constituye el anillo de coordenadas de geometrías finitas y proyectivas.

A pesar del desarrollo de las diferentes herramientas computacionales, el problema de clasificación de los semicuerpos finitos dista de ser sencillo. Así, se conoce la de los semicuerpos de 64 elementos, [3], y de 243 elementos, [4], aunque no así la de los de 128 o 256 elementos.

Inspirados por la estructura de algunos semicuerpos con 64 elementos y a partir de las técnicas desarrolladas en [2], hemos construido nuevos semicuerpos con 256 y 512 elementos con un grupo de automorfismos prefijado. Los resultados pueden consultarse en [1].

### Referencias

- [1] E. F. Combarro, A. P. Nicolás, J. Ranilla, I. F. Rúa, *On finite division rings with a designed automorphism group*, Math Meth Appl Sci., 43 (2020), 3982–3994.
- [2] D. E. Knuth, *Finite semifields and projective planes*, J Algebra 2 (1965), 182–217.
- [3] I. F. Rúa, Elías F. Combarro, J. Ranilla, *Classification of Semifields of Order 64*, J Algebra, 322 (11) (2009), 941–961.
- [4] I. F. Rúa, Elías F. Combarro, J. Ranilla, *Determination of division algebras with 243 elements*, Finite Fields th App, 18 (2012), 1148–1155.

## Descomposiciones finas en sistemas algebraicos inducidas por bases

ANTONIO J. CALDERÓN MARTÍN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Cádiz (Spain). E-mail: ajesus.calderon@uca.es.*

### Resumen

Consideremos un sistema algebraico  $A$  con (posiblemente) varios productos incluyendo productos unarios (por ejemplo espacios vectoriales, álgebras, superálgebras, hom-álgebras, sistemas triples, hom-sistemas triples, álgebras de Poisson,  $n$ -álgebras, etc.) Probamos que toda base de  $A$  da lugar a una descomposición fina de  $A$  como suma directa de ideales indescomponibles (descomposición fina.) También caracterizamos la simplicidad de los componentes en esta descomposición.

## Superálgebras de Leibniz resolubles

L.M. CAMACHO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail: lcamacho@us.es.

### Resumen

Una *superálgebra de Leibniz* es un espacio vectorial  $\mathbb{Z}_2$ -graduado,  $L = L_0 \oplus L_1$  con un producto corchete  $[-, -]$  que verifica:

1.  $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$  para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ ,
2.  $[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{\alpha\beta} [[x, z], y]$  – *identidad de Leibniz graduada*

para todo  $x \in L$ ,  $y \in L_\alpha$ ,  $z \in L_\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ .

Nótese que si  $[x, y] = -(-1)^{\alpha\beta} [y, x]$  (donde  $x \in L_\alpha$ ,  $y \in L_\beta$ ) la identidad de Leibniz graduada coincide con la identidad de Jacobi graduada. Así, las superálgebras de Leibniz son una generalización de las superálgebras de Lie. Al igual que en las superálgebras de Lie,  $L_0$  se llama parte par y es un álgebra de Leibniz y  $L_1$  parte impar.

Todos los conceptos clásicos (nilíndice, sucesión central descendente, nilpotencia, sucesión característica . . .) de las superálgebras de Lie nilpotentes han sido generalizados para las superálgebras de Leibniz. Recientemente, hemos generalizado la construcción de álgebras resolubles para el caso de las superálgebras a través del nilradical. Así, dada  $L$  una superálgebra resoluble, se tiene que  $L^2 = [L, L]$  (el primer ideal de la sucesión central descendente) no tiene porqué ser nilpotente. De esta manera, conseguimos adaptar el método (ya conocido para las álgebras de Lie y de Leibniz) cuando  $L^2 = [L, L]$  es nilpotente, es decir, clasificamos las superálgebras resolubles con un nilradical dado y con la restricción de que  $L^2$  sea nilpotente [1], [2].

### Referencias

- [1] L.M. Camacho, J.M. Fernández-Barroso, R.M. Navarro, *Solvable Lie and Leibniz superalgebras with a given nilradical*, Forum Math., **32(5)** (2020), 1271–1288.
- [2] L.M. Camacho, R.M. Navarro, B.A. Omirov, *Solvable Lie and Leibniz superalgebras with maximal codimension of nilradical*, (2020), arXiv:2006.11732.



## Graduaciones no de grupo en álgebras de Lie simples

A. ELDUQUE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mail: elduque@unizar.es.*

### Resumen

La charla estará dedicada a la construcción de una graduación, sobre un conjunto, del álgebra de Lie ortogonal  $\mathfrak{so}_{26}$ , que no es realizable como una graduación sobre un grupo. Para ello, el conjunto de raíces positivas se descompone en la unión disjunta de pares de raíces ortogonales, siguiendo un patrón proporcionado por las rectas del plano proyectivo sobre el cuerpo de 3 elementos.

Esto da una respuesta negativa a [1, Question 1.11].

Se mostrarán también graduaciones semejantes para  $\mathfrak{so}_{2n}$ , con  $n \equiv 1 \pmod{12}$ , sustituyendo las rectas del plano proyectivo anterior por bloques de determinados sistemas de Steiner.

### Referencias

- [1] A. Elduque y M. Kochetov. *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs **189**. American Mathematical Society, Providence, RI; Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences (AARMS), Halifax, NS, 2013.
- [2] A. Elduque. *Non-group gradings on simple Lie algebras*. arXiv:2107.13791.

## Sobre la capacidad de las álgebras de Leibniz

M. LADRA<sup>1</sup>, E. KHMALADZE<sup>2</sup>, R. KURDIANI<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas & Instituto de Matemáticas, Universidad de Santiago de Compostela (Spain).*  
*E-mail: manuel.ladra@usc.es.*

<sup>2</sup> *The University of Georgia & A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakishvili Tbilisi State University (Georgia).* *E-mail: e.khmal@gmail.com.*

<sup>3</sup> *I. Javakishvili Tbilisi State University (Georgia).* *E-mail: revaz.kurdiani@tsu.ge.*

### Resumen

Un álgebra de Leibniz es una especie de generalización no conmutativa de la estructura de álgebra de Lie, con un corchete no anti-simétrico donde la identidad de Jacobi se sustituye por la llamada identidad de Leibniz. Las álgebras de Leibniz fueron consideradas por primera vez por Bloh en [1] y posteriormente redescubiertas por Loday en [4], quien se inspiró en la construcción de una nueva teoría de (co)homología para las álgebras de Lie, la llamada (co)homología de Leibniz (véase [4, 5]). Concretamente, Loday observó que en el complejo de la homología de Lie, la única propiedad del corchete necesaria era la identidad de Leibniz.

En esta charla desarrollamos la capacidad de las álgebras de Leibniz a través del producto exterior no abeliano de álgebras de Leibniz. Esta exposición se inspira en el resultado conocido de Ellis en [2, 3] que afirma que un grupo es capaz si y sólo si su centro exterior es trivial y por investigaciones similares para álgebras de Lie realizadas en [6, 7].

### Referencias

- [1] A. Bloh, *On a generalization of the concept of Lie algebra* (in Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 471–473; translation in Sov. Math., Dokl. 6 (1965), 1450–1452.
- [2] G. J. Ellis, *Tensor products and  $q$ -crossed modules*, J. Lond. Math. Soc. (2) 51 (1995), no. 2, 243–258.
- [3] G. J. Ellis, *On the capability of groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 41 (1998), no. 3, 487–495.
- [4] J.-L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Enseign. Math. (2) 39 (1993), no. 3–4, 269–293.
- [5] J.-L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann. 296 (1993), no. 1, 139–158.
- [6] P. Niroomand, *On the tensor square of non-abelian nilpotent finite-dimensional Lie algebras*, Linear Multilinear Algebra 59 (2011), no. 8, 831–836.
- [7] P. Niroomand, *Some properties on the tensor square of Lie algebras*, J. Algebra Appl. 11 (2012), no. 5, Article ID 1250085.

## Elementos antisimétricos ad-nilpotentes

J. BROX<sup>1</sup>, E. GARCÍA<sup>2</sup>, M. GÓMEZ LOZANO<sup>3</sup>,  
R. MUÑOZ ALCÁZAR<sup>2</sup>, G. VERA DE SALAS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas (CMC), Universidad de Coimbra, Coimbra (Portugal). E-mails:  
josebrox@mat.uc.pt.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Rey Juan Carlos, Madrid (Spain). E-mail:  
esther.garcia@urjc.es, rubenj.alcazar@urjc.es, guillermo.vera@urjc.es.

<sup>3</sup> Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga, Málaga (Spain). E-mail:  
miggl@uma.es.

### Resumen

En esta charla explicamos los resultados que hemos obtenido en [2].

Estudiamos los elementos ad-nilpotentes de un álgebra semiprima asociativa  $R$  con involución  $*$  cuyos índices de ad-nilpotencia difieren en  $Skew(R, *)$  y en  $R$ . La existencia de tal elemento ad-nilpotente  $a$  implica la existencia de una GPI en  $R$ , y determina gran parte de su estructura. Cuando trabajamos en el álgebra de cociente simétrico de Martindale  $Q_m^s(R)$  de  $R$ ,  $a$  permanece ad-nilpotente del índice original en  $Skew(Q_m^s(R), *)$  y  $Q_m^s(R)$ . Existe un idempotente  $e$  que descompone ortogonalmente  $a = ea + (1-e)a$  y se tiene que o bien  $ea$  y  $(1-e)a$  son ad-nilpotente del mismo índice, o bien,  $ea$  y  $(1-e)a$  tienen índices de ad-nilpotencia distintos. Más aún, se prueba que  $Q_m^s(R)$  admite una  $\mathbb{Z}$ -graduación finita inducida por una familia  $*$ -completa ortogonal de idempotentes tal que  $eQ_m^s(R)e$ , que contiene a  $ea$ , es isomorfa a un álgebra de matrices sobre su centroide extendido.

### Referencias

- [1] J. Brox, E. García, M. Gómez Lozano, R. Muñoz Alcázar, G. Vera de Salas, *Ad-nilpotent elements of skew-index in semiprime associative algebras with involution*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2021.

## Lie cuadráticas: de doble extensión a trivectores

J. ROLDÁN-LÓPEZ<sup>1</sup>, PILAR BENITO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Logroño, Spain). E-mails: {jorge.roldanl, pilar.benito}@unirioja.es.*

### Resumen

Existen varias formas de construir álgebras cuadráticas. El primer método, introducido de forma indistinta por Kac, Favre y Santharoubane, Keith y Medina y Revoy (ver [2, 5, 3, 4]), es conocido como doble extensión. En 1997, Bordemann [1] presenta la  $T^*$ -extensión. Por último, en [1] se propone un método matricial para clasificar álgebras cuadráticas 2-step nilpotentes. En la primera parte de esta charla veremos un poco en qué consisten, cómo podemos utilizarlos para construir álgebras y cómo se relacionan entre ellos. Para terminar mostraremos que la equivalencia de los métodos en el caso de cuadráticas 2-step y la estructura de tales álgebras (ver [8]) reduce su clasificación a la de los trivectores.

### Referencias

- [1] P. Benito, D. de-la-Concepción, J. Roldán-López, I. Sesma, *Quadratic 2-step Lie algebras: Computational algorithms and classification*. Journal of Symbolic Computation 94: 70-89, 2019.
- [2] M. Bordemann, *Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras*. Acta Math Univ Comenian (NS) 66: 151-201, 1997.
- [3] M. T. Duong, *Two-Step Nilpotent Quadratic Lie Algebras and 8-Dimensional Non-commutative Symmetric Novikov Algebras*. Viet J Math 41: 135-148, 2013.
- [4] G. Favre, L. J. Santharoubane, *Symmetric, invariant, nondegenerate bilinear form on a Lie algebra*. J Algebra 105: 451-464, 1987.
- [5] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, “Progress in Mathematics”, Birkhauser Verlag, Basel, 1984.
- [6] V. S. Keith, *On invariant bilinear forms on finite-dimensional Lie algebras*, PhD, Department of Mathematics of the Graduate of Tulane University, April 1984.
- [7] A. Medina, P. Revoy, *Algèbres de Lie et produit scalaire invariant*. Annales scientifiques de l'École normale supérieure 18: 553-561, 1985.
- [8] È. B. Vinberg, A. Èlashvili, *Classification of trivectors of a 9-Dimensional Space*. Sel Math Sov Birkhaeuser Verlag, Basel 7: 63-58, 1988.

## Un álgebra que genera D4

ALBERTO DAZA GARCIA <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mails: albertodg@unizar.es.*

### Resumen

En 1978 y 1979, Bruce Allison introduce una clase de álgebras que generaliza las álgebras de Jordan junto con una generalización de la construcción the Kantor-Koecher-Tits [1], [2]. Una de las clases de álgebras simples es la clase de álgebras estructurables relacionadas con una forma hermítica. Estas álgebras están caracterizadas por tener una graduación con unas propiedades especiales que llamaremos graduación estructurable. Esta graduación nos permite encontrar una envuelta asociativa. Si nos restringimos a cuerpos algebraicamente cerrados sólo existe una graduación de este tipo para cada álgebra salvo en un caso especial en el que existen tres. En este caso especial, el álgebra genera un álgebra de Lie de tipo D4. Revisaremos sus propiedades y encontraremos su esquema de automorfismos.

### Referencias

- [1] B.N. Allison, *A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras*, Math. Ann. **237**, (1978): 133-156, 1978.
- [2] B.N. Allison, *Models of isotropic simple Lie algebras*, Comm. Algebra. **7**, (1979): 1835-1875.

## Graduaciones en sistemas de Kantor de tipo Hurwitz

DIEGO ARANDA-ORNA<sup>1</sup>, ALEJANDRA S. CÓRDOVA-MARTÍNEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de la Rioja (Spain). E-mails: diego.aranda.orna@gmail.com.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mails: sarina.cordova@gmail.com.*

### Resumen

En 1972 se introdujo una correspondencia entre pares de Kantor y álgebras de Lie 5-graduadas. Podemos construir un álgebra de Lie 5-graduada a partir de un par de Kantor usando una generalización de la construcción de Tits-Kantor-Koecher (TKK) a partir de pares de Jordan. Además, podemos obtener un par de Kantor a partir de cualquier álgebra de Lie 5-graduada considerando las componentes homogéneas de grado  $-1$  y  $1$ .

Enfocamos nuestro estudio en pares y sistemas triples de Kantor asociados a álgebras de Hurwitz (álgebras de composición unitarias). En esta charla daremos una clasificación, salvo equivalencia, de graduaciones finas por grupos abelianos en estos pares de Kantor y sistemas triples sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2. Finalmente, mencionaremos las álgebras de Lie (simples) obtenidas a partir de estos pares de Kantor.

### Referencias

- [1] B. Allison, J. Faulkner and O. Smirnov, *Weyl images of Kantor pairs*, Canadian Journal of Mathematics **69** (2017), 721–766.
- [2] D. Aranda-Orna, *Fine gradings on simple exceptional Jordan pairs and triple systems*, J. Algebra **491** (2017), 517–572.
- [3] D. Aranda-Orna and A. S. Córdova-Martínez, *Fine gradings on Kantor systems of Hurwitz type*, Linear algebra and its applications **613** (2021), 201–240.
- [4] A. Elduque and M. Kochetov, *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs **189**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [5] I. Kantor, *Some generalizations of Jordan algebras* [in Russian], Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal., **16** (1972), 407–499.

## Superderivaciones nilpotentes en superálgebras primas

E. GARCÍA <sup>1</sup>, M. GÓMEZ LOZANO <sup>2</sup>, G. VERA DE SALAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Rey Juan Carlos, Madrid (Spain). E-mail: esther.garcia@urjc.es, guillermo.vera@urjc.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga, Málaga (Spain). E-mail: miggl@uma.es.*

### Resumen

Sea  $R$  una superálgebra prima con superinvolución  $*$ . Consideramos la superálgebra de Lie  $R^- = (R, [, ]_s)$  con el supercorchete  $[x, y]_s = xy - (-1)^{|x||y|}yx$  y la supersubálgebra formada por los elementos antisimétricos  $K = Skew(R, *)$ . Se dice que  $a$  es un elemento ad-nilpotente de  $R^-$  o  $K$  si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $ad_a^n = 0$  donde  $ad_a(x) = [a, x]_s$ . En esta charla se expone una descripción de los elementos ad-nilpotentes homogéneos  $a$  de  $R^-$  o  $K$  en función de su índice de ad-nilpotencia. Estas descripciones dependen de la paridad del elemento: si  $a$  es par entonces, con ciertos matices, la descripción se sigue del resultado análogo para álgebras [1]. Si  $a$  es impar entonces estudiamos  $a^2$  apareciendo una casuística más amplia. Finalmente, se dan ejemplo sobre matrices para abarcar todos los posibles casos. Este trabajo se puede encontrar publicado en [2].

### Referencias

- [1] J. Brox, E. García, M. Gómez Lozano, R. Muñoz Alcázar, and G. Vera de Salas. *A description of ad-nilpotent elements in semiprime rings with involution.*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 2021.
- [2] E. García, M. Gómez Lozano and G. Vera de Salas, *Nilpotent superderivations in prime superalgebras*, Linear and Multilinear Algebra, 2021.

## Cronología sobre álgebras de Lie cuadráticas

PILAR BENITO

*Dpto. de Matemáticas y Computación Universidad de La Rioja. E-mail: pilar.benito@unirioja.es.*

### Resumen

Un álgebra de Lie dotada de una forma bilineal invariante no degenerada se dice cuadrática o metrizable. La existencia de tales formas impone fuertes condiciones sobre la estructura del álgebra que dificultan su clasificación. A lo largo de esta charla presentaremos una sucesión de hechos históricos por orden de fechas que nos presentarán algunas de sus características, construcciones generales y clasificaciones en dimensiones pequeñas.

### Referencias

- [1] M. Bordemann, *Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras*. Acta Math Univ Comenian (NS) 66: 151-201, 1997.
- [2] G. Favre, L. J. Santharoubane, *Symmetric, invariant, nondegenerate bilinear form on a Lie algebra*. J Algebra 105: 451-464, 1987.
- [3] V. S. Keith, *On invariant bilinear forms on finite-dimensional Lie algebras*, PhD, Department of Mathematics of the Graduate of Tulane University, April 1984.
- [4] A. Medina, P. Revoy, *Algèbres de Lie et produit scalaire invariant*. Annales scientifiques de l'École normale supérieure 18: 553-561, 1985.
- [5] G.P. Ovando, *Lie algebras with ad-invariant metrics, a survey-guide*. Rendiconti Seminario Matematico Univ. Pol. Torino, vol 74, 1 (2016), 243-268.
- [6] S-T Tsou, A.G. Walker, *Metrisable Lie Groups and Algebras*,



## **ANÁLISIS COMPLEJO Y TEORÍA DE OPERADORES**

### **ORGANIZADORES**

**María José Martín** (Universidad de La Laguna)

**Dragan Vukotić** (Universidad Autónoma de Madrid)

## Average radial integrability spaces of analytic functions

T. AGUILAR-HERNÁNDEZ<sup>1</sup>, M.D. CONTRERAS<sup>1</sup>,  
L. RODRÍGUEZ-PIAZZA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada II and IMUS, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos, s/n 41092, Sevilla, Spain. E-mails: taguilar@us.es, contreras@us.es.*

<sup>2</sup> *Departamento de Análisis Matemático and IMUS, Facultad de Matemáticas, Universidad de Sevilla, Calle Tarfia, s/n 41012 Sevilla, Spain. E-mail: piazza@us.es.*

### Resumen

In this talk, we deal with the family of spaces of analytic functions of average radial integrability  $RM(p, q)$ , for  $1 \leq p, q \leq +\infty$ , formed by those holomorphic functions in  $\mathbb{D}$  such that taking the  $p$ -norm in every radius and then the  $q$ -norm on the boundary of unit disc, the result is a finite number. It contains the classical Hardy spaces (when  $p = \infty$ ) and Bergman spaces (when  $p = q$ ). We will focus our attention in the characterization of the boundedness and compactness of the integration operators

$$T_g(f)(z) = \int_0^z f(w)g'(w) dw$$

acting on these spaces.

### Referencias

- [1] T. Aguilar-Hernández, M.D. Contreras, and L. Rodríguez-Piazza, *Average radial integrability spaces of analytic functions*, J. Funct. Anal. **282**, 1 (2022), Article number: 109262.
- [2] T. Aguilar-Hernández, M.D. Contreras, and L. Rodríguez-Piazza, *Integration operators in average radial integrability spaces of analytic functions*, Mediterr. J. Math. **18** (2021), Article number: 117.

## On invertible $m$ -isometrical extension of an $m$ -isometry

T. BERMÚDEZ

*Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna (Spain). E-mail: tbermude@ull.edu.es.*

### Resumen

It is known that every isometry has an invertible isometric extension, even in a Banach space context [2].

A bounded linear operator  $T$  defined on a Hilbert space  $H$  is called an  $m$ -isometry, with  $m$  a positive integer, if

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k T^{*k} T^k = 0 .$$

The talk concerns of sufficient conditions to obtain an invertible  $m$ -isometrical extension of an  $m$ -isometry. In the case of  $m$ -isometry unilateral weighted shift is obtained a nice and useful characterization. Moreover, we present some applications to local spectral theory of  $m$ -isometries.

The material is based on a joint work with A. Martínón, V. Müller and H. Zaway [1].

### Referencias

- [1] T. Bermúdez, A. Martínón, V. Müller, H. Zaway, *On invertible  $m$ -isometrical extension of an  $m$ -isometry. Applications*, preprint.
- [2] R. G. Douglas, *On extending commutative semigroups of isometries*. Bull. London Math. Soc. 1 (1969), 157-159.

## Boundedness of composition operators in holomorphic Hölder type spaces

OSCAR BLASCO<sup>1</sup>, ALEXEY KARAPETYANTS<sup>2</sup>, JOEL E. RESTREPO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Valencia (Spain). E-mails: oscar.blasco@uv.es.*

<sup>2</sup> *Institute of Mathematics, Mechanic and Computer Sciences and Regional Mathematical Center.  
Southern Federal University. Rostov-on-Don (Russia). E-mail: karapetyants@gmail.com.*

<sup>3</sup> *Institute of Mathematics. University of Antioquia. Medellin ( Colombia) & Department of Mathematics.  
Nazarbayev University. Nur-Sultan (Kazakhstan). E-mail: joel.restrepo@nu.edu.kz.*

### Resumen

A new characterization of boundedness of the composition operators in generalized Hölder spaces is obtained in terms that do not use the derivative of the composition operator, but using some averaging construction which represents certain integration of the modulus of continuity involving the symbol of the composition operator. This approach also allows to recover previously known results for the standard weights  $\omega(t) = t^\alpha$  with  $0 < \alpha < 1$ . Certain further results on characterization of the same spaces are obtained as well.

### Referencias

- [1] Blasco, O., Karapetyants, A., Restrepo, J.E.: Holomorphic Hölder–type spaces and composition operators. *Math. Meth. Appl. Sci.* **43** (17), (2020);1–22.
- [2] Blasco, O., Karapetyants, A., Restrepo, J.E: Boundedness of composition operators in Holomorphic Hölder spaces. *Math. Meth. Appl. Sci.* , (2021-22); To appear.
- [3] Dyakonov, K.M.: Equivalent norms on Lipschitz-type spaces of holomorphic functions. *Acta Math.* **178**, (1997), 143–167.
- [4] Pavlović, M.: Derivative-free characterizations of bounded composition operators between Lipschitz spaces. *Math. Z.* **258** (1), (2008), 81–86.

## Boundedness of compositions of analytic paraproducts

A. ALEMAN<sup>1</sup>, CARME CASCANTE<sup>2</sup>, J. FÀBREGA<sup>2</sup>, J.A, PELÁEZ<sup>4</sup>,  
D. PASCUAS <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, University of Lund, P.O. Box 118, SE-221 00, Lund, (Sweden). E-mail: alexandru.aleman@math.lu.se.*

<sup>2</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, 08071 Barcelona, (Spain). E-mails: cascante@ub.edu, joan.fabrega@ub.edu, daniel.pascuas@ub.edu.*

<sup>3</sup> *Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Málaga, Campus de Teatinos, 29071 Málaga, (Spain). E-mails: japelaez@uma.es.*

### Resumen

For a fixed analytic function  $g$  on the unit disc  $\mathbb{D}$ , consider the analytic paraproducts induced by  $g$ , which are defined by  $T_g f(z) = \int_0^z f(\zeta)g'(\zeta) d\zeta$ ,  $S_g f(z) = \int_0^z f'(\zeta)g(\zeta) d\zeta$ , and  $M_g f(z) = f(z)g(z)$ . The boundedness of these operators on classical weighted Bergman and Hardy spaces on  $\mathbb{D}$  is well understood. We will talk about the boundedness of compositions of two of these operators, for example  $T_g^2$ ,  $T_g S_g$ ,  $M_g T_g$ , etc. More generally, we will describe the characterization of the boundedness of a large class of operators contained in the algebra generated by these analytic paraproducts in terms of the symbol  $g$ . We will compare this characterization with the one of a single paraproduct.

### Referencias

- [1] A. Aleman, J. A. Cima, *An integral operator on  $H^p$  and Hardy's inequality*, J. Anal. Math. **85** (2001), 157–176.
- [2] A. Aleman and A. Siskakis, *An integral operator on  $H^p$* , Complex Variables Theory Appl. **28** (1995), no. 2, 149–158.
- [3] A. Aleman and A. Siskakis, *Integration operators on Bergman spaces*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), 337–356.
- [4] S. Axler, *The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators*, Duke Math. J. **53** (1986), no. 2, 315–332.
- [5] Ch. Pommerenke, *Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oscillation*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), no. 4, 591–602.
- [6] K. H. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces*. Second Edition. Math. Surveys and Monographs, 138, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2007.

## Perturbaciones compactas de operadores normales: subespacios espectrales y series de Borel

E. A. GALLARDO GUTIÉRREZ<sup>1</sup>, F. J. GONZÁLEZ DOÑA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid & ICMAT  
(Spain). E-mails: eva.gallardo@mat.ucm.es, javier.gonzalez@icmat.es.*

### Resumen

En esta charla discutiremos el problema sobre la existencia de subespacios cerrados e invariantes no triviales de perturbaciones compactas de operadores normales actuando en espacios de Hilbert complejos, separables e infinito dimensionales. En particular, para perturbaciones compactas de rango finito de operadores normales diagonalizables, caracterizaremos los subespacios espectrales asociados a cerrados del plano complejo mediante ecuaciones funcionales que involucran series de Borel (o de Denjoy). Como consecuencia, probaremos que una subclase de estos operadores tienen subespacios cerrados e invariantes no triviales extendiendo previos resultados de Foias, Jung, Ko y Percy [2, 3] y Fang y J. Xia [1].

### Referencias

- [1] Q. Fang and J. Xia, Invariant subspaces for certain finite-rank perturbations of diagonal operators, *J. Funct. Anal.* 263 no. 5, 1356–1377, (2012).
- [2] C. Foias, I. B. Jung, E. Ko and C. Percy, On rank-one perturbations of normal operators I, *J. Funct. Anal.* **253**, no. 2, 628–646, (2007).
- [3] C. Foias, I. B. Jung, E. Ko and C. Percy, On rank-one perturbations of normal operators II, *Indiana Univ. Math. J.* **57** no. 6, 2745–2760, (2008).
- [4] E. A. Gallardo-Gutiérrez and F. J. González Doña, Finite rank perturbations of normal operators: spectral subspaces and Borel series, (submitted) 53 pps., (2021).

## Observaciones sobre multiplicadores puntuales actuando en *BMOA* y espacios relacionados

DANIEL GIRELA

*Análisis Matemático, Universidad de Málaga, 29071 Málaga (Spain). E-mail: girela@uma.es.*

### Resumen

Sean  $\mathbb{D}$  el disco unidad en  $\mathbb{C}$  y  $\text{Hol}(\mathbb{D})$  el espacio de las funciones holomorfas en  $\mathbb{D}$ . Si  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , el operador de multiplicación  $M_g : \text{Hol}(\mathbb{D}) \rightarrow \text{Hol}(\mathbb{D})$  se define por  $M_g(f) = g \cdot f$ .

Diremos que un espacio de Banach  $X$  de funciones holomorfas en  $\mathbb{D}$  es “natural” si contiene a las funciones polinómicas y la convergencia en  $X$  implica la convergencia uniforme en todos los subconjuntos compactos de  $\mathbb{D}$ .

Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios de Banach naturales de funciones holomorfas en  $\mathbb{D}$  y  $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ , se dice que  $g$  es un multiplicador puntual de  $X$  en  $Y$  si  $M_g(X) \subset Y$ . Indiquemos que en tal caso  $M_g$  es continuo de  $X$  en  $Y$ . El espacio de los multiplicadores puntuales de  $X$  en  $Y$  será denotado por  $M(X, Y)$  y  $M(X, X)$  se denotará simplemente por  $M(X)$ .

Es bien sabido que  $M(X) \subset H^\infty$  y que si  $g \in M(X)$ , entonces  $\|g\|_{H^\infty} \leq \|M_g\|$ . Claramente, esto implica que  $M(X, Y) \subset H^\infty$  si  $Y \subset X$ . En cambio, si  $Y \not\subset X$ , la inclusión  $M(X, Y) \subset H^\infty$  puede no ser cierta.

Empezaremos esta charla exponiendo condiciones en los espacios  $X$  e  $Y$  que implican la inclusión  $M(X, Y) \subset H^\infty$ .

A continuación nos centraremos en el espacio *BMOA* y en otros espacios  $X$  relacionados con él. El espacio  $M(\text{BMOA})$  está caracterizado en trabajos de Stegenga y de Ortega y Fàbrega. Sin embargo estas caracterizaciones son complicadas y en ocasiones no es fácil saber si una determinada  $g$  pertenece a  $M(\text{BMOA})$  o no. Trataremos de presentar varias clases explícitas de funciones holomorfas en  $\mathbb{D}$  que son multiplicadores de *BMOA* en sí mismo o en  $X$  para ciertos espacios  $X$ , muy relacionados con *BMOA*, y otras que no lo son.

## Comportamiento asintótico del operador de convolución en $L_1(\mu)$

ENRIQUE JORDÁ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *EPS Alcoy y IUMPA – UPV. E-mails: ejorda@mat.upv.es.*

### Resumen

Sea  $G$  un grupo localmente compacto y sea  $\mu$  una medida de probabilidad definida en  $G$ . Estudiamos el comportamiento de las iteradas del operador de convolución  $\lambda(\mu) : L_1(G) \rightarrow L_1(G)$ ,  $f \mapsto \mu * f$ , donde  $L_1(G)$  es el espacio de funciones absolutamente integrables respecto a la medida  $m_G$  de Haar. Estudiamos también las restricciones de  $\lambda^0(\mu)$  al subespacio  $\lambda^0(\mu)$ -invariante  $L_1^0(G) = \{f \in L_1(G) : \int_G f dm_G = 0\}$ . La charla está basada en trabajo conjunto con Jorge Galindo y Alberto Rodríguez Arenas (Universitat Jaume I).



## Zeros of random $SU(2)$ polynomials

J. MARZO<sup>1</sup>, V. DE LA TORRE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departament de matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona. E-mail: jmarzo@ub.edu.*

<sup>2</sup> *Departament de matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona. E-mail: delatorre@ub.edu.*

### Resumen

In [1] Armentano, Beltrán and Shub proved that the zeros of  $SU(2)$  random polynomials are well-suited with respect to the minimal logarithmic energy on the sphere. In particular they show that the expected energy of  $N$  zeros is

$$\left(\frac{1}{2} - \log 2\right) N^2 - \frac{N}{2} \log N - \left(\frac{1}{2} - \log 2\right) N.$$

We will generalize this computation to other Riesz energies and show some applications to minimal discrepancy problems.

### Referencias

- [1] D. Armentano, C. Beltrán, M. Shub, *Minimizing the discrete logarithmic energy on the sphere: the role of random polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (6) (2011) 2955-2965.

## Nueva invariancia conforme en espacios de funciones analíticas

ALEJANDRO MAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid (Spain).*  
*E-mail: alejandro.mas@uam.es.*

### Resumen

Dado un automorfismo del disco unidad,  $\varphi$ , consideramos el operador de composición ponderado  $W_\varphi^\alpha$ , que actúa sobre un espacio de Banach de funciones analíticas en el disco unidad, definido por  $W_\varphi^\alpha f = (\varphi')^\alpha (f \circ \varphi)$  con  $\alpha > 0$ . Podemos observar que la mayoría de los espacios de Banach clásicos de funciones analíticas, como por ejemplo las clases de crecimiento de Korenblum, los espacios de Hardy, los espacios de Bergman con peso estándar y algunos espacios de Besov son invariantes por estos operadores. Entre otras cosas, en esta charla identificaremos el espacio más grande, el más pequeño y el “único” espacio de Hilbert entre todos los que satisfacen esta propiedad para un  $\alpha > 0$  fijo. Estos resultados son parte de un trabajo conjunto con el profesor Alexandru Aleman.

### Referencias

- [1] A. Aleman and A. Mas. Weighted conformal invariance of Banach spaces of analytic functions. *J. Funct. Anal.*, 280(9):108946, 2021.

## Numerical schemes and linear chaos

S. BARTOLL<sup>1</sup>, F. MARTÍNEZ-GIMÉNEZ<sup>2</sup>, A. PERIS<sup>3</sup>, F. RODENAS<sup>4</sup>

<sup>1</sup> IUMPA, Universitat Politècnica de València, València (Spain). E-mail: sbartoll@mat.upv.es.

<sup>2</sup> IUMPA, Universitat Politècnica de València, València (Spain). E-mail: fmartinez@mat.upv.es.

<sup>3</sup> IUMPA, Universitat Politècnica de València, València (Spain). E-mail: aperis@upv.es.

<sup>4</sup> IUMPA, Universitat Politècnica de València, València (Spain). E-mail: frodenas@mat.upv.es.

### Resumen

We study the presence of chaos on dynamical systems associated to certain finite differences numerical schemes of a partial differential equation. Under some conditions, the dynamical system associated to a numerical scheme can be regarded as generated by a Toeplitz operator. The chaotic behaviour of Toeplitz operators was studied by Godefroy and Shapiro [4] and deLaubenfels and Emamirad [3] and, recently, by other researchers (see for instance [1, 5, 6, 7] and references therein).

We will present how to establish, under very general assumptions, the chaotic behaviour of these numerical schemes for PDEs, and illustrate them with some classical examples.

### Referencias

- [1] A. BARANOV AND A. LISHANSKII, *Hypercyclic Toeplitz operators*, Results. Math. **70** (2016), 337–347.
- [2] S. BARTOLL, F. MARTÍNEZ-GIMÉNEZ, A. PERIS AND F. RODENAS, *Chaos for numerical schemes of differential operators*. Preprint.
- [3] R. DELAUBENFELS AND H. EMAMIRAD, *Chaos for functions of discrete and continuous weighted shift operators*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), 1411–1427.
- [4] G. GODEFROY AND J. H. SHAPIRO, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.
- [5] R. R. JIMÉNEZ-MUNGUÍA, R. A. MARTÍNEZ-AVENDAÑO, A. PERIS, *Chaos on the dynamics of Toeplitz operators*. Preprint.
- [6] C. LIZAMA, M. MURILLO-ARCILA AND A. PERIS, *Nonlocal operators are chaotic*, Chaos **30** (2020), no. 10, 103126, 8 pp.
- [7] S. SHKARIN, *Orbits of coanalytic Toeplitz operators and weak hypercyclicity*. arXiv:1210.3191

## Operador de tipo Hilbert en espacios de Hardy y Bergman

ELENA DE LA ROSA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático, Matemática Aplicada y Estadística e I.O. Universidad de Málaga (Spain). E-mail: elena.rosa@uma.es.*

### Resumen

Consideramos el siguiente operador de tipo Hilbert definido como

$$H_\omega(f)(z) = \int_0^1 f(t) \left( \frac{1}{z} \int_0^z B_t^\omega(u) du \right) \omega(t) dt,$$

donde  $\{B_\zeta^\omega\}_{\zeta \in \mathbb{D}}$  son los núcleos reproductores del espacio de Bergman  $A_\omega^2$  inducido por el peso radial  $\omega$  en el disco unidad  $\mathbb{D}$ . Probamos que  $H_\omega$  está acotado de  $H^\infty$  al espacio de Bloch si y solo si  $\omega$  pertenece a la clase de pesos  $\widehat{\mathcal{D}}$ , que consiste en los pesos radiales  $\omega$  que satisfacen la siguiente condición doblante:  $\sup_{0 \leq r < 1} \frac{\int_r^1 \omega(s) ds}{\int_{\frac{1+r}{2}}^1 \omega(s) ds} < \infty$ .

Además describimos los pesos  $\omega \in \widehat{\mathcal{D}}$  tales que  $H_\omega$  está acotado en el espacio de Hardy  $H^1$ , y demostramos que para cualquier  $\omega \in \widehat{\mathcal{D}}$  y  $p \in (1, \infty)$ ,  $H_\omega : L_{[0,1]}^p \rightarrow H^p$  está acotado si y solo si se satisface la siguiente condición de tipo Muckenhoupt:

$$\sup_{0 < r < 1} \left( 1 + \int_0^r \frac{1}{\widehat{\omega}(t)^p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_r^1 \omega(t)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

También abordamos el problema análogo sobre la acotación del operador  $H_\omega$  en espacios de Bergman  $A_\omega^p$ .

### Referencias

- [1] E. Diamantopoulos and A. Siskakis, Composition operators and the Hilbert matrix. *Studia Math.* 140 (2000), no. 2, 191–198.
- [2] P. Galanopoulos, D. Girela, J. A. Peláez and A. G. Siskakis, Generalized Hilbert operators. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 39 (2014), no. 1, 231–258.
- [3] J. A. Peláez and J. Rättyä, Bergman projection induced by radial weight. *Adv. Math.* 391 (2021), Paper No. 107950, 70 pp.
- [4] J. A. Peláez and J. Rättyä, Generalized Hilbert operators on weighted Bergman spaces. *Adv. Math.* 240 (2013), 227–267.
- [5] J. A. Peláez and E. de la Rosa, Hilbert-type operator induced by radial weight. *J. Math. Anal. Appl.* 495 (2021), no. 1, Paper No. 124689, 22 pp.

## Characterization of metric spaces and Riemann surfaces quasi-isometric to the real line, and applications to Liouville-type theorems

ANA GRANADOS<sup>1</sup>, DOMINGO PESTANA<sup>2</sup>, ANA PORTILLA<sup>1</sup>, JOSÉ  
M. RODRÍGUEZ<sup>2</sup>, EVA TOURÍS<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Saint Louis University, Madrid Campus Avenida del Valle, 34 - 28003 Madrid (Spain). E-mails:  
agranado@slu.edu, aportil2@slu.edu.

<sup>2</sup> Dpto de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Avenida de la Universidad 30, 28911 Leganés,  
Madrid (Spain). E-mail: dompes@math.uc3m.es, jomaro@math.uc3m.es.

<sup>3</sup> Dpto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de  
Cantoblanco, 28049 Madrid (Spain). E-mail: eva.touris@uam.es.

### Resumen

Kanai proved powerful results on the stability under quasi-isometries of numerous global properties (including Liouville property) between Riemannian manifolds of bounded geometry. Since his work focuses more on the generality of the spaces considered than on the two-dimensional geometry, Kanai's hypotheses are not usually satisfied in the context of Riemann surfaces endowed with the Poincaré metric. In this work we fill that gap for the Liouville property, by proving its stability by quasi-isometries for every Riemann surface (and even Riemannian surfaces with pinched negative curvature). Also, a key result characterizes Riemannian surfaces which are quasi-isometric to  $\mathbb{R}$ .

### Referencias

- [1] A. Cantón, A. Granados, A. Portilla, J. M. Rodríguez. *Quasi-isometries and isoperimetric inequalities in planar domains*. J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 127–157.
- [2] A. Granados, D. Pestana, A. Portilla, J. M. Rodríguez, E. Tourís. *Stability of the volume growth rate under quasi-isometries*. Rev. Matem. Complutense **33** (2020), 231–270.
- [3] M. Kanai. *Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds*. J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 391–413.

## ANÁLISIS GEOMÉTRICO

### ORGANIZADORES

**Antonio Alarcón** (Universidad de Granada)

**Rafael López** (Universidad de Granada)

## Problemas de Steklov mixtos en dimensión 2

T. ARIAS-MARCO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Extremadura (Spain). E-mail: ariasmarco@unex.es.*

### Resumen

En 1902 fue considerado el problema de Steklov [2] sobre una superficie Riemanniana compacta y con frontera Lipschitz. Desde entonces ha sido ampliamente estudiado. En particular, Weinstock [3] comenzó el estudio de cotas superiores para el primer valor propio en 1954 y sus resultados fueron extendidos al resto de valores propios por Hersch, Payne, and Schiffer [1] en 1975.

La charla se centrará en mostrar como el estudio de cotas superiores para los problemas de Steklov mixtos proporciona resultados que mejoran las cotas superiores obtenidas por Hersch, Payne, and Schiffer.

Este es un trabajo conjunto con Emily B. Dryden, Carolyn S. Gordon, Asma Hassannezhad, Allie Ray y Elizabeth Stanhope.

### Referencias

- [1] J. Hersch, L. E. Payne, M. M. Schiffer, *Some inequalities for Stekloff eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal., 57 (1975), 99–114.
- [2] W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*, Ann. Sci. École Norm. Sup, 3, 19 (1902), 191–259.
- [3] R. Weinstock, *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J. Rational Mech. Anal., 3 (1954), 745–753.

## El segundo teorema de Minkowski para variedades Riemannianas

FLORENT BALACHEFF<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona (Spain).*  
*E-mail: fbalacheff@mat.uab.cat.*

### Resumen

En esta charla, presentaremos generalizaciones del segundo teorema de Minkowski a variedades Riemannianas. Por ejemplo, explicaremos por qué los grafos ponderados, los toros Riemannianos de cualquier dimensión o las superficies Riemannianas con volumen normalizado admiten siempre una base de homología inducida por geodésicas cerradas cuyo producto de longitud está acotado superiormente por alguna constante que depende únicamente de su topología.

Trabajo conjunto con S. Karam y H. Parlier.

### Referencias

- [1] F. Balacheff & S. Karam. *Length product of homologically independent loops for tori*. Journal of Topology and Analysis, Vol. 8 (2016), No 3, 497-500.
- [2] F. Balacheff, S. Karam & H. Parlier. *The minimal length product over homology bases of manifolds*. Mathematische Annalen, Vol. 380 (2021), 825-854.



## Sasakian structures on tangent sphere bundles

J. C. GONZÁLEZ-DÁVILA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa, University of La Laguna, 38200 La Laguna, Tenerife, Spain. E-mails: jcgonza@ull.es.*

### Resumen

There is an extensive bibliography on the Riemannian geometry of the tangent sphere bundle  $T_rM$  of any radius  $r > 0$ , equipped with the induced metric  $\tilde{g}^S$  from the Sasaki metric  $g^S$  on the tangent bundle  $TM$ . See G. Calvaruso [1] for surveys of the unit tangent sphere bundle  $T_1M$  and O. Kowalski and M. Sekizawa [3] of  $T_rM$ , for an arbitrary radius  $r > 0$ .

With respect to the *standard almost complex structure*  $J$ , the Sasaki metric on  $TM$  is almost Kähler. Then  $T_rM$  in  $(TM, J, g^S)$  inherits an almost contact metric structure  $(\varphi, \xi, \eta, \tilde{g}^S)$ , where  $\xi$  is the Hopf vector field  $\xi = -JN$ ,  $N$  being its outward normal unit vector field. Moreover, the pair  $(\frac{1}{2}\eta, \frac{1}{4}\tilde{g}^S)$  on  $T_1M$  is  $K$ -contact if and only if  $(M, g)$  has constant sectional curvature 1. In this case,  $T_1M$  is Sasakian.

Sasakian manifolds can be considered in many respects as the class analogous to that of the Kähler manifolds for the odd dimensional case.

In this lecture, some of the results given a recent paper [2] about the existence of Sasakian structures on  $T_rM$ , where  $(M, g)$  has no constant sectional curvature, are exposed. As far as the author knows, there are no examples satisfying these conditions in the literature. More precisely, we show that the tangent sphere bundle  $T_r(G/K)$ , for any  $r > 0$ , of any compact rank-one symmetric space  $G/K$ , admits a unique Sasakian structure whose characteristic vector field is the Hopf vector field. Such a structure can be expressed as an induced structure from an almost Hermitian structure on the punctured tangent bundle  $T(G/K) \setminus \{\text{zero section}\}$ .

### Referencias

- [1] Calvaruso, G., Contact metric geometry of the unit tangent sphere bundle, Complex, contact and symmetric manifolds, (Kowalski, O. et al, ed.), **234**, Progress in Mathematics, 2005, 41-57.
- [2] González-Dávila, J.C., Sasakian structures on tangent sphere bundles of compact rank-one symmetric spaces, arXiv:2105.01461v3 [math.DG].
- [3] Kowalski, O., Sekizawa, M., On tangent sphere bundles with small or large constant radius, *Ann. Global Anal. Geom.* **18** (2000), 207-219.

## A new approach to helicoidal surfaces in the 3-sphere

I. CASTRO<sup>1</sup>, I. CASTRO-INFANTES<sup>2</sup>, J. CASTRO-INFANTES<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Jaén (Spain). E-mail: icaastro@ujaen.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Alicante (Spain). E-mail: ildefonso.castro@ua.es.

<sup>3</sup> Dpto. de Geometría y Topología, Universidad de Granada (Spain). E-mail: jcastroinfantes@ugr.es.

### Resumen

We deal with helicoidal surfaces in the unit 3-sphere  $\mathbb{S}^3$ , i.e. surfaces invariant under the action of the helicoidal 1-parameter group of isometries given by the composition of a translation and a rotation in  $\mathbb{S}^3$ . This class includes the rotational ones. We propose a new approach to their study ([2]), introducing the notion of the *spherical angular momentum* of the profile curve of the helicoidal surface. It will play a key role since it determines the geometry of the helicoidal surface joint to its pitch. Inspired by [1], we show that we can prescribe the mean curvature of a spherical helicoidal surface in terms of a function depending on the distance to its axis, obtaining a one parameter family of helicoidal surfaces with that prescribed mean curvature. Moreover, we reduce any type of Weingarten condition (i.e. any functional relation between the principal curvatures) on a rotational surface to a first order differential equation on the momentum of its generatrix curve. As a first application, we identify (searching in [4] and [3]) the minimal surfaces in  $\mathbb{S}^3$  that play the role of classical catenoids and helicoids and describe all the minimal spherical helicoidal surfaces connecting them, proving that they are their *associated* surfaces (in the sense of [3]).

### Referencias

- [1] C. Baikoussis and T. Koufogiorgos, *Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature*, J. Geom. **63** (1998), 25–29.
- [2] I. Castro, I. Castro-Infantes and J. Castro-Infantes, *Helicoidal minimal surfaces in the 3-sphere*, Preprint (2021).
- [3] H.B. Lawson, *Complete minimal surfaces in  $\mathbb{S}^3$* , Ann. of Math. **92** (1970), 335–374.
- [4] T. Otsuki, *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, Amer. J. Math. **92** (1970), 145–173.

## Extending submanifolds from Euclidean spaces to symmetric spaces of noncompact type

MIGUEL DOMÍNGUEZ-VÁZQUEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela (Spain).*  
*E-mail: miguel.dominguez@usc.es.*

### Resumen

In this talk I will present a simple method that allows to enlarge submanifolds from certain totally geodesic, flat submanifolds of symmetric spaces of noncompact type to the whole ambient symmetric space, in such a way that the codimension, the mean curvature, and other geometric properties are preserved. As an application, I will explain how one can construct the first examples of inhomogeneous isoparametric hypersurfaces in each symmetric space of noncompact type and rank at least three. This is based on a joint work with Víctor Sanmartín-López [1].

### Referencias

- [1] M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López. *Isoparametric hypersurfaces in symmetric spaces of non-compact type and higher rank*. arXiv:2109.03850.

## Weingarten surfaces and Bernstein type problems

ISABEL FERNÁNDEZ<sup>1</sup>, JOSÉ A. GÁLVEZ<sup>2</sup>, PABLO MIRA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada I - Instituto de Matemáticas IMUS, Universidad de Sevilla (Spain).  
E-mail: isafer@us.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Geometría y Topología - Instituto de Matemáticas IMAG, Universidad de Granada (Spain).  
E-mail: jagalvez@ugr.es.*

<sup>3</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Cartagena (Spain). E-mail:  
pablo.mira@upct.es.*

### Resumen

A surface in Euclidean 3-space is an elliptic Weingarten surface if its mean curvature  $H$  and Gaussian curvature  $K$  are related by a smooth, elliptic equation  $W(H, K) = 0$ . A well known open problem, proposed for instance by Rosenberg and Sa Earp in 1994, is to solve the Bernstein problem for this class of surfaces, that is: are planes the only entire elliptic Weingarten graphs? Up to now, it is only known that the answer is positive if the Weingarten equation is uniformly elliptic; this follows from a deep theorem by L. Simon on entire graphs with quasiconformal Gauss map.

In this talk we present two theorems. In the first one, we extend the solution to the Bernstein problem in the uniformly elliptic case to multigraphs, proving that planes are the only complete uniformly elliptic Weingarten surfaces whose Gauss map image lies in an open hemisphere. In the second one, we will solve in the affirmative the Bernstein problem for Weingarten graphs for a large class of non-uniformly elliptic Weingarten equations.

## Upper bounds for the first eigenvalue of geodesic and extrinsic balls

V. GIMENO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpt. de Matemàtiques , Universitat Jaume I (Castelló de la Plana). E-mail: gimenov@uji.es.*

### Resumen

In this talk I will explain how to obtain upper bounds for the first eigenvalue for a geodesic ball in a Riemannian manifold via an orthogonal symmetritation of the metric tensor and, moreover I will explain how to obtain upper bounds for the fundamental tone when the manifold admits an isometric, minimal, and proper immersion into the Euclidean space in terms of the growth of the volume of its extrinsic balls. This is a joint work with Erik Sarrión Pedralva [1] and independently, a joint work with Pacelli Bessa and Panagiotis Polymerakis [2].

### Referencias

- [1] Vicent Gimeno and Erik Sarrion-Pedralva , *First Eigenvalue of the Laplacian of a Geodesic Ball and Area-Based Symmetrization of its Metric Tensor*, [arXiv:2103.17134] 2021
- [2] G. Pacelli Bessa, Vicent Gimeno, and Panagiotis Polymerakis *The spectrum of the Laplacian and volume growth of proper minimal submanifolds*. [arXiv:2104.01979], 2021

## Variations for submanifolds in graded manifolds

GIANMARCO GIOVANNARDI<sup>1</sup>, GIOVANNA CITTI<sup>2</sup>, MANUEL  
RITORE<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, Via Sommarive 14, 38123, Povo (Trento), Italy E-mails: g.giovannardi@unitn.it.*

<sup>2</sup> *Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta S. Donato 5, 401 26 Bologna, Italy. E-mail: giovanna.citti@unibo.it.*

<sup>3</sup> *Departamento de Geometría y Topología Universidad de Granada, E-18071 Granada, España. E-mail: ritore@ugr.es.*

### Resumen

The aim of this talk is to present the deformability properties of submanifolds immersed in graded manifolds that are a generalization of Carnot manifolds. We consider an area functional defined on submanifolds of fixed degree immersed into a graded manifold equipped with a Riemannian metric. Since the expression of this area depends on the degree, not all variations are admissible. It turns out that the associated variational vector fields must satisfy a system of partial differential equations of first order on the submanifold. Moreover, given a vector field solution of this system, we provide a sufficient condition that guarantees the possibility of deforming the original submanifold by variations preserving its degree. In the one-dimensional case, the integrability of compact supported vector fields depends on the surjection of the holonomy map at the endpoints. As in the case of singular curves in sub-Riemannian geometry, there are examples of isolated surfaces that cannot be deformed in any direction. This talk is based on my joint work with G. Citti and M. Ritoré.

## Espacios con curvatura positiva

DAVID GONZÁLEZ ÁLVARO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Politécnica de Madrid (Spain). E-mail: david.gonzalez.alvaro@upm.es.*

### Resumen

El clásico Teorema de Gauss-Bonnet implica que la única superficie compacta orientable que admite una métrica de curvatura Gaussiana positiva es la esfera. En esta charla discutiremos posibles generalizaciones de dicho resultado a dimensiones superiores. Más concretamente, en la primera parte de la presentación repasaremos algunos resultados conocidos sobre variedades que admiten una métrica Riemanniana de curvatura seccional, de Ricci o escalar positiva. En la segunda parte complementaremos estos resultados considerando condiciones de curvatura intermedias.

## El problema isoperimétrico en la 3-esfera sub-riemanniana

CÉSAR ROSALES<sup>1</sup>, ANA HURTADO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Geometría y Topología, Universidad de Granada (Spain)  
E-mails: crosales@ugr.es, ahurtado@ugr.es.

### Resumen

En la 3-esfera unidad  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$  consideramos la estructura sub-riemanniana obtenida al restringir la métrica de curvatura constante 1 a la distribución ortogonal a las fibras de la fibración de Hopf. Estudiaremos el problema que surge al minimizar el área horizontal entre todas las superficies compactas y embebidas de clase  $C^2$  que encierran un volumen dado. Analizaremos los puntos críticos del problema, destacando que las soluciones son esferas o toros con CMC (curvatura media sub-riemanniana constante). Construiremos una familia de esferas de revolución y justificaremos que estas esferas son candidatas naturales para resolver el problema. Finalmente, emplearemos herramientas de segunda variación para probar que todos los toros CMC son inestables, lo que nos permitirá concluir que las soluciones son congruentes a las esferas descritas.

### Referencias

- [1] J.-H. Cheng, J.-F. Hwang, A. Malchiodi y P. Yang, *Minimal surfaces in pseudohermitian geometry*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **4** (2005), no. 1, 129-177.
- [2] A. Hurtado y C. Rosales, *An instability criterion for volume-preserving area-stationary surfaces with singular curves in sub-Riemannian 3-space forms*. Calc. Var. Partial Differential Equations **59** (2020), no. 5, Paper No. 165.
- [3] A. Hurtado y C. Rosales, *Area-minimizing properties of Pansu spheres in the sub-Riemannian 3-sphere*. arXiv:2106.05661, June (2021).



## Índice de subvariedades mínimas y compactas de las esferas de Berger

F. TORRALBO<sup>1</sup>, F. URBANO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Geometría y Topología, Universidad de Granada (Spain). E-mail: ftorralbo@ugr.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Geometría y Topología, Universidad de Granada (Spain). E-mail: furbano@ugr.es.*

### Resumen

Se estudia el índice de las subvariedades mínimas y compactas de las esferas de Berger. A diferencia de la esfera estándar, en este caso aparecen ejemplos estables, los cuales son caracterizados bajo ciertas condiciones.

También, en el caso de superficies, se clasifican las de índice uno.

## COMBINATORICS AND COMPUTATION IN COMMUTATIVE ALGEBRA

### ORGANIZADORES

**Ignacio García Marco** (Universidad de La Laguna)

**Philippe Giménez** (Universidad de Valladolid)

**Eduardo Sáenz de Cabezón** (Universidad de La Rioja)

## An extension of the Wilf conjecture to semimodules over a numerical semigroup

PATRICIO ALMIRÓN<sup>1</sup>, J.J. MOYANO-FERNÁNDEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI) y Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad Complutense de Madrid (Spain). E-mail: palmiron@ucm.es.*

<sup>2</sup> *Universitat Jaume I, Campus de Riu Sec, Departamento de Matemáticas y Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló. E-mail: moyano@uji.es.*

### Resumen

The aim of this talk is to propose an extension of the Wilf conjecture to semimodules over a numerical semigroup. The key point is the introduction of a new invariant that we call the Wilf function of a semigroup that can be also defined for a semimodule over the semigroup. More concretely, we will show that the natural generalization of the Wilf conjecture to semimodules over the semigroup does not work unless we used the Wilf function of the semimodule. In this direction, we propose several questions regarding the possible extensions of Wilf-type inequalities for semimodules.

The second part of the talk will be focused in the particular case of a semigroup with two generators and the Wilf functions associated to its gaps. Based on the results of [1, 2], we will be able to solve the extension of Wilf conjecture in this particular case. This is a joint work with J.J. Moyano-Fernández [3].

### Referencias

- [1] P. Almirón, J.J. Moyano-Fernández, *A formula for the conductor of a semimodule of a numerical semigroup with two generators*, Semigroup Forum **103**, no.1 (2021), 278–285.
- [2] P. Almirón, J.J. Moyano-Fernández, *Supersymmetric gaps of a numerical semigroup with two generators*, Preprint, <https://arxiv.org/abs/2011.01690> (2020).
- [3] P. Almirón, J.J. Moyano-Fernández, *An Extension of the Wilf conjecture to semimodules over a numerical semigroup*, Preprint, <https://arxiv.org/pdf/2012.01358.pdf> (2020).

## Lyubeznik numbers of graphs

J. ÀLVAREZ MONTANER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dept. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya. E-mail: josep.alvarez@upc.edu.*

### Resumen

Lyubeznik numbers are a set of invariants of local rings introduced in [3]. They are defined as the Bass numbers with respect to the maximal ideal of local cohomology modules. These invariants provide interesting information but, in general, they are very difficult to compute. In this work we pay attention to a special case of squarefree monomial ideals associated to graphs. In particular we develop splitting techniques which allow us to describe them for large families of graphs.

This talk is based on joint work with F. Sohrabi.

### Referencias

- [1] J. Àlvarez Montaner and F. Sohrabi, *Bass numbers of local cohomology modules of cover ideals of graphs*, J. Alg. Comb., 53, (2021), 263-297.
- [2] J. Àlvarez Montaner and A. Vahidi, *Lyubeznik numbers of monomial ideals*, Trans. Amer. Math. Soc., 366, (2014), 1829-1855.
- [3] G. Lyubeznik, *Finiteness properties of local cohomology modules (an application of D-modules to commutative algebra)*, Invent. Math., 113, (1993), 41-55.

## Marked bases on quasi-stable ideals and some other polynomial bases: differences and similarities

C. BERTONE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dipartimento di Matematica, Università di Torino (Italy). E-mail: cristina.bertone@unito.it.*

### Resumen

Marked bases on a quasi-stable ideal proved to be a powerful tool in the investigation of Hilbert schemes, but not only (see for instance [4, 3] and references therein).

In this talk, I will sketch a comparison between marked bases and two other well-known polynomial bases for ideals in the polynomial ring  $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ : Gröbner bases and border bases.

For what concerns the comparison with Gröbner bases, the lack of term order in the marked bases framework is an advantage when investigating parameterizing schemes. However, polynomial ideals have to be in general position in order to be generated by a marked basis on a quasi-stable ideal, which is a flaw from a computational point of view. In this sense, an algorithm to get a general position without completely losing the possible sparsity of the polynomials generating the ideal is available [1].

For what concerns border bases, the comparison makes sense only for 0-dimensional ideals. In this setting, marked bases and border bases are much closer than one expects, in the sense that for a given monomial 0-dimensional ideal, the scheme parameterizing border bases is isomorphic to the one parameterizing marked bases. Although the scheme parameterizing border bases on a given monomial ideal can be easily computed by imposing commuting of some matrices, we prove that if we reduce suitable sets of  $S$ -polynomials by a border reduction or by a marked basis reduction, the latter method is more convenient computationally. These investigations are contained in [2].

This talk is supported by GNSAGA-INdAM.

### Referencias

- [1] M. Albert, C. Bertone, M. Roggero, and W. M. Seiler, *Computing Quot schemes via marked bases over quasi-stable modules*, J. Algebra **550** (2020), 432–470.
- [2] C. Bertone and F. Cioffi, *The close relation between border and Pommaret marked bases*, Collect. Math. (2021), 1–21.
- [3] C. Bertone, F. Cioffi, and D. Franco, *Functors of liftings of projective schemes*, J. Symbolic Comput. **94** (2019), 105–125.
- [4] C. Bertone, F. Cioffi, and M. Roggero, *Double-generic initial ideal and Hilbert scheme*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **196** (2017), no. 1, 19–41.

## An algorithm for Hodge ideals

G. BLANCO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, KU Leuven (Belgium). Email: guillem.blanco@kuleuven.edu*

### Resumen

We present an algorithm to compute the Hodge ideals of  $\mathbb{Q}$ -divisors associated to any reduced effective divisor  $D$ . The computation of the Hodge ideals is based on an algorithm to compute parts of the  $V$ -filtration of Malgrange and Kashiwara on  $\iota_+ \mathcal{O}_X(*D)$  and the characterization of the Hodge ideals in terms of this  $V$ -filtration. In particular, this gives a new algorithm to compute the multiplier ideals and the jumping numbers of any effective divisor.

## The inverse of a tridiagonal periodic matrix

J. BROX<sup>1</sup>, H. ALBUQUERQUE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Centre for Mathematics of the University of Coimbra (Portugal). E-mail: josebrox@mat.uc.pt.

<sup>2</sup> Centre for Mathematics of the University of Coimbra (Portugal). E-mail: lena@mat.uc.pt.

### Resumen

Given a commutative unital ring  $K$ , a matrix  $A \in \text{Mat}_n(K)$  is tridiagonal  $k$ -Toeplitz if it is tridiagonal and the entries along the main diagonal and its adjacent diagonals are periodic sequences of period  $k$ , so that it has the form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & \\ c_1 & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & a_k & b_k & & & \\ & & c_k & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & a_k & b_k & \\ & & & & & c_k & a_1 & b_1 & \\ & & & & & & c_1 & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Tridiagonal matrices appear frequently in many areas of pure and applied mathematics; consequently, tridiagonal  $k$ -Toeplitz matrices arise in those contexts when some periodicity of the studied problem or physical system is assumed. For example, they appear in number-theoretical problems involving second-order difference equations, in the discretization of elliptic or parabolic partial differential equations by finite difference methods, in classical mechanics, in chain models of quantum physics, in sound propagation theory, in telecommunication system analysis, and in circuit models of wireless power transfer arrays. Thus the eigenvalues or the inverse of the associated matrix can be invoked to solve these problems. We will show how to get rational formulas for the determinant, the characteristic polynomial, and the entries of the inverse of a tridiagonal  $k$ -Toeplitz matrix over any commutative unital ring by using only elementary linear algebra.

### Referencias

- [1] H. Albuquerque, J. Brox. *The inverse of a tridiagonal  $k$ -Toeplitz matrix over a commutative ring*, Linear Algebra Appl. (to appear)

## Double Schubert polynomials do have saturated Newton polytopes

YAIRON CID-RUIZ<sup>1</sup>, FEDERICO CASTILLO<sup>2</sup>, FATEMEH  
MOHAMMADI<sup>1</sup>, JONATHAN MONTAÑO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Ghent University, Krijgslaan 281 - S25, 9000 Gent (Belgium). E-mails: Yairon.CidRuiz@UGent.be, Fatemeh.Mohammadi@UGent.be.*

<sup>2</sup> *Departamento de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago (Chile). E-mail: federico.castillo@mat.uc.cl.*

<sup>3</sup> *Department of Mathematical Sciences, New Mexico State University, NM, (USA). E-mail: jmon@nmsu.edu.*

### Resumen

We prove that double Schubert polynomials have the Saturated Newton Polytope property. This settles a conjecture by Monical, Tokcan and Yong. Our ideas are motivated by the theory of multidegrees. We introduce a notion of standardization of ideals that enables us to study non-standard multigradings. This allows us to show that the support of the multidegree polynomial of each Cohen-Macaulay prime ideal in a non-standard multigrading, and in particular, that of each Schubert determinantal ideal is a discrete polymatroid.

### Referencias

- [1] Y. Cid-Ruiz, *Mixed multiplicities and projective degrees of rational maps*, J. Algebra 566, 136-162, (2021).
- [2] F. Castillo, Y. Cid-Ruiz, B. Li, J. Montaña, and N. Zhang, *When are multidegrees positive?*, Advances in Mathematics 374, 107382, (2020).
- [3] F. Castillo, Y. Cid-Ruiz, F. Mohammadi, J. Montaña, *Double Schubert polynomials do have saturated Newton polytopes*, [arXiv:2109.10299](https://arxiv.org/abs/2109.10299).



## Regularity of primes associated with polynomial parametrisations

F. CIOFFI<sup>1</sup>, A. CONCA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dip. di Matematica e Appl., Univ. degli Studi di Napoli Federico II (Italy). E-mail: cioffifr@unina.it.*

<sup>2</sup> *Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Genova (Italy). E-mail: conca@dima.unige.it.*

### Resumen

Let  $I$  be a homogeneous ideal in the polynomial ring  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  over a field  $K$ . The Castelnuovo-Mumford regularity  $\text{reg}(I)$  of  $I$  has been introduced in [4] and [7] as an algebraic counterpart of the corresponding notion introduced by Mumford [3] for coherent sheaves over projective spaces. It is known [1, 2] that  $\text{reg}(I) \leq (2u)^{2^{n-2}}$  where  $u$  is the largest degree of a generator of  $I$ . When  $P$  is a prime homogeneous ideal, one expects better bounds for  $\text{reg}(P)$ . Nevertheless  $\text{reg}(P)$  cannot be bounded above by any polynomial in the degree  $\text{deg}(R/P)$  (see [6]), but it can be actually bounded by a (highly exponential) function in  $\text{deg}(R/P)$  (see [5]).

We prove a doubly exponential bound for the Castelnuovo-Mumford regularity of prime ideals defining varieties with polynomial parametrisation by means of the numerical data of the parametrisation only. In details, if  $P$  is the kernel of a  $K$ -algebra map  $\phi : R \rightarrow K[y_1, \dots, y_m]$  with  $\phi(x_i)$  homogeneous polynomials of degree  $d$ , then  $\text{reg}(P) \leq d^{n2^{m-1}-1}$ . This talk is supported by GNSAGA-INdAM.

### Referencias

- [1] D. Bayer, D. Mumford, *What can be computed in algebraic geometry?*, Computational algebraic geometry and commutative algebra (Cortona, 1991), 1–48, Sympos. Math., XXXIV, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [2] G. Caviglia, E. Sbarra, *Characteristic-free bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity*, Compos. Math. **141** (2005) 1365–1373.
- [3] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*. With a section by G. M. Bergman. Annals of Mathematics Studies, No. 59 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1966 xi+200 pp.
- [4] D. Eisenbud, S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra **88** (1984) 89–133.
- [5] G. Caviglia, M. Chardin, J. McCullough, I. Peeva, M. Varbaro, *Regularity of prime ideals*, Math. Z. **291** (2019) 421–435.
- [6] J. McCullough, I. Peeva, *Counterexamples to the Eisenbud-Goto regularity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018) 473–496.
- [7] A. Ooishi, *Castelnuovo’s regularity of graded rings and modules*. Hiroshima Math. J. **12** (1982) 627–644.

## Approximation results of Artin-Tougeron-type for general filtrations and for rings of smooth functions

GENRICH BELITSKII<sup>1</sup>, ALBERTO F. BOIX<sup>2</sup>, DMITRY KERNER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Ben Gurion University of the Negev (Beer Sheva, Israel). E-mails: genrich@math.bgu.ac.il, dmitry.kerner@gmail.com.*

<sup>2</sup> *Department of Applied Mathematics, Science, Materials Engineering and Electronic Technology, Universidad Rey Juan Carlos (Madrid, Spain). E-mail: alberto.fboix@urjc.es.*

### Resumen

Various versions of Artin approximation are widely used in Algebraic/Analytic Geometry, Commutative Algebra and Singularity Theory; traditionally, the approximation statements were restricted to Noetherian rings and to filtrations by powers of ideals. The goal of this talk is to explain how to extend some of the classical approximation results both for general filtrations and for rings of smooth functions; for instance, our statements allow some immediate applications of Artin approximation to the study of non-isolated singularities of maps and schemes.

The content of this talk is based on [1], where the reader can find more details.

### Referencias

- [1] G. Belitskii, A. F. Boix, D. Kerner, *Approximation results of Artin-Tougeron-type for general filtrations and for  $C^r$ -equations*, J. Pure Appl. Algebra, vol. 224 (2020), no. 12, 106431, 15 pp.

## Trilinear birational maps from $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^3$ to $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$

L. BUSÉ<sup>1</sup>, P. GONZÁLEZ-MAZÓN<sup>1</sup> J. SCHICHO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Université Côte d'Azur, Inria (France).*

*E-mails: laurent.buse@inria.fr, pablo.gonzalez-mazon@inria.fr*

<sup>2</sup> *RISC, Johannes Kepler University (Austria)*

*E-mails: jschicho@risc.jku.at*

### Resumen

A trilinear rational map  $\phi : (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^3 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$  is a rational map whose entries are trilinear polynomials. If it admits an inverse rational map  $\phi^{-1} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3 \dashrightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^3$ , we say that  $\phi$  is a trilinear birational map. Similarly, a bilinear birational map is a birational map  $\psi : (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  with bilinear entries.

Bilinear birational maps can be efficiently used in Computer Aided Design (see [5]), and are already understood well. More explicitly, the set of bilinear birational maps is an irreducible locally closed hypersurface in  $\mathbb{P}^{11}$ . Moreover, the base scheme of  $\psi$  is always a closed point, and the minimal graded free resolution of its base ideal is Hilbert-Burch, with two linear syzygies (see [6]).

In our work, we answer the analogous questions about the algebraic structure, geometry of the base scheme, and resolution of the base ideal, for the 3-dimensional counterpart. Namely, we give the set  $\text{Bir}_{(1,1,1)}$  of trilinear birational maps the structure of an algebraic set, and describe its irreducible components. Secondly, we provide the complete list of possible base schemes for  $\phi$ , up to isomorphism between these. Finally, we classify all the possible graded minimal free resolutions of the base ideal of  $\phi$ .

### Referencias

- [1] L. Busé , Y. Cid Ruiz , C. D'Andrea. *Degree and birationality of multi-graded rational maps*, Proceedings of the London Mathematical Society, 121(4), 743 - 787, 2020.
- [2] D. Eisenbud. *The geometry of syzygies: a second course in algebraic geometry and commutative algebra*, Springer Science & Business Media, 2005.
- [3] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] I. Pan, F. Ronga, T. Vust. *Transformations birationnelles quadratiques de l'espace projectif complexe à trois dimensions*, Annales de l'Institut Fourier, 51, 1153-1187, 2001.
- [5] T.W. Sederberg, J. Zheng. *Birational quadrilateral maps*, Computer Aided Geometric Design, 32, 1-4, 2015.
- [6] N. Botbol, L. Busé, M. Chardin, S.H. Hassanzadeh, A. Simis, Q.H. Tran. *Effective criteria for bigraded birational maps*, Journal of Symbolic Computation, 81, 69-87, 2017

## Third-order moment varieties of non-Gaussian graphical models

CARLOS AMÉNDOLA<sup>1</sup>, MATHIAS DRTON<sup>1</sup>, ALEXANDROS GROS DOS<sup>1</sup>, ROSER HOMS<sup>1</sup>, ELINA ROBEVA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Technical University of Munich (Germany). E-mails:*

*carlos.amendola@tum.de, mathias.drton@tum.de, alex.grosdos@tum.de, roser.homs@tum.de.*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, University of British Columbia (Canada). E-mail: erobeva@math.ubc.ca.*

### Resumen

We study non-Gaussian graphical models from a perspective of algebraic statistics. Our focus is on algebraic relations among second- and third-order moments in graphical models given by linear structural equations. We show that when the graph is a tree these relations form a toric ideal. Using combinatorial tools, such as the multi-trek rule introduced by Robeva and Seby [1], we provide a Markov basis of the vanishing ideal of models given by trees, generalizing results on Gaussian models obtained by Sullivant [2].

Higher moments are of crucial importance for the case of non-Gaussian models, where different models may have identical structure in second but not in all higher moments. For instance, a particular type of algebraic relations among second and third moments was used in the work by Drton and Wang [3] to design a model selection method suitable for high-dimensional data.

### Referencias

- [1] Elina Robeva and Jean-Baptiste Seby. *Multi-trek separation in linear structural equation models*. SIAM J. Appl. Algebra Geom. 5 No. 2 (2021), 278–303.
- [2] Seth Sullivant. *Algebraic geometry of Gaussian Bayesian networks*. Adv. in Appl. Math. 40 No.4 (2008), 482–513.
- [3] Samuel Y. Wang and Mathias Drton. *High-dimensional causal discovery under non-Gaussianity*. Biometrika 170 No. 1 (2020), 41–59.

## Construction of the minimal free resolution for quasi-stable ideals from the Pommaret-Seiler resolution

RODRIGO IGLESIAS<sup>1</sup>, EDUARDO SÁENZ-DE-CABEZÓN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Spain). E-mails: roiglesi@unirioja.es.*

<sup>2</sup> *Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Spain). E-mails: eduardo.saenz-de-cabazon@unirioja.es.*

### Resumen

The Pommaret-Seiler resolution for quasi-stable ideals is a generalization of the well known Eliahou-Kervaire resolution for stable ideals. Both arise as mapping cones, and both are cellular resolutions. But unlike Eliahou-Kervaire resolution, the Pommaret-Seiler one is not minimal in general. We give a cellular structure for this resolution and develop an algorithm using discrete Morse Theory to obtain the minimal free resolution of quasi-stable ideals from the Pommaret-Seiler resolution.

### Referencias

- [1] M. Albert and M. Fetzer and E. Sáenz-de-Cabezón and W. M. Seiler, *On the free resolution induced by a Pommaret basis*. Journal of Symbolic Computation, 68:4-26, 2015.
- [2] A. Dochtermann and F. Mohammadi, *Cellular resolution, Mapping cone, Linear quotients*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 128:180-206, 2014.
- [3] S. Eliahou and M. Kervaire, *Minimal free resolutions of some monomial ideals*. Journal of Algebra, 129:1-25, 1990.
- [4] R. Forman, *A User's Guide To Discrete Morse Theory*. Sémin. Lothar. Combin., 48, 12, 2001.
- [5] M. Jöllenbeck and V. Welker, *Minimal resolutions via algebraic discrete Morse theory*. Mem. Amer. Math. Soc. AMS, 2009.
- [6] J. Mermin, *The Eliahou-Kervaire resolution is cellular*. Journal of Commutative Algebra, 2:55-78, 2010.
- [7] Werner M. Seiler, *A combinatorial approach to involution and  $\delta$ -regularity I: Involution bases in polynomial algebras of solvable type*. Applicable Algebra in Engineering, Communications and Computing, 20:261-338, 2009.
- [8] E. Sköldbberg *Morse theory from an algebraic viewpoint*. Trans. AMS, 385:115-129, 2005.

## On the number of limit cycles for quadratic vector fields, a computational algebra approach

J.L. BRAVO<sup>1</sup>, M. FERNÁNDEZ<sup>1</sup>, I. OJEDA<sup>1</sup>, F. SÁNCHEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas. Universidad de Extremadura (Spain). E-mails: trinidad@unex.es, ghierro@unex.es, ojedamc@unex.es, fsanchez@unex.es.*

### Resumen

In [1], we combine classical techniques of partial differential equations with tools from computational algebraic geometry to study of the number of limit cycles surrounding a critical point of a quadratic planar vector field. In this talk, we will show how this problem is approached by studying the primary decomposition of certain polynomial ideals.

### Referencias

- [1] J.L. Bravo, M. Fernández, I. Ojeda, F. Sánchez, *Uniqueness of limit cycles for quadratic vector fields*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **39**-1 (2019) 483–502.

# Computational algebra to avoid robot singularities: the P4P problem

B. PASCUAL ESCUDERO

*Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid (Spain). E-mail: bepascua@math.uc3m.es.*

## Resumen

A *singularity* of a parallel robot is a configuration where certain axes of its assembling parts are aligned in a way that compromises the control of the robot. On the other hand, in the task of pose estimation, where a 2D image of an object with marked observable features (such as points or lines) is used to determine the 3D position of the real object, singular configurations mean potential ambiguity in the determination of this position.

Finding both kinds of singularities is mathematically equivalent, convenient to do in advance when one wants to do, for instance, *vision based control*, and boils down to finding the real solutions of a system of polynomial equations. We will explain how to use some intuition on the geometry of the problem in order to avoid heavy Gröbner basis computations (and interpretation) and describe the singular configurations when the observable features are 4 fixed points. This is based on joint work [1] with A. Nayak, S. Briot, O. Kermorgant, P. Martinet, M. Safey El Din and F. Chaumette.

## Referencias

- [1] B. Pascual-Escudero, A. Nayak, S. Briot, O. Kermorgant, P. Martinet, M. Safey El Din, F. Chaumette *Complete Singularity Analysis for the Perspective-Four-Point Problem*, Int J Comput Vis, 2021.

## Using CoCoALib: C++ for computing the algebraic reliability of multi-state systems

ANNA MARIA BIGATTI<sup>1</sup>, PATRICIA PASCUAL-ORTIGOSA<sup>2</sup>,  
EDUARDO SÁENZ-DE-CABEZÓN<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. di Matematica, Università di Genova (Italy). E-mail: bigatti@dima.unige.it.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, La Rioja (Spain). E-mail: papasco@unirioja.es.*

<sup>3</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, La Rioja (Spain). E-mail: eduardo.saenz-de-cabezon@unirioja.es.*

### Resumen

We present the design and implementation of a C++ class for reliability analysis computations of multi-state systems using an algebraic approach based on monomial ideals [1].

First, we introduce the algebraic approach for computing the reliability of multi-state systems: we begin by presenting Reliability Theory, and we explain the algebraic approach for computing the reliability of a multi-state system. We then briefly introduce CoCoALib, an open-source C++ software library devoted to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Finally, we explain the design and implementation of a class that provides functionality to reach our goal: compute multi-state system reliability and reliability bounds. We demonstrate its use and performance by computing several kinds of examples.

The presented algorithms are applicable to general systems and can be used for systems with independent components that have identical probability distribution and for systems with independent non-identical components.

### Referencias

- [1] A.M. Bigatti, P. Pascual-Ortigosa and, E. Sáenz de Cabezón, *A C++ class for multi-state algebraic reliability computations*, Reliability Engineering & System Safety, Volume 213, September 2021.



# A polytopal approach to Apollonian packings and discrete knotted structures

I. RASSKIN<sup>1</sup>, J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *IMAG Univ. Montpellier, CNRS, France. E-mails: [ivan.rasskin.math@gmail.com](mailto:ivan.rasskin.math@gmail.com), [jorge.ramirez-alfonsin@umontpellier.fr](mailto:jorge.ramirez-alfonsin@umontpellier.fr).*

## Resumen

In the last decades, Apollonian packings have drawn increasing attention due to their applications in number theory, geometric group theory, hyperbolic geometry, fractal structures or discrete geometry. In this talk, we introduce a class of sphere packings where the combinatorics is carried by an edge-scribed polytope. Through this connection, we generalize the Apollonian packings in different geometric settings and in higher dimensions. The polytopal structure also allow us to obtain a generalization of the Descartes' theorem for the sphere packings based on regular polytopes, which we use for characterizing the integrality of such packings. Then, after introducing the notion of Apollonian section, we show that the set of curvatures of any integral tetrahedral, octahedral or cubical Apollonian packing is contained in the set of curvatures of an integral orthoplicial Apollonian packing. Finally, we use the fractal structure of the orthoplicial Apollonian packings to construct new attractive representations of knots and links with interesting geometric and arithmetic properties.

## Referencias

- [1] J. L. Ramírez Alfonsín, I. Rasskin, *Ball packings for links*, European Journal of Combinatorics, Volume 96 (2021).
- [2] J. L. Ramírez Alfonsín, I. Rasskin, *A polytopal generalization of Apollonian packings and Descartes' theorem*, arXiv preprint: 2107.09432, (2021).
- [3] I. Rasskin, *Regular polytopes, sphere packings and Apollonian sections*, arXiv preprint: 2109.00655, (2021).

## Hilbert function for fat points on a rational normal curve

LUIS JOSÉ SANTANA SÁNCHEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa, Universidad de La Laguna (Spain).*  
*E-mail: lsantans@ull.edu.es.*

### Resumen

This talk covers a classical problem, known in the literature as the *polynomial interpolation problem*. In the language of Commutative Algebra, the problem is formulated as follows. Let  $p_1, \dots, p_s$  be  $s$  different points on the complex projective space  $\mathbb{P}^n$ . Denote by  $Z = m_1 p_1 + \dots + m_s p_s$  the scheme of fat points associated to the ideal

$$I = \bigoplus_{d \geq 0} I_d = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s^{m_s},$$

where each  $\mathfrak{p}_i$  is the homogeneous ideal in  $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  of  $p_i$ . The polynomial interpolation problem asks to compute the Hilbert function of the scheme of fat points  $Z$ .

In [1], the authors conjectured an algorithm that computes the Hilbert function of  $Z$  when the points  $p_1, \dots, p_s$  lie on a rational normal curve of degree  $n$ . We point out that the work of Castravet and Tevelev in [2] proves this conjecture. Besides, exploiting this algorithm, one can find a formula, rather than algorithm, for the Hilbert function in this setting.

During this talk, we will overview the interpolation problem, we will explain how to understand our formula from a geometric point of view, and we will give some easy consequences that one may extract from it.

### Referencias

- [1] M. V. Catalisano, P. Ellia, A. Gimigliano, *Fat Points on Rational Normal Curves*, Journal of Algebra. Volume 216, Issue 2, (1999). 600-619.
- [2] A. M. Castravet, J. Tevelev, *Hilbert's 14th problem and Cox rings*. Compositio Math. 142 (2006) 1478-1498

## DINÁMICA NO AUTÓNOMA Y APLICACIONES

### ORGANIZADORES

**Iacopo P. Longo** (Technische Universität München)

**Sylvia Novo** (Universidad de Valladolid)

**Rafael Obaya** (Universidad de Valladolid)

**Víctor M. Villarragut** (Universidad Politécnica de Madrid)

## Blowing-up Nonautonomous Vector Fields

LUCA ARCIDIACONO<sup>1</sup>, CHRISTIAN KUEHN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Technical University of Munich (Germany).*  
*E-mail: luca.arcidiacono@tum.de, ckuehn@ma.tum.de .*

### Resumen

The blow-up method has turned out to be a powerful technique to desingularize vector fields around non-hyperbolic equilibria. Originating in algebraic geometry to analyze singularities of algebraic varieties, this technique was later transferred to autonomous differential equations. It uses a non-injective transformation that maps a higher-dimensional object onto the non-hyperbolic equilibrium constituting the singularity. The dynamics on this larger, blown-up version of the singularity may then be desingularized using suitable time reparametrization. We extend this method to non-autonomous equations, which transforms the original finite dimensional ordinary differential equation into an infinite-dimensional delay equation with infinitely growing delay, but hyperbolic structure. For a class of planar, asymptotically autonomous differential equations that have equilibrium solutions with zero Lyapunov spectrum we show the existence of nonautonomous invariant manifolds. These correspond to the stable and unstable manifold of a desingularized, infinite-dimensional equation that we obtained by using the blow-up method. Furthermore, we outline how an iteration of the blow-up procedure allows to desingularize more general vector fields.

### Referencias

- [1] L. Arcidiacono, C. Kuehn. *Blowing-up Nonautonomous Vector Fields: Infinite Delay Equations and Invariant Manifolds*, 2021; arXiv:2010.14335.

## A semilinear problem in heat conduction with long time memory and non-local diffusion

T. CARABALLO<sup>1</sup>, J. XU<sup>1</sup>, J. VALERO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico, Universidad de Sevilla (Spain). E-mails: caraball@us.es, jiaxu1@alum.us.es.*

<sup>2</sup> *Centro de Investigación Operativa, Universidad Miguel Hernández, Elche (Spain). E-mail: jvalero@umh.es.*

### Resumen

In this talk, the asymptotic behavior of a semilinear heat equation with long time memory and non-local diffusion is analyzed in the usual set-up for dynamical systems generated by differential equations with delay terms. This approach is different from the previous published literature on the long time behavior of heat equations with memory which is carried out by the Dafermos transformation. As a consequence, the obtained results provide complete information about the attracting sets for the original problem, instead of the transformed one. In particular, the proved results also generalize and complete previous literature in the local case (see [1, 2]).

### Referencias

- [1] J. Xu, T. Caraballo, J. Valero. *Asymptotic behavior of a semilinear problem in heat conduction with long time memory and non-local diffusion*, preprint 2021.
- [2] J. Xu, T. Caraballo, J. Valero. *Asymptotic behavior of nonlocal partial differential equations with long time memory*. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series S* (2022) (to appear).

## Uniform stability and chaotic dynamics in nonhomogeneous linear dissipative scalar ordinary differential equations

JUAN CAMPOS<sup>2</sup>, CARMEN NÚÑEZ<sup>1</sup>, RAFAEL OBAYA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid (España).*  
carmen.nunez@uva.es, rafael.obaya@uva.es.

<sup>2</sup> *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada (España).*  
campos@ugr.es.

### Resumen

We analyze the structure and the inner long-term dynamics of the invariant compact sets for the skewproduct flow induced by a family of time-dependent ordinary differential equations of nonhomogeneous linear dissipative type. Our main assumptions are made on the dissipative term and on the homogeneous linear term of the equations. The rich casuistic includes the uniform stability of the invariant compact sets, as well as the presence of Li-Yorke chaos and Auslander-Yorke chaos inside the attractor.

## On the solvability of the Yakubovich minimization problem

ROBERTA FABBRI<sup>1</sup>, CARMEN NÚÑEZ <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dipartimento di Matematica e Informatica “Ulisse Dini”, Università di Firenze (Italy). E-mail: roberta.fabbri@unifi.it.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid, Valladolid (Spain). E-mail: carnun@wmatem.eis.uva.es.*

### Resumen

The Yakubovich Frequency Theorem, in its periodic and in its general nonautonomous extension, establishes conditions which result to be equivalent to the global solvability of a minimization problem of infinite horizon type, given by an integral of a quadratic functional subject to a control system. The solvability of the minimization problem is formulated in terms of the property of a corresponding linear Hamiltonian systems associated to the problem. In the talk, some conditions under which the problem is partially solvable are presented ; moreover the set of initial data for which the minimum exists is characterized and the values of the minimum as well of the minimizing pair are provided. In the analysis result to be fundamental the occurrence of an exponential dichotomy and the null character of the rotation number for the corresponding linear nonautonomous Hamiltonian system.

### Referencias

- [1] R.Fabbri, C. Núñez. *On the solvability of the Yakubovich linear-quadratic infinite horizon minimization problem.* Ann. Mat. Pura Appl., ser. IV, 199 (2020), 1713–1735.

## On the pitchfork bifurcation for the Chafee-Infante equation with additive noise

ALEX BLUMENTHAL<sup>1</sup>, MAXIMILIAN ENGEL<sup>2</sup>, ALEXANDRA  
NEAMȚU<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332, USA. E-mail: [ablumenthal6@gatech.edu](mailto:ablumenthal6@gatech.edu).*

<sup>2</sup> *Institute of Mathematics, Free University of Berlin, Arnimallee 6, 14195 Berlin, Germany. E-mail: [maximilian.engel@fu-berlin.de](mailto:maximilian.engel@fu-berlin.de).*

<sup>3</sup> *Department of Mathematics and Statistics, University of Konstanz, Universitätsstr. 10, 78464 Konstanz, Germany. E-mail: [alexandra.neamtu@uni-konstanz.de](mailto:alexandra.neamtu@uni-konstanz.de).*

### Resumen

The talk will present recent results [1] for pitchfork bifurcations in a stochastic reaction diffusion system perturbed by an infinite-dimensional Wiener process. It is well-known that the random attractor is a singleton, independently of the value of the bifurcation parameter; this phenomenon is often referred to as the “destruction” of the bifurcation by the noise. Analogous to the results of Callaway et al. [2] for a 1D stochastic ODE, we show that some remnant of the bifurcation persists for this SPDE model in the form of a positive finite-time Lyapunov exponent. Additionally, we prove finite-time expansion of volume with increasing dimension as the bifurcation parameter crosses further eigenvalues of the Laplacian.

### Referencias

- [1] A. Blumenthal, M. Engel and A. Neamțu, *On the pitchfork bifurcation for the Chafee-Infante equation with additive noise*, submitted preprint, arXiv:2108.11073 (2021), pp. 1–22.
- [2] M. Callaway, T.S. Doan, J.S.W. Lamb, and M. Rasmussen. *The dichotomy spectrum for random dynamical systems and pitchfork bifurcations with additive noise*. AIHP Probab. Stat., 53 (2017), 1548–1574.



## Rate-induced tipping as a nonautonomous saddle-node bifurcation in a class of scalar quadratic ODEs with nonautonomous asymptotic dynamics

I.P. LONGO<sup>1</sup>, C. NÚÑEZ<sup>2</sup>, R. OBAYA<sup>2</sup>, M. RASMUSSEN<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Technische Universität München, Garching bei München, Germany. E-mail: iacopo.longo@ma.tum.de.*

<sup>2</sup> *Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain. E-mails: carnun@wmatem.eis.uva.es,  
rafoba@wmatem.eis.uva.es.*

<sup>3</sup> *Imperial College London, London, United Kingdom. E-mail: m.rasmussen@imperial.ac.uk.*

### Resumen

We carry out an in-depth analysis of the possible dynamical scenarios for scalar differential equations of the type  $x' = -x^2 + q(t)x + p(t)$ , where  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are bounded and uniformly continuous. Particularly, the study of nonautonomous bifurcations of saddle-node type is fundamental to explain the absence or occurrence of rate-induced tipping for the differential equation  $y' = (y - 2/\pi \arctan(ct))^2 + p(t)$  as the rate  $c$  varies in  $[0, \infty)$ . A classical attractor-repeller pair, whose existence for  $c = 0$  is assumed, may persist for any  $c > 0$ , or disappear at a certain critical rate  $c = c_0$ , giving rise to rate-induced tipping. A suitable example demonstrates that it is possible to have an alternation between intervals of values of  $c$  in  $[0, \infty)$  where the attractor-repeller pair exists and intervals where it does not. We also treat the case where  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are piece-wise continuous and show how the obtained information permits to improve the understanding in the continuous case.

### Referencias

- [1] I.P. Longo, C. Núñez, R. Obaya, M. Rasmussen, Rate-induced tipping and saddle-node bifurcation for quadratic differential equations with nonautonomous asymptotic dynamics, *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.*, **20** (1) (2021), 500–540.
- [2] I.P. Longo, C. Núñez, R. Obaya, Critical transitions in piecewise uniformly continuous concave quadratic ordinary differential equations, *Submitted*, (2021).

## Rate-Induced Tipping in Asymptotically Autonomous Dynamical Systems

S. WIECZOREK<sup>1</sup>, P. O'KEEFFE<sup>1</sup>, CH. XIE<sup>1</sup> P. ASHWIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *School of Mathematical Sciences, University College Cork, (Ireland). E-mails:*  
`sebastian.wieczorek@ucc.ie`.

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, University of Exeter, (UK). E-mail:* `p.ashwin@exeter.ac.uk`.

### Resumen

Many systems are subject to external disturbances or changing external conditions. For a system near a stable state (an attractor) we might expect that, as external conditions change with time, the stable state will change too. In many cases the system may adapt to changing external conditions and track the moving stable state. However, some systems can be particularly sensitive to how fast the external conditions change and have critical rates: they suddenly and unexpectedly move to a different state if the external input changes too fast. This happens even though the moving stable state never loses stability in the classical autonomous sense. We describe this phenomenon as rate-induced tipping or R-tipping. Being a genuine non-autonomous instability, R-tipping is not captured by the classical bifurcation theory and requires an alternative framework.

In the first part of the talk, we demonstrate R-tipping in a simple ecosystem model where environmental changes are represented by time-varying parameters. We then introduce the concept of basin instability and show how to complement the classical bifurcation diagram with information on nonautonomous R-tipping that cannot be captured by the classical bifurcation analysis. In the second part of the talk, we develop a general mathematical framework for R-tipping with decaying inputs based on the concepts of thresholds, edge states and special compactification [1] of the nonautonomous system. This allows us to transform the R-tipping problem into a connecting heteroclinic orbit problem in the compactified system, which greatly simplifies the analysis. We explain the key concept of threshold instability and give rigorous testable criteria for R-tipping to occur in arbitrary dimension [2].

### Referencias

- [1] S. Wieczorek, Ch. Xie, C.K.R.T. Jones, *Compactification for asymptotically autonomous dynamical systems: theory, applications and invariant manifolds..* Nonlinearity, 34(5) (2020), 2970.
- [2] S. Wieczorek, Ch. Xie, P. Ashwin, *Rate-induced tipping: Thresholds, edge states and connecting orbits.* in preparation.

## Exponential ordering in non-autonomous FDEs with applications to almost periodic Nicholson systems

SYLVIA NOVO<sup>1</sup>, RAFAEL OBAYA<sup>1,2</sup>, ANA M. SANZ<sup>2</sup>, VÍCTOR M. VILLARRAGUT<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid (Spain). E-mails: [sylnov@wmatem.eis.uva.es](mailto:sylnov@wmatem.eis.uva.es), [rafoba@wmatem.eis.uva.es](mailto:rafoba@wmatem.eis.uva.es).*

<sup>2</sup> *IMUVA, Instituto de Investigación en Matemáticas, Universidad de Valladolid (Spain). E-mail: [anasan@wmatem.eis.uva.es](mailto:anasan@wmatem.eis.uva.es).*

<sup>3</sup> *Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Universidad Politécnica de Madrid (Spain). E-mail: [victor.munoz@upm.es](mailto:victor.munoz@upm.es).*

### Resumen

The use of monotonicity methods in dynamical systems has been really productive since the initial works by M.W. Hirsch in the 80's. Lately, also the field of monotone skew-product semiflows has received great attention, with applications to non-autonomous differential equations with certain recurrence in the time variation. When the monotonicity conditions for the usual orderings fail to hold, one can still look for different cones of positive vectors, so that a new partial ordering can be defined and solutions generate a monotone dynamical system under not so restrictive conditions.

In this talk we are going to give a description of the long-term behaviour of the trajectories of the skew-product semiflow induced by a family of delay FDEs, which is monotone and sublinear for an exponential ordering (see [3]), and with some additional conditions. Then, we will apply the result to an almost periodic Nicholson compartmental system which is uniformly persistent (see [2]). We prove the existence of a unique positive almost periodic solution asymptotically attracting any other positive solutions, provided that some easy-to-check conditions hold, which make the induced semiflow monotone for an exponential ordering.

### Referencias

- [1] S. Novo, R. Obaya, A.M. Sanz, V.M. Villarragut, The exponential ordering for non-autonomous delay systems with applications to compartmental Nicholson systems, *preprint* 2021.
- [2] R. Obaya, A.M. Sanz, Is uniform persistence a robust property in almost periodic models? A well-behaved family: almost-periodic Nicholson systems, *Nonlinearity* **31** (2018), 388–413.
- [3] H.L. Smith, H.R. Thieme, Strongly order preserving semiflows generated by functional differential equations, *J. Differential Equations* **93** (1991), 332–363.

## Approximations to a neural network with Heaviside signal function

PETER E. KLOEDEN<sup>1</sup>, VÍCTOR M. VILLARRAGUT<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Mathematics Department, University of Tübingen (Germany). E-mail: kloeden@na.uni-tuebingen.de.*

<sup>2</sup> *Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Universidad Politécnica de Madrid (Spain). E-mail: victor.munoz@upm.es.*

### Resumen

The dynamical study of neural networks has aroused great interest in the last decades. Specifically, in Wu [6], a model, together with a thorough description of its parameters, was proposed. Later on, that model was extended by Han and Kloeden [2, 3] by using a Heaviside signal function and by considering a lattice of differential inclusions. Finally, Wang et al. [4, 5] extended the previous formulations to the case of differential equations and inclusions with an atomic delay. In this work, we extend those models to a nonautonomous neural network with infinite and distributed delay, and a Heaviside signal function. We approximate that model by neural networks with sigmoidal signal functions. We also prove the existence of pullback attractors in both cases, and the convergence of the attractors of the sigmoidal models to those of the model with the Heaviside signal function.

### Referencias

- [1] P.E. Kloeden, V.M. Villarragut. *Sigmoidal approximations of a nonautonomous neural network with infinite delay and Heaviside function*. J. Dyn. Diff. Equat. (2020).
- [2] X. Han, P.E. Kloeden. *Asymptotic behavior of a neural field lattice model with a Heaviside operator*. Phys. D 389 (2019), 1–12.
- [3] X. Han, P.E. Kloeden. *Sigmoidal approximations of Heaviside functions in neural lattice models*. J. Differential Equations 268 (2020), no. 9, 5283–5300.
- [4] X. Wang, P.E. Kloeden, M. Yang. *Sigmoidal approximations of a delay neural lattice model with Heaviside functions*. Commun. Pure Appl. Anal. 19 (2020), 2385–2402.
- [5] X. Wang, P.E. Kloeden, M. Yang. *Asymptotic behaviour of a neural field lattice model with delays*. Elec. Res. Arch. 28 (2020), 1037–1048.
- [6] J. Wu. *Introduction to neural dynamics and signal transmission delay*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 6. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001.

## Milnor attractors for nonautonomous dynamical systems

L. OLJACA<sup>1</sup>, P. ASHWIN<sup>1</sup>, M. RASMUSSEN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dept of Mathematics, University of Exeter, Exeter EX4 4QF, UK*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, Imperial College London, 180 Queen's Gate London SW7 2AZ, UK.*

### Resumen

Various notions of attraction for dynamical systems have been proposed, and each of them may be useful to understand specific phenomena. One of the weakest notions of attraction for autonomous systems that remains useful for understanding “typical” initial conditions chosen with respect to a background measure, is Milnor’s notion of a measure attractor. In this paper we propose generalizations of this notion to the setting of a nonautonomous evolution processes such as those induced by solutions of a nonautonomous differential equation. We demonstrate that weak pullback and forward Milnor attractors can be defined in an appropriate manner and we discuss some interesting examples.

### Referencias

- [1] P. Ashwin, *On riddling and weak attractors*, Phys. D, 2000.
- [2] J. Milnor, *On the concept of attractor*, Communications in Mathematical Physics, 1985.

## Reducibility and fractalization in quasiperiodically forced maps

J. C. TATJER<sup>1</sup>, A. JORBA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpt. de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona (Spain). E-mail: jcarles@maia.ub.es.*

<sup>2</sup> *Dpt. de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona (Spain). E-mail: angel@maia.ub.es.*

### Resumen

We consider several scenarios for the fractalization of attracting invariant curves for special cases of families of quasiperiodically forced 1-D maps in the real and complex. We say that a smooth attracting invariant curve fractalizes if, as we change some parameter of the family of maps, it becomes increasingly wrinkled when its Lyapunov exponent goes to zero, but it keeps being smooth as long as its exponent is negative. In some cases it seems that this phenomenon is related to the non-reducibility of the invariant curve (see [3], [1]), but in others it seems that it is not related (see [2]). The goal of this talk is to explain these results and to relate the real and complex cases via a complexification of the real cases.

### Referencias

- [1] N. Fagella, A. Jorba, M. Jorba-Cuscó, J. C. Tatjer. *Classification of linear skew-products of the complex plane and an affine route to fractalization*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 39 (2019), no. 7, 3767–3787.
- [2] A. Jorba, F. J. Muñoz-Almaraz, J. C. Tatjer. *On non-smooth pitchfork bifurcations in invertible quasi-periodically forced 1-D maps*. J. Difference Equ. Appl. 24 (2018), no. 4, 588–608.
- [3] A. Jorba, J. C. Tatjer *A mechanism for the fractalization of invariant curves in quasi-periodically forced 1-D maps*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 10 (2008), no. 2-3, 537–567.

## DISEÑO ÓPTIMO DE EXPERIMENTOS

### ORGANIZADORES

**Mariano Amo Salas** (Universidad de Castilla - La Mancha)

**Víctor Casero Alonso** (Universidad de Castilla - La Mancha)

## Active Learning considering the marginal distribution of the covariates

Á. CÍA-MINA<sup>1</sup>, J. LÓPEZ-FIDALGO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencia de los Datos e Inteligencia Artificial, Universidad de Navarra (Spain). E-mails:*  
`aciamina@unav.es, fidalgo@unav.es`.

### Resumen

The Big Data sample size introduces statistical and computational challenges to extract useful information from data sets. The subsampling procedure is widely used to downsize the data volume and allows computing estimators in regression models. Usually, subsampling is performed defining a weight for each point and selecting a subset according to these weights. The subsample can be chosen at random (Passive Learning), but in order to obtain better estimators, the optimal experimental design theory can be used searching for an “influential” sub-sample (Active Learning). This has been developed in the literature for linear and logistic regression, obtaining algorithms based on D-optimality and A-optimality. To the authors knowledge the distribution of the explanatory variables has never been considered for obtaining a subsample. We study the effect of the explanatory variables distribution on the estimation as well as the optimal design. We first assume normality of the covariates and latter we measure the impact of skewness and kurtosis on the estimation and optimal designs. Then, we propose a novel method to obtain optimal subsampling through D-optimality, taking into account the marginal distribution of the covariates. The D-optimal design is computed by an exchange algorithm to obtain the subsample.



## Robust designs for toxicological tests

S. POZUELO-CAMPOS<sup>1</sup>, V. CASERO-ALONSO<sup>2</sup><sup>1</sup>, M. AMO-SALAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas. Universidad de Castilla-La Mancha (Spain). E-mails:*  
Sergio.Pozuelo@uclm.es, VictorManuel.Casero@uclm.es, Mariano.Amo@uclm.es.

### Resumen

Toxicological tests are widely used to study toxicity in aquatic environments. Reproduction is a possible endpoint of this type of experiment, whose response variable is given by counts. There is literature about the suitable probability distribution to be used for analyzing these data. In the theory of optimal experimental design, the assumption of this probability distribution is essential, and when this assumption is not adequate, there may be a loss of efficiency in the design obtained [3]. The main objective of this study is to propose robust designs when there is uncertainty about the probability distribution of the response variable. We introduce and compare three different strategies for attaining this goal and they are applied to toxicological tests based on *Ceriodaphnia Dubia* [1] and *Lemna Minor* [2]. In addition, a simulation study is performed to test the estimation properties of the robust designs obtained.

### Referencias

- [1] P. Lewis, D. Klemm, J. Lazorchak, T. Norberg-King and W. Peltier. *Short-term methods for estimating the chronic toxicity of effluents and receiving water to freshwater organisms*. Fourth edition, 2002.
- [2] R. Lehmann, J. Bachmann, D. Maletzki, C. Polleichtner, H. T. Ratte, and M. Ratte. *A new approach to overcome shortcomings with multiple testing of reproduction data in ecotoxicology*. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* (2016), 30:871-882.
- [3] S. Pozuelo-Campos, V. M. Casero-Alonso and M. Amo-Salas. *Effect of probability distribution of the response variable in optimal experimental design with applications in medicine*. *Mathematics* (2021), 9:1010.

## Cálculo de diseños D-óptimos exactos y aproximados para modelos de impedancia eléctrica

À. SEBASTIÀ BARGUES<sup>1</sup>, J. L. POLO SANZ<sup>2</sup>, R. MARTÍN  
MARTÍN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, Toledo (Spain). E-mails:  
Angela.SBargues@uclm.es, Raul.MMartin@uclm.es.*

<sup>2</sup> *Escuela de Ingeniería Industrial y Aeroespacial, Universidad de Castilla-La Mancha, Toledo (Spain).  
E-mail: JoseLuis.Polo@uclm.es.*

### Resumen

El comportamiento eléctrico de una gran variedad de sistemas se puede caracterizar mediante medidas de impedancia (oposición que presenta un material al paso de la corriente, en función de la frecuencia) [2]. En el presente trabajo se aplica la teoría del diseño óptimo de experimentos para la construcción de señales entrada óptimas [3], en el contexto de la técnica de espectroscopía de impedancia. Específicamente, se identifican las frecuencias en las que realizar las mediciones de impedancia para obtener una estimación óptima de los parámetros de un circuito eléctrico. El circuito utilizado modela, de manera simplificada, el comportamiento eléctrico pasivo de tejidos biológicos, membranas celulares e interfases electrodo-tejido. Se calculan diseños D-óptimos aproximados y exactos. Para ello, se han adaptado dos de los algoritmos más utilizados en la actualidad (el algoritmo KL [1] y REX [4]). Por último, se compara la D-eficiencia de los diseños óptimos proporcionados por los algoritmos con el diseño comúnmente utilizado por los experimentadores.

### Referencias

- [1] A.C. Atkinson and A.N. Donev, *The construction of exact D-optimum experimental designs with application to blocking response surface designs*, *Biometrika*, 76, Issue 3 (1989), 515–526.
- [2] E. Barsoukov and J.R. Macdonald, *Impedance Spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications*, 3<sup>rd</sup> ed. New Jersey, Wiley, 2018.
- [3] G.C. Goodwin and R.L. Payne, *Dynamic system identification: Experiment design and data analysis*, New York: Academic Press, 6, 1977.
- [4] R. Harman, L. Filová and P. Richtárik, *A Randomized Exchange Algorithm for Computing Optimal Approximate Designs of Experiments*, *Journal of the American Statistical Association*, 2018.

## Optimal designs for fractional polynomial models

V. CASERO-ALONSO<sup>1</sup>, J. LÓPEZ-FIDALGO <sup>2</sup>, C. TOMMASI <sup>3</sup>,  
W.K. WONG <sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real (Spain). E-mail: victormanuel.casero@uclm.es.*

<sup>2</sup> *DATAI, Universidad de Navarra, Pamplona (Spain). E-mail: fidalgo@unav.es.*

<sup>3</sup> *Dipartimento di Economia, Management e Metodi Quantitativi, Università degli Studi di Milano, Milan (Italy). E-mail: chiara.tommasi@unimi.it.*

<sup>4</sup> *Biostatistics Department, UCLA Fielding School of Public Health, Los Angeles (USA). E-mail: wkwong@ucla.edu.*

### Resumen

The aim of this talk is to show design issues for Fractional Polynomials (FP) models. We have constructed  $D$ - and  $I$ -optimal designs for estimating model parameters and prediction in FP models with a single factor and we have developed an applet to facilitate users find various types of tailor made optimal designs for their problems. We have considered three studies that used experimental design to model risk assessments, fitted by FP models, for illustrating the usefulness of optimal experimental design. Furthermore, there is interest in obtaining KL-optimal designs to discriminate between two FP models, even among several FP models. Algorithms are needed to achieve that goal. We have adapted the nature-inspired Particle Swarm Optimization algorithm to obtain such designs.

### Referencias

- [1] Casero-Alonso V., López-Fidalgo J. and Wong W.K. (2021), *Optimal designs for health risk assessments using fractional polynomial models*, Submitted.
- [2] Royston P. and Altman D.G. (1994), *Regression Using Fractional Polynomials of Continuous Covariates: Parsimonious Parametric Modelling*, Applied Statistics, 43, 429-467.

# Optimal designs and parameter estimation for multiresponse-multisubject models with different covariance structures

J.M. RODRÍGUEZ DÍAZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Statistics Department, University of Salamanca (Spain). E-mail: juanmrod@usal.es.*

## Resumen

Multiresponse models related to different characteristics from a subject will be considered, taking into account that these observations may be correlated in several ways at the same time (intra-correlation, inter-correlation). The main objective is to find optimal designs for these models, that is the cleverest choice of where observations should be taken in order to get the maximum information for limited resources (budget, time). The problem will be extended to the study of populations (a set of subjects) when the observations will be taken to every subject. Several examples of application from very different fields will be shown, from the selection of the most convenient temporal points where different kind of test (blood, urine) should be taken on workers of radioactive facilities, or the study of two variables related with the capacity of resolution of mathematical problems in primary-school students, to the evolution of characteristics observed in several type of bacteria, or the application to compositional models.

## Referencias

- [1] Rodríguez-Díaz J.M., Rivas-López M.J., Santos-Martín M.T. and Mariñas-Collado I. (2020). Optimal designs for a compositional response. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 34, 139-148
- [2] Rodríguez-Díaz, J. M. and Sánchez-León, G. (2019). *Efficient parameter estimation in multiresponse models measuring radioactivity retention*. *Radiation and Environmental Biophysics*, 58(2) 167-182
- [3] Rodríguez-Díaz J. M. and Sánchez-León, G. (2019). *Optimal designs for multiresponse models with double covariance structure*. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 189 1-7
- [4] Rodríguez-Hernández M., Pruneda R.E. and Rodríguez-Díaz J.M. (2021). *Statistical Analysis of the Evolutive Effects of Language Development in the Resolution of Mathematical Problems in Primary School Education*. *Mathematics* 2021, 9(10), 1081

## Diseños D-aumentados asegurando la eficiencia

C. DE LA CALLE-ARROYO<sup>1</sup>, M. AMO-SALAS<sup>1</sup>, J.  
LÓPEZ-FIDALGO<sup>2</sup>, L. J. RODRÍGUEZ-ARAGÓN<sup>1</sup>, W. K. WONG<sup>3</sup>

<sup>1</sup> IMACI, Universidad de Castilla-La Mancha (Spain). E-mails: carlos.callearroyo@uclm.es,  
mariano.amo@uclm.es, l.rodriguezaragon@uclm.es.

<sup>2</sup> DATAI, Universidad de Navarra (Spain). E-mail: fidalgo@unav.es.

<sup>3</sup> Department of Biostatistics, University of California Los Angeles (USA). E-mail: wkwong@ucla.edu.

### Resumen

El Teorema General de Equivalencia propuesto por Kiefer y Wolfowitz es un resultado capital de la teoría de diseño óptimo. En este trabajo, se derivan del mismo otros resultados que permiten proponer una aplicación para añadir nuevos puntos a un diseño, controlando el equilibrio entre la  $D$ -eficiencia del diseño y las necesidades prácticas que tiene que atender el experimentador a la hora de realizar un experimento.

Esta aplicación se ha formalizado en la forma de un algoritmo, que permite al usuario utilizar los resultados de forma sistemática para adaptar un diseño a las particularidades prácticas de su problema. Además, para ilustrar este proceso metodológico se ha desarrollado una aplicación Shiny que permite replicar el proceso para varios modelos en un entorno gráfico.

### Referencias

- [1] J. Kiefer and J. Wolfowitz, *Optimum design in regression problems*, The Annals of Mathematical Statistics, 1959.
- [2] Argumedo-Galván, S. and López-Ríos, V.I., *Metodología para incrementar el número de puntos experimentales en un diseño  $D$ -Óptimo*, Ingeniería y Ciencia, 2014.
- [3] O'Brien, T.E., *Optimal Design and Lack of Fit in Nonlinear Regression Models*, Statistical Modelling, 1995

## Nuevos avances en la construcción de diseños robustos para modelos de tiempo de fallo acelerado con censura por la derecha

M. J. RIVAS-LÓPEZ<sup>1</sup>, R. MARTÍN-MARTÍN<sup>2</sup>,  
I. GARCÍA-CAMACHA GUTIÉRREZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Estadística, Universidad de Salamanca (España). E-mail: chusr1@usal.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, Toledo (España). E-mails:  
Raul.MMartin@uclm.es, Irene.GarciaCamacha@uclm.es.

### Resumen

Los modelos de Tiempo de Fallo Acelerado (TFA) son utilizados frecuentemente en el campo de la manufactura industrial, pero su uso está cada vez más extendido en ensayos clínicos. Estos modelos se definen a través de la función de supervivencia de la variable tiempo hasta el evento  $T$ . Este trabajo propone nuevas metodologías para la construcción de diseños robustos para modelos TFA con observaciones censuradas por la derecha cuando el Factor de Aceleración (FA) se conoce de forma aproximada y la varianza de  $T$  es conocida. En particular, se permite que el FA real varíe en un vecindario de posibles funciones,  $FA(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \exp(\boldsymbol{\theta}^t \mathbf{x} + g_n(\mathbf{x}))$ , para alguna función contaminante desconocida  $g_n$ . Como en [1], consideraremos que  $g_n(\mathbf{x})$  pertenece a un espacio de funciones contaminantes  $\mathcal{F}$ . Bajo este marco, la eficacia de un diseño no puede asegurarse a partir de la matriz de varianzas-covarianzas del estimador máximo verosímil ya que la estimación está sujeta al error de sesgo debido a la inadecuación del modelo y al error de la varianza debido al muestreo. El resultado fundamental de este trabajo es la obtención de la matriz del error cuadrático medio asintótica de los estimadores para observaciones censuradas por la derecha. Para un tratamiento asintótico adecuado, se asumirá que las funciones  $g_n$  son de orden  $o(1/\sqrt{n})$ . Para ilustrar el resultado anterior se han desarrollado resultados analíticos y numéricos para construir diseños robustos bajo diferentes escenarios de funciones contaminantes para la distribución log-logística.

### Referencias

- [1] P.J. Huber. *Robustness and designs*. A Survey of Statistical Design and Linear Models, (1975), 287–303.

## Designing experiments for estimating an appropriate outlet size for a silo type problem

JOSÉ A. MOLER<sup>1</sup>, CATERINA MAY<sup>2</sup>, JESÚS LÓPEZ-FIDALGO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Universidad Pública de Navarra, Spain. E-mail: [jmoler@unavarra.es](mailto:jmoler@unavarra.es).*

<sup>2</sup> *Dipartimento DiSEI, Università degli Studi del Piemonte Orientale, Italy. E-mail: [caterina.may@uniupo.it](mailto:caterina.may@uniupo.it).*

<sup>3</sup> *Instituto de Ciencia de los Datos e Inteligencia Artificial, Universidad de Navarra, Spain.. E-mails: [fidalgo@unav.es](mailto:fidalgo@unav.es).*

### Resumen

The problem of jam formation during the discharge by gravity of granular material through a two-dimensional silo has a number of practical applications in industry. In many problems the estimation of the minimum outlet size which guarantees that the time to the next jamming event is long enough is crucial. Assuming that the time is modeled by an exponential distribution with two unknown parameters, this goal translates to the optimal estimation of a non-linear transformation of the parameters. We obtain  $c$ -optimum experimental designs with that purpose, applying the graphic Elfving method. Since the optimal designs depend on the nominal values of the parameters, a sensitivity study is additionally provided. Finally, a simulation study checks the performance of the approximations made, first with the Fisher Information matrix, then with the linearization of the function to be estimated. The results are useful for experimenting in a laboratory and translating then the results to a real scenario. Apart from the application a general methodology is developed in the paper for the problem of precise estimation of a one-dimensional parametric transformation in a non-linear model.

### Referencias

- [1] M. Amo-Salas, E. Delgado-Márquez and J. López-Fidalgo *Optimal experimental designs in the flow rate of particles*. *Technometrics*, 58, (2016), 269–276.
- [2] A. Janda, I. Zuriguel, A. Garcimartin, L.A. Pugnaroni, D. Maza *Jamming and critical outlet size in the discharge of a two-dimensional silo*. *Eurphysics letters*, 23, (2008).
- [3] D. Schulze *Powders and bulk solids.*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

## **EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS ANTE LOS OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE**

### **ORGANIZADORES**

**Manuel de León** (Consejo Superior de Investigaciones Científicas)

**María Jesús Campión** (Universidad Pública de Navarra)



## Una mirada matemática al ODS 5: igualdad de género

### COMISIÓN DE MUJERES Y MATEMÁTICAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Real Sociedad Matemática Española.*

#### Resumen

El quinto objetivo de los Objetivos de Desarrollo Sostenible es la igualdad de género, presentada no solo como un derecho fundamental, sino como *uno de los fundamentos esenciales para construir un mundo pacífico, próspero y sostenible*. En la justificación de este objetivo, se mencionan algunos aspectos clave que atienden a la representación de las mujeres en cargos de relevancia y posiciones de liderazgo, las *leyes y normas sociales* discriminatorias que condicionan el acceso de las mujeres a ciertos sectores y el impacto de la COVID-19 sobre los logros alcanzados en materia de igualdad de género.

Desde la Comisión de Mujeres y Matemáticas de la RSME, hemos orientado algunas de nuestras actuaciones a la visibilización de mujeres matemáticas que puedan actuar como referentes de futuras generaciones, a analizar la aplicación de la Ley de la Ciencia en lo relativo a aspectos de género, y a tratar de concienciar a la comunidad matemática de que resulta necesario (y urgente) la implantación de medidas que permitan alcanzar la igualdad. En esta ponencia, en línea con los aspectos señalados en el ODS, presentaremos algunos datos estadísticos que nos permitan comprender la situación de la mujer en el ámbito científico, y en particular, en la comunidad matemática; revisaremos el análisis realizado sobre la aplicación de la Ley de la Ciencia (véase [1]) y, finalmente, valoraremos el impacto que ha tenido en nuestra comunidad la COVID-19, también a largo plazo (véase [2]).

#### Referencias

- [1] Comisión de Mujeres y Matemáticas. *Stop Discriminación*, 2020. (<https://mym.rsme.es/images/docs/mym/stop.pdf>)
- [2] Gao, J., Yin, Y., Myers, K.R. et al. Potentially long-lasting effects of the pandemic on scientists. *Nature Communications*, 12, 2021.

## El objetivo 16. Usos y abusos del aprendizaje automático

D. RÍOS INSUA<sup>1</sup>, R. NAVEIRA<sup>1</sup>, J.M. CAMACHO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ICMAT, CSIC-UAM-UCM-UC3M. E-mails: david.rios,  
roi.naveiro,josemanuel.camacho@icmat.es.es.

### Resumen

El objetivo para el desarrollo sostenible 16 se refiere a promover sociedades pacíficas e inclusivas para el desarrollo sostenible, facilitar el acceso a la justicia para todos y construir a todos los niveles instituciones eficaces e inclusivas que rindan cuentas. Se expresa en 12 metas.

En la charla se presentan ejemplos provenientes de proyectos reales que muestran que los sistemas de aprendizaje automático pueden emplearse para promover este ODS... pero también para ponerlo en peligro. Se discuten en consecuencia principios éticos y soluciones tecnológicas que deben promoverse en la implementación de tales sistemas.

### Referencias

- [1] M. Antenore, J.M. Camacho, E. Panizzi (2021) *A comparative study of Bot Detection techniques methods with an application related to Covid-19* discourse on Twitter arxiv 2102.01148.
- [2] D. Rios Insua (2021) *Luces y sombras del Big Data y la Inteligencia Artificial*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- [3] R Naveiro, A Redondo, DR Insua, F Ruggeri (2019) *Adversarial classification: An adversarial risk analysis approach*, Int. Journ. Appr. Reas., 113, 133-148.

## Matemáticas que suman

E. GIL CLEMENTE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, *Universidad de Zaragoza (Spain). Sociedad de Estudios sobre el Síndrome de Down. E-mail: elenagil@unizar.es.*

### Resumen

La convicción de que todas las personas, y no solamente las más dotadas, pueden obtener algún beneficio del encuentro con las matemáticas se remonta a la Antigüedad clásica. Las matemáticas sirven a las personas no en función de sus aplicaciones, que son muchas, sino porque despiertan la mente a la posibilidad de entender el mundo.

En nuestra experiencia con niños con discapacidad intelectual, hemos aprendido que ponerles en contacto con retos propios de las matemáticas (contar, medir, comparar...) produce en ellos una transformación personal (Gil Clemente. & Millán Gasca, 2021). Desplazamos el inicio del aprendizaje de las matemáticas de la aritmética a la geometría (Cogolludo Agustín & Gil Clemente, 2019) y utilizamos metodologías didácticas que huyen del aprendizaje mecánico y memorístico para poner a los niños frente a retos con sentido humano que les hacen movilizar todos sus recursos personales para afrontarlos.

De esta manera, en contacto con los niños más frágiles y vulnerables, las matemáticas muestran toda su potencia formativa. Las matemáticas así concebidas, son una oportunidad de inclusión para los niños con discapacidad intelectual (Gil Clemente, 2020). Se alejan de una visión reduccionista, centrada en la mera funcionalidad, y se convierten en una disciplina que les ayuda a florecer como personas más capaces, más plenas y más felices, miembros de pleno derecho de la sociedad.

### Referencias

- [1] J.I. Cogolludo Agustín, & E. Gil Clemente, *The Effectiveness of Teaching Geometry to Enhance Mathematical Understanding in Children with Down Syndrome*. International Journal of Disability, Development and Education, 66(2) (2019), p. 1?20.
- [2] E. Gil Clemente, *Matemáticas que suman. Horsori*. Barcelona, 2020.
- [3] E. Gil Clemente, & A. Millán Gasca, *Geometry as ?forceps of intelligence?: lines, figures, and the plane in Édouard Séguin's educational thought*. In (2021).

# La Estimación en Áreas Pequeñas para los Objetivos de Desarrollo Sostenible

ISABEL MOLINA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid (España). E-mails: [isabel.molina@uc3m.es](mailto:isabel.molina@uc3m.es).

## Resumen

El primero de los Objetivos de Desarrollo Sostenible que se estableció en 2015 es erradicar la pobreza extrema según la definición universal (menos de 1.25\$ al día) hasta 2030 y reducir a la mitad los individuos en riesgo de pobreza según las definiciones nacionales. Para la consecución de tales objetivos, la monitorización de dichos indicadores es de vital importancia. Adicionalmente, Naciones Unidas establece la necesidad de obtener datos estadísticos a nivel desagregado, es decir, a nivel local y por subgrupos de población. Desafortunadamente, las encuestas llevadas a cabo por los Institutos Nacionales de Estadística, con el objeto de la estimación de indicadores relacionados con la calidad de vida de los ciudadanos, tienen tamaños muestrales limitados, permitiendo solo obtener estimaciones fiables a nivel nacional o para regiones grandes. La Estimación en Áreas Pequeñas estudia técnicas que permiten obtener estimadores mucho más fiables a niveles mucho más desagregados, sin aumentar el coste de las encuestas. Estas técnicas se basan en establecer relaciones entre todas las áreas en las que se desea estimar mediante el uso de modelos estadísticos, que aprovechan otras fuentes de datos con información que ayude a predecir las variables de interés. La idea principal de estas técnicas es compartir información entre áreas para aumentar la eficiencia de los estimadores de cada área, véase [1]. Se revisarán técnicas populares para la estimación de indicadores de pobreza y desigualdad en áreas pequeñas, mencionando las últimas actualizaciones realizadas en la metodología del Banco Mundial con este objetivo.

## Referencias

- [1] J.N.K. Rao; I. Molina, *Small Area Estimation*, 2nd ed.; John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2015.

## Matemáticas para el diseño óptimo de infraestructuras sostenibles

L.J. ALVAREZ-VÁZQUEZ<sup>1</sup>, N. GARCÍA-CHAN<sup>2</sup>, A. MARTÍNEZ<sup>1</sup>  
M.E. VÁZQUEZ-MÉNDEZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada II, Universidad de Vigo (Spain). E-mails: lino@dma.uvigo.es, aurea@dma.uvigo.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Física, Universidad de Guadalajara, (Mexico). E-mail: nestor.gchan@academicos.udg.mx.

<sup>3</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela, Lugo (Spain). E-mail: miguelernesto.vazquez@usc.es.

### Resumen

Entre los 17 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) recogidos en la Agenda 2030 de la ONU, el número 9 se centra en la industria, las infraestructuras y la innovación. Desarrollar una red de carreteras y ferrocarriles fiable, sostenible, resiliente y de calidad es una de sus metas. La extensión de la red existente es imprescindible, pero debe hacerse buscando sostenibilidad económica, social y medioambiental. El objetivo de este trabajo es mostrar como las matemáticas, en particular la optimización y el control óptimo de ecuaciones en derivadas parciales (que ya se ha mostrado útil para diseñar otro tipo de infraestructuras sostenible —ver, p. ej., [1] o [2]—), pueden contribuir en el diseño de una nueva carretera o vía férrea. Se tratará de ilustrar como esa contribución es importante, tanto en la fase inicial de búsqueda de un corredor ([3]), como en la fase final, en la que deben precisarse todos los elementos que determinan esa infraestructura lineal ([4]).

### Referencias

- [1] L.J. Alvarez-Vázquez, J.J. Júdece, A. Martínez, C. Rodríguez, M.E. Vázquez-Méndez & M.A. Vilar, *On the optimal design of river fishways*. Optim. Eng., 14 (2013), 193–211.
- [2] L.J. Alvarez-Vázquez, A. Martínez, C. Rodríguez, & M.E. Vázquez-Méndez, *Sediment minimization in canals: An optimal control approach*. Math. Comput. Simul., 149 (2018), 109–122.
- [3] N. García-Chan, L.J. Alvarez-Vázquez, A. Martínez & M.E. Vázquez-Méndez, *Designing an ecologically optimized road corridor surrounding restricted urban areas: A mathematical methodology*. Math. Comput. Simul., 190 (2021), 745–759.
- [4] M.E. Vázquez-Méndez, G. Casal, A. Castro & D. Santamarina, *An algorithm for random generation of admissible horizontal alignments for optimum layout design*. Comput.-Aided Civil Infrastruct. Eng., 36 (2021), 1056–1072.

## Pobreza y Desigualdad

OIHANA ARISTONDO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática y Aplicada, Universidad del País Vasco (Spain). E-mails:  
oihana.aristondo@ehu.eus.*

### Resumen

La pobreza y la desigualdad siempre han sido un tema de preocupación política y social. Sin embargo, para poder aplicar políticas apropiadas estos conceptos deberían ser medidos adecuadamente. Existen numerosas medidas tanto de pobreza como de desigualdad basadas en diferentes axiomas propuestos en la literatura. [6] presenta más de quince medidas de pobreza basadas en estos axiomas. También podemos encontrar numerosos índices de desigualdad como el índice de Gini, el coeficiente de variación, la familia de índices de Entropía Generalizada y muchos más. Además, siguiendo el trabajo de [5] se deduce que un índice de pobreza debería ser sensible al porcentaje de pobres (Incidence), la intensidad de los pobres (Intensity) y la desigualdad de los pobres (Inequality), según Jenkins y Lambert [2] las tres *I*s de la pobreza. Por tanto, es muy interesante poder descomponer las medidas de pobreza existentes en sus tres componentes de forma que al analizar el cambio en pobreza podremos conocer si un crecimiento de la pobreza se debe a que tenemos más pobres, los pobres son más pobres, la desigualdad de los pobres ha incrementado o una combinación de estos tres. De hecho, existen índices en la literatura para los que es posible conocer esta función de forma explícita, Kakwani [3].

### Referencias

- [1] Clark, S., Hemming, R. and Ulph, D. [1981]. On indices for the measurement of poverty, *The Economic Journal* 91(362), 515-526.
- [2] S. P. Jenkins and P. L. Lambert. *Three I's of poverty curves, with an analysis of UK poverty trends*. Oxford economic papers 49(3), 317-327, 1997.
- [3] N. Kakwani. *Inequality, welfare and poverty: three interrelated phenomena*. In Handbook of income inequality measurement (pp. 599-634). Springer, Dordrecht, 1999.
- [4] Lasso de la Vega, C. and Urrutia, A. [2008]. The extended Atkinson family: The class of multiplicatively decomposable inequality measures, and some new graphical procedures for analysts, *Journal of Economic Inequality* 6(2).
- [5] A. Sen. *Poverty: an ordinal approach to measurement* [1976]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* pp. 219-231, 1976.
- [6] B. Zheng. *Aggregate poverty measures*. *Journal of economic surveys* 11(2) (1997), 123-162.

## Mathematical modelling of the global transitions in epigenetic landscapes induced by ageing

TOMÁS ALARCÓN<sup>1, 2, 3</sup>

<sup>1</sup> *Institució Catalana de Recerca i Estudis Avançats (ICREA), Barcelona (Spain). E-mails: talarcon@crm.cat.*

<sup>2</sup> *Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Barcelona (Spain).*

<sup>3</sup> *Dpt. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona (Spain).*

### Resumen

Epigenetic regulation is key to select and maintain cell identity. In a complex, multicellular organism, all the cells carry the same genetic information. Yet, such complex organisms exhibit a plethora of different cell types (phenotypes), each of them specialised in performing specific tasks within the organism. By silencing certain regions within the genome and allowing other regions to be expressed, epigenetic regulation allows different cell identities to emerge from a single genome. Such epigenetic regulatory patterns (*epigenetic landscapes*) are established during development and maintained throughout the life of an individual. Groundbreaking experiments reported in [1] show that such landscapes are *eroded* as DNA damage accumulates during the ageing process, thus seriously compromising cell identity and, therefore, cell and tissue function. In this talk, I will report recent mathematical modelling results regarding such phenomena. I will start by reviewing some recent work on the mechanisms involved in creating and maintaining the epigenetic landscapes in large genomic regions. These models involve complex, high dimensional systems that are in general very difficult to analyse. In order to overcome such difficulties, I will review recent work that we have done on the use dimensional reduction methods to study the global transitions occurring within the epigenetic landscapes. This is a key step to provide useful, meaningless explanations as to the biological mechanisms involved in epigenetic erosion.

### Referencias

- [1] Yang, Jae-Hyun, Griffin, Patrick T., Vera, Daniel L., Apostolides, John K., Hayano, Motoshi, Meer, Margarita V., Salfati, Elias L., Su, Qiao, Munding, Elizabeth M., Blanchette, Marco, Bhakta, Mital, Dou, Zhixun, Xu, Caiyue, Pippin, Jeffrey W., Creswell, Michael L., O'Connell, Brendan L., Green, Richard E., Garcia, Benjamin A., Berger, Shelley L., Oberdoerffer, Philipp, Shankland, Stuart J., Gladyshev, Vadim N., Rajman, Luis A., Pfenning, Andreas R., Sinclair, David A., *Erosion of the Epigenetic Landscape and Loss of Cellular Identity as a Cause of Aging in Mammals*, bioRxiv doi: 10.1101/808642 (2019).

## Modelos matemáticos para la logística de desastres y del desarrollo sostenible

B. VITORIANO<sup>1</sup>, M.T. ORTUÑO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Depto. Estadística e Investigación Operativa e Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid (Spain). E-mails: bvitoriano@mat.ucm.es, teresa.ortuno@mat.ucm.es.*

### Resumen

El desarrollo y la reducción del riesgo de desastres están íntimamente ligados, siendo ésta transversal a todos los objetivos de desarrollo, ya que los desastres impactan en las poblaciones afectando gravemente a su desarrollo. El grupo UCM-HUMLOG *Modelos de decisión en logística y gestión de desastres (logística humanitaria)* trabaja en modelos matemáticos de decisión para logística en ambos ámbitos desde la investigación operativa. Así, en gestión de desastres trabaja en el desarrollo de modelos en logística humanitaria ([1]-[3]) y en incendios forestales ([4]-[5]), y en desarrollo sostenible lo hace en modelos logísticos, principalmente en energía ([6]-[7]). Además organiza actividades de cooperación al desarrollo implantando másteres en Estadística (actualmente en Mozambique). Se presentará una panorámica de estos trabajos.

### Referencias

- [1] J.M. Ferrer et al., F.J. Martín Campo, M.T. Ortuño, A.J. Pedraza-Martínez, G. Tirado, B. Vitoriano. *Multi-criteria optimization for last mile distribution of disaster relief aid: Test cases and applications*, Eur J Oper Res 269, 501-515. 2018.
- [2] B. Vitoriano, M.T. Ortuño, G. Tirado, J. Montero. *A multi-criteria optimization model for humanitarian aid distribution*. J Glob Optim 51, 189-208. 2011.
- [3] I Flores, M.T. Ortuño, G. Tirado, B. Vitoriano. *Supported Evacuation for Disaster Relief through Lexicographic Goal Programming*. Mathematics 8 (4), 648. 2020.
- [4] F. Liberatore, J. León, J. Hearne, B. Vitoriano. *Fuel Management Operations Planning in Fire Management: A Bilevel Optimisation Approach*. Saf Sci., 137. 2021.
- [5] A. Rodríguez-Martínez, B. Vitoriano. *Probability-Based Wildfire Risk Measure for Decision-Making*. Mathematics 8 (4), 557. 2020.
- [6] J. L. Arroyo, A. Felipe, M.T. Ortuño, G. Tirado. *Effectiveness of carbon pricing policies for promoting urban freight electrification: analysis of last mile delivery in Madrid*. Cent Eur J Oper Res 28, 1417-1440. 2020.
- [7] L.M. Carrasco, F. J. Martín-Campo, L. Narvarte, M.T. Ortuño, B. Vitoriano. *Design of Maintenance Structures for Rural Electrification with Solar Home Systems. The Case of the Moroccan Program*. Energy, 117, 47-57. 2016



**FREE BOUNDARY PROBLEMS IN PHYSICS AND  
BIOLOGY**

ORGANIZADORES

**Francisco Gancedo** (Universidad de Sevilla)

**Rafael Granero Belinchón** (Universidad de Cantabria)

## Existence of gravity-capillary Crapper waves with concentrated vorticity

E. DI IORIO<sup>1</sup>, D. CÓRDOBA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Científicas (Spain). E-mail: elena.di.iorio@icmat.es, dcg@icmat.es .*

### Resumen

We prove the existence of gravity-capillary Crapper waves with the presence of vorticity. In particular, we consider a concentrated vorticity: point vortex and vortex patch. We show that for small gravity and small vorticity it is possible to demonstrate that the waves are overhanging.

### Referencias

- [1] Akers, B. F., Ambrose, D. M., Wright, J. D., *Gravity perturbed Crapper waves*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A , 2013.
- [2] Córdoba, D., Di Iorio E., *Existence of gravity-capillary Crapper waves with concentrated vorticity*, arXiv: 2106.15923, 2021.
- [3] Córdoba, D., Enciso, A., Grubic, N., *On the existence of stationary splash singularities for the Euler equations*, Adv. Math., 2016.
- [4] Crapper, G. D., *An exact solution for the progressive capillary waves of arbitrary amplitude*, J. Fluid Mech., 1957.

## Regularity of the boundary of density patches for some nonlinear transport equations

J. C. CANTERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona (Spain).*  
*E-mails: cantero@mat.uab.cat (canteroguardeno@gmail.com).*

### Resumen

Let  $k \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R}^n)$  be an odd kernel, homogeneous of degree  $-(n-1)$  and let  $D_0$  a  $C^{1+\gamma}$  domain in  $\mathbb{R}^n$ . We consider the nonlinear nonlocal transport equation

$$\begin{cases} \rho_t + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ v(\cdot, t) = k * \rho(\cdot, t), \\ \rho(\cdot, 0) = \chi_{D_0}, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\chi_{D_0}$  stands for the characteristic function of  $D_0$ . Our result (see [CMOV]) shows that the solution of (1) is of the form  $\rho(\cdot, t) = \chi_{D_t}$  for some domain  $D_t$  preserving the  $C^{1+\gamma}$  regularity of  $D_0$  at any time.

For different choices of  $k$  one can recover 2D Euler equation, the 3D quasi-geostrophic equation and the Aggregation equation. In the first two examples the velocity field in (1) is divergence-free and for the last one this divergence is equal to  $-\rho$ . For Euler (see [BC] and [Ch]) and Aggregation (see [BGLV]) equations the persistence of the regularity of the boundary of patches was known before. The main difference in our Theorem is that we allow the kernel  $k$  to yield a velocity field with more complex vorticity. This leads to the appearance of some obstacles in the proof that need to be solved and that will be discussed in this talk.

This is a joint work with J. Mateu, J. Orobitg and J. Verdera from UAB.

### Referencias

- [BC] A. L. Bertozzi, P. Constantin *Global regularity for vortex patches*, Comm. Math. Phys., Vol. 152, No. 1, 19-28 (1993).
- [BGLV] A. L. Bertozzi, J. Garnett, T. Laurent, J. Verdera, *The regularity of the boundary of a multidimensional aggregation patch*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 48(6) (2015).
- [CMOV] J. C. C., J. Mateu, J. Orobitg, J. Verdera, *The regularity of the boundary of vortex patches for some non-linear transport equations*, <https://arxiv.org/abs/2103.05356>
- [Ch] J.-Y. Chemin, *Persistence de structures geometriques dans les fluides incompressible bidimensionnels*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 26, 1-16 (1993).

## Vortex patches choreographies for incompressible fluids

C. GARCÍA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona (Spain).*  
*E-mail: claudiagarcia@ub.edu.*

### Resumen

The motion of an inviscid uniform incompressible fluid is described by the Euler equations. In the two-dimensional case, the Euler equations in the vorticity formulation contain many interesting relative equilibria: stationary, rotating and translating solutions. In particular, we shall focus on the study of V-states, consisting in single or multiple patches (constant vorticity supported in a bounded domain) moving without changing shape. On the one hand, simply connected patches can be obtained by means of bifurcation from some steady solutions, see [1, 2, 3, 7] and references therein.

On the other hand, the multiply connected case can not be treated via bifurcation arguments from stationary solutions. In this talk, we will find these special solutions as desingularization of the point vortex system [6]. Indeed, we will find the point vortex system as the limit when the area of a patch shrink to zero. We will be interested in choreographies for the N point vortex system which are solutions where the N point vortices follow the same path. In particular, we will talk about the Kármán Vortex Street structures [4] or the Thomson's polygon [5].

### Referencias

- [1] J. Burbea, *Motions of vortex patches*. Lett. Math. Phys. **6** (1982), 1–16.
- [2] F. De la Hoz, T. Hmidi, J. Mateu, J. Verdera, *Doubly connected V-states for the planar Euler equations*. SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), 1892–1928.
- [3] A. Castro, D. Córdoba, J. Gómez-Serrano, *Uniformly rotating analytic global patch solutions for active scalars*. Annals of PDE, **2**(1) (2016), 1-34.
- [4] C. García, *Kármán Vortex Street in incompressible fluid models*. Nonlinearity **33**(4) (2020), 1625-1676.
- [5] C. García, *Vortex patches choreography for active scalar equations*, J Nonlinear Sci **31** (2021), 75.
- [6] T. Hmidi, J. Mateu, *Existence of corotating and counter-rotating vortex pairs for active scalar equations*. Comm. Math. Phys. **350**(2) (2017), 699–747.
- [7] T. Hmidi, J. Mateu, J. Verdera, *Boundary regularity of rotating vortex patches*. Arch. Ration. Mech. Anal **209** (2013), 171–208.

## Symmetry in stationary and uniformly rotating solutions of the Euler equations

J. GÓMEZ-SERRANO<sup>1 2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Brown University, Kassab House, 151 Thayer Street, Providence, RI 02912, USA. E-mail: javier\_gomez\_serrano@brown.edu.*

<sup>2</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Gran Via de les Corts Catalanes 585, 08007 Barcelona, Spain. E-mail: jgomez\_serrano@ub.edu.*

### Resumen

In this talk, I will discuss characterizations of stationary or uniformly-rotating solutions of the 2D Euler equations in different settings. The main question we want to address is whether every stationary/uniformly-rotating solution must be radially symmetric. Based on joint work with Jaemin Park, Jia Shi and Yao Yao.

## Bifurcation results for a coupled incompressible Darcy's free boundary problem with surface tension

T. ALAZARD<sup>1</sup>, M. MAGLIOCCA<sup>1</sup>, N. MEUNIER<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Centre Borelli, ENS Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette (France). E-mails: mmaglioc@ens-paris-saclay.fr,  
thomas.alazard@ens-paris-saclay.fr.*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry, Université d'Évry Val d'Essonne, Évry (France).  
E-mail: nicolas.meunier@univ-evry.fr.*

### Resumen

In this talk, we will focus on bifurcation results of traveling waves for an incompressible Darcy's free boundary problem which describe cell motility. We will also compare two different techniques aimed at prove the existence of bifurcation points: the Crandall-Rabinowitz argument and the Leray-Schauder degree theory.

## On the free boundary incompressible Euler equations with interfaces that exhibit corners of non-constant angle

N. GRUBIC<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *ICMat - CSIC, Madrid (Spain). E-mail: nastasia.grubic@icmat.es.*

### Resumen

We discuss the local well-posedness of the free boundary incompressible Euler equations in the class of solutions in which the interface can exhibit corners. Contrary to what happens in all the previously known non- $C^1$  solutions the angle of these crests can change with time. This is joint work with D.Cordoba and A.Enciso.

## Global Regularity for Gravity Unstable Muskat Bubbles

FRANCISCO GANCEDO<sup>1</sup>, EDUARDO GARCIA-JUAREZ<sup>2</sup>,  
NEEL PATEL<sup>3</sup>, ROBERT STRAIN<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Analisis Matematico & IMUS, Universidad de Sevilla, Sevilla (Spain). E-mails: fgancedo@us.es.*

<sup>2</sup> *Departament de Matemàtiques Informàtica, Universitat de Barcelona, Barcelona (Spain) egarciajuarez@ub.edu.*

<sup>3</sup> *Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT, Madrid (Spain) neelpatel.math@gmail.com.*

<sup>4</sup> *Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Pennsylvania (USA) strain@math.upenn.edu.*

### Resumen

The Muskat problem describes the evolution of the interface between two immiscible fluids in porous media, e.g. oil and water in soil. Neglecting surface tension, the well-posedness of this free boundary problem depends on the Rayleigh-Taylor condition. For fluids of differing densities, it is required that the denser fluid is below. Otherwise, the system is gravity unstable. We will consider the stability of a closed curve interface, or a bubble, in which the Rayleigh-Taylor condition cannot hold. Medium sized perturbations of circular bubbles are shown to be globally well-posed, instantly analytic and decay exponentially quickly to the circle shape.

### Referencias

- [1] F. Gancedo, E. Garcia-Juarez, N. Patel and R. M. Strain, *Global Regularity for Gravity Unstable Muskat Bubbles*, preprint (2021) <https://arxiv.org/abs/1902.02318>.



## Liquid crystal droplets and a nonlocal free boundary problem

ZHIYUAN GENG<sup>1</sup>, FANGHUA LIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao (Spain) E-mail: zgend@bcmath.org.*

<sup>2</sup> *Courant Institute, New York University (USA) E-mail: linf@cims.nyu.edu.*

### Resumen

I will talk about a shape optimization problem which reduces to a nonlocal free boundary problem involving perimeter. This is a joint work [1] with Fanghua Lin. The problem is motivated by a study of liquid crystal droplets with a tangential anchoring boundary condition and a volume constraint [2]. We establish in 2D the existence of an optimal shape that has two cusps on the boundary. We also prove the boundary of the droplet is a chord-arc curve with its normal vector field in the VMO space, and its arc-length parametrization belongs to the Sobolev space  $H^{3/2}$ . In fact, the boundary curves of such droplets closely resemble the so-called Weil-Petersson class of planar curves [3]. In addition, the asymptotic behavior of the optimal shape when the volume becomes extremely large or small is also studied.

### Referencias

- [1] Z. Geng and F. Lin, *Two dimensional liquid crystal droplet problem with tangential boundary condition*. arXiv preprint arXiv:2106.10668 (2021).
- [2] F. Lin and C.C. Poon, *On nematic liquid crystal droplets*. Elliptic and parabolic methods in geometry (1996), 91–121.
- [3] L. A. Takhtajan and Lee-Peng Teo, *Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space*. Mem. Amer. Math. Soc. 183, no. 861 (2006). viii+119.

## Traveling waves close to the Couette flow.

A. CASTRO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Matemáticas (Spain). E-mails: angel.castro@icmat.es.*

### Resumen

Abstract: In this talk we shall study the existence of smooth traveling waves close to the Couette flow for the 2D incompressible Euler equation for an ideal fluid. It is well known that this kind of solutions do not exist arbitrarily close to the Couette flow if the distance is measured in  $H^{(3/2+)}$ . In this presentation we will deal with the case  $H^{(3/2-)}$ .

### Referencias

- [1] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
- [2] J. Simon. *Compact sets in  $L^p(0, T; B)$* . Ann. Mat. Pura Appl., sér. IV, CXLVI (1987), 65–96.

## Global existence and decay of the inhomogeneous Muskat problem with Lipschitz initial data

D. ALONSO-ORÁN<sup>1</sup>, R. GRANERO-BELINCHÓN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institute für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, Endenicher Alle 60, Bonn, Germany*  
*E-mails: alonso@iam.uni-bonn.de.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria, Avenida de los Castros s/n, Santander, España E-mail: rafael.granero@unican.es.*

### Resumen

The mathematical study of multiphase flows in porous media is a very active area of research, cf. [2, 3]. Besides its intrinsic mathematical interest, this type of problems are also physically meaningful since they can be used to model oil extraction, tumor growth or filtration problems. In this talk, we will present some recent results regarding the inhomogeneous Muskat problem which describes the evolution of an internal wave between two different fluids in a porous medium with discontinuous permeability. In particular, under precise conditions on the initial datum and the physical quantities of the problem, our results ensure the decay of the solutions towards the equilibrium state in the Lipschitz norm. In addition, we establish the global existence and decay of Lipschitz solutions.

### Referencias

- [1] D. Alonso-Orán, R. Granero-Belinchón *Global existence and decay of the inhomogeneous Muskat problem with Lipschitz initial data*, arXiv:2108.11111 (2021).
- [2] M. Muskat. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Soil Science 46(2):169, (1938).
- [3] M. Muskat. *Two fluid systems in porous media. the encroachment of water into an oil sand..* Physics, 5(9):250?264, (1934).

## Local well-posedness of an oscillating water column in shallow water with time-dependent air pressure

E. BOCCHI<sup>1</sup>, J. HE<sup>2</sup>, G. VERGARA-HERMOSILLA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático & IMUS, Universidad de Sevilla, Sevilla (Spain). E-mail: ebocchi@us.es.*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay, Orsay (France). E-mail: jiao.he@universite-paris-saclay.fr.*

<sup>3</sup> *Dpt. of Electronic Engineering, National University of Ireland, Maynooth (Ireland). E-mail: gaston.vergarahermosilla.2022@mumail.ie.*

### Resumen

We consider a particular wave energy converter, the so-called oscillating water column. Waves waves governed by the one-dimensional nonlinear shallow water equations arrive from the offshore, encounter a step in the bottom topography and then arrive into a chamber to change the volume of the air to activate the turbine. The system is reformulated as two hyperbolic transmission problems: one is related to the wave motion over the stepped topography and the other one is related to the wave-structure interaction at the entrance of the chamber. In this talk we focus on the second transmission problem. First, taking into account a time-dependent air pressure inside the chamber, we derive in a new way a transmission condition that permits to close the system. Secondly, we address the well-posedness of the system. We recast the problem as a hyperbolic quasilinear initial boundary value problem with a semilinear boundary condition. A Kreiss symmetrizer is derived and it makes the boundary condition maximally dissipative. This fact provides a gain of regularity for the trace of the solution at the boundary in the energy estimates for the linearized system and it is crucial to use an iterative scheme argument to get local well-posedness.

### Referencias

- [1] E. Bocchi, J. He, G. Vergara-Hermosilla, *Well-posedness of a nonlinear shallow water model for an oscillating water column with time-dependent air pressure*, submitted, preprint arXiv:2104.11570, 2021.

## Self-similar solutions for the Muskat problem

E. GARCÍA-JUÁREZ<sup>1</sup>, J. GÓMEZ-SERRANO<sup>1,2</sup>, H. Q. NGUYEN<sup>3</sup>,  
B. PAUSADER<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Barcelona (Spain). E-mails: egarciajuarez@ub.edu, jgomezerrano@ub.edu.*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, Brown University, Providence (USA). E-mail: javier\_gomez\_serrano@brown.edu, benoit\_pausader@brown.edu.*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, University of Maryland, Maryland (USA). E-mail: hnguye90@umd.edu.*

### Resumen

The Muskat problem studies the dynamics of the interface between fluids in a porous medium governed by Darcy's law. We will describe and review its main physical and mathematical features and then focus on the graph interface scenario, in which the free boundary satisfies a nonlocal, quasilinear PDE of parabolic type. Despite the intense research in the last years, the behavior of low regularity solutions is not well-understood yet. We will show that the Muskat equation admits self-similar solutions, which correspond to initial corners with linear growth at infinity.

### Referencias

- [1] E. García-Juárez, J. Gómez-Serrano, H. Q. Nguyen, B. Pausader, *Self-similar solutions for the Muskat problem*, preprint ArXiv:2109.08764, (2021).

**GEOMETRÍA ALGEBRAICA:  
LA APLICADA, LA COMPUTACIONAL,  
Y LA NUMÉRICA**

ORGANIZADORES

**Laura Brustenga i Moncusí** (University of Copenhagen)

**Roser Homs** (Technical University of Munich)

**Josué Tonelli-Cueto** (Sorbonne Université)

## Estimating Gaussian mixtures using sparse polynomial moment systems

C. AMÉNDOLA<sup>1</sup>, J. LINDBERG<sup>2</sup>, J.I. RODRIGUEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Technische Universität München (Germany). E-mail: carlos.amendola@tum.de.*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, University of Wisconsin-Madison (USA). E-mails: jrlindberg@wisc.edu, jose@math.wisc.edu.*

### Resumen

The method of moments is a statistical technique for density estimation that solves a system of moment equations to estimate the parameters of an unknown distribution. A fundamental question critical to understanding identifiability asks how many moment equations are needed to get finitely many solutions and how many solutions there are.

Since the moments of a mixture of Gaussians are polynomial expressions in the means, variances and mixture weights, one can address this question from the perspective of algebraic geometry.

With the help of tools from polyhedral geometry, we answer this fundamental question for several classes of Gaussian mixture models. Furthermore, these results allow us to present an algorithm that performs parameter recovery and density estimation, applicable even in the high dimensional case.

### Referencias

- [1] J. Lindberg, C. Améndola, J.I. Rodriguez, *Estimating Gaussian mixtures using sparse polynomial moment systems*, arXiv: 2106.15675, 2021.
- [2] D. Agostini, C. Améndola, K. Ranestad, *Moment identifiability of homoscedastic Gaussian mixtures*, Found Comput Mat, 21: 695-724, 2021.
- [3] C. Améndola, K. Ranestad, B. Sturmfels, *Algebraic identifiability of Gaussian mixtures*, Int. Math. Res. Not., IMRN (21): 6556-6580, 2018.
- [4] C. Améndola, J.C. Faugère, B. Sturmfels, *Moment varieties of Gaussian mixtures*, J. Algebr. Stat., 7(1): 14-28, 2016.

## A criterion to verify good toric compactifications

MATÍAS R. BENDER<sup>1</sup>, PIERRE-JEAN SPAENLEHAUER<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Technische Universität Berlin (Germany). E-mail: mbender@math.tu-berlin.de*

<sup>2</sup> *LORIA team, Inria Nancy Grand-Est (France). E-mail: pierre-jean.spaenlehauer@inria.fr*

### Resumen

A common computational approach to study affine varieties is to first homogenize the input defining equations. Among other reasons, we do so because the new equations have an associated grading that allows us to reduce our computations to a linear algebra problem. However, the homogenization process might introduce higher components at infinity, changing drastically the geometry of the affine object that we want to study. This is what happens when we homogenize, in the classical sense, sparse polynomials. To overcome this issue, a possible approach is to homogenize the input equations, according to their Newton polytope, over a Cox ring or a polytopal graded subring of it. However, other simpler homogenizations might be possible. In this work, we prove a combinatorial criterion to decide when a candidate homogenization is good, in the sense that it does not introduce higher components at infinity. Additionally, we use our criterion to decide which families of degrees lead to regular sequences over polytopal algebras as, for example, the one corresponding to weighted homogeneous systems.



## 96120: The degree of the linear orbit of a cubic surface

LAURA BRUSTENGA I MONCUSÍ<sup>1</sup>, SASCHA TIMME<sup>2</sup>, MADELEINE  
WEINSTEIN<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen (Denmark). E-mail:*  
`brust@math.ku.dk`.

<sup>2</sup> *Institute of Mathematics, Technische Universität Berlin (Germany). E-mail:*  
`timme@math.tu-berlin.de`.

<sup>3</sup> *Mathematics, Stanford University, (USA). E-mail:* `mweinste@stanford.edu`.

### Resumen

The projective general linear group  $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}, 4)$  acts on the parameter space ( $\mathbf{P}^{19}$ ) of cubic surfaces in  $\mathbf{P}^3$ . We computed, by means of Numerical Algebraic Geometry, the degree of the 15-dimensional projective variety  $\Omega_f$  defined by the Zariski closure of the orbit of a general cubic surface  $f$ .

In this talk, we will see two formulations and discuss their drastically different computational advantages. On one hand, pulling back to  $\mathrm{PGL}(\mathbb{C}, 4)$  the equations of a general linear subspace of dimension 4. On the other, the number of translates of  $f$  that pass through 15 points  $p_1, \dots, p_{15} \in \mathbb{P}^3$  in general position.

### Referencias

- [1] Brustenga i Moncusí, L.; Timme, S.; Weinstein, M., *96120: The degree of the linear orbit of a cubic surface*. *Le Matematiche*, 2020, no. 2 pp. 425–437.

## Complexity of computing zeros of structured polynomial systems

P. BÜRGISSER<sup>1</sup>, F. CUCKER<sup>2</sup>, P. LAIREZ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Technische Universität Berlin (Germany). E-mail: peter.burgisser@gmail.com.*

<sup>2</sup> *CityU Hong Kong (Hong Kong). E-mail: macucker@cityu.edu.hk.*

<sup>3</sup> *SpecFun team, Inria Saclay (France). E-mails: pierre.lairez@inria.fr.*

### Resumen

We study the average complexity of solving structured polynomial systems that are characterised by a low evaluation cost, as opposed to the dense random model previously used. Firstly, we design a continuation algorithm that computes, with high probability, an approximate zero of a polynomial system given only as black-box evaluation program. Secondly, we introduce a universal model of random polynomial systems with prescribed evaluation complexity  $L$ . Combining both, we show that we can compute an approximate zero of a random structured polynomial system with  $n$  equations of degree at most  $d$  in  $n$  variables with only  $\text{poly}(n,d) L$  operations with high probability. This exceeds the expectations implicit in Smale's 17th problem.

### Referencias

- [1] P. Bürgisser, F. Cucker and P. Lairez, *Rigid continuation paths II. Structured polynomial systems*, arXiv:2010.10997, 2020.

## Numerical reconstruction of curves from their Jacobians

D. AGOSTINI<sup>1</sup>, T. Ö. ÇELİK<sup>2</sup>, D. EKEN<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences (Germany).*

*E-mail: Daniele.Agostini@mis.mpg.de.*

<sup>2</sup> *Boğaziçi University (Turkey). E-mail: turkuozlum@gmail.com.*

<sup>3</sup> *Bilkent University (Turkey). E-mail: demir.eken@ug.bilkent.edu.tr.*

### Resumen

We approach the Torelli problem of reconstructing a curve from its Jacobian from a computational point of view. Following the literature of algebro-geometric perspective to the Kadomtsev-Petviashvili equation, we design machinery to solve this problem effectively, which builds on methods in numerical algebraic geometry. We verify these methods via numerical experiments with curves up to genus 7.

### Referencias

- [1] D. Agostini, T. Ö. Çelik and D. Eken. *Numerical reconstruction of curves from their Jacobians*, arXiv:2103.03138.

## Differential primary decomposition of modules

YAIRON CID-RUIZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Ghent University, Krijgslaan 281 - S25, 9000 Gent (Belgium). E-mail: Yairon.CidRuiz@UGent.be.*

### Resumen

We study primary submodules and primary decompositions from a differential and computational point of view. Our main theoretical contribution is a general structure theory and a representation theorem for primary submodules of an arbitrary finitely generated module over a polynomial ring. We characterize primary submodules in terms of differential operators and punctual Quot schemes. Moreover, we introduce and implement an algorithm that computes a minimal differential primary decomposition for a module. This talk is based on joint works with Bernd Sturmfels and Justin Chen.

### Referencias

- [1] Y. Cid-Ruiz, *Noetherian operators, primary submodules and symbolic powers*, Collect. Math. 72, 175-202 (2021).
- [2] J. Chen and Y. Cid-Ruiz, *Primary decomposition of modules: a computational differential approach*, arXiv:2104.03385.
- [3] Y. Cid-Ruiz, R. Homs and B. Sturmfels, *Primary ideals and their differential equations*, Found Comput Math 21, 1363-1399 (2021).

## Resultants, Subresultants and the Shape Lemma

DAVID COX <sup>1</sup>, CARLOS D'ANDREA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics & Statistics, Amherst College. dac@amherst.edu.*

<sup>2</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona. cdandrea@ub.edu.*

### Resumen

A zero dimensional ideal  $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , with  $\mathbb{K}$  being a field, is said to have a “Shape Lemma” if there exist univariate polynomials  $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{K}[t]$  such that  $I = \langle x_1 - \rho_1(x_n), \dots, x_{n-1} - \rho_{n-1}(x_n), \rho_n(x_n) \rangle$ . Such a description of  $I$  is useful to compute zeroes and study their multiplicities, so knowing when and ideal  $I$  has this property is of interest in Computational Algebra.

Radical ideals are known to have a Shape Lemma after a general linear change of coordinates, and in [1] geometric conditions on the multiplicity of the points in  $V(I)$  are described for  $I$  to have such a property.

For ideals generated by  $n$  polynomials, we study this problem from an algebraic point of view, and show that essentially  $I$  has a Shape Lemma if and only if the multivariate resultant of the input where the variable  $x_n$  is “hidden” generates  $I \cap \mathbb{K}[n]$ . In addition, we show how to compute explicitly the polynomials  $\rho_1, \dots, \rho_n$  by using multivariate resultants and subresultants.

### Referencias

- [1] E. Becker, M. Marinari, T. Mora, C. Traverso., *The shape of the Shape Lemma*, ISSAC '94: Proceedings of the international symposium on Symbolic and algebraic computation, 129–133.

## Soluciones positivas de sistemas de polinomios paramétricos y redes de reacciones bioquímicas

ELISENDA FELIU<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematical Sciences, University of Copenhagen (Denmark). E-mail:  
efeliu@math.ku.dk.*

### Resumen

En el contexto de redes de reacciones (bio)químicas, la evolución de las concentraciones de las especies de la red en el tiempo se modela a menudo con un sistema paramétrico de ecuaciones diferenciales ordinarias, que suelen ser polinomiales. El estudio de los puntos de equilibrio de la red se corresponde entonces con el estudio de las soluciones positivas de un sistema paramétrico de ecuaciones polinomiales.

Una cuestión de interés es determinar si existen valores de los parámetros (y determinar cuáles son), para los que el sistema tiene más de un punto de equilibrio (multi-estacionariedad) o dos puntos estables (biestabilidad). En la charla voy a presentar resultados efectivos, basados en técnicas poliedrales, para estudiar la región en el espacio de parámetros donde el sistema tiene multi-estacionariedad, y determinar propiedades topológicas de esta región. El último resultado se puede interpretar como una generalización de la regla de signos de Descartes a hipersuperficies.

Los resultados que presentaré se encuentran en distintos trabajos conjuntos con Conradi, Kaihnsa, Mincheva, Telek, Yürük, Wiuf and de Wolff.

## Bounds on complexity of matrix multiplication away from CW tensors

ROSER HOMS<sup>1</sup>, JOACHIM JELISIEJEW<sup>2</sup>, MATEUSZ MICHAŁEK<sup>3</sup>,  
TIM SEYNNAEVE<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Technical University of Munich (Germany). E-mail: roser.homs@tum.de.*

<sup>2</sup> *Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, University of Warsaw (Poland). E-mail: jjelisiejew@mimuw.edu.pl.*

<sup>3</sup> *Department of Mathematics and Statistics, University of Konstanz (Germany). E-mail: mateusz.michalek@uni-konstanz.de.*

<sup>4</sup> *Mathematical Institute, University of Bern (Switzerland). E-mail: tim.seynnaeve@math.unibe.ch.*

### Resumen

Determining the complexity of matrix multiplication is a central problem in computer science. Its algebraic counterpart translates to estimating the rank or border rank of the matrix multiplication tensor  $M_{\langle n,n,n \rangle} \in \mathbb{C}^{n^2} \otimes \mathbb{C}^{n^2} \otimes \mathbb{C}^{n^2}$  [1]. The complexity of matrix multiplication is measured by the constant  $\omega$ , defined as the smallest number such that for any  $\epsilon > 0$  the multiplication of  $n \times n$  matrices can be performed in time  $O(n^{\omega+\epsilon})$ . Equivalently,  $\omega$  is the smallest number such that for any  $\epsilon > 0$  the rank (or border rank) of  $M_{\langle n,n,n \rangle}$  is  $O(n^{\omega+\epsilon})$ .

The best known upper bounds on  $\omega$  are all obtained by applying the *laser method* – consisting in studying tensors with low border rank that are “close” to being a matrix multiplication tensor – to the *Coppersmith-Winograd tensor* and its powers. However, recent results proved the existence of barriers: using CW tensors alone in the laser method, one cannot obtain an upper bound for  $\omega$  close to 2.

In [2] we present three families of minimal border rank tensors (highest weight vectors, smoothable algebras, or monomial algebras). We analyse them using Strassen’s laser method and explain how in certain monomial cases using the laser method directly is less profitable than first degenerating. Our results form possible paths in the search for valuable tensors for the laser method away from CW tensors.

### Referencias

- [1] P. Bürgisser, M. Clausen and M.A. Shokrollahi. *Algebraic complexity theory*, vol. 315. Springer Science & Business Media (2013).
- [2] R. Homs, J. Jelisiejew, M. Michałek and T. Seynnaeve, *Bounds on complexity of matrix multiplication away from CW tensors*, arXiv:2103.12598 (2021).

## On the condition number of polynomials

CARLOS BELTRÁN<sup>1</sup>, FÁTIMA LIZARTE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria (Spain). E-mails: beltranc@unican.es, lizartef@unican.es.*

### Resumen

The condition number of a polynomial is a natural measure of the sensitivity of the roots under small perturbations of the polynomial coefficients. In 1993 Shub and Smale posed the problem of finding a sequence of univariate polynomials of degree  $N$  with condition number bounded above by  $N$ . In this talk, we give a simple and direct answer to this problem, valid for all  $N = 4M^2$  with  $M$  a positive integer, and with an upper bound for the condition number of such sequence completely explicit.

### Referencias

- [1] C. Beltrán, U. Etayo, J. Marzo and J. Ortega-Cerdà, *A sequence of polynomials with optimal condition number*, *J. Amer. Math. Soc.*, (2021), 34, 219–244.
- [2] C. Beltrán and F. Lizarte, *On the minimum value of the condition number of polynomials*. *IMA J. Numer. Anal.*, (2021).
- [3] S. V. Borodachov, D. P. Hardin and E. B. Saff, *Discrete Energy on Rectifiable Sets*, New York: Springer, 2019.



# Using Algebraic Geometry to detect robustness in Reaction Networks

B. PASCUAL ESCUDERO

*Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid (Spain). E-mail: bepascua@math.uc3m.es.*

## Resumen

Reaction Networks represents interactions between species, as for example proteins involved in some cellular process (although they can also appear in other fields such as ecology or epidemiology). The evolution of the concentrations of the species in the network is often modeled by an autonomous ODE system, which can involve a large number of unknown parameters. However, under certain kinetic assumptions, these ODEs are polynomials with a very particular structure, which can be used to understand several aspects of their dynamics. The equilibria of the system then happen to be the real positive part of an algebraic variety.

Motivated by this kind of dynamical systems, we will see how it is possible to use algebraic geometry to study the property of ACR (Absolute Concentration Robustness) in systems with this type of structure: a biological system has (ACR) for some species if the concentration of this species is identical at any possible equilibrium that the network admits. In particular, this concentration must be independent of the initial conditions.

While some classes of networks with ACR have been described, as well as some techniques to check ACR for a given network, finding networks with this property is a difficult task in general. Our study provides a practical criterion that networks must satisfy for having ACR and which, for certain classes of networks, characterizes the property. This is based on joint work with E. Feliu.

## Referencias

- [1] B. Pascual-Escudero, E. Feliu *Local and global robustness at steady state*, Math Meth Appl Sci., 2021.

## Using linear algebra to give a complete error analysis for solving overdetermined systems in computer vision

M. H. REGAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Duke University (USA). E-mail: mregan@math.duke.edu.*

### Resumen

Many problems in computer vision are represented using a parametrized overdetermined system of polynomials which must be solved quickly and efficiently. Classical methods for solving these systems involve specialized solvers based on Groebner basis techniques or utilize randomization in order to create well-constrained systems for numerical techniques. We propose new methods in numerical linear algebra for solving such overdetermined polynomial systems and provide a complete error analysis showing that the numerical approach is stable. Examples will be provided to show the efficacy of the method and how the error in the data affects the error in the solution.

## Polyhedral homotopies in Cox coordinates

T. DUFF<sup>1</sup> S. TELEN<sup>2</sup>, E. WALKER<sup>3</sup>, T. YAHL<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, University of Washington (USA). E-mail: timduff@uw.edu.*

<sup>2</sup> *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences (Germany). E-mail: simon.telen@mis.mpg.de.*

<sup>3</sup> *Department of Mathematics, Texas A&M University (USA). E-mails: elise.walker@tamu.edu,  
thomasjyahl@tamu.edu.*

### Resumen

In homotopy algorithms for solving systems of polynomial equations, it is standard practice to work in (multi-)projective space to avoid diverging paths. At each point on a path, the solution is represented by a set of (multi-)homogeneous coordinates. In this talk, based on [1], we investigate how this approach and many of its advantages generalize to the setting of polyhedral homotopies. The natural compact solution space is a projective toric variety, whose polytope is determined by the input equations.

### Referencias

- [1] T. Duff, S. Telen, E. Walker and T. Yahl, *Polyhedral homotopies in Cox coordinates*, arXiv:2012.04255, 2020.

## New bounds for the number of real zeros of a random polynomial system

J. TONELLI-CUETO<sup>1</sup>, E. TSIGARIDAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *OURAGAN team, Inria Paris & IMJ-PRJ, Sorbonne Université (France). E-mail:  
josue.tonelli.cueto@bizkaia.eu, elias.tsigaridas@inria.fr.*

### Resumen

In this talk we present new bounds for the number of real zeros of both a KSS and a Kac random polynomial system. Moreover, we show how the proof of these bounds could lead to new faster algorithms in numerical real algebraic geometry.

## Algebraic degrees of phylogenetic varieties

MARINA GARROTE-LÓPEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences (Germany). E-mail: marina.garrote@upc.edu.*

### Resumen

Phylogenetic reconstruction aims to estimate the phylogenetic tree that best explains the evolutionary relationships of current biological entities using only information from their genome. For this purpose, DNA sequences are usually assumed to evolve according to a Markov process in a phylogenetic tree governed by a model of nucleotide substitutions. The distribution of nucleotide patterns in the leaves of a phylogenetic tree is represented by a vector whose entries can be expressed as polynomials over the model parameters and satisfy certain algebraic relationships.

The study of these relationships and of the geometry of the algebraic varieties defined by them has provided successful insight into the problem of phylogenetic reconstruction. Given the observed data, one can attempt to estimate the tree (and parameters) most likely to have produced the data, using the maximum likelihood estimation or Euclidean distance minimization over the corresponding variety. We present some results on the maximum likelihood degree and the Euclidean distance degree for phylogenetic models (which measure the complexity of such optimization problems) and discuss their relationship and differences.

## Line multiview-variety in computer vision

ANGÉLICA TORRES<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology. E-mail: [amtb@kth.se](mailto:amtb@kth.se).*

### Resumen

The 3D reconstruction problem consists on building a 3D model of an object, from 2D images of said object. In order to do so, it is necessary to establish correspondences of common points and lines in all the images, and then use this geometric information to recover the position of the cameras, and the real points and lines.

In this talk we will focus on one step of this process. Namely, we will study the smallest algebraic set containing all possible line correspondences in  $m$  images. First we define the line multi-view variety as the Zariski closure of the image of world lines in the cameras. Then I will present a set of generators for the ideal of the line multi-view variety, and discuss some of its geometric properties, in particular I will discuss its multidegree and singular points. This is joint work with Felix Rydell, Elima Shehu, Paul Breiding, and Kathlén Kohn.

## GEOMETRÍA CONVEXA

ORGANIZADOR

**Antonio Cañete** (Universidad de Sevilla)

## Concentración de la norma Euclídea en bolas de Orlicz

DAVID ALONSO-GUTIÉRREZ<sup>1</sup>, JOSCHA PROCHNO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza (Spain) E-mail: alonsod@unizar.es.*

<sup>2</sup> *Faculty of Computer Sciences and Mathematics, University of Passau (Germany). E-mail: joscha.prochno@uni-passau.de.*

### Resumen

Dada una función de Orlicz  $M : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  (es decir, una función convexa par tal que  $M(0) = 0$  y  $M(t) > 0$  para todo  $t \neq 0$ ) y  $R > 0$ , consideramos la bola de Orlicz

$$B_M^n(nR) := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n M(x_i) \leq nR\}.$$

Daremos algunas estimaciones acerca de cómo un vector aleatorio  $X_n$  uniformemente distribuido sobre  $B_M^n(nR)$  se concentra en una corona de radio,  $\sqrt{n \text{Var} Z}$ , donde  $Z$  una variable aleatoria determinada por  $M$  y  $R$ . La demostración de estas estimaciones se apoya en principios de larga desviación demostrados por Petrov, y proporciona el valor asintótico de la constante de isotropía de  $B_M^n(nR)$  cuando  $n$  tiende a infinito.



## Extreme properties of radii functionals in generalized Minkowski spaces

R. BRANDENBERG<sup>1</sup>, B. GONZÁLEZ MERINO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpt. of Applied Geometry and Discrete Mathematics, Technical University of Munich, Munich  
(Germany). E-mails: [brandenb@ma.tum.de](mailto:brandenb@ma.tum.de).

<sup>2</sup> Dpto. de Ingeniería y Tecnología de Computadores, Área de Matemática Aplicada, Universidad de  
Murcia, Murcia (Spain). E-mail: [bgmerino@um.es](mailto:bgmerino@um.es).

### Resumen

Let  $K, C \subset \mathbb{R}^n$  be convex bodies i.e. convex and compact sets. The circumradius  $R(K, C)$  (resp. the inradius  $r(K, C)$ ) is the minimum  $\rho \geq 0$  (resp. maximum  $\rho \geq 0$ ) such that  $K \subset t + \rho C$  (resp.  $t + \rho C \subset K$ ) for some  $t \in \mathbb{R}^n$ . The diameter  $D(K, C)$  is then defined as the maximum  $2\max_{x,y \in K} R(\{x, y\}, C)$ . Evidently, letting  $\mathbb{B}_2$  be the Euclidean unit ball, then  $R(K, \mathbb{B}_2)$ ,  $r(K, \mathbb{B}_2)$ ,  $D(K, \mathbb{B}_2)$  are the classical circumradius, inradius, and diameter in the Euclidean sense.

Given geometric functionals  $f_1, \dots, f_m$  defined in the space of  $n$ -dimensional convex bodies  $\mathcal{K}^n$ , its Blaschke-Santaló diagram is the image  $\{(f_1(\mathcal{K}^n), \dots, f_m(\mathcal{K}^n))\}$ . Our motivation starts in the works of Blaschke [1], who asked for the BS-diagram of the volume, surface area, and mean width, of a 3-dimensional convex body, and of Santaló [3], who computed, among others, the Blaschke-Santaló diagram of  $R(K, \mathbb{B}_2)$ ,  $r(K, \mathbb{B}_2)$ ,  $D(K, \mathbb{B}_2)$  for planar convex bodies  $K \in \mathcal{K}^2$ .

In this talk, we first describe the union and the intersection with respect to  $C$  of all BS-diagrams of the functionals  $R(K, C)$ ,  $r(K, C)$ ,  $D(K, C)$ . In other words, letting  $f(K, C) := (r(K, C)/r(K, C), D(K, C)/(2R(K, C)))$ , we compute  $\cup_{C \in \mathcal{K}^2} f(\mathcal{K}^2, C)$  and  $\cap_{C \in \mathcal{K}^2} f(\mathcal{K}^2, C)$ , and we prove that they coincide exactly and only with the diagrams  $f(\mathcal{K}^2, S)$  and  $f(\mathcal{K}^2, Q)$ , where  $S$  is a triangle and  $Q$  is a square, respectively.

Finally, we also answer further questions in this area, by means of the analogous diagrams measured with respect to the regular pentagon and hexagon, respectively.

### Referencias

- [1] W. Blaschke. *Eine Frage über konvexe Körper*. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 25 (1916), 121–125.
- [2] R. Brandenberg, B. González Merino. *On  $(r, D, R)$ -Blaschke-Santaló diagrams with regular  $k$ -gon gauges*. arXiv:2108.07203.
- [3] L. Santaló. *Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana*. Math. Notae, 17 (1961), 82–104.

## On a characterization of lattice cubes via discrete isoperimetric inequalities

D. IGLESIAS<sup>1</sup>, E. LUCAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia (Spain).*  
*E-mails: dvd.iglesias@outlook.com, eduardo.lucas@um.es.*

### Resumen

The *isoperimetric inequality* characterizes Euclidean balls as the only convex bodies that minimize the surface area for prescribed positive volume. In fact, due to the well-known *Brunn-Minkowski inequality*, the isoperimetric inequality can be reformulated into its “neighbourhood form”: for any  $t \geq 0$  and any compact sets  $K, E \subset \mathbb{R}^n$  with positive volume, if  $r > 0$  is such that  $\text{vol}(K) = \text{vol}(rE)$ , then we have

$$\text{vol}(K + tE) \geq \text{vol}(rE + tE). \quad (1)$$

In recent years, there has been a growing interest in obtaining discrete analogues of classic geometric inequalities. In [1], the authors show a discrete inequality in the spirit of (1) for the integer lattice  $\mathbb{Z}^n$  with the cardinality measure: for any non-empty finite set  $X \subset \mathbb{Z}^n$ , there exists a set  $\mathcal{I}_r \subset \mathbb{Z}^n$  (with  $r = |\mathcal{I}_r| = |X|$ ) such that

$$|X + \{-1, 0, 1\}^n| \geq |\mathcal{I}_r + \{-1, 0, 1\}^n|. \quad (2)$$

The sets  $\mathcal{I}_r \subset \mathbb{Z}^n$ , with  $r > 0$ , are initial segments, this is, the union of the first  $r$  points with respect to a particular complete order in  $\mathbb{Z}^n$ .

In this talk, we will address discrete isoperimetric inequalities such as (2). Then, we will show that it is possible to fully characterize lattice cubes as the only sets reaching equality in such discrete inequalities (provided that  $|X| = (p+1)^n$  for some  $p \in \mathbb{N}$ ). Furthermore, we will obtain a new discrete isoperimetric inequality for the so-called lattice point enumerator that can be used to infer the neighbourhood form (1) for any  $n$ -dimensional cube  $E$ .

### Referencias

- [1] A. J. Radcliffe and E. Veomett, Vertex Isoperimetric Inequalities for a Family of Graphs on  $\mathbb{Z}^k$ , *Electr. J. Comb.* **19** (2) (2012).
- [2] D. Iglesias and E. Lucas, On a characterization of lattice cubes via discrete isoperimetric inequalities, *submitted*.

## Connecting volume and cardinality

A. FREYER<sup>1</sup>, E. LUCAS<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Technische Universität Berlin, Institut für Mathematik (Germany). E-mail: freyer@math.tu-berlin.de.*

<sup>2</sup>*Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia (Spain). E-mail: eduardo.lucas@um.es.*

### Resumen

In this talk we will explore several new inequalities relating the volume (Lebesgue measure) of a convex body  $K \subset \mathbb{R}^n$  (i.e., compact convex set with non-empty interior) with its *lattice point enumerator*  $G_n(K) = |K \cap \mathbb{Z}^n|$  (where  $|\cdot|$  is the cardinality functional).

There exist many sharp inequalities in this setting, and in order to refine sharp bounds, a common strategy is to introduce terms that depend on the bodies. Of note are the *successive minima*  $\lambda_i(K)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), which were introduced by Minkowski to strengthen one of his results, obtaining the celebrated *Minkowski's Second Theorem*.

Amongst others, we show that

$$G_n(K) \leq \text{vol}(K) \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{n\lambda_i(K)}{2}\right) \text{ and } G_n(\text{int}(K)) \geq \text{vol}(K) \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{n\lambda_i(K)}{2}\right)$$

(the latter only if  $\lambda_i(K) \leq 2/n$  for all  $i = 1, \dots, n$ ). These are slightly weakened versions of a conjecture by Betke, Henk and Wills [1], which we confirm asymptotically when  $n = 2$  (and exactly when  $K$  is a lattice polygon). Furthermore, these new inequalities imply the upper bound of Minkowski's Second Theorem.

One of the main tools to obtain these inequalities is an extension of Blaschke's shaking procedure, which allows one to reduce the problem from arbitrary convex bodies to the so-called *anti-blocking* bodies, i.e., convex bodies  $K \subset \mathbb{R}_+^n$  such that  $K \cap e_i^\perp = K|e_i^\perp$ , where  $e_i$  are the unit canonical vectors ( $i = 1, \dots, n$ ) and  $\cdot|e_i^\perp$  is the orthogonal projection onto  $e_i^\perp$ .

We finally obtain some related inequalities replacing the successive minima by the covering radius  $\mu(K)$  of  $K$ , i.e., the smallest number  $\mu > 0$  such that  $\mu K + \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n$ .

### Referencias

- [1] U. Betke, M. Henk, and J. M. Wills. Successive-minima-type inequalities, *Discrete. Comput. Geom.* **9**:165–175, 1993.
- [2] A. Freyer and E. Lucas. Interpolating between volume and lattice point enumerator with successive minima, *Submitted*.

## On Grünbaum type inequalities

F. MARÍN SOLA<sup>1</sup>, J. YEPES NICOLÁS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia (Spain). E-mail: francisco.marin7@um.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia (Spain). E-mail: jesus.yepes@um.es.*

### Resumen

Given a compact set  $K \subset \mathbb{R}^n$  of positive volume, if  $K$  is convex with centroid at the origin, then, a classical and powerful result by Grünbaum says that one can find a lower bound for the ratio  $\text{vol}(K^-)/\text{vol}(K)$  depending only on the dimension of  $K$ , where  $K^-$  denotes the intersection of  $K$  with a halfspace bounded by a hyperplane passing through its centroid.

In this talk, we will show that fixing the hyperplane  $H$ , one can find a sharp lower bound for the ratio  $\text{vol}(K^-)/\text{vol}(K)$  depending on the concavity nature of the function that gives the volumes of cross-sections (parallel to  $H$ ) of  $K$ . When  $K$  is convex, this inequality recovers the previous result by Grünbaum. To this respect, we will also show that the log-concave case is the limit concavity assumption for such a generalization of Grünbaum's inequality. Moreover, if time allows, we will also explore the case of a  $\phi$ -concave cross-sections volume function, where  $\phi : I \subset [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  is an strictly increasing function.

This is a joint work with Jesús Yepes Nicolás.

### Referencias

- [1] F. Marín Sola and J. Yepes Nicolás, On Grünbaum type inequalities, *J. Geom. Anal.* **31** (10) (2021).
- [2] F. Marín Sola and J. Yepes Nicolás, On extensions of Grünbaum type inequalities, *Preprint.* (2021).

## Empty simplices of large width

J. DOOLITTLE<sup>1</sup>, L. KATTHÄN<sup>2</sup>, B. NIL<sup>3</sup>, FRANCISCO SANTOS<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Geometrie, TU Graz, Austria. E-mails: jdoolittle@tugraz.at.*

<sup>2</sup> *Heinrich-Warnecke-Straße 6a, 37081 Göttingen, Germany. E-mail: lukaskatthaen@gmx.de.*

<sup>3</sup> *Otto-von-Guericke Universität-Magdeburg, Germany. E-mail: benjamin.nill@ovgu.de.*

<sup>4</sup> *Dep. de Matemáticas, Estadística y Computación, Univ. de Cantabria, Spain. E-mail: francisco.santos@unican.es.*

### Resumen

The *flatness theorem* states that the maximum lattice width among all hollow convex bodies in  $\mathbb{R}^d$  is bounded by a constant  $\text{Flt}(d)$  depending solely on  $d$ . For general  $K$  the best current bound is  $\text{Flt}(d) \leq O(d^{4/3})$  (modulo a polylog term) [4], but for simplices (among other cases) width is known to be bounded by  $O(d \log d)$  [1]. In contrast, no construction of convex bodies of width more than linear is known.

We show two constructions leading to the first known *empty simplices* (lattice simplex in which vertices are the only lattice points) of width larger than their dimension:

- We introduce *cyclotomic simplices* and exhaustively compute all the cyclotomic 10-simplices of volume up to  $2^{31}$ . Among them we find five empty ones of width 11, and none of larger width.
- Using *circulant* matrices of a specific form, we construct empty  $d$ -simplices of width growing asymptotically as  $d/\text{arcsinh}(1) \sim 1,1346 d$ . These are only 0,3% less wide than the widest lattice-free convex bodies known [2].

See [3] for the preprint version of this talk.

### Referencias

- [1] Wojciech Banaszczyk, Alexander E. Litvak, Alain Pajor, and Stanislaw J. Szarek. The flatness theorem for nonsymmetric convex bodies via the local theory of Banach spaces. *Math. Oper. Res.* **24**:3 (1999), 728–750.
- [2] Giulia Codenotti and Francisco Santos. Hollow polytopes of large width. *Proc. Am. Math. Soc.* **148**(2) (2020), 835–850.
- [3] Joseph Doolittle, Lukas Katthän, Benjamin Nill, Francisco Santos. Empty simplices of large width. Preprint, 22 pages, March 2021. arXiv:2103.14925
- [4] Mark Rudelson. Distances between nonsymmetric convex bodies and the  $\text{MM}^*$ -estimate. *Positivity* **4**:2 (2000), 161–178.

## Intrinsic Kähler valuations

A. BERNIG<sup>1</sup>, J.H.G. FU<sup>2</sup>, G. SOLANES<sup>3</sup>, T. WANNERER<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Goethe-Universität Frankfurt (Germany). E-mail: bernig@math.uni-frankfurt.de.*

<sup>2</sup> *University of Georgia (GA, USA). E-mail: joefu@uga.edu.*

<sup>3</sup> *Universitat Autònoma de Barcelona and Centre de Recerca Matemàtica. E-mail: solanes@mat.uab.cat.*

<sup>4</sup> *Friedrich-Schiller-Universität Jena (Germany) E-mail: thomas.wannerer@uni-jena.de.*

### Resumen

In the framework of Alesker's theory of valuations on manifolds, the intrinsic volumes span an algebra canonically associated to any Riemannian manifold. In the case of the sphere, this algebra coincides with the space of isometry invariant valuations. This implies, for instance, that the algebra of invariant valuations of the sphere is isomorphic to the algebra spanned by the intrinsic volumes in euclidean space.

In the talk we will present a recent project where we construct a canonical algebra of valuations in any Kähler manifold. In the complex projective space, this algebra coincides with the space of isometry invariant valuations, which yields a canonical isomorphism between the algebras of invariant valuations in euclidean and projective complex spaces. The existence of such isomorphisms was one of the most mysterious (i.e. less understood) facts revealed by [1]. The new results provide a very satisfactory explanation of this phenomenon.

### Referencias

- [1] A. Bernig, J.H.G. Fu, G. Solanes, *Integral geometry of complex space forms*. *Geom. Funct. Anal.* **24** (2014), 403–492.

## Conexiones entre los cocientes $p$ -Rayleigh y desigualdades geométricas en el caso afín

J. HADDAD<sup>1</sup>, C. H. JIMÉNEZ<sup>2</sup>, M. MONTENEGRO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais, 30.123-970, Belo Horizonte, Brazil.*

<sup>2</sup> *Depto. de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla. E-mail: carloshugo@us.es.*

### Resumen

Revisaré algunos aspectos de la teoría básica de cocientes  $p$ -Rayleigh en el caso afín y sus conexiones con desigualdades de carácter geométrico, como son la desigualdad de Poincaré, Petty Projection, entre otras. Dedicaremos una parte de la charla a presentar algunos problemas abiertos que relacionan teoría espectral de ciertos operadores con objetos geométricos como el cuerpo polar proyección y el elipsoide de máximo volumen de un cuerpo convexo.

### Referencias

- [1] J. Haddad, C.H. Jiménez, M. Montenegro, *From affine Poincaré inequalities to affine spectral inequalities*, Advances in Mathematics, Volume 386, 2021, 107808, ISSN 0001-8708.

## On further inequalities for the Wills functional

J. YEPES NICOLÁS<sup>1</sup>,

D. ALONSO-GUTIÉRREZ <sup>2</sup>, M. A. HERNÁNDEZ CIFRE <sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia (Spain). E-mail: [jesus.yepes@um.es](mailto:jesus.yepes@um.es).*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mail: [alonsod@unizar.es](mailto:alonsod@unizar.es).*

<sup>3</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia (Spain). E-mail: [mhcifre@um.es](mailto:mhcifre@um.es).*

### Resumen

The Wills functional of a convex body, defined in [2] as the sum of its intrinsic volumes, turned out to have many interesting applications and properties. In this talk, making a profit from the fact that it can be represented as the integral of a log-concave function, which is furthermore the Asplund product of other two log-concave functions, we will derive new properties of the Wills functional.

Among others, we will show some Brunn-Minkowski and Rogers-Shephard type inequalities for this functional, as well as that the cube of edge-length 2 maximizes it among all 0-symmetric convex bodies in John position.

This is about joint work [1] with David Alonso-Gutiérrez and María A. Hernández Cifre.

### Referencias

- [1] D. Alonso-Gutiérrez, M. A. Hernández Cifre and J. Yepes Nicolás, Further inequalities for the (generalized) Wills functional, *Commun. Contemp. Math.* **23** (3) (2021), Paper No. 2050011.
- [2] J. M. Wills, Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen, *Elem. Math.* **28** (1973), 57–63.



## Teorema de Lowner-John y log-polinomios

DAVID ALONSO-GUTIÉRREZ<sup>1</sup>, BERNARDO GONZÁLEZ MERINO<sup>2</sup>,  
RAFAEL VILLA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Zaragoza (Spain). E-mail: alonsod@unizar.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Murcia, Murcia (Spain). E-mail: bgmerino@um.es.

<sup>3</sup> Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, Sevilla (Spain). E-mail: villa@us.es.

### Resumen

Lasserre [4] probó que para cualquier compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  y todo  $d$  par, existe un único polinomio homogéneo  $g_0$  de grado  $d$  con  $K \subset G_1(g_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_0(x) \leq 1\}$  que minimiza el volumen  $|G_1(g)|$  entre todos los polinomios homogéneos  $g$  de grado  $d$  que cumplan  $K \subset G_1(g)$ . Este resultado ofrece una extensión del elipsoide de Löwner-John [3], considerando en lugar de elipsoides, conjuntos de nivel de polinomios homogéneos de cualquier grado par (no sólo grado 2).

En este trabajo [2] extendemos el resultado a la clase de las funciones log-cóncavas, de dos formas distintas. La primera es una extensión natural del resultado ya probado en [1] sobre la versión funcional del Teorema de John, y probamos que dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  log-cóncava integrable, con  $\|f\|_\infty = f(0) = 1$ , y  $d \in \mathbb{N}$  par, existe un polinomio  $g_0$  homogéneo de grado  $d$  y  $t_0 \geq 1$  que minimiza la integral  $\int_{\mathbb{R}^n} t e^{-g(x)^{\frac{1}{d}}} dx$  entre todos los polinomios  $g$  homogéneos de grado  $d$  y  $t \geq 1$  verificando  $f(x) \leq t e^{-g(x)^{\frac{1}{d}}}$ . La segunda es una extensión adecuada que permite mostrar existencia y unicidad, incluso caracterizando la solución en términos de ciertos puntos de contacto. Para ello, se elimina el exponente  $\frac{1}{d}$  de  $g$ . Como aplicación, introducimos el concepto de  $d$ -razón de volumen y  $d$ -razón integral, mostrando un resultado de aproximación de cuerpos convexos por log-polinomios homogéneos.

### Referencias

- [1] D. Alonso-Gutiérrez, B. González Merino, C. H. Jiménez, R. Villa, *John's ellipsoid and the integral ratio of a log-concave function*. J. Geom. Anal., **28** (2018), no. 2, 1182–1201.
- [2] D. Alonso-Gutiérrez, B. González Merino, R. Villa, *Best approximation of functions by log-polynomials*. arXiv:2007.07952.
- [3] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*. In: Studies and Essays presented to R. Courant on his 60th Birthday, 187–204. Interscience Pub., 1948.
- [4] J. B. Lasserre, *A generalization of Löwner-John's ellipsoid theorem*. Math. Program., **152** (2015), 1-2, 559–591.

## GEOMETRY, MECHANICS AND CONTROL

### ORGANIZADORES

**María Barbero Liñán** (Universidad Politécnica de Madrid)

**Juan Carlos Marrero González** (Universidad de La Laguna)

## From Courant algebroids to Lie-infinity algebras

JOANA MARGARIDA NUNES DA COSTA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidade de Coimbra, Portugal. E-mail: jmcosta@mat.uc.pt.*

### Resumen

The beginning of the study of the relationship between Courant algebroids and Lie-infinity algebras goes back to 1998, in a paper by Roytenberg and Weinstein.

In this talk we present a one-to-one correspondence between Courant algebroid structures on a Whitney sum of vector bundles and multiplicative Lie-infinity algebras.

## Hamiltonian systems on homogeneous Poisson manifolds and Jacobi structures

EDITH PADRÓN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad de La Laguna, Spain. E-mail: mepadron@ull.edu.es.*

### Resumen

Lichnerowicz showed that a transversal hypersurface with respect to the Liouville vector field on a homogeneous Poisson manifold  $M$  inherits a Jacobi structure such that its poissonization and  $M$  are locally isomorphic.

In this talk we will see that when the hypersurface  $S$  is a level set of a Hamiltonian function on  $M$ , under certain regular conditions, the Reeb vector field associated with the induced Jacobi structure on  $S$  is just a reparametrization of the restriction of the Hamiltonian vector field on  $S$ . This extends a very interesting classical result on Hamiltonian systems in exact symplectic manifolds to Hamiltonian systems on homogeneous Poisson manifolds.

We will apply our construction to mechanical Hamiltonian systems with respect to linear Poisson structures on the total space of a vector bundle.

## Lie–Hamilton systems modeling a simple contagious infection

CRISTINA SARDÓN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Politécnica de Madrid, Spain. E-mail: mariacristina.sardon@upm.es.*

### Resumen

Lie–Hamilton systems are systems of first-order (nonlinear) ODEs describing the integral curves of a  $t$ -dependent vector field taking values in a finite-dimensional real Lie algebra of Hamiltonian vector fields. Lie–Hamilton systems admit a general solution expressed as a (nonlinear) superposition rule of a finite set of particular solutions and have multiple applications in physics, mathematics and biology, among others. We are particularly interested in the application of Lie–Hamilton systems in infection models. In this talk, I present the geometrical properties of Lie–Hamilton systems and their application in a simple viral infection model, the so called SISf model, i.e, a SIS model including fluctuations. We will retrieve solutions geometrically, and we will see how the number of infected individuals grows shaping a sigmoid function. This is precisely the expected behavior, and it is retrieved in two different geometric ways: working on a symplectic manifold, and working on a Poisson manifold. We conclude this talk discussing whether this model is applicable to the current Covid pandemic.

## Towards the geometric integration of Lie systems

FERNANDO JIMÉNEZ ALBURQUERQUE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Politécnica de Madrid, Spain. E-mail: fernando.jimenez.alburquerque@upm.es.*

### Resumen

Lie systems are a special kind of ordinary differential equations with several interesting geometric properties. First, their general solution can be constructed from a set of particular ones via a nonlinear superposition rule. Second, their vector field can be defined as a linear combination of vector fields (independent of time) that generate a finite dimensional Lie algebra. In interesting cases (for instance the Riccati equations), this algebra is isomorphic to a matrix Lie algebra, particularly the one associated to the matrix Lie group  $SL(n, \mathbb{R})$ . On the other hand, in such cases, the solution of the differential equations can be obtained, aside from direct integration or the superposition rule, from an action of the matrix Lie group on the manifold where the Lie system evolves. The Lie group obeys a special dynamics which, itself, has interesting geometric properties.

In this work, we explore the geometric integration of Lie systems from this perspective: we design new integrators for their dynamics departing from the geometric integration of the Lie group dynamics underneath, taking advantage of the action. We deliver preliminary convergence results for the Riccati equation in one dimension, whereas we discuss some obstructions for the convergence transmission (from the Lie group dynamics to the manifold dynamics) in higher dimension.

This is a joint work with Luis Blanco, Javier de Lucas y Cristina Sardón.

## A Hamilton-Jacobi theory for contact Hamiltonian systems

MANUEL DE LEÓN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Matemáticas-CSIC y Real Academia de Ciencias de España, Spain. E-mail:  
mdeleon@icmat.es.*

### Resumen

We will develop a Hamilton-Jacobi theory for contact Hamiltonian systems. We find several forms for a suitable Hamilton-Jacobi equation according to the Hamiltonian and the evolution vector fields for a given Hamiltonian function. We also analyze the reduction procedure when the system enjoys symmetries.

## Platonic solids and symmetric solutions of the N-vortex problem on the sphere

LUIS GARCÍA NARANJO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Università di Padova, Italy. E-mail: luis.garcianaranjo@gmail.com.*

### Resumen

We consider the N-vortex problem on the sphere assuming that all vortices have equal strength. We develop a theoretical framework to analyse solutions of the equations of motion with prescribed symmetries. Our construction relies on the discrete reduction of the system by twisted subgroups of the full symmetry group that rotates and permutes the vortices. Our approach formalises and extends ideas outlined previously by Tokieda (C. R. Acad. Sci., Paris I 333 (2001)) and Soulère and Tokieda (J. Fluid Mech. 460 (2002)) and allows us to prove the existence of several 1-parameter families of periodic orbits. These families either emanate from equilibria or converge to collisions possessing a specific symmetry. Our results are applied to show existence of families of small nonlinear oscillations emanating from the Platonic solid equilibria. This work is in collaboration with Carlos García-Azpeitia (arXiv:2011.12243 (2020)).



## Parallel Iterative Methods for Variational Integration

DAVID MARTÍN DE DIEGO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Matemáticas, Spain. E-mail: david.martin@icmat.es.*

### Resumen

Discrete variational methods have shown an excellent performance in numerical simulations of different mechanical systems. In this paper, we introduce an iterative method for discrete variational methods appropriate for boundary value problems. More concretely, we explore a parallelization strategy that leverages the power of multicore CPUs and GPUs (graphics cards). We study this parallel method for first-order and second-order Lagrangians and also reduced systems. We illustrate its excellent behavior in some interesting applications, namely Zermelo's navigation problem with time dependent wind, a fuel-optimal navigation problem, and a related interpolation problem.

Joint work with Sebastian Ferraro (Universidad Nacional del Sur) and Rodrigo Sato Martín de Almagro (Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)

### Referencias

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of mechanics*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.
- [2] A. M. Bloch. *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer, 2015.
- [3] J. Cortés Monforte. *Geometric, control and numerical aspects of nonholonomic systems*, Lecture Notes in Mathematics, 1793. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [4] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration*, vol. 947 of Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Heidelberg, 2010.

## Controllability of infinite dimensional quantum systems based on Quantum Graphs

JUAN MANUEL PÉREZ PARDO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Carlos III de Madrid, Spain. E-mail: [jmppardo@math.uc3m.es](mailto:jmppardo@math.uc3m.es).*

### Resumen

The development of quantum information processing and quantum computation goes hand in hand with the ability of addressing and manipulating quantum systems. Quantum Control Theory has provided a successful framework, both theoretical and experimental, to design and develop the control of such systems. In particular, for finite dimensional quantum systems or finite dimensional approximations to them. The theory for infinite dimensional systems is much less developed.

In this talk I propose a scheme of infinite dimensional quantum control on quantum graphs based on interacting with the system by changing the self-adjoint boundary conditions. I will show the existence of solutions of the time-dependent Schrödinger equation, the stability of the solutions and the (approximate) controllability of the state of a quantum system by modifying the boundary conditions on generic quantum graphs.

## **INVERSE PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS: FROM ANALYSIS TO APPLICATIONS**

### **ORGANIZADORES**

**Pedro Caro** (Basque Center for Applied Mathematics)

**María Ángeles García-Ferrero** (Universität Heidelberg)

## Scattering with critically-singular and $\delta$ -shell potentials

ANDONI GARCÍA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea (Spain). E-mail: andoni.garcia@ehu.eus.*

### Resumen

In [1], the authors consider a scattering problem for electric potentials that have a component which is critically singular in the sense of Lebesgue spaces, and a component given by a measure supported on a compact Lipschitz hypersurface. They study direct and inverse point-source scattering under the assumptions that the potentials are real-valued and compactly supported. To solve the direct scattering problem, the authors introduce two functional spaces —sort of Bourgain type spaces— that allow to refine the classical resolvent estimates of Agmon and Hörmander, and Kenig, Ruiz and Sogge. These spaces seem to be very useful to deal with the critically-singular and  $\delta$ -shell components of the potentials at the same time. Furthermore, these spaces and their corresponding resolvent estimates turn out to have a strong connection with the estimates for the conjugated Laplacian used in the context of the inverse Calderón problem. In fact, the authors derive the classical estimates by Sylvester and Uhlmann, and the more recent ones by Haberman and Tataru after some embedding properties of these new spaces. Regarding the inverse scattering problem, the authors prove uniqueness for the potentials from point-source scattering data at fix energy. To address the question of uniqueness the authors combine some of the most advanced techniques in the construction of complex geometrical optics solutions.

### Referencias

- [1] P. Caro, A. García. Scattering with critically-singular and  $\delta$ -shell potentials, *Comm. Math. Phys.* **379** 2 (2020), 543–587

## Inverse spectral problem on discrete graphs

E. BLÅSTEN<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University, FI-00076 Aalto, Finland. E-mail: emilia.blasten@aalto.fi.*

<sup>2</sup> *Division of Mathematics, Tallinn University of Technology, Department of Cybernetics, 19086 Tallinn, Estonia.*

### Resumen

The inverse spectral problem in partial differential equation asks for determining unknown coefficients of a given partial differential equation, or the underlying manifold structure, from boundary spectral measurements. These are the pairs of all eigenvalues with the boundary normal derivatives of their corresponding Dirichlet eigenfunctions to a fixed partial differential operator. The eigenvalues themselves are not enough to determine the underlying geometry: one cannot hear the shape of a drum. The question has been studied extensively for quantum graphs, but with limited success except for trees. We study this in the context of discrete graphs. Given a subset of vertices (call it the boundary), and boundary values of Neumann eigenvectors to a graph Laplacian, we show that the rest of the graph structure can be determined assuming that there is “enough” boundary vertices.

### Referencias

- [1] E. Blåsten, H. Isozaki, M. Lassas and J. Lu, *The Gel'fand's inverse problem for the graph Laplacian*, arXiv: 2101.10026 (2021).

## Holonomy Inverse Problem

M CEKIĆ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institute for Mathematics, University of Zurich (Switzerland). E-mail: mihajlo.cekic@math.uzh.ch.*

### Resumen

Given a compact Riemannian manifold  $(M, g)$  and a vector bundle over  $M$  equipped with a connection, we consider the following question: does the holonomy along closed geodesics determine the gauge (equivalence) class of the connection? If  $(M, g)$  has negative curvature or more generally its geodesic flow is Anosov, in this talk I will explain how in fact, only the traces of the holonomy along closed geodesics locally determine a generic connection; global uniqueness results are obtained in some cases. A direct consequence is an inverse spectral result for the connection (magnetic) Laplacian. The proof relies on two new ingredients: a Livšic type theorem in hyperbolic dynamics for unitary cocycles, and the interplay between the local geometry of the moduli space of connections with Pollicott-Ruelle resonances of a certain natural transport operator. Joint work with Thibault Lefeuvre.

### Referencias

- [1] M, Cekić, T. Lefeuvre, *The Holonomy Inverse Problem*, arXiv: 2105.06376.

## Calderón type problems with mixed boundary conditions

G. Covi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institut für Angewandte Mathematik, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 205, 69120 Heidelberg (Germany). E-mail: giovanni.covi@uni-heidelberg.de.*

### Resumen

We will consider the simultaneous recovery of bulk and boundary (B&B) potentials in elliptic equations modelling conducting media with inaccessible boundaries. On the one hand, we deduce uniqueness for localized B&B potentials by means of simultaneous B&B Runge approximation. On the other hand, using a new Carleman estimate, we construct a family of CGO solutions and deduce uniqueness for arbitrary bounded, not necessarily localized B&B potentials. This connects local and nonlocal techniques for Calderón type problems.

The results presented are part of a joint work with Angkana Rüland [1].

### Referencias

- [1] G. Covi, A. Rüland . *On some partial data Calderón type problems with mixed boundary conditions.* Journal of Differential Equations. 288. (2021) 141-203.

## Geometric inverse problems for the Burgers equation and related systems

J. APRAIZ<sup>1</sup>, A. DOUBOVA<sup>2</sup>, E. FERNÁNDEZ-CARA<sup>2</sup>  
M. YAMAMOTO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. Matemáticas, Universidad del País Vasco (Spain). E-mail: jone.apraiz@ehu.eus.*

<sup>2</sup> *Dpto. EDAN e IMUS, Universidad de Sevilla (Spain). E-mails: doubova@us.es, cara@us.es.*

<sup>3</sup> *Department of Mathematical Sciences University of Tokyo (Japan). E-mail: myama@next.odn.ne.jp.*

### Resumen

We consider inverse problems of geometric nature for some PDE's motivated by applications in medical imaging, seismology, fluid mechanics and traffic models, among others. We will focus our attentions on inverse problems concerning the one-dimensional Burgers equation and some related nonlinear systems (involving heat effects and variable density). The goal will be to find the size of the spatial interval from some appropriate boundary observations of the solution. Depending on the properties of the initial and boundary data, we prove uniqueness and non-uniqueness results. On the other hand, we present numerical simulations in order to compute approximations of the interval sizes.

### Referencias

- [1] J. Apraiz, J. Cheng, A. Doubova, E. Fernández-Cara and M. Yamamoto, *Some Results Concerning Inverse Problems for One-Dimensional in Space PDEs*, to appear in *Inverse Problems and Imaging* (2021) doi:10.3934/ipi.2021062.
- [2] J. Apraiz, A. Doubova, E. Fernández-Cara and M. Yamamoto, *Some Inverse Problems for the Burgers Equation and Related Systems*, submitted.



## On the 2 dimensional Calderón Problem

D. FARACO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, 28049 Madrid (Spain). E-mails:  
daniel.faraco@uam.es.*

### Resumen

I will give a quick overview about why two dimensional inverse problems are different from the 3D counterparts and highlight relations with quasiconformal mappings and the non-elliptic Schrödinger evolution.

## Stability and reconstruction in inverse problems.

R. GABURRO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpt. of Mathematics and Statistics, University of Limerick (Ireland). E-mails: romina.gaburro@ul.ie.*

### Resumen

We discuss the issues of stability and reconstruction in inverse problems. Given their ill-posed (and often non-linear) nature, it is necessary to reformulate the issue of stability, the continuous dependence of the relevant physical parameter (to be determined) on the data, within the theory of ill-posed problems. This requires the imposition of *a-priori* information on the unknown parameter that is physically meaningful to the application in mind and that allows to restore stability in the inverse problem in question. As is well known the matter of stability is of fundamental importance in the reliability of any reconstruction procedure of the physical parameter since, in practice, the data/measurements of the problem will be affected by errors.

## The Calderón problem for nonlocal operators

T. GHOSH<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, Universität Bielefeld, 33615 Bielefeld (Germany). E-mail: tghosh@math.uni-bielefeld.de.*

### Resumen

We study the inverse problem of determining the coefficients of the fractional power of a general second order elliptic operator given in the exterior of an open subset of the Euclidean space. We show the problem can be reduced into determining the coefficients from the boundary Cauchy data of the elliptic operator on the open set. As a corollary we establish several new results for non-local inverse problems by using the corresponding results for the local inverse problems. In particular the isotropic non-local Calderón problem can be resolved completely, assuming some regularity assumptions on the coefficients, and the anisotropic Calderón problem modulo an isometry which is the identity at the boundary for real-analytic anisotropic conductivities in dimension greater than two and bounded and measurable anisotropic conductivities in two dimensions.

## Quantum limits: recovering dynamical information from eigenstates

F. MACIÀ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas e Informática, Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Navales (Spain).*  
*E-mails: [fabricio.macia@upm.es](mailto:fabricio.macia@upm.es).*

### Resumen

Quantum limits are defined as weak-accumulation points of sequences of modulus-squared eigenfunctions of an elliptic operator whose sequence of eigenvalues tend to infinity. Characterizing the set of quantum limits of a specific elliptic operator is a difficult task in general; this is related to global properties of the underlying hamiltonian system associated to the principal symbol of the elliptic operator. We will discuss particular the case of the perturbed quantum Harmonic oscillator; and discuss some conjectures on the problem of recovering the perturbation from the set of quantum limits.

## The Born approximation in the Calderón problem

J. A. BARCELÓ<sup>1</sup>, C. CASTRO<sup>1</sup>, F. MACIÀ<sup>2</sup>, C. J. MEROÑO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas e Informática, Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Caminos (Spain).*

*E-mails: juanantonio.barcelo@upm.es, carlos.castro@upm.es, cj.merono@upm.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas e Informática, Universidad Politécnica de Madrid, ETSI Navales (Spain).*

*E-mails: fabricio.macia@upm.es.*

### Resumen

Uniqueness and reconstruction in the three-dimensional Calderón inverse conductivity problem [1, 2] can be reduced to the study of the inverse boundary problem for Schrödinger operators  $-\Delta + q$ . In this talk we study the Born approximation of  $q$  in the ball, which amounts to studying the linearization of the inverse problem. We show that this approximation is well-defined for radial potentials and any dimension, and obtain a closed formula that involves the spectrum of the Dirichlet-to-Neumann map associated to  $-\Delta + q$ . We then turn to general real and essentially bounded potentials in three dimensions and introduce the notion of averaged Born approximation, which captures the invariance properties of the exact inverse problem. We will show that one can obtain explicit formulas for the averaged Born approximation in terms of the matrix elements of the Dirichlet to Neumann map in the basis spherical harmonics. We will show that the averaged Born approximation does not destroy information on the potential by analyzing the high-energy behavior of the matrix elements of the Dirichlet to Neumann map.

### Referencias

- [1] A. P. Calderón *On an inverse boundary value problem*. *Comput. Appl. Math*, 25(2-3) (2006), 133–138.
- [2] J. Sylvester and G. Uhlmann *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*. *Ann. of Math*, 125(1) (1987), 153–169.

## An inverse problem for a semilinear wave equation

M. LASSAS<sup>1</sup>, T. LIIMATAINEN<sup>2</sup>, L. POTENCIANO-MACHADO<sup>2</sup>,  
T. TYNI<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki (Finland). E-mail:*  
`matti.lassas@helsinki.fi`.

<sup>2</sup>*Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä (Finland). E-mails:*  
`tony.liimatainen@helsinki.fi`, `leyter.m.potenciano@jyu.fi`.

<sup>3</sup>*Department of Mathematics, University of Toronto (Canada). E-mail: teemu.tyni@utoronto.ca.*

### Resumen

In this talk, we consider the recovery of a potential associated with a semi-linear wave equation on  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ . We shall show that an unknown potential  $a(x, t)$  of the wave equation  $\square u + au^m = 0$  can be recovered in a Hölder stable way from the Dirichlet-to-Neumann map  $u|_{\partial\Omega \times [0, T]} \mapsto \partial_\nu u|_{\partial\Omega \times [0, T]}$ . Here  $\square := \partial_t^2 - \Delta$ ,  $T > 0$  is large enough and  $m \in \mathbb{N}$  with  $m \geq 2$ . We will also consider similar stability results for the recovery of  $a(x, t)$  when noise is added to the boundary data. The strategy we shall employ is constructive, and it is based on a quantitative version of the higher-order linearization method. The talk will be based on the results contained in [1].

### Referencias

- [1] M. Lassas, T. Liimatainen, L. Potenciano-Machado and T. Tyni, *Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation*. (Submitted, 2021).

## MATEMÁTICAS DE LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

### ORGANIZADORES

**Sara D. Cardell** (Universidade Federal do ABC)

**Ángel Luis Muñoz** (Universidad de León)

**Verónica Requena** (Universidad de Alicante)

## Protocolo de comunicación entre vehículos basado en el número de bastidor digital

P. ESCAPA<sup>1</sup>, A. SUÁREZ CORONA <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Aplicadas a la Ciberseguridad, Universidad de León (Spain). E-mail: [pescg@unileon.es](mailto:pescg@unileon.es).*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de León, León (Spain). E-mail: [asuac@unileon.es](mailto:asuac@unileon.es).*

### Resumen

Establecer una comunicación vehicular segura es esencial para el desarrollo de la conducción autónoma y de nuevas funcionalidades como la gestión vial inteligente o los nuevos sistemas destinados a evitar o mitigar los accidentes de tráfico. En este escenario, donde puede ser difícil el despliegue de una infraestructura de clave pública, la criptografía basada en identidades presenta una buena alternativa. En esta charla se presenta un protocolo de comunicación aplicable entre vehículos V2V (Vehículo a Vehículo) y generalizable a entre éstos y su entorno V2X (Vehículo a todo) sustituyendo la infraestructura de clave pública por esquemas criptográficos basados en identidades usando el número de bastidor en formato digital como identificador inequívoco de los vehículos.



## B-representación de secuencias binarias

S. D. CARDELL<sup>1</sup>, A. FÚSTER-SABATER<sup>2</sup>, VERÓNICA REQUENA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Centro de Matemática, Computação e Cognição, Santo André-SP (Brazil). E-mail: s.cardell@ufabc.edu.br.

<sup>2</sup> Instituto de Tecnologías Físicas y de la Información, C.S.I.C., Madrid (Spain). E-mail: amparo@iec.csic.es.

<sup>3</sup> Dpto. de Matemàtiques, Universitat d'Alacant, Alacant (Spain). E-mail: vrequena@ua.es.

### Resumen

En este trabajo analizamos la complejidad lineal  $LC$  de secuencias binarias  $\{s_n\}$  con período  $T = 2^t$  ( $t$  es un entero) en términos de la representación binomial (B-representación) [1], que permite escribir la secuencia como una combinación lineal de secuencias binomiales  $\left\{\binom{n}{i}\right\}$  ponderadas por coeficientes binarios  $c_i$ :

$$\{s_n\} = \sum_{i=0}^{2^t-1} c_i \left\{ \binom{n}{i} \right\}. \quad (1)$$

La ecuación (1) nos aporta información sobre la complejidad y período de la secuencia analizada [2]. Puede escribirse como una ecuación matricial que incluye una matriz de Hadamard  $H_t$ .

$$(c_0, c_1, \dots, c_{2^t-1}) = (s_0, s_1, \dots, s_{2^t-1}) \cdot H_t \text{ mod } 2. \quad (2)$$

1) Se puede determinar si una secuencia tiene complejidad lineal máxima simplemente multiplicando la secuencia  $\{s_n\}$  por la correspondiente columna  $h_{max}$  de  $H_t$  y comprobando que el coeficiente resultante es  $c_{max} \neq 0$ .

2) Si la columna  $h_{max}$  tiene muchos ceros y pocos unos, entonces vamos a necesitar conocer pocos términos de la secuencia para determinar si tiene o no complejidad máxima  $LC_{max}$ . Estos resultados se pueden generalizar a cualquier secuencia explotando la estructura fractal de la matriz de Hadamard.

### Referencias

- [1] Cardell, S.D.; Climent, J.J.; Fúster-Sabater, A.; Requena, V. Representations of Generalized Self-Shrunken Sequences. Mathematics (2020), 8, 1006.
- [2] Fúster-Sabater, A.; Cardell, S.D. Linear complexity of generalized sequences by comparison of PN-sequences. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Ser. A. Matemáticas (RACSAM) (2020), 114, 79.

## Descodificación de Códigos Grupo

C. MARTÍNEZ<sup>1</sup>, F. MOLINA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo (Spain). E-mails: cmartinez@uniovi.es, molinafabian@uniovi.es.*

### Resumen

Un código lineal  $\mathcal{C}$  sobre un cuerpo  $K$ , es un código grupo si existe un grupo finito  $G$  de orden  $n$  igual a la longitud del código tal que, una vez elegido un orden para los elementos del grupo, las  $n$ -tuplas del código se corresponden con los elementos de un ideal del álgebra de grupo. Algunos códigos lineales importantes (en particular, los códigos cíclicos) se pueden ver como códigos grupo.

Nuestro objetivo es estudiar algoritmos eficientes de descodificación en el caso en el que el álgebra de grupo sea semisimple. El objetivo final es estudiar si es posible el diseño de un esquema criptográfico tipo McEliece basado en la utilización de códigos grupo.

### Referencias

- [1] J.J. Bernal, Á del Río, J.J. Simón. An intrinsecal description of group codes, *Designs, Codes and Cryptography*, 51, no. 3, pages 289-300. 2009.
- [2] C. García, S. González, V. Markov, C. Martínez, A. Nechaev. Group codes over non-abelian groups. *Journal of Algebra and its Applications*, v.12, no.7. 2013.
- [3] C. García, S. González, V. Markov, C. Martínez, A. Nechaev. New examples of non-abelian group codes. *Advances in Mathematics of Communications*. Volume 10, No. 1, pages 1-10. 2016.
- [4] J. McEliece. A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. DSN Progress Report, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, CA, pages 114-116. 1978.

## Patrones de factorización de polinomios de división de curvas elípticas

J.M. MIRET<sup>1</sup>, D. SADORNIL<sup>2</sup>, J. TENA<sup>3</sup>, J. VALERA<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática, Universitat de Lleida (Spain). E-mails: josepmaria.miret@udl.cat, javier.valera@udl.cat.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria (Spain). E-mail: daniel.sadornil@unican.es.*

<sup>3</sup> *IMUVA-Dpto. Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Universidad de Valladolid (Spain). E-mail: tena@agt.uva.es.*

<sup>4</sup> *Eurecat, Centre Tecnològic de Catalunya (Spain). Email: javier.valera@eurecat.org.*

### Resumen

El uso de curvas elípticas sobre cuerpos finitos en criptografía requiere que éstas satisfagan ciertas condiciones relativas a su cardinal. El algoritmo de Schoof, así como su variante SEA (ver [1]), que determinan el número de puntos de una curva elíptica sobre un cuerpo finito se fundamentan en los polinomios de división  $\psi_n(x) \in \mathbb{F}_q[x]$  de una curva elíptica que se definen de forma recursiva. Mediante el polinomio  $\psi_n(x)$  es posible calcular  $nP$  para un punto  $P$  de la curva. Además las raíces de  $\psi_n(x)$  ( $n \geq 2$ ) son precisamente las abscisas de los puntos de  $n$ -torsión de la curva.

En [2], H. Verdure dio los posibles patrones de factorización sobre  $\mathbb{F}_q[x]$  de  $\psi_\ell(x)$  para  $\ell$  primo. En esta comunicación ampliamos su trabajo dando los posibles patrones de factorización sobre  $\mathbb{F}_q[x]$  de los polinomios de  $\ell^k$ -división cuando  $q \equiv 1 \pmod{\ell}$  y  $\ell > 3$  primo divide al cardinal de la curva (es decir, posee un punto de  $\ell$ -torsión).

### Referencias

- [1] I. F. Blake, G. Seroussi, and N. P. Smart. Elliptic curves in cryptography. London Mathematical Society Lecture Note Series 265, Cambridge University Press, 1999.
- [2] H. Verdure. Factorisation patterns of division polynomials. Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences 80 (5), 79-82, 2004.

# Entanglement-Assisted Quantum Error Correcting Codes From RS Codes and BCH Codes with Extension Degree 2

C. GALINDO<sup>1</sup>, F. HERNANDO<sup>1</sup>, D. RUANO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón and Departamento de Matemáticas, Universitat Jaume I, Campus de Riv Sec. 12071 Castelló (Spain). E-mails: galindo@uji.es, carrillf@uji.es.*

<sup>2</sup> *IMUVA-Mathematics Research Institute, Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid (Spain). E-mail: diego.ruano@uva.es.*

## Resumen

Quantum error correcting codes (QECCs) are mostly defined using classical linear codes. QECCs over  $\mathbb{F}_q$ , the finite field with  $q$  elements, are usually constructed from self-orthogonal classical codes. We can consider classical codes over  $\mathbb{F}_q$  if we decide to use the Euclidean metric, and over  $\mathbb{F}_{q^2}$ , when using the Hermitian metric. Brun, Dvetak and Hsieh in [1] proposed to share entanglement between encoder and decoder to simplify the theory of quantum error-correction and increase the communication capacity, giving rise to entanglement-assisted quantum error correcting codes (EAQECCs). An important advantage of this new construction is that one may consider an arbitrary classical linear code, without the self-orthogonality restriction. EAQECCs were first defined over the binary field and then the construction was extended to an arbitrary finite field [2].

EAQECCs constructed from Reed-Solomon codes and BCH codes are considered in this work. It is provided a complete and explicit formula for the parameters of EAQECCs coming from any Reed-Solomon code, for the Hermitian metric, and from any BCH code with extension degree 2 and consecutive cyclotomic cosets, for both the Euclidean and the Hermitian metric. The main task in this work is the computation of a completely general formula for  $c$ , the minimum number of required maximally entangled quantum states.

## Referencias

- [1] T. Brun, I. Devetak, and M.-H. Hsieh. Correcting quantum errors with entanglement. *Science*, 314(5798):436–439, 2006.
- [2] C. Galindo, F. Hernando, R. Matsumoto, and D. Ruano. Entanglement-assisted quantum error-correcting codes over arbitrary finite fields. *Quantum Inf. Process.*, 18(4):Art. 116, 2019.
- [3] C. Galindo, F. Hernando, D. Ruano, Entanglement-assisted quantum error correcting codes from RS codes and BCH codes with extension degree 2. *Quantum Inf. Process.*, 20:Art. 158, 2021.

## Una variante del criptosistema de Niederreiter con claves públicas pequeñas

P. ALMEIDA<sup>1</sup>, M. BELTRÁ<sup>2</sup>, D. NAPP<sup>2</sup>

<sup>1</sup> CIDMA - Centro de I&D em Matemática e Aplicações, Dept. de Matemática, Universidade de Aveiro, (Portugal). E-mail: palmeida@ua.pt.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Alicante, Alicante (Spain). E-mails: mbv29@alu.ua.es, diego.napp@ua.es.

### Resumen

En 1986 Harald Niederreiter propuso un criptosistema de clave pública utilizando elementos de la teoría de códigos correctores de errores [1]. Este criptosistema es equivalente en términos de seguridad al criptosistema de McEliece [1, 3]. Ambas propuestas no han gozado de aplicación práctica debido principalmente al gran tamaño de su clave pública. Sin embargo hasta la fecha no se ha encontrado ningún ataque que sea capaz romper estos criptosistemas si los parámetros son escogidos de manera adecuada, ni siquiera empleando un ordenador cuántico, y por tanto son candidatos perfectos para la llamada criptografía post-cuántica. Al igual que en [4], se puede lograr una reducción notable de la clave pública del criptosistema de Niederreiter si se emplean códigos convolucionales y códigos generalizados de Reed-Solomon. Para llevar a cabo dicha reducción se debe adaptar el criptosistema con cuidado para poder evitar cualquier tipo de ataque conocido.

### Referencias

- [1] H. Niederreiter. Knapsack-type Cryptosystems and Algebraic Coding Theory. *Problems of Control and Information Theory*, 15(2): 159–166, 1986.
- [2] R. J. McEliece. A Public-key Cryptosystem Based on Algebraic Coding Theory. *DNS Prog. Rep.*, pages 114–116, 1978.
- [3] Yuan Xing Li, R.H. Deng, and Xin Mei Wang. On the Equivalence of McEliece’s and Niederreiter’s Public-key Cryptosystems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(1): 271–273, 1994.
- [4] Paulo Almeida, Miguel Beltrá, Diego Napp, and Cláudia Sebastião. Smaller Keys for Code-Based Cryptography: McEliece Cryptosystems with Convolutional Encoders, 2021.

## Los productos composición de polinomios en la generación de secuencias

D. GÓMEZ-PÉREZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria (Spain). E-mail: domingo.gomez@unican.es.*

### Resumen

Los productos composición de polinomios son una operación que toma dos polinomios y genera un polinomio cuyas raíces dependen algebraicamente de las raíces de los dos dados. Brawley y Carlitz demostraron que en cuerpos finitos, si los polinomios de partida son irreducibles y sus grados son coprimos [1]. Tuxanidy y Wang [2] y después Wu et al.[3] utilizaron estos productos para hallar las factorizaciones de polinomios ciclotómicos en cuerpos finitos. En esta charla mostraremos la conexión de los productos de composición con el campo de la generación de secuencias y su aplicación en el cálculo de la complejidad lineal.

### Referencias

- [1] Brawley, J. V., & Carlitz, L. (1987). Irreducibles and the composed product for polynomials over a finite field. *Discrete Mathematics*, 65(2), 115-139.
- [2] Tuxanidy, A., & Qiang W. (2013) Composed products and factors of cyclotomic polynomials over finite fields. *Designs, codes and cryptography* 69(2), 203-231.
- [3] Wu, H., Zhu, L., Feng, R., & Yang, S. (2017). Explicit factorizations of cyclotomic polynomials over finite fields. *Designs, Codes, and Cryptography*, 83(1), 197-217.

## Jerarquías de pesos de códigos lineales: combinatoria y segunda distancia

I. GARCÍA-MARCO<sup>1</sup>, I. MÁRQUEZ- CORBELLA<sup>1</sup>,  
E. MARTÍNEZ-MORO<sup>2</sup>, Y. PITONES<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa, Universidad de La Laguna , Tenerife.*  
*E-mails: igarcia@ull.es, imarquec@ull.es.*

<sup>2</sup> *Instituto de Investigación en Matemáticas, Universidad de Valladolid, España. E-mail:*  
*edgar.martinez@uva.es.*

<sup>3</sup> *Universidad Autónoma Metropolitana, México D.F., México. E-mail: ypitonesamaro@gmail.com.*

### Resumen

Es bien conocido que la jerarquía de pesos de un código lineal se puede deducir de la combinatoria asociada a ideal de Stanley-Reisner definido mediante las palabras minimales. En este trabajo nos preguntamos si existe un conjunto menor que las palabras minimales capaz de mostrar al menos las distancias primera y segunda de la jerarquía.

## Un marco para decodificar códigos lineales sobre anillos de cadena

JOSÉ GÓMEZ TORRECILLAS<sup>1</sup>, F. J. LOBILLO<sup>2</sup>, GABRIEL NAVARRO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Álgebra e IMAG, Universidad de Granada, Granada (España); E-mail: gomezj@ugr.es.*

<sup>2</sup> *Departamento de Álgebra y CITIC, Universidad de Granada, Granada (España); E-mail: jlobillo@ugr.es.*

<sup>3</sup> *Departamento of Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, y CITIC, Universidad de Granada, Granada (España); E-mail: gnavarro@ugr.es.*

### Resumen

En [1], los autores construyen algunos códigos no lineales a partir de códigos lineales sobre  $\mathbb{Z}_4$ . Este trabajo despertó el interés de la comunidad en el estudio de códigos cuyo alfabeto es un anillo finito. Wood, en [2], establece las identidades de MacWilliams para códigos sobre anillos Frobenius finitos, extendiendo los fundamentos de la teoría de códigos a códigos lineales sobre anillos Frobenius. En [3] se enriquece la teoría de dualidad en ese tipo de alfabetos.

Feng et al. conectan códigos lineales sobre anillos de cadena con la codificación en red a través de canales matriciales, véase [4, 5], abriendo otro campo de aplicación de los códigos sobre anillos finitos.

Con respecto a la decodificación, un marco para decodificar códigos lineales sobre anillos de Galois, dados mediante su matriz generadora, fue propuesto en [6], donde se asume que hay una cadena de códigos lineales sobre el cuerpo de residuos que cuentan con algoritmos eficientes de decodificación.

En esta charla, que presenta resultados aparecidos en [7], introducimos un marco de decodificación para códigos lineales sobre anillos de cadena dados mediante su matriz de paridad. Esto presenta una ventaja frente al marco propuesto en [6]: Aunque seguimos necesitando un código lineal sobre el cuerpo de residuos eficientemente decodificable en cada grado en la descomposición  $m$ -ádica del código dado, no es necesario que estén ordenados en una cadena de códigos, lo que incrementa la flexibilidad en su construcción.



---

## Referencias

- [1] Hammons, A.R.; Kumar, P.V.; Calderbank, A.R.; Sloane, N.J.; Sole, P. The  $\mathbb{Z}_4$ -linearity of kerdock, preparata, goethals, and related codes. *IEEE Trans. Inf. Theory* **1994**, *40*, 301–319.
- [2] Wood, J.A. Duality for modules over finite rings and applications to coding theory. *Am. J. Math.* **1999**, *121*, 555–575.
- [3] Gómez-Torrecillas, J.; Hieta-Aho, E.; Lobillo, F.J.; López-Permouth, S.; Navarro, G. Some remarks on non projective Frobenius algebras and linear codes. *Des. Codes Cryptogr.* **2020**, *88*, 1–15.
- [4] Feng, C.; Nóbrega, R.W.; Kschischang, F.R.; Silva, D. Communication over finite-ring matrix channels. In Proceedings of the 2013 IEEE International Symposium on Information Theory, Istanbul, Turkey, 7–12 July 2013; pp. 2890–2894.
- [5] Feng, C.; Nóbrega, R.W.; Kschischang, F.R.; Silva, D. Communication over finite-chain-ring matrix channels. *IEEE Trans. Inf. Theory* **2014**, *60*, 5899–5917.
- [6] Babu, N.S.; Zimmermann, K.-H. Decoding of linear codes over Galois rings. *IEEE Trans. Inf. Theory* **2001**, *47*, 1599–1603.
- [7] Gómez-Torrecillas, J.; Lobillo, F.J.; Navarro, G. Decoding Linear Codes over Chain Rings Given by Parity Check Matrices. *Mathematics* **2021**, *9*, 1878.

## On the existence and construction of Maximum Distance Profile convolutional codes

FRANCISCO JOSÉ PLAZA MARTÍN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidad de Salamanca (Spain).*  
*E-mail: fplaza@usal.es.*

### Resumen

We study the conditions for a convolutional code to be MDP in terms of the size of the base field  $\mathbb{F}$  as well as the openness of the MDP property in a given family of convolutional codes. Given  $(n, k, \delta)$ , our main result is an explicit bound depending on  $(n, k, \delta)$  such that if  $q$  is greater than this bound, there exists a  $(n, k, \delta)$  MDP convolutional code. A similar result is also offered for complete MDP convolutional codes. We show that these bounds are much lower than that those appeared so far in the literature. Finally, we show an explicit and simple construction procedure for MDP convolutional Goppa codes of dimension one.

## Polinomios sobre cuerpos finitos y aplicaciones

JORGE JIMÉNEZ URROZ<sup>1</sup>

*Departamento de Matemáticas, Universidad Politécnica de Cataluña (Spain)* <sup>1</sup> *E-mail:*  
`jorge.urroz@upc.edu` .

### Resumen

Polynomials are a fascinating subject from a wide variety of angles. In this occasion we will restrict ourselves to polynomials over finite fields and study them in two different directions. First we show that Reed Solomon codes are separable, proving some cases of a conjecture of Silverberger, and giving some ideas in general. Second, we are interested in finding families of local permutation polynomials. This is a proper generalization of permutation polynomials in several variables which is present in different fields. For example, in combinatorics, they serve to construct families of latin squares. In order to find families of local permutation polynomials, we will be considering Klenian groups and generalizations of that.

## An AG approach to quantum convolutional codes

JOSÉ IGNACIO IGLESIAS CURTO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, IUFFyM, Universidad de Salamanca (Spain). E-mail: joseig@usal.es.*

### Resumen

El estudio de los códigos cuánticos se concentra en las últimas décadas, motivado entre otros, por la posibilidad real de computadoras cuánticas y el desarrollo de algoritmos específicos para este tipo de computadoras.

El análogo a los códigos correctores de errores ha sido ampliamente estudiado, lo que ha permitido identificar algunas propiedades, establecer cotas para su distancia mínima y obtener construcciones de códigos a partir de códigos lineales clásicos, como códigos BCH, códigos de Reed-Solomon, códigos cuasícíclicos,... De igual modo, considerando la secuencia de qubits, se han estudiado los códigos convolucionales cuánticos, obteniendo también construcciones a partir de códigos convolucionales clásicos.

Estudiaremos el uso de la construcción de Goppa para proponer construcciones de códigos convolucionales cuánticos, caracterizar sus propiedades y determinar en qué condiciones éstas propiedades pueden ser óptimas.

### Referencias

- [1] Bierbrauer, J., Edel, Y. *Quantum twisted codes*, J. Comb. Designs 8 (2000) 174-188
- [2] C. Galindo, and F. Hernando. *Quantum codes from affine variety codes and their subfield-subcodes*. Designs, Codes and Cryptography 76.1 (2015): 89-100.
- [3] Lidar, D. A., and T. A. Brun, eds. *Quantum error correction*. Cambridge university press, 2013.
- [4] Ollivier, H., & Tillich, J. P. (2004). *Quantum convolutional codes: fundamentals*. arXiv preprint quant-ph/0401134.
- [5] Wilde, Mark M., and Todd A. Brun. *Unified quantum convolutional coding*. 2008 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE, 2008.

## Secuencias generalizadas y códigos perforados

SARA D. CARDELL<sup>1</sup>, JOAN-JOSEP CLIMENT<sup>2</sup>,  
VERÓNICA REQUENA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC (Brazil).*  
*E-mails: s.cardell@ufabc.edu.br.*

<sup>2</sup> *Departament de Matemàtiques, Universitat d'Alacant, Alacant (Spain).*  
*E-mail: jcliment@ua.es, vrequena@ua.es.*

### Resumen

Supongamos que  $\mathbb{F}_2$  denota el cuerpo de Galois de 2 elementos y que  $p(x) \in \mathbb{F}_2[x]$  es un polinomio primitivo. Es bien conocido (véase [1]) que el LFSR cuyo polinomio característico es  $p(x)$  genera PN-secuencias de período máximo  $2^k - 1$  con  $2^{k-1}$  unos y  $2^{k-1} - 1$  ceros. Además si  $\{u_i\}_{i \geq 0}$  es una PN-secuencia generada por  $p(x)$  y consideramos la secuencia  $\{v_i\}_{i \geq 0}$  dada por  $v_i = g_0 u_i + g_1 u_{i+1} + \dots + g_{k-1} u_{i+k-1}$ , para  $i \geq 0$ , con  $\mathbf{g} = [g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{k-1}] \in \mathbb{F}_2^k$ , podemos considerar una nueva secuencia  $\{s_j\}_{j \geq 0}$ , llamada secuencia self-shrunk generalizada, mediante la regla de decimación:  $s_j = v_i$  si  $u_i = 1$  y descartamos  $v_i$  si  $u_i = 0$ . Al variar  $\mathbf{g}$  en  $\mathbb{F}_2^k$ , obtenemos el conjunto de las secuencias generalizadas asociadas a  $\{u_i\}_{i \geq 0}$  (véase [2]).

Si identificamos cada PN-secuencia con el vector de  $\mathbb{F}_2^{2^k-1}$  formado por las primeras  $2^k - 1$  componentes, resulta que el conjunto de todas las PN-secuencias generadas por  $p(x)$  es un  $[2^k - 1, k, 2^{k-1}]$  código simplex binario cuya matriz generadora es  $G = [C \ AC \ \dots \ A^{2^k-2}C]$  con  $A$  la matriz asociada a  $p(x)$  y  $C$  la primera columna de la matriz identidad de tamaño  $k \times k$ .

Además, si perforamos dicho código simplex (eliminando las columnas de  $G$  que tienen peso par), entonces obtenemos un  $[2^{k-1}, k, 2^{k-2}]$  código binario de Reed-Muller que coincide con el conjunto de secuencias generalizadas obtenido mediante la decimación anterior.

### Referencias

- [1] S. W. Golomb. *Shift Register-Sequences*. Aegean Park Press, Laguna Hill, CA, 1982.
- [2] Y. Hu and G. Xiao. *Generalized self-shrinking generator*. IEEE Transactions on Information Theory, 50(4): 714–719 (2004).

## Descodificación por localización y el algoritmo de Berlekamp-Massey-Sakata.

JUAN JACOBO SIMÓN<sup>1</sup>, JOSÉ JOAQUÍN BERNAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia (Spain).*  
*E-mails: jsimon@um.es, josejoaquin.bernal@um.es.*

### Resumen

La descodificación por localización es un tema clásico dentro de la Teoría de Códigos pues muchos métodos de descodificación se basan en su desarrollo, como ocurre en el contexto de los Códigos Bivariados (véase [2, 4]) o el de los Códigos Algebraico-Geométricos (véase [3, Chapter 10]).

La técnica más conocida para llevar a cabo esta descodificación viene dada por el algoritmo de Berlekamp-Massey-Sakata (aBMS) que es una generalización a dos variables del clásico algoritmo de Berlekamp-Massey. La idea es considerar, análogamente a lo que se hace en una variable, la tabla de los síndromes conocidos del error y construir una base de Groebner para el ideal de las así llamadas, relaciones de recurrencia lineal que determina dicha tabla.

En esta charla, vamos a mostrar un panorama sobre su funcionamiento y comentaremos algunas de nuestras aportaciones en un trabajo conjunto con José Joaquín Bernal [1]. Uno de los principales es el siguiente. Si tenemos una transmisión de no más de  $t$ -errores y se considera la tabla de síndromes (conocido o no) del polinomio error entonces existe un conjunto de índices la tabla, que denotamos  $\mathcal{S}(t)$ , tal que basta considerar exclusivamente los pasos en él para implementar con éxito el aBMS; aún más, basta conocer exclusivamente los valores de la tabla cuyos índices pertenecen a  $\mathcal{S}(t)$  para poder implementar con éxito el procedimiento. Se prueba que dicho conjunto es minimal con la propiedad; de hecho  $|\mathcal{S}(t)| = \frac{t^2+7t}{2} - 1$ .

### Referencias

- [1] J.J. Bernal, J.J. Simón, A new approach to the Berlekamp-Massey-Sakata Algorithm. Improving Locator Decoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, **67**(1) (2021), 268-281.
- [2] R. E. Blahut, Decoding of cyclic codes and codes on curves, en V. Pless y W.C. Huffman (eds.), *Handbook of Coding Theory*, vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 1998.
- [3] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*. (2nd Edition), vol. 185. Springer Science & Business Media, 2006.
- [4] S. Sakata, Decoding binary 2-D cyclic codes by the 2-D Berlekamp-Massey Algorithm, *IEEE, Trans. Infor. Theory*, **37**(4) (1991), pp. 1200–1203.

## Protocolos criptográficos sobre anillos de grupo torcidos

J.A. LÓPEZ RAMOS<sup>1</sup>, M.D. GÓMEZ OLVERA<sup>1</sup>, B. TORRECILLAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Almería (Spain). E-mails: jlopez@ual.es, gomezolvera@ual.es, btorreci@ual.es.*

### Resumen

La idea fundacional de Diffie-Hellman para un intercambio de clave a través de un canal público inseguro basada en cuerpos finitos ha sido extendida a diferentes ámbitos algebraicos tales como el grupo de puntos de una curva elíptica, aunque, quizás el ambiente más general posible sea el introducido en [1], que recoge todas las propuestas anteriores y en los que resulta fundamental la conmutatividad de la operación interna del grupo (o semigrupo) que actúa sobre el conjunto sobre el que se define el intercambio de clave.

En este trabajo mostramos cómo el intercambio de clave puede llevarse a cabo también en un ambiente conmutativo en el que la regla de la operación permite, de alguna forma, controlar la no conmutatividad, permitiendo la definición de diversos esquemas criptográficos, comenzando por un intercambio de clave y un criptosistema de clave pública de tipo ElGamal asociado, así como su extensión a esquemas de control de claves criptográficas en grupos de comunicaciones o, incluso, esquemas de verificación de la información.

### Referencias

- [1] G. Maze, C. Monico, J. Rosenthal, *Public key cryptography based on semigroup actions*. Adv. Math. Commun. 1 (2007), 489–507.
- [2] M.D. Gómez Olvera, J.A. López Ramos, *Public Key Protocols over Twisted Dihedral Group Rings*. Symmetry 11(8): 1019 (2019), <https://doi.org/10.3390/sym11081019>.
- [3] M.D. Gómez Olvera, J.A. López Ramos, *Secure Group communications using group rings*. Preprint.
- [4] M.D. Gómez Olvera, J.A. López Ramos, *Information authentication using twisted dihedral group rings*. Preprint.

## Cardinal rank metric codes

MARKEL EPELDE<sup>1</sup>, IGNACIO F. RÚA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea (Spain). E-mail: markel.epelde@ehu.eus.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo (Spain). E-mail: rua@uniovi.es.*

### Resumen

In 1985, Gabidulin introduced the rank metric in coding theory over finite fields [3], and used this kind of codes in a McEliece cryptosystem, six years later [2]. In this talk, we consider rank metric codes over Galois rings. We propose a suitable metric for codes over such rings, and show its main properties. With this metric, we define Gabidulin codes over Galois rings, propose an efficient decoding algorithm for them, and hint their cryptographic application.

### Referencias

- [1] M. Epelde, I. F. Rúa, *Cardinal rank metric codes over Galois rings*, Finite Fields and Their Applications, Volume 77, 2022, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ffa.2021.101946>.
- [2] E. M. Gabidulin, *Theory of codes with maximum rank distance*. Problems of Information Transmission, 21 (1): 1-12, 1985.
- [3] E. M. Gabidulin, A. V. Paramonov, O. V. Tretjakov, *Ideals over a non-commutative ring and their application in cryptology*. EUROCRYPT 1991: Advances in Cryptology - EUROCRYPT 91 pp 482-489, 1991. DOI: [https://doi.org/10.1007/3-540-46416-6\\_41](https://doi.org/10.1007/3-540-46416-6_41)



## Generando claves públicas con el enemigo: una construcción para esquemas de firma basados en logaritmo discreto

MARÍA ISABEL GONZÁLEZ VASCO

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos, C/Tulipán S/N, 28933 Móstoles, Madrid (España).*  
*E-mail: mariaisabel.vasco@urjc.es.*

### Resumen

El uso de firma digital está hoy en día ampliamente extendido, haciéndose como consecuencia necesaria la generación y custodia de claves de firma por usuarios e instituciones. Una alternativa al uso de PKIs tradicionales es utilizar servicios basados en la nube, de modo que las claves y certificados se almacenan en la nube y los usuarios autorizan a la nube a firmar en su nombre a través de una contraseña. Esto plantea un problema a la hora de atestiguar quién es en efecto el responsable último de la emisión de una firma. Recientemente, en [1], hemos propuesto un sistema basado en contraseñas mediante el cual las claves de firma se generan cooperativamente entre dos entidades (usuario y servidor), de modo que solo el usuario obtenga la clave secreta que permite firmar. En caso de disputa, el *transcript* del protocolo permitirá sin embargo al servidor demostrar a una tercera parte que el usuario es necesariamente el que ha utilizado la clave de firma. Así, se mantienen las garantías de los sistemas tradicionales de PKI evitando problemas de privacidad y repudio.

Además de definir la herramienta criptográfica a nivel teórico y demostrar que es segura, damos una construcción basada en el uso de *funciones pseudoaleatorias oblivious y distribuidas* (ver [2]). Este diseño ha sido evaluado e implementado, y está protegido por la patente [3].

*Trabajo conjunto con Antonio Faonio (EURECOM), Ángel P. del Pozo (URJC), Claudio Soriente y Hien Thi Thu Truong (NEC Labs. Europe)*

### Referencias

- [1] A. Faonio, M.I. González Vasco, C. Soriente y H.T. Thu Truong. *Auditable Asymmetric Password Authenticated Public Key Establishment*, Cryptology ePrint Archive, Report 2020/060, 2020.
- [2] S. Jarecki, A. Kiayias, H.Krawczyk, J. Xu. *TOPPSS: cost-minimal password-protected secret sharing based on threshold OPRF*, Proceedings of ACNS, pp. 39–58, 2017.
- [3] C. Soriente, A. Faonio, M.I. González Vasco, A.L. Pérez del Pozo. *Password-authenticated public key establishment*, US Patent App. 16/831, 844, (2021).

## Claves pequeñas para criptografía basada en códigos: criptosistema de McEliece con codificadores convolucionales

P. ALMEIDA<sup>1</sup>, M. BELTRÁ<sup>2</sup>, D. NAPP<sup>2</sup>, C. SEBASTIÃO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> CIDMA - Centro de I&D em Matemática e Aplicações, Dept. de Matemática, Universidade de Aveiro, (Portugal). E-mails: [palmeida@ua.pt](mailto:palmeida@ua.pt), [claudia.sebastiao@ua.pt](mailto:claudia.sebastiao@ua.pt).

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Alicante, Alicante (Spain). E-mails: [mbv29@alu.ua.es](mailto:mbv29@alu.ua.es), [diego.napp@ua.es](mailto:diego.napp@ua.es).

### Resumen

En 1978 Robert J. McEliece propuso el primer criptosistema de clave pública que utilizaba elementos de la teoría de códigos correctores de errores [1]. Si bien este criptosistema no ha gozado de aplicación práctica debido principalmente al gran tamaño de su clave pública, especialmente si lo comparamos con el tamaño de la clave de los criptosistemas basados en elementos de la teoría de números, los recientes avances en el campo de la computación cuántica han devuelto el criptosistema de McEliece al primer plano de la investigación. El motivo: hasta la fecha no se ha encontrado ningún ataque que sea capaz romper el criptosistema de McEliece si los parámetros son escogidos de manera adecuada, mientras que sí que existen diversos ataques sobre RSA [2] y otros criptosistemas, derivados principalmente del algoritmo de Shor [3]. Una de las principales líneas de investigación consiste en encontrar formas para reducir el tamaño de la clave pública. En [4] se presenta una propuesta que logra este objetivo de forma notable. Los elementos clave para conseguirlo son dos: el uso de códigos convolucionales y el uso de códigos generalizados de Reed-Solomon.

### Referencias

- [1] R. J. McEliece. A Public-key Cryptosystem Based on Algebraic Coding Theory. *DNS Prog. Rep.*, pages 114–116, 1978.
- [2] R. L. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman. A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems. *Commun. ACM*, 21(2): 120–126, February 1978.
- [3] Peter W. Shor. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Review*, 41(2): 303–332, January 1999
- [4] Paulo Almeida, Miguel Beltrá, Diego Napp, and Cláudia Sebastião. Smaller Keys for Code-Based Cryptography: McEliece Cryptosystems with Convolutional Encoders, 2021.

# Secret Sharing Schemes for Almost All Access Structures

ORIOL FARRÀS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Universitat Rovira i Virgili, Tarragona E-mail: oriol.farras@urv.cat.*

## Resumen

The share size of general secret-sharing schemes is poorly understood. The gap between the best known upper bound on the total share size per party of  $1,5^n$  [1] and the best known lower bound of  $\Omega(n/\log n)$  [3] is huge (where  $n$  is the number of parties in the scheme). To gain some understanding on this problem, we study the share size of secret-sharing schemes of almost all access structures, i.e., of almost all collections of authorized sets. This is motivated by the fact that in complexity, many times almost all objects are hardest (e.g., most Boolean functions require exponential size circuits). All previous constructions of secret-sharing schemes were for the worst access structures (i.e., all access structures) or for specific families of access structures.

We prove upper bounds on the share size for almost all access structures. We combine results on almost all monotone Boolean functions by Korshunov [4] and a construction of Liu and Vaikuntanathan [5] and conclude that almost all access structures have a secret-sharing scheme with share size  $2^{\tilde{O}(\sqrt{n})}$ .

It is a joint work with Amos Beimel that was presented in TCC 2020 [2].

## Referencias

- [1] Benny Applebaum, Oded Nir. Upslices, downslices, and secret-sharing with complexity of  $1,5^n$ . In Tal Malkin and Chris Peikert, editors, CRYPTO 2021, volume 12827 of LNCS, pages 627–655. Springer-Verlag, 2021.
- [2] Amos Beimel, Oriol Farràs. The Share Size of Secret-Sharing Schemes for Almost All Access Structures and Graphs. In Rafael Pass and Krzysztof Pietrzak, editors, Theory of Cryptography, TCC 2020, volume 12552 of LNCS, pages 499–529.
- [3] László Csirmaz. The size of a share must be large. *J. of Cryptology*, 10(4):223–231, 1997.
- [4] A. D. Korshunov. On the number of monotone Boolean functions. *Probl. Kibern.*, 38:5–108, 1981.
- [5] Tianren Liu and Vinod Vaikuntanathan. Breaking the circuit-size barrier in secret sharing. In *50th STOC*, pages 699–708, 2018.

## Interleaving sequences

S. D. CARDELL<sup>1</sup>, A. FÚSTER-SABATER<sup>2</sup>, VERÓNICA REQUENA<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Centro de Matemática, Computação e Cognição, Santo André-SP (Brazil). E-mail: s.cardell@ufabc.edu.br.*

<sup>2</sup> *Instituto de Tecnologías Físicas y de la Información, C.S.I.C., Madrid (Spain). E-mail: amparo@iec.csic.es.*

<sup>3</sup> *Dpto. de Matemàtiques, Universitat d'Alacant, Alacant (Spain). E-mail: vrequena@ua.es.*

### Resumen

Some pseudorandom sequences with good cryptographic features can be obtained from the interleaving of other families of sequences with unsuitable properties. PN-sequences obtained from maximum-length Linear Feedback Shift Registers [1] exhibit good statistical aspects, such as balancedness, large period, adequate distribution of 0s and 1s and excellent autocorrelation, although their linearity makes them vulnerable against cryptographic attacks [2]. In this work, we present a preliminary analysis on the random features of the interleaving of shifted versions of a PN-sequence [3].

### Referencias

- [1] Golomb, S.W.: Shift Register-Sequences. Aegean Park Press, Laguna Hill (1982).
- [2] Massey, J.: Shift-register synthesis and BCH decoding. IEEE Trans. Inf. Theory 15(1), 122?127 (1969).
- [3] Cardell S.D., Fúster-Sabater A., Requena V. (2021) Preliminary Analysis of Interleaving PN-Sequences. In: Gervasi O. et al. (eds) Computational Science and Its Applications - ICCSA 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 12949, pp 287-29, Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86653-2\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86653-2_21)

## Métodos heurísticos para el cálculo de la distancia de un código lineal

MANUEL P. CUÉLLAR<sup>1</sup>, JOSÉ GÓMEZ-TORRECILLAS<sup>2</sup>, F. J. LOBILLO<sup>3</sup>, GABRIEL NAVARRO<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, y CITIC, Universidad de Granada, Granada (España); E-mail: manupc@decsai.ugr.es.*

<sup>2</sup> *Departamento de Álgebra e IMAG, Universidad de Granada, Granada (España); E-mail: gomezj@ugr.es.*

<sup>3</sup> *Departamento de Álgebra y CITIC, Universidad de Granada, Granada (España); E-mail: jlobillo@ugr.es.*

<sup>4</sup> *Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, y CITIC, Universidad de Granada, Granada (España); E-mail: gnavarro@ugr.es.*

### Resumen

Calcular la distancia mínima de un código lineal binario es un problema NP-duro [1]. Tradicionalmente, este cálculo se ha abordado mediante el diseño de algoritmos que encuentran, a través de una búsqueda inteligente pero exhaustiva, una combinación lineal de las filas de una matriz generadora proporcionando una palabra del código de peso mínimo [2, 3]. Sin embargo, de esta manera, el tiempo de ejecución para el peor caso respecto de la dimensión del código, o del tamaño del cuerpo base sobre el subcuerpo primo, crece exponencialmente. En [4] probamos que, dada una matriz generadora, existe una permutación de sus columnas de manera que su forma escalonada reducida por filas contiene una palabra de peso mínimo. Este resultado permite el uso de permutaciones como esquema de representación, en contraste con la representación discreta habitual [5], para el diseño de metaheurísticas. En particular, en este trabajo hemos diseñado e implementado un algoritmo genético y un algoritmo CHC. Los resultados experimentales sobre los cuerpos  $\mathbb{F}_2$  y  $\mathbb{F}_8$  sugieren que los algoritmos evolutivos con nuestra codificación son competitivos con respecto a los métodos existentes en la literatura. Los experimentos revelan algunas inexactitudes en la base de datos contenida en [6].

### Referencias

- [1] A. Vardy, The intractability of computing the minimum distance of a code, IEEE Transactions on Information Theory 43 (6) (1997) 1757–1766.

- 
- [2] A. Betten, M. Braun, H. Friepertinger, A. Kerber, A. Kohnert, A. Wassermann, Error-Correcting Linear Codes, Vol. 18 of Algorithms and Computation in Mathematics, Springer, 2006.
  - [3] P. Lisonek, L. Trummer, Algorithms for the minimum weight of linear codes, Adv. in Math. of Comm. 10 (2016) 195–207.
  - [4] M. P. Cuéllar, J. Gómez-Torrecillas, F. J. Lobillo and Gabriel Navarro, Genetic algorithms with permutation-based representation for computing the distance of linear codes, Swarm and Evolutionary Computation 60 (2021), 100797.
  - [5] M. Askali, A. Azouaoui, S. Nouh, M. Belkasmi, On the computing of the minimum distance of linear block codes by heuristic methods, International Journal of Communications, Network and System Sciences 5 (11) 2012, 774 – 784.
  - [6] M. Grassl, Bounds on the minimum distance of linear codes and quantum codes, Online available at <http://www.codetables.de>, accessed 2020-01-22 (2007).

## Optimal locally recoverable codes

H. MARTÍN-CRUZ<sup>1</sup>, C. GALINDO<sup>2</sup>, F. HERNANDO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Institut de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC), Universitat Jaume I (Spain). E-mail: martinh@uji.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universitat Jaume I (Spain). E-mails: galindo@uji.es, carrillf@uji.es.*

### Resumen

Locally recoverable codes are a particular case of error correcting codes such that any error in any coordinate of a codeword can be recovered from a set of other coordinates. There are Singleton-type bounds that relate the parameters of a locally recoverable code. The codes attaining equality are said to be optimal, and it is of this type on which we base our search.

In this talk we will introduce the previous notions and specify the codes we work with, detailing the recovery method that we use that make them locally recoverable. Moreover, we will see some examples about the search for optimality for this specific type of codes.

### Referencias

- [1] A. Barg and I. Tamo, *A family of optimal locally recoverable codes*, IEEE Trans. Inform. Theory 60(8) (2014), 4661–4676.
- [2] A. Barg, I. Tamo, S. Vladut, *Locally recoverable codes on algebraic curves*, IEEE Trans. Inform. Theory 63(8) (2017), 4928–4939.
- [3] C. Galindo, O. Geil, F. Hernando and D. Ruano, *On the distance of stabilizer quantum codes from  $J$ -affine variety codes*, Quantum Inf. Process. 16(111) (2017), 32 pp.
- [4] C. Galindo, F. Hernando and C. Munuera, *Locally recoverable  $J$ -affine variety codes*, Finite Fields Appl. 64, 2020, 101661, 22 pp.
- [5] O. Geil and T. Hoholdt, *On Hyperbolic Codes*, Lecture Notes in Comput. Sci. 2227 (2001), 159–171.
- [6] P. Gopalan, C. Huang, H. Simitci and S. Yekhanin, *On the locality of codeword symbols*, IEEE Trans. Inform. Theory 58(11) (2012), 6925–6934.
- [7] C. Munuera, *Locally recoverable codes with local error detection*, arXiv preprint arXiv:1812.00834.

## MATHEMATICAL MODELS AND NUMERICAL SIMULATION IN FLUID DYNAMICS

### ORGANIZADORES

**Jezabel Curbelo** (Universidad Politécnica de Cataluña)

**José M. López** (Universidad Politécnica de Cataluña)



## Superhighway binary convection in inclined cylinders

A. ALONSO<sup>1</sup>, O. BATISTE<sup>1</sup>, I. MERCADER<sup>1</sup>, J. M. VEGA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Física, Universitat Politècnica de Catalunya (Spain). E-mails: arantxa.alonso@upc.edu, oriol.batiste@upc.edu, maria.isabel.mercader@upc.edu.*

<sup>2</sup> *E.T.S.I. Aeronáutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid (Spain). E-mail: josemanuel.vega@upm.es.*

### Resumen

Binary fluid convection in a thin horizontal layer heated from below is a widely studied pattern-forming system. In binary mixtures, thermal convection promoted by thermal gradients may be enhanced by concentration non-uniformities sustained by the Soret coupling, i.e., by the generation of concentration fluxes due to temperature gradients (Soret effect). The Soret coefficient  $S_T$  measures the strength of the Soret coupling, and its sign determines the behavior of the mixture. With  $S_T > 0$ , the heavier component of the fluid is driven into the direction of lower temperature, and the onset of convection takes place for smaller heating than in the pure fluid case. On the other hand, tilting a cavity provides a simple and experimentally realizable way of introducing shear into the system via the generation of a large scale circulatory flow. The competition between shear effects and horizontal and vertical buoyancy alters significantly the dynamics observed in non-inclined convection.

We will analyze the effect of a slight tilt on the stability of the patterns in a shallow cylinder filled with a  $S_T > 0$  mixture, focusing on the striking superhighway convection (SHC) states observed experimentally [1] and numerically [2]. These patterns show a number of parallel thermal lanes, each containing aligned coherent structures that counter-propagate in adjacent lanes. The temperature field is complex but regular, and concentration appears to be fairly irregular to the naked eye. Several types of SHC states have been obtained numerically. We will use a recent data processing tool, known as higher order dynamic mode decomposition, to identify and analyze some of the most relevant spatio-temporal patterns in the numerically computed data [3].

### Referencias

- [1] F. Croccolo, F. Scheffold, and A. Vailati, *Effect of marginal inclination on pattern formation in a binary liquid mixture under thermal stress*, Phys. Rev. Lett. 111 (2013), 014502.
- [2] A. Alonso, I. Mercader, O. Batiste, *Time-dependent patterns in quasivertical cylindrical binary convection*, Phys. Rev. E 97 (2018), 023108.
- [3] A. Alonso, I. Mercader, O. Batiste, J.M. Vega, *Analyzing slightly inclined cylindrical binary fluid convection via higher order dynamic mode decomposition*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. (Submitted).

# Drop breakup in turbulent flows: new perspectives and paradigms

ALBERTO VELA-MARTÍN<sup>1</sup>, MARC AVILA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Centre of Applied Space Technology and Microgravity (ZARM), University of Bremen, Bremen (Germany). E-mails: albertovelam@gmail.com.*

## Resumen

The dynamics of immiscible mixtures in the presence of turbulence is of key importance in many industrial applications and natural phenomena. Particularly relevant is the geometry and distribution of the disperse phase in the dilute phase, in which fluid particle breakup—drops or bubbles—plays a fundamental role. Despite its importance, the mechanisms of fluid-particle breakup remain unclear, partly because of the lack of high-quality data, and partly because of a poor understanding of the interactions between turbulence and fluid-fluid interfaces. In this talk, we present new theoretical and numerical results on the breakup of single drops in homogeneous isotropic turbulence [1]. We consider drop breakup as a consequence of the energetic exchange between the kinetic energy of turbulent fluctuations and the surface energy of the drop, and show that this exchange is governed by the stretching of the drop surface by the rate-of-strain tensor. Moreover, we isolate the contribution of turbulent fluctuation to this exchange from the local effect of surface dynamics, and show that the former drive the increments of the surface energy that lead to breakup. In view of these results, we propose a breakup model based on the theory of extreme fluctuations which accurately reproduces the probability of breakup found in our direct numerical simulations. This model predicts that the probability of breakup decreases exponentially—but remains non-zero—in the limit of very small Weber numbers. These results challenge the prevailing paradigm, and suggest that drop size distributions in turbulent flows evolve even below the maximum diameter proposed by Hinze [2] and Kolmogorov [3].

## Referencias

- [1] A. Vela-Martín, M. Avila, *Accepted in J. Fluid. Mech.* (2021)
- [2] J. Hinze, *AIChE Journal* **1**, 289 (1955).
- [3] A. Kolmogorov, *Doklady Akad. Nauk. USSR* (1949), vol. 66, p. 825.

## Periodic orbits near the onset of subcritical chaos in Taylor-Couette flow

B. WANG<sup>1</sup>, R. AYATS<sup>1</sup>, A. MESEGUER<sup>1</sup>, F. MELLIBOVSKY<sup>1</sup>, K.  
DEGUCHI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Physics, Universitat Politècnica de Catalunya (Spain). E-mails:*  
baoying.wang@upc.edu, roger.ayats@upc.edu, alvaro.meseguer@upc.edu, mellibovsky@upc.edu.

<sup>2</sup> *School of Mathematics, Monash University (Australia). E-mail: kengo.deguchi@monash.edu.*

### Resumen

Taylor-Couette problem, the flow between two coaxial cylinders independently rotating around their common axis, is an ideal benchmark for investigating instabilities and transitional turbulence. In this study, two period-doubling cascades of relative periodic orbits have been identified in the linearly stable regime of counter-rotating Taylor-Couette flow. For the first cascade, the scenario has its origin at the upper branch of a family of linearly stable *drifting-rotating waves* that undergo a Hopf bifurcation, leading to a modulated wave ( $P_1$ ). This orbit later on undergoes a period-doubling cascade, leading to families of stable *period orbits* ( $P_{2,4,8,16\dots}$ ), and eventually generates a chaotic attractor coexisting with the linearly stable circular Couette flow.

The *boundary crisis* of this chaotic attractor is caused by its collision with an unstable periodic orbit generated through a saddle-node bifurcation in the region where  $P_2$  is still linearly stable. The scenario is similar to the one observed in plane Couette flow [1]. This unstable orbit, which is responsible for the aforementioned *boundary crisis*, is linearly stable near to the saddle-node bifurcation point where it is born. Surprisingly, as the inner Reynolds number increases, it undergoes another period-doubling cascade and generates another stable chaotic attractor. In this case the *boundary crisis* is caused by the collision of the chaotic attractor with its own unstable branch of periodic orbits, which is similar to a second scenario also found in plane Couette flow [2]. To confirm all these, Poincaré-Newton-Krylov solvers have been devised to accurately compute and monitor the periodic orbits mentioned above.

### Referencias

- [1] J. Lustro, et al., *The onset of transient turbulence in minimal plane Couette flow*, JFM 862 (2019).
- [2] T. Kreilos and B. Eckhardt, *Periodic orbits near onset of chaos in plane Couette flow*, Chaos 22.4 (2012): 047505.

## Effect of waveform on turbulence transition in pulsatile pipe flow

D. MORÓN<sup>1</sup>, M. AVILA<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *University of Bremen, Center of Applied Space Technology and Microgravity (ZARM),  
Am Fallturm 2, 28359 Bremen, Germany. E-mails:*

*daniel.moron@zarm.uni-bremen.de, marc.avila@zarm.uni-bremen.de.*

<sup>2</sup> *University of Bremen, MAPEX Center for Materials and Processes,  
Am Biologischen Garten 2, 28359 Bremen, Germany.*

### Resumen

Pulsatile pipe flows, pipe flows whose bulk velocity has one mean component and one or more harmonic components, are ubiquitous in industrial applications and biological systems. The presence of turbulence in these systems is usually undesired, as it is linked with high energy losses or even the development of cardiovascular diseases [1]. While studying transition in pulsatile pipe flow, experiments and non-modal stability analysis have identified a novel "helical instability" [2] whose growth scales exponentially with the Reynolds number [3]. The characteristics of the instability depend on the frequency of the pulsation and on the pulsation waveform. As we show in this talk, by playing with the characteristics of the waveform, one can delay the onset of transition or even change the behaviour of turbulence once it is triggered.

### Referencias

- [1] K. Cunningham, *The role of shear stress in the pathogenesis of atherosclerosis*, Lab Invest, (2005)
- [2] D. Xu. *Nonlinear hydrodynamic instability and turbulence in pulsatile flow*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2020
- [3] D. Xu. *Non-modal transient growth of disturbances in pulsatile and oscillatory pipe flows*. Journal of Fluid Mechanics, 2021

# Un método de descomposición de dominios de tipo Schwarz alternante aplicado al problema de convección de Rayleigh-Bénard

F. PLA<sup>1</sup>, H. HERRERO<sup>1</sup>, D. MARTÍNEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real (Spain). E-mail:  
Francisco.Pla@uclm.es, Henar.Herrero@uclm.es, Dario.Martinez@uclm.es.*

## Resumen

En este trabajo se presenta un método de descomposición de dominios (DD) de tipo Schwarz alternante con colocación de Legendre para el problema de convección de Rayleigh-Bénard. El problema es modelado con las ecuaciones incompresibles de Navier-Sokes acopladas con la ecuación del calor en un dominio rectangular en dos dimensiones (2D). Se considera la aproximación de Boussinesq y el valor de Prandtl  $Pr$  es infinito, como es usual en la convección en fenómenos geofísicos como el manto terrestre [4, 5].

Este problema presenta términos no lineales, los cuales son resueltos numéricamente con el método de Newton con una discretización de colocación de Legendre en cada iteración de Newton [1, 2]. Pero los métodos de colocación están mal condicionados, es decir, el número de condición es de orden  $O((\text{tamaño de la malla})^3)$ , tal que,  $10^5$  es el máximo tamaño de la malla para una doble precisión. Dado que esta malla es demasiado pequeña para resolver problemas en dominios grandes, pueden aparecer oscilaciones no reales en las soluciones cuando aumentamos la relación de aspecto del dominio o el valor del número de Rayleigh. Por lo tanto, el método de descomposición de dominios ayuda de forma muy eficaz a poder subsanar este problema y por lo tanto obtener soluciones sobre dominios tal que el ancho del dominio sea mucho mayor que su profundidad con valores de número de Rayleigh altos.

Se consiera, un método de colocación de DD de tipo Schwarz alternante en el eje horizontal. De esta forma el dominio se puede dividir en varios subdominios con tamaño de malla menor, tal que la discretización global con los métodos de colocación esté bien condicionada pudiendo aumentar la malla total, aumentando el número de subdominios. La convergencia numérica del método está teóricamente demostradas en Ref. [3] cuando se considera superposición en las fronteras de los subdominios.

Gracias a estos métodos de DD, se considera una malla de Legendre-Gauss-Lobatto, el orden es alto, el coste computacional bajo y el número de subdomios a poder emplear grande. Igualmente se puede aumentar la relación de aspecto del dominio 2D y aumentar el número de Rayleigh para poder alcanzar zonas de turbulencia.

---

## Referencias

- [1] C. Bernardi and Y. Maday. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag, 1991Ann.
- [2] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] H. Herrero, F. Pla and M. Ruiz-Ferrández. *A Schwarz Method for a Rayleigh-Bénard Problem*. J. of Scientific Computing, 78 (2019), 376–392.
- [4] F. Pla, A.M. Mancho and H. Herrero. *Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio*. Physica D, D238 (2008), 572–580.
- [5] F. Pla, H. Herrero, F. Pla and J. M. Vega. *A flexible symmetry-preserving Galerkin/POD reduced order model applied to a convective instability problem*. Computers and Fluids, 119 (2015), 162–175.

## Bubble bursting phenomenon: A numerical framework

FRANCISCO J. BLANCO-RODRÍGUEZ, J. M. GORDILLO

*Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de fluidos, Área de Mecánica de Fluidos, Universidad de Sevilla (Spain). E-mails: fbrodriguez@us.es, jgordill@us.es*

### Resumen

The breakup of ocean waves entraps air bubbles that disintegrate within the liquid bulk and burst when they rise back to the surface, ejecting into the atmosphere droplets which, after evaporation, constitute the so-called *sea spray aerosol* (SSA), that influences climate by scattering and absorbing radiation [1]. Hence, the understanding, description and quantification of a fundamental process such as the bursting of bubbles at interfaces [2] will help substantially improving the predictive capability of climate models. With the main purpose of analysing the ejection of droplets from the fast Worthington jets issued after the bursting of a bubble of radius  $R_b$ , we have carried out an exhaustive numerical study by varying both the Bond,  $Bo = \rho_l g R_b^2 / \sigma$ , and Ohnesorge,  $Oh = \mu_l / \sqrt{\rho_l R_b \sigma}$ , numbers, with  $\rho_l$ ,  $\mu_l$  and  $\sigma$  referring to the liquid density, dynamic viscosity and interfacial tension coefficient, respectively. A Bond dependence balance between hydrostatic and capillary pressures provides the initial flattened equilibrium bubble shape. We used the open-source package GERRIS [3] to solve the axisymmetric, two-phase incompressible Navier-Stokes equations with a combination of a volume-of-fluid (VOF) and quad/octree adaptive mesh refinement (AMR) method to capture the interface. Our numerical and theoretical results [4, 5] predict the generation of submicron-sized aerosol particles with diameters below 100 nm and velocities  $\sim \sigma / \mu_l$  for bubble radii  $10 \lesssim R_b \lesssim 20 \mu\text{m}$ , within the range found in natural conditions and in very good agreement with experimental measurements.

### Referencias

- [1] F. Veron, *Ocean spray*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 47, (2015), 507–538.
- [2] J. M. Gordillo and J. Rodríguez-Rodríguez, *Capillary waves control the ejection of bubble bursting jets*, *J. Fluid Mech.*, 867, (2019), 557–571.
- [3] S. Popinet, *GERRIS: A tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries*, *J. Comput. Phys.* 190(2), (2003), 572-600.
- [4] Francisco J. Blanco-Rodríguez and J. M. Gordillo, *On the sea spray aerosol originated from bubble bursting jets*, *J. Fluid Mech.*, 886, (2020), R2-1–13.
- [5] Francisco J. Blanco-Rodríguez and J. M. Gordillo, *On the jets produced by drops impacting a deep liquid pool and by bursting bubbles*, *J. Fluid Mech.*, 916, (2021), A37-1–44.

## Stratified Taylor-Couette flow: Nonlinear dynamics

FRANCISCO MARQUES<sup>1</sup>, JUAN M. LOPEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Dep. Física, Univ. Politècnica de Catalunya UPC (Spain). E-mail: francisco.marques@upc.edu.*

<sup>2</sup>*Dep. Mathematics, Arizona State University (USA). E-mail: jmlopez@asu.edu.*

### Resumen

The instability of the flow between two differentially rotating cylinders with the fluid being stably stratified is an idealized setting which may be of relevance to processes in the atmosphere and oceans and accretion disks. Our present investigation is motivated by recent experiments [1, 2, 3] who found structures of spiral or Taylor-cells type with defects, close to the inner rotating cylinder. Some experiments use water with salt as the stratifying agent, whilst others use temperature stratification. For our study, we shall consider heat stratification with a Prandtl number of 6.

Flór et al. experiments were in a regime where the ratio of the inner to outer cylinder radii is quite small,  $R_i/R_o = 1/15$ , and our recent numerical simulations [4] reproduced the observed dynamics, and showed that end effects and centrifugal buoyancy play a critical role in the dynamics and instabilities, in particular in breaking the up-and-down reflection symmetry of the problem. Another recent series of experiments and stability analysis in a stratified Taylor–Couette whose radius ratio is not too big and not too small,  $R_i/R_o = 0,417$ , have been conducted by Leclercq, Melettia et al. [5, 2]. We are currently conducting numerical simulations in this geometry [6], and the results suggest that spontaneous symmetry breaking competes with centrifugal buoyancy. Comparisons between both geometries will be presented at the conference.

### Referencias

- [1] Flór et al., *Phys. Fluids* **30**, 084103, 2018.
- [2] Leclercq et al. *arXiv*:1609.02886, 2020.
- [3] Melettia et al., *arXiv*:2004.07112, 2020.
- [4] Lopez and Marques, *J. Fluid Mech.* **890**, 303, 2020.
- [5] Leclercq, Melettia et al., *arXiv*:1609.02886, 2020.
- [6] Lopez and Marques, *J. Fluid Mech.* in press, 2021.



## Parabolic trough collectors. Fundamentals of heat transfer applied to solar thermal energy

L. PARRAS<sup>1</sup>, J.J. SERRANO-AGUILERA<sup>1</sup>, F.J.  
BLANCO-RODRIGUEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Málaga (Spain) E-mails: lparras@uma.es,  
jj.serragui@uma.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de fluidos, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail:  
fbrodriguez@us.es.*

### Resumen

Solar thermal energy has undergone major development in recent years. The most widely used technologies are central receiver solar towers and parabolic trough collectors (PTC)[1]. The latter technology has great advantages due to its higher optical and thermal efficiency, but, despite being a well-proven technique, it presents certain problems inherent to the manufacturing and durability of some critical elements in the system. They are generally composed of an absorber tube surrounded by a glass cover and in the intermediate space, a vacuum is created to minimize thermal losses by convection[2]. The absorber tube is located at the focal line of a parabolic mirror that concentrates sun's rays. To predict the thermal behavior of this type of system, ray-tracing techniques are used to determine the thermal load and accurate correlations are also needed to calculate the convective heat transfer. Also, the original design shows some problems such as the selective coating applied on the absorber surface, whose thermal performance decays with time. Besides, the metal-glass welding are also a significant weak spot, which due to the thermal expansion can cause the partial or total loss of the vacuum in the aforementioned annulus. In this work we present the results of the modeling of this type of systems in different working configurations, as well as a new design proposal to improve the thermal transfer in this type of systems.

### Referencias

- [1] A. Fernández-García, E. Zarza, L. Valenzuela, M. Pérez, *Parabolic-trough solar collectors and their applications*, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 14(7), 1695-1721 (2010).
- [2] J.J. Serrano-Aguilera, F.J. Blanco-Rodriguez, L. Parras *Global stability analysis of the natural convection between two horizontal concentric cylinders*, International Journal of Heat and Mass Transfer 172, 121151 (2021).

## Learning of Constitutive Equations for Multiscale Simulation of Dilute Polymeric Solutions using a GENERIC-guided approach

DAVID NIETO SIMAVILLA<sup>1</sup>, PEP ESPAÑOL<sup>2</sup>, MARCO ELLERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>BCAM, Alameda de Mazarredo 14, 48009 Bilbao (Spain). E-mails: dnieto@bcamath.org, melloero@bcamath.org.

<sup>2</sup> UNED, Apartado 60141, 28080 Madrid (Spain). E-mail: pep@fisfun.uned.es.

### Resumen

Polymer solutions subjected to flow display complex viscoelastic behaviour due to the polymeric stress induced by the orientation and stretching of chains. As a result, the simulation of polymer solutions requires a multiscale approach to avoid the high computational cost of resolving the materials' microscopic details. In macroscopic simulations the balance equations of mass, momentum and energy are integrated to describe the flow. Viscoelasticity at this level can be included through a closure constitutive equation for the polymeric stress. A novel approach is to use Machine Learning (ML) on microscopic simulations (or experimental) data to efficiently obtain the stress at the conditions for a macroscopic simulation. However, the choice of the learned relationship between some macroscopic property (i.e., viscosity, stress, stress derivative, etc.) and the flow parameters (strain, strain rate, velocity gradient, etc.) is somewhat arbitrary and results in a black box connection between microscale and macroscale simulations. This approach works well for simple flows (homogeneous and straightforward geometry) but problems arise when simulating realistic flow processes at the macroscale. We present a general data-driven constitutive learning approach guided by GENERIC, where the key hypothesis is that the local chain conformation tensor  $\mathbf{c}$  is sufficient to describe the rheology of the system. For our microscopic systems we use SDPD model particles [1, 2] with FENE springs used to create chains and introduce viscoelasticity [3, 4]. Using this physics guided approach the polymeric stress - as a function of the conformation tensor - is the only to-be-learned constitutive relation for the macroscopic model. An analysis of the eigenspace of  $\mathbf{c}$  allows for separation of the possible errors in the reversible and irreversible parts of its evolution equation. On one hand, we show that information learned from microscopic simulation data rests on the polymeric entropy, a function of the eigenvalues of  $\mathbf{c}$  alone. On the other hand, the evolution of the eigenvectors of  $\mathbf{c}$  allows us to check the validity of an

---

upper convected derivative in the reversible part of the evolution equation for  $\mathbf{c}$  - an assumption often taken for granted. We discuss how to apply mix derivatives to introduce non-affine deformation as "slip". Finally, we compare our simulation results with solutions for Oldroyd-B and FENE fluids and find good agreement at low Weissenberg numbers.

## Referencias

- [1] Español, P. and Revenga, M. *Smoothed dissipative particle dynamics* Physical Review E, (2003)
- [2] Ellero, M. and Español, P. *Everything you always wanted to know about SDPD\* (\*but were afraid to ask)*. Applied Mathematics and Mechanics, (2018)
- [3] Vázquez-Quesada, A., Ellero, M. and Español, P. *Smoothed particle hydrodynamic model for viscoelastic fluid with thermal fluctuations*. Physical Review E, (2009)
- [4] Nieto Simavilla, D. and Ellero, M. *Mesoscopic simulations of inertial drag enhancement and polymer migration in viscoelastic solutions flowing around a confined array of cylinders*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, (JNNFM submitted)

## Analysis of a wingtip vortex using Higher Order Dynamical Mode Decomposition

PALOMA GUTIERREZ-CASTILLO<sup>1</sup>, MANUEL GARRIDO MARTIN <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Escuela de Ingenierías Industriales, Universidad de Málaga (Spain). E-mails:  
paloma.gutierrez@uma.es, manolouma@uma.es.*

### Resumen

Wingtip vortices are a key element to take into account in the design of any aerial vehicle and the planning of takeoff and landing operations on large-scale airports. In this project, we study the wingtip vortex generated by a wing model in a controlled environment. Specifically, the flow velocity field measured in the wake of a NACA0012 model is analyzed using Higher Order Dynamical Mode Decomposition (HODMD) [1]. That velocity field was obtained using the PIV technique in a towing tank at University of Málaga at a moderate Reynolds number of 40,000. By using HODMD we were able to extract the modes that capture the dissipation of the vortex and characterize its temporal decay. These modes are crucial for the analysis of any element designed to decrease the vortex intensity. These devices, active and passive, are vital in any modern aeronautical application.

### Referencias

- [1] S. Le Clainche and J. M. Vega, *Higher Order Dynamic Mode Decomposition*, Journal on Applied Dynamical Systems, vol. 0, 2017

## Non-orthogonal computational domains and subcritical stable rotating waves in Taylor-Couette flow

R. AYATS<sup>1</sup>, B. WANG<sup>1</sup>, A. MESEGUER<sup>1</sup>, F. MELLIBOVSKY<sup>1</sup>,  
K. DEGUCHI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Physics, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona 08034 (Spain). E-mails: roger.ayats@upc.edu, baoying.wang@upc.edu, alvaro.meseguer@upc.edu, fernando.mellibovsky@upc.edu.*

<sup>2</sup> *School of Mathematics, Monash University, VIC 3800 (Australia). E-mail: kengo.deguchi@monash.edu.*

### Resumen

The hydrodynamic Taylor-Couette flow, the fluid flow between independently rotating concentric cylinders, has long served as a theoretical, numerical and experimental test bench for the study of centrifugal and shear instability mechanisms. Since Taylor [1] reported the first hydrodynamic instability produced by axisymmetric perturbations, a vast range of secondary nonlinear patterns have been intensively studied [2]. However, the origin of intermittency and its hysteretic effects in the counter-rotation region, i.e. *Spiral Turbulence* or *turbulent spots*, still remain unclear [3].

In this particular region, we identify new families of travelling-rotating waves coexisting with the stable basic laminar profile. Following Deguchi & Altmeyer [4], we capture these waves in suitable sheared computational domains properly aligned with the *spiral turbulence* regime. In our new formulation, the computational domains no longer need to be orthogonal, neither aligned with azimuthal or axial directions. Newton-Krylov together with Arnoldi eigenvalue methods are used to track solutions in the parameter space and monitor their linear stability. For a particular configuration of the computational domain, the aforementioned solutions are stable in a neighbourhood of the saddle node. By slightly increasing the Reynolds number, they undergo a Hopf bifurcation and the generation of new relative periodic orbits, which will be addressed in another talk.

### Referencias

- [1] G. I. Taylor, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **223** (1923), 289-343.
- [2] C. D. Andereck et al., *J. Fluid Mech.*, **164** (1986), 155-183.
- [3] A. Meseguer, F. Mellibovsky, M. Avila, F. Marques, *Phys. Rev. E*, **80** (2009), 046315.
- [4] K. Deguchi et al., *Phys. Rev. E*, **87** (2013), 043017.

# Ferrofluidic Couette flow under the influence of versatile magnetic fields

SEBASTIAN A. ALTMAYER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Castelldefels School of Telecom and Aerospace Engineering (EETAC),  
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) (Spain).  
E-mail: sebastian.andreas.altmeyer@upc.edu.*

**Palabras claves:** Ferrofluid, Taylor-Couette flow, complex systems, flow control

## Resumen

Representing a complex fluid, the field of ferrofluid [1] research developed quickly in different branches of Physics, Chemistry and Engineering since the first successful production of stable ferrofluids in the early 1960s. Their complexity, rich variety of parameters, properties and especially the controllability make them both, very interesting for engineering and medical applications, but at the same time challenging in numerical simulations. Ferrofluids, in absence of an applied magnetic field, behave like an “ordinary fluid” but when a sufficiently strong magnetic field is applied, the ferrofluid flows toward regions of the magnetic field, properties of the fluid such as the viscosity [1, 2] are altered, and the system hydrodynamics can be significantly changed.

In this presentation, I will present the results of numerical simulations considering the Taylor-Couette system [3] as prototypical model system to study pattern formation and bifurcation theory. I will provide an overview of the non-linear system response for different applied magnetic field configurations and magnetic field strengths which lead to very rich dynamics, time-dependent states and multiplicity of solutions. General observation is the fact that any external applied magnetic field (static or time-dependent), regardless it’s orientation *stabilizes* the basic state [4, 5, 6], i.e. the bifurcation thresholds of the primary instabilities are moved to larger control parameters. Additional symmetry breaking magnetic fields, e.g. transversely oriented, render the flow to become *intrinsic three dimensional* and thus significantly modify and increase the flow complexity. The observation of flow pattern reversal with variation in strength of the magnetic field [7] highlights only one of such an effect and the potential to manipulate the underlying flow dynamics. Eventually, moving from static to time-dependent, i.e. alternating magnetic fields, allows to address the huge number of natural and industrial flows, which are subjected to time-dependent boundary conditions with the possibility of flow control. For instance, depending both parameters, modulation amplitude and modulation frequency, the non-linear system response can be triggered in a simple and efficient way to be supercritical or subcritical [8].

## Referencias

- [1] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, 1985.
- [2] R. E. Rosensweig, R. Kaiser, and G. Miskolczy, *Viscosity of magnetic fluid in a magnetic field*, J. Coll. Int. Sci., **29** 4, (1969).
- [3] G. I. Taylor, *Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders*. Philos. Trans. R. Soc. London A **223**, 289 (1923).
- [4] M. Niklas, *Influence of magnetic fields on Taylor vortex formation in magnetic fluids*. Z. Phys. B **68**, 493 (1987).
- [5] S. Altmeyer, C. Hoffmann, A. Leschhorn, and M. Lücke, *Influence of homogeneous magnetic fields on the flow of a ferrofluid in the Taylor-Couette system*. Phys. Rev. E **82**, 016321 (2010).

- 
- [6] M. Reindl and S. Odenbach, *Effect of axial and transverse magnetic fields on the flow behavior of ferrofluids featuring different levels of interparticle interaction*. Phys. Fluids **23**, 093102 (2011).
- [7] S. Altmeyer, Y. Do, and Ying-Cheng Lai, *Magnetic field induced flow pattern reversal in a ferrofluidic Taylor-Couette system*, Scientific Reports **5**, 18589 (2015).
- [8] S. Altmeyer, *On the ridge of instability in ferrofluidic Couette flow via alternating magnetic field*. Scientific Reports **11**, 4705 (2021).

## A symmetry approach to wall turbulence

S. HOYAS<sup>1</sup>, M. OBERLACK<sup>2</sup>, F.ÁLCANTARA-ÁVILA<sup>1</sup>, S.  
KRAHEBERGER<sup>2</sup>, J. LAUX<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Universidad de Córdoba (Spain).*

*E-mails: serhocal@mot.upv.es, fraalvi@alumni.upv.es.*

<sup>2</sup> *Technical University of Darmstadt, Chair of Fluid Dynamics,*

*Otto-Bernd-Straße 2, 64287 Darmstadt, Germany,*

*E-mail: oberlack@fdy.tu-darmstadt.de, kraheberger@fdy.tu-darmstadt.de, jl1996@gmx.de.*

### Resumen

The calculation of turbulence statistics is considered the key unsolved problem of fluid mechanics, i.e., precisely the computation of arbitrary statistical velocity moments from first principles alone. Using symmetry theory, we derive turbulent scaling laws for moments of arbitrary order in two regions of a turbulent channel flow. Beside the classical scaling symmetries of space and time, the key symmetries for the present work reflect the two well-known characteristics of turbulent flows: non-gaussianity and intermittency. To validate the new scaling laws we made a new simulation at an unprecedented friction Reynolds number of 10000, large enough to test the new scaling laws. Two key results appear as an application of symmetry theory, which allowed us to generate symmetry invariant solutions for arbitrary orders of moments for the underlying infinite set of moment equations. First, we show that in the sense of the generalization of the deficit law all moments of the streamwise velocity in the channel centre follow a power-law scaling, with exponents depending on the first and second moments alone. Second, we show that the logarithmic law of the mean streamwise velocity in wall bounded flows, is indeed a valid solution of the moment equations, and further, all higher moments in this region follow a power law, where the scaling exponent of the second moment determines all higher moments. With this we give a first complete mathematical framework for all moments in the log-region, which was first discovered about 100 years ago [1].

### Referencias

- [1] M. Oberlack, S. Hoyas, S. Kraheberger, F. Álcantara-Ávila, and J. Laux, Turbulence statistics of arbitrary moments of wall-bounded shear flows: A symmetry approach, *Physical Review Letters*. Accepted for publication (2021).



## Modelos de orden reducido basados en principios físicos

A. CORROCHANO<sup>1</sup>, R. ABADÍA-HEREDIA<sup>1</sup>, C. AMOR<sup>1,2</sup>, E. MUÑOZ<sup>1</sup>, E. LAZPITA<sup>1</sup>, L. MATA-CERVERA<sup>1</sup>, S. LE CLAINCHE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *E.T.S.I. Aeronáutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid (Spain).*

<sup>2</sup> *Okinawa Institute of Science and Technology (Japan).*

*E-mail: soledad.leclainche@upm.es.*

### Resumen

Combatir el cambio climático es uno de los mayores retos a los que debe enfrentarse nuestra sociedad. Para atenuar sus efectos, es necesario buscar distintas alternativas y desarrollar nuevas tecnologías que sean capaces de reducir la contaminación atmosférica. La mecánica de fluidos es una ciencia con múltiples aplicaciones que se pueden usar con este fin: mejorando la eficiencia en sistemas de combustión, estudiando formas para reducir la polución del aire en flujos urbanos, mejorando diseños aeronáuticos y haciéndolos más eficientes, etcétera. Para estudiar estos problemas se propone desarrollar modelos de orden reducido (ROM) basados en principios físicos utilizando (i) descomposiciones modales (descomposición de valores singulares - SVD [1], descomposición de modos dinámicos de orden superior - HODMD [2]) y (ii) herramientas de aprendizaje automático (redes neuronales) combinadas con dichas descomposiciones [3, 4]. En este trabajo se aplicarán dichas técnicas para resolver los problemas mencionados anteriormente, y además se presentan nuevas estrategias para desarrollar ROMs eficientes y precisos.

### Referencias

- [1] Sirovich L. *Turbulence and the dynamics of coherent structures. Parts I - III*, Quart. Appl. Math., 45(3):561-571, 1987.
- [2] Le Clainche S., Vega J.M. *Higher order dynamic mode decomposition*, SIAM J. Appl. Dyn. Sys., 16(2):882-925, 2017.
- [3] Abadía-Heredia, R., López-Martín, M., Carro, B., Arribas, J.I., Pérez, J.M., Le Clainche, S., *A predictive hybrid reduced order model based on proper orthogonal decomposition combined with deep learning architectures*, Exp. Syst. Appl. , 2021.
- [4] López-Martín, M., Le Clainche, S., Carro, B. *Model-free short-term fluid dynamics estimator with a deep 3D-convolutional neural network*, Exp. Syst. Appl., 177:114924, 2021.

## MÉTODOS ITERATIVOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO LINEALES

### ORGANIZADORES

**Sergio Amat** (Universidad Politécnica de Cartagena)

**José Antonio Ezquerro** (Universidad de La Rioja)

**Miguel Ángel Hernández** (Universidad de La Rioja)

**Jean-Claude Yakoubsohn** (Université Paul Sabatier)

## Cómo mejorar la accesibilidad del método de Newton para operadores con primera derivada Lipschitz centrada

J. A. EZQUERRO<sup>1</sup>, M. A. HERNÁNDEZ-VERÓN<sup>1</sup>,  
Á. A. MAGREÑÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Spain). E-mails: jezquer@unirioja.es, mahernan@unirioja.es, angel-alberto.magrenan@unirioja.es.*

### Resumen

Como la accesibilidad del método de Newton es muy restrictiva bajo una condición Lipschitz centrada para la primera derivada del operador involucrado en la resolución de una ecuación no lineal, construimos un método iterativo predictor-corrector con el objetivo de mejorar la accesibilidad del método de Newton. Para ello, predecimos una buena aproximación inicial mediante el método de Newton modificado que posteriormente corregimos con el método de Newton. Justificaremos dicha construcción mostrando que la accesibilidad del método modificado de Newton es mucho mejor que la del método de Newton bajo condiciones Lipschitz centradas para la primera derivada del operador. Ilustramos el estudio con un problema de valores en la frontera.

### Referencias

- [1] I. K. Argyros and S. Hilout, Weaker conditions for the convergence of Newton's method, *J. Complexity*, 28 (2012) 364–387.
- [2] J. A. Ezquerro and M. A. Hernández-Verón, How to improve the domain of parameters for Newton's method, *Appl. Math. Lett.*, 48 (2015) 91–101.
- [3] J. A. Ezquerro and M. A. Hernández-Verón, *Mild differentiability conditons for Newton's method in Banach spaces*, Birkhäuser, Cham, 2020.
- [4] J. M. Gutiérrez and M. A. Hernández, Newton's method under weak Kantorovich conditions, *IMA J. Numer. Anal.*, 20 (2000) 521–532.

## Nueva estrategia en el diseño de métodos iterativos para aproximar raíces múltiples

A. CORDERO<sup>1</sup>, F.I. CHICHARRO<sup>1</sup>, B. NETA<sup>2</sup> J.R. TORREGROSA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institute for Multidisciplinary Mathematics, Universitat Politècnica de València, València (Spain).*  
*E-mails: acordero@dma.upv.es, frachilo@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es.*

<sup>2</sup> *Naval Postgraduate School, Department of Applied Mathematics, Monterey, (USA). E-mail:*  
*byneta@gmail.com.*

### Resumen

Es bien sabido que el método de Schröder [1]

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'(x_k)^2 - f(x_k)f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

es capaz de converger cuadráticamente a la solución múltiple (de multiplicidad  $m$ ) de una ecuación no lineal.

La principal ventaja del esquema de Schröder es su independencia del conocimiento de la multiplicidad de la función no lineal, respecto al método de Newton modificado para raíces múltiples [1],

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

donde  $m$  es la multiplicidad de  $\alpha$ . Este esquema es cuadráticamente convergente y por lo tanto óptimo, en el sentido de la conjetura de Kung-Traub [2].

Nuestro objetivo es aumentar la eficiencia del esquema SM1, manteniendo su capacidad para encontrar múltiples raíces de multiplicidad  $m$  y, por otro lado, emplear más de una iteración previa. Así pues, proponemos un esquema iterativo con memoria para estimar raíces múltiples de multiplicidad desconocida.

### Referencias

- [1] E. Schröder, *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math. Ann. 2 (1870) 317–365.
- [2] H.T. Kung, J.F. Traub, *Optimal order of one-point and multipoint iteration*, J. Assoc. Comput. Mach. 21 (1974) 643–651.

## Métodos iterativos eficientes para la resolución de ecuaciones no lineales

FRANCISCO I. CHICHARRO<sup>1</sup>, ALICIA CORDERO<sup>1</sup>, JOSÉ J. PADILLA<sup>2</sup>, JUAN R. TORREGROSA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València, València (Spain).*

*E-mails: {frachilo,acordero,jrtorre}@mat.upv.es.*

<sup>2</sup> *Departamento de Ingeniería Civil, Universidad Católica San Antonio de Murcia, Murcia (Spain).*

*E-mail: jjpadilla@ucam.edu.*

### Resumen

Un problema que se presenta con frecuencia en diferentes ámbitos de las ciencias es la resolución de la ecuación no lineal  $f(x) = 0$ , donde  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En ocasiones, dichos problemas no tienen una solución analítica al alcance, pero sí una solución aproximada. Los métodos numéricos y, en concreto, los métodos iterativos, son capaces de aproximar la solución del problema.

Los métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales se pueden clasificar a partir de diferentes criterios, tales como la eficiencia computacional  $I$  o el orden de convergencia  $p$ .

En este trabajo, haciendo uso de la técnica de funciones peso [1], se presenta un nuevo esquema que mejora las prestaciones del método de Newton en cuanto a la eficiencia computacional y al orden de convergencia. La familia multipaso introducida tiene orden de convergencia cuatro, y es óptima bajo la conjetura de Kung y Traub [2]. A través del análisis dinámico mostramos qué elementos de la familia tienen una mejor estabilidad. Por último, aplicamos la familia de métodos sobre diferentes ecuaciones no lineales para garantizar su validez.

### Referencias

- [1] C. Chun, B. Neta, J. Kozdon and M. Scott. Choosing weight functions in iterative methods for simple roots. *Appl. Math. Comput.*, 227 (2014), 788–800.
- [2] H.T. Kung and J.F. Traub. Optimal order of one-point and multipoint iteration. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 89 (2012), 643–651.

## Segundo paso en el estudio dinámico del método de Schröder: polinomios de tercer grado

J. M. GUTIÉRREZ<sup>1</sup>, V. GALILEA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Spain).*  
*E-mails: jnguti@unirioja.es, victor.galilea@unirioja.es.*

### Resumen

El conocido como método de Schröder es un proceso iterativo para resolver ecuaciones no lineales que fue introducido en un trabajo que publicó el mismo Ernst Schröder [2] en 1870 y cuya versión traducida al inglés puede verse en [3], La dinámica de este método aplicado a polinomios con 2 raíces distintas (con sus multiplicidades) ha sido estudiada detalladamente por Galilea y Gutiérrez en [1]. La idea de este trabajo es alcanzar un siguiente nivel de complejidad, estudiando la aplicación del método a polinomios cúbicos, donde usaremos herramientas como la conjugación topológica [1] o el plano de parámetros ([3], [4]). Analizaremos la existencia de ciclos atractores que no contienen a las raíces y compararemos los resultados con otros estudios ya realizados para otros métodos, como por el ejemplo, el de Newton, el de Halley o el de Chebyshev.

### Referencias

- [1] S. Amat, S. Busquier y S. Plaza, *Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view*, SCIENTIA, Series A: Math. Sciences, Vol. 10 (2004), 3–35.
- [2] V. Galilea y J. M. Gutiérrez, *A Characterization of the Dynamics of Schröder's Method for Polynomials with Two Roots*, Fractal and Fractional, Vol. 5: 25 (2021), 1 – 15.
- [3] J. M. Gutiérrez y J. L. Varona, *Superattracting extraneous fixed points and  $n$ -cycles for Chebyshev's method on cubic polynomials*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, Vol. 19:54 (2020), 1 – 23.
- [4] G. E. Roberts and J. Horgan-Kobelski, *Newton's versus Halley's methods: a dynamical systems approach*, Int. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng. Vol. 24 (2004), 3459–3475.
- [5] E. Schröder, *Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Mathematische Annalen, Vol. 2 (1870), 317–365.
- [6] G. W. Stewart, *On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations* (English translation of Schröder's original paper), College Park, MD: University of Maryland, Institute for Advanced Computer Studies, Department of Computer Science, (1993).

## Métodos iterativos con memoria para aproximar la solución de ecuaciones matriciales no lineales

JUAN R. TORREGROSA<sup>1</sup>, ALICIA CORDERO<sup>1</sup>, NEUS GARRIDO<sup>2</sup>  
PAULA TRIGUERO-NAVARRO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Matemáticas Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València, (Spain). E-mails: jrtorre@mat.upv.es, acordero@mat.upv.es, ptrinav@posgrado.upv.es.*

<sup>2</sup> *ESI Tecnología, Universidad Internacional de La Rioja, (Spain). E-mail: neus.garrido@unir.net.*

### Resumen

En este trabajo presentamos diferentes métodos iterativos con memoria para aproximar la solución de la ecuación matricial no lineal  $F(X) = X^{-1} - A = 0$ , donde  $A$  es una matriz cuadrada,  $n \times n$ , no singular. En concreto, presentamos un esquema tipo Steffensen cuya expresión iterativa es

$$X_{k+1} = X_{k-1} + (X_{k-1}AX_k - X_k)(X_kA - 2I), \quad k = 0, 1, \dots,$$

donde  $X_{-1}$  y  $X_0$  son aproximaciones iniciales y  $I$  denota la matriz identidad de tamaño  $n \times n$ .

Por otra parte, diseñamos un esquema tipo Kurchatov, con expresión iterativa

$$X_{k+1} = 2X_{k-1} - (2X_{k-1} - X_k)AX_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Se demuestra la convergencia cuadrática del método tipo Steffensen y la superlineal del esquema tipo Kurchatov.

Además, pequeñas modificaciones permiten utilizar estos métodos iterativos para aproximar diferentes pseudoinversas de matrices rectangulares como la Moore-Penrose,  $A^\dagger$ , o la inversa Drazin  $A^D$ .

Diferentes test numéricos con matrices de gran tamaño permiten confirmar los resultados teóricos y comparar los esquemas propuestos con otros conocidos como el de Newton-Schulz [1], secante [2], etc.

### Referencias

- [1] N.J. Higham, *Functions of matrices: Theory and Computation*, SIAM, Philadelphia, 2008.
- [2] S. Artidiello, A. Cordero, J.R. Torregrosa, M. Vassileva. *Generalized inverses estimations by means of iterative methods with memory*. Mathematics, 2020, 8, 2; doi:10.3390/math8010002.

## Derivative-free iterative processes based on Kurchatov method

M.A. HERNÁNDEZ-VERÓN<sup>1</sup>, Á. A. MAGREÑÁN<sup>1</sup>,  
EULALIA MARTÍNEZ<sup>2</sup>, EVA G. VILLALBA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de la Rioja, E-mails: mahernan@unirioja.es, alberto.magrenan@gmail.com.*

<sup>2</sup> *Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València. València, Spain. eumarti@mat.upv.es.*

### Resumen

In this work, a uniparametric generalization of the iterative method due to Kurchatov is presented. The iterative model presented is derivative-free and approximates the solution of nonlinear equations when the operator is non-differentiable. As the accessibility of the Kurchatov method is usually a problem in the application of the method, since the set of initial guesses that guarantees the convergence of the method is small, the main objective of this work is to improve the Kurchatov iterative method in its accessibility while maintaining and even increasing its speed of convergence. For this purpose, we introduce a variable parameter in the iterative function of the Kurchatov method, that allows us to get a better approximation of the derivative by using a symmetric uniparametric first-order divided difference operator.

Moreover, we perform a complex dynamic study that corroborates the improvements in the accessibility region. In addition, a complete analysis of the local and semilocal convergence is established for the new uniparametric iterative method. Finally, we apply the theoretical results to solve a nonlinear integral equation showing the usefulness of the work.

### Referencias

- [1] I.K. Argyros and S. George, Improved convergence analysis for the Kurchatov method, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 22, 1 (2017), pp. 41-58
- [2] M. A. Hernández and M. J. Rubio, Semilocal convergence of the Secant method under mild convergence conditions of differentiability, *Comput. Math. Appl.*, 44 (2002), 277–285.
- [3] V. A. Kurchatov, On a method of linear interpolation for the solution of functional equations, (Russian) *Dolk. Akad. Nauk SSSR*, 198, 3 (1971), 524–526; translation in *Soviet Math. Dolk.*, 12 (1971), 835–838.



## Análisis de convergencia de una nueva familia de métodos iterativos de orden cuatro para aproximar raíces múltiples de ecuaciones no lineales

ALICIA CORDERO<sup>1</sup>, NEUS GARRIDO<sup>2</sup>, JULISSA H. JEREZANO<sup>2</sup>,  
JUAN R. TORREGROSA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto de Matemáticas Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València, (Spain). E-mails: acordero@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es, .*

<sup>2</sup> *Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, Universidad Internacional de La Rioja, (Spain). E-mails: neus.garrido@unir.net, julissajerezano@gmail.com.*

### Resumen

Los métodos iterativos permiten aproximar una raíz múltiple  $r_m$  con multiplicidad  $m > 1$  de la ecuación no lineal  $f(x) = 0$ , donde  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica en un entorno de  $r_m$ . Los esquemas iterativos para resolver este tipo de problemas no son tan eficientes como para raíces simples (ver [1]) y se han desarrollado pocos métodos en la literatura más reciente. Por ejemplo, el conocido método de Newton converge cuadráticamente cuando las raíces de la ecuación no lineal son simples, pero para raíces múltiples tiene solo convergencia lineal. En su lugar, se tiene el método de Newton modificado (también conocido como método de Rall [2]) dado por

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

cuya convergencia es cuadrática y requiere conocer previamente la multiplicidad  $m$ .

En este trabajo proponemos una familia iterativa uniparamétrica de dos pasos y orden cuatro para aproximar raíces múltiples de ecuaciones no lineales. Siguiendo las premisas de [3], la familia desarrollada utiliza una función peso en el segundo paso de su estructura iterativa. Asimismo, analizaremos para valores concretos de  $m$  la estabilidad de los miembros de la familia utilizando herramientas de dinámica compleja.

### Referencias

- [1] S. Amat, S. Busquier, *Advances in iterative methods for nonlinear equations*, Springer, 2016.
- [2] J.F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [3] M. Kansal, V. Kanwar, S. Bhatia. *On Some Optimal Multiple Root-Finding Methods and their Dynamics*. Applications and Applied Mathematics: An International Journal, 2015, 10(1): 349–367.

## Improving the order of accuracy of WENO schemes: a general progressive strategy

S.AMAT<sup>1</sup>, A. BAEZA<sup>2</sup>, J. RUIZ<sup>1</sup>, C-W. SHU<sup>3</sup>, D. YÁÑEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena (Spain).*

*E-mails: sergio.amat@upct.es, juan.ruiz@upct.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Valencia (Spain). E-mail: Dionisio.Yanez@uv.es,  
Antonio.Baeza@upct.es.*

<sup>3</sup> *Division of Applied Mathematics, Brown University (USA). E-mails: chi-wang\_shu@brown.edu.*

### Resumen

This talk is devoted to the construction and analysis of new nonlinear optimal weights for weighted ENO (WENO) interpolation capable of raising the order of accuracy close to discontinuities. The new nonlinear optimal weights are constructed using a strategy inspired by the original WENO algorithm, and they work very well for corner or jump singularities, leading to optimal theoretical accuracy. We consider both point-values and cell-averages frameworks. Finally, we present some applications.

### Referencias

- [1] S. Amat, J. Ruiz and C-W. Shu *On new strategies to control the accuracy of WENO algorithms close to discontinuities*, SIAM J. Numer. Anal. 57 (2019), no. 3, 1205-1237.
- [2] S. Amat, J. Ruiz, C-W. Shu and D. Yáñez *A new WENO-2r algorithm with progressive order of accuracy close to discontinuities*, SIAM J. Numer. Anal. 58 (2020), no. 6, 3448-3474.

## Primeros pasos en el estudio dinámico del método de Schröder

V. GALILEA<sup>1</sup>, J. M. GUTIÉRREZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Spain).  
E-mails: jnguti@unirioja.es, victor.galilea@unirioja.es.

### Resumen

En este trabajo presentamos un primer estudio, desde el punto de vista dinámico, del método de Schröder (véase [2] o [3]) para resolver ecuaciones polinómicas definidas en el plano complejo  $p(z) = 0$ . La expresión de este método iterativo es, para  $z_0$  dado,  $z_{n+1} = S_p(z_n)$ ,  $n \geq 0$ , donde la función racional asociada a este método es de la forma

$$S_p(z) = z - \left( \frac{1}{1 - L_p(z)} \right) \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad L_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}. \quad (1)$$

Se realiza un estudio detallado del comportamiento del método (1) a polinomios de la forma

$$p(z) = (z - a)^m(z - b)^n, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

En concreto, se prueba que las cuencas de atracción de las dos raíces  $a$  y  $b$  son círculos cuyos centros y radio se pueden caracterizar explícitamente en términos de las propias raíces y de sus multiplicidades, como se demuestra en [1].

### Referencias

- [1] V. Galilea y J. M. Gutiérrez, *A Characterization of the Dynamics of Schröder's Method for Polynomials with Two Roots*, *Fractal and Fractional*, Vol. 5: 25 (2021), 1 – 15.
- [2] E. Schröder, *Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, *Mathematische Annalen*, Vol. 2 (1870), 317–365.
- [3] G. W. Stewart, *On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations* (English translation of Schröder's original paper), College Park, MD: University of Maryland, Institute for Advanced Computer Studies, Department of Computer Science, (1993).

**MÉTODOS NUMÉRICOS EN ECUACIONES  
EN DERIVADAS PARCIALES Y APLICACIONES**

ORGANIZADORES

**Francisco Pla Martos** (Universidad de Castilla - La Mancha)  
**Carlos María Parés Madroñal** (Universidad de Málaga)

## Métodos de Lagrange-Galerkin estabilizados

R. BERMEJO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, Universidad Politécnica de Madrid (Spain).*  
*E-mail: rodolfo.bermejo@upm.es.*

### Resumen

El método convencional de Lagrange-Galerkin (LG) se emplea para obtener la solución numérica de las ecuaciones de convección, convección-difusión y Navier-Stokes. La idea principal del método consiste en discretizar en tiempo el operador de convección, que aparece en dichas ecuaciones, a lo largo de las curvas características de dicho operador, para después aplicar a las ecuaciones discretizadas en tiempo el método de Galerkin en el contexto de elementos finitos o volúmenes finitos. Las propiedades más importantes del método LG son: 1) la estabilidad incondicional en la norma  $L^2$ ; 2) la producción de sistemas algebraicos lineales simétricos que son fácilmente resolubles; 3) las constantes que aparecen en el análisis de error son más pequeñas que las de los métodos de discretización temporal convencionales. Como inconvenientes más importantes podemos señalar los siguientes: 1) la generación en cada paso de tiempo de mallados virtuales efímeros que son imágenes del mallado fijo a lo largo de las características; 2) la proyección sobre el mallado fijo del producto interno  $L^2$  de funciones definidas en el mallado fijo y en los mallados virtuales, el cálculo de las integrales asociadas a estos productos internos ha de hacerse con alta precisión porque de otra forma el método puede devenir inestable.

Aunque el método convencional LG puede ser visto como un método "upwind" de alto orden, su disipación numérica inherente no es lo suficientemente alta para eliminar el comportamiento oscilatorio exhibido por la solución numérica cuando la solución exacta presenta gradientes muy altos o discontinuidades. Con vistas a paliar o suprimir el efecto desestabilizante de las oscilaciones, voy a presentar dos formulaciones nuevas del método LG. La primera es el llamado **método LG estabilizado por proyección local**, que consiste en añadir al método convencional un término estabilizador de las fluctuaciones del gradiente de la solución numérica en las escalas no resueltas, este término es simétrico y de naturaleza local. La segunda formulación, llamada **método LG captador de discontinuidades**, consiste en añadir al método LG un término no lineal de viscosidad artificial capaz de suprimir las oscilaciones. Este nuevo método resuelve con alta precisión las discontinuidades y fuertes variaciones del gradiente de la solución y es también estable en la norma suprema. Estas cualidades hacen que el nuevo método pueda ser aplicado para resolver leyes de conservación no lineales.

---

## Referencias

- [1] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
- [2] J. Simon. *Compact sets in  $L^p(0, T; B)$* . Ann. Mat. Pura Appl., sér. IV, CXLVI (1987), 65–96.

## Simulación numérica del flujo de soluciones poliméricas en geometrías simples

JOSE M. LÓPEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Física, Universidad Politécnica de Cataluña. E-mail: jose.manuel.lopez.alonso@upc.edu.

### Resumen

La adición de polímeros, incluso en cantidades muy pequeñas, a un fluido Newtoniano modifica sustancialmente las propiedades de dicho fluido, dando lugar a dinámicas sorprendentes y en muchos casos contraintuitivas. Por ejemplo, si se añaden polímeros a un flujo turbulento que circula por una tubería, éstos interactúan con las estructuras turbulentas y pueden reducir las pérdidas por fricción hasta en un 80 % [1]. En otros casos, sin embargo, los polímeros causan el efecto opuesto: inducen inestabilidad y turbulencia a través de mecanismos elásticos [2].

El creciente interés por entender este tipo de fenómenos ha motivado un desarrollo sustancial de los modelos empleados para incorporar la dinámica de polímeros a las ecuaciones de Navier-Stokes, así como en las metodologías necesarias para resolver su evolución temporal. En esta charla discutiré algunas de estas metodologías y mostraré algunos de mis trabajos recientes, dónde he logrado simular con gran precisión observaciones experimentales de flujos de soluciones poliméricas a través de tuberías y en sistemas anulares con rotación [3, 4, 5].

### Referencias

- [1] Toms, B. *Observation on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers*. Proc. Intl. Rheological Congress 2, 135\200\223141 (1948).
- [2] Samanta, Devranjan et al. *Elasto-inertial turbulence*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* vol. 110,26 (2013).
- [3] GH Choueiri, JM Lopez, B Hof. *Exceeding the asymptotic limit of polymer drag reduction*. *Physical Review Letters* 120 (12), 124501 (2018).
- [4] JM Lopez, GH Choueiri, B Hof. *Dynamics of viscoelastic pipe flow at low Reynolds numbers in the maximum drag reduction limit*. *Journal of Fluid Mechanics* 874, 699-719 (2019).
- [5] GH Choueiri, JM Lopez, A Varshney, S Sankar, B Hof. *Experimental observation of the origin and structure of elasto-inertial turbulence*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* (2021, Accepted)

## Un modelo de reducción de orden Galerkin/POD basado en autofunciones de iterantes temporales no convergentes

J. CORTÉS<sup>1</sup>, H. HERRERO<sup>1</sup>, F. PLA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Castilla- La Mancha, Ciudad Real (Spain). E-mails: [jesus.cortes@uclm.es](mailto:jesus.cortes@uclm.es), [henar.herrero@uclm.es](mailto:henar.herrero@uclm.es), [francisco.pla@uclm.es](mailto:francisco.pla@uclm.es).*

### Resumen

Se describe un modelo de reducción de orden para estudiar el diagrama de bifurcación y la estabilidad —cuando varía el número de Rayleigh  $R$ — en el problema de Rayleigh-Bénard en un dominio rectangular con número de Prandtl grande ([2]).

El modelo de reducción de orden presentado es un esquema Galerkin basado en un proceso POD (Proper Orthogonal Decomposition, ver [1]) donde los *snapshots* tomados son autofunciones de iterantes temporales no convergentes, calculados en un único valor de  $R$ .

Cada rama del diagrama de bifurcación y su correspondiente estabilidad se calculan a partir de un único valor del número de Rayleigh. Además, el coste computacional se reduce drásticamente respecto a otros modelos.

### Referencias

- [1] F. Pla, H. Herrero and J.M. Vega. *A flexible symmetry-preserving Galerkin/POD reduced order model applied to a convective instability problem*. Computers and Fluids 119, 162-175, 2015.
- [2] F. Pla, A.M. Mancho, and H. Herrero, *Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio*, Physica D, 238 (2008), pp. 572–580.



## Un algoritmo de tipo volúmenes finitos para el estudio del calentamiento en circuitos eléctricos de fabricación aditiva

J.C. JORGE<sup>1</sup>, I. ROYO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Estadística, Informática y Matemáticas, UPNA (Spain). E-mails: jcyjorge@unavarra.es, issac.royo@unavarra.es.*

### Resumen

El reciente desarrollo de la fabricación aditiva ha provocado una revolución dentro del tejido industrial por ser una tecnología competitiva que puede abaratar costes, reducir tiempos de fabricación y acortar plazos de entrega en piezas con una complejidad elevada. Más recientemente, se está estudiando la posibilidad de imprimir piezas con una funcionalidad diferente a las clásicas: estética o estructural; ese es el caso de la impresión electrónica 3D, entre otros. En esta dirección, dentro de un proyecto colaborativo con NAITEC, hemos diseñado, implementado y validado un método numérico de tipo volúmenes finitos para la simulación de la evolución de la temperatura en sólidos heterogéneos con forma de prisma rectangular, en los que alguno de sus componentes conduce la electricidad. Los resultados numéricos obtenidos han sido contrastados con ensayos realizados en laboratorio usando circuitos eléctricos fabricados con impresoras 3D para este propósito. Mostraremos órdenes numéricos de convergencia del algoritmo que hemos implementado y comparaciones entre las simulaciones numéricas y los ensayos de laboratorio.

### Referencias

- [1] H.K. Versteeg & W. Malalasekera, *An introduction to Computational Fluid Mechanics. The Finite Volume Method*. Prentice Hall, Essex, England 1995.
- [2] A. Quarteroni, A. Valli *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1997.

## Modelos no hidrostáticos de tipo aguas someras

T. MORALES DE LUNA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Córdoba (Spain). E-mail: tomas.morales@uco.es.

### Resumen

Uno de los modelos más conocidos para la simulación de flujos geofísicos es el formado por las llamadas *ecuaciones de aguas someras* o *ecuaciones de Shallow Water* (en lo sucesivo SWE). SWE suele ser una buena aproximación de las ecuaciones de Navier-Stokes cuando la dimensión espacial horizontal es muy superior a la vertical. Sin embargo, SWE no tienen en cuenta efectos asociados a la dispersión de las ondas.

En los últimos años ha habido un gran interés en el desarrollo de modelo que sean relativamente simples, desde el punto de vista matemático, pero que incluyan estos efectos dispersivos. De esta forma, podemos encontrarnos modelos de tipo Boussinesq [1] que incluyen derivadas de orden superior de las variables. Una segunda opción son los llamados modelos no hidrostáticos que consideran una presión no hidrostática en su derivación y que puede interpretarse como estos efectos dispersivos.

Desde el punto de vista numérico, los sistemas no hidrostáticos resultan más sencillos que los de tipo Boussinesq, pues el tratamiento de derivadas de orden superior puede conllevar ciertas dificultades. No obstante, cabe citar que los modelos de tipo Boussinesq tienen una cierta tradición y son muy conocidos y utilizados en el ámbito ingenieril.

En un trabajo reciente [2] se demostró cómo de hecho ambas aproximaciones son equivalentes. Los sistemas más conocidos de tipo Boussinesq pueden reescribirse en una formulación no hidrostática. Esto tiene sus ventajas, pues uno puede a su vez proponer una estrategia numérica común para todos estos modelos.

Nos proponemos aquí revisar este tema, haciendo un pequeño resumen de los principales modelos dispersivos, su escritura no hidrostática y su aproximación mediante el método de volúmenes finitos.

### Referencias

- [1] J. Boussinesq. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 55–108, 1872.
- [2] C. Escalante and T. Morales de Luna. A general non-hydrostatic hyperbolic formulation for boussinesq dispersive shallow flows and its numerical approximation. *Journal of Scientific Computing*, 83(3):62, June 2020.

## On a finite volume algorithm using the Immersed Interface Method

S. AMAT<sup>1</sup>, Z. LI<sup>2</sup>, J. RUIZ<sup>1</sup>, C-W. SHU<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, Universidad Politécnica de Cartagena (Spain).*

*E-mails: sergio.amat@upct.es, juan.ruiz@upct.es.*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, NC State University (USA). E-mails: zhilin@math.ncsu.edu.*

<sup>3</sup> *Division of Applied Mathematics, Brown University (USA). E-mails: chi-wang\_shu@brown.edu.*

### Resumen

This talk is devoted to the approximation of conservation laws. We propose a finite volume method using the Immersed Interface Method (IIM). The IIM can be used as an accurate interpolation to reconstruct the fluxes in Conservation Laws. The results obtained improve the results given by Harten's ENO-Subcell Resolution algorithm for high resolution grids. The error is reduced to one half of the one obtained by ENO-SR.

### Referencias

- [1] S. Amat, Z. Li and J. Ruiz *On an new algorithm for function approximation with full accuracy in the presence of discontinuities based on the immersed interface method*, J. Sci. Comput. 75 (2018), no. 3, 1500-1534.
- [2] A. Harten *ENO schemes with subcell resolution*, J. Comput. Phys. 83 (1989), no. 1, 148-184.

# Una técnica para incorporar valores frontera dependientes del tiempo en problemas de ondas semilineales usando métodos de splitting

A.M. PORTILLO<sup>1</sup>, I. ALONSO-MALLO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid (Spain). E-mail: ana.portillo@uva.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid (Spain). E-mail: isaias@mac.uva.es.

## Resumen

El problema de valor inicial con valores de contorno dependientes del tiempo asociado a una ecuación de onda semilineal se aproxima mediante el método de líneas. La integración temporal se realiza mediante un método explícito obtenido a partir de un esquema de splitting de orden arbitrario. Proponemos una técnica para incorporar los valores de frontera que es barata de implementar. Probamos la consistencia y la convergencia, con el mismo orden del método de splitting, de la discretización completa realizada con esta técnica. Los experimentos numéricos muestran que la elección que proponemos de los valores frontera funciona con más precisión que la obtenida de forma estándar.

## Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo, I.; A.M. Portillo, *Integrating Semilinear Wave Problems with Time-Dependent Boundary Values Using Arbitrarily High-Order Splitting Methods*, Mathematics (2021) 9, 1113.
- [2] S. Blanes; F. Casas; A. Murua, *On the linear stability of splitting methods*, Found. Comp. Math. (2008) 8, 357–393.
- [3] R.I. McLachlan; G.R. Quispel, *Splitting methods*, Acta Numerica (2002), 11, 341–434.

# Cómo evitar la reducción de orden cuando métodos Runge-Kutta explícitos exponenciales integran problemas de valor inicial y de frontera

B. CANO<sup>1</sup>, M. J. MORETA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid, Valladolid (Spain). E-mail: [bcano@uva.es](mailto:bcano@uva.es).

<sup>2</sup> Dpto. de Análisis Económico y Economía Cuantitativa, Madrid (Spain). E-mail: [mjesusmoreta@ccee.ucm.es](mailto:mjesusmoreta@ccee.ucm.es).

## Resumen

Al igual que ocurre con otros métodos estándar con etapas y otros métodos de tipo exponencial, los métodos Runge-Kutta presentan reducción de orden cuando se integran problemas rígidos, como los que aparecen al discretizar en espacio problemas de valor inicial y de frontera.

Se mostrará una técnica para recuperar el orden clásico de dichos métodos al integrar problemas de reacción difusión [1]. Aunque para problemas con condiciones frontera nulas hay construidos métodos de orden rígido alto, el imponer dichas condiciones impone restricciones al método que puede implicar que el número de etapas sea mayor [2]. El coste computacional añadido entonces sería mayor que el correspondiente a la técnica que se sugiere, que solamente implica añadir algunos términos con información de la frontera en cada ecuación que define el método. Además, con nuestra técnica se consigue evitar también directamente la reducción de orden que aparece con condiciones frontera dependientes del tiempo.

## Referencias

- [1] B. Cano & M. J. Moreta. *How to avoid order reduction when explicit Runge-Kutta exponential methods integrate nonlinear initial boundary value problems*. Remitido para su publicación.
- [2] M. Hochbruck & A. Ostermann, *Explicit exponential Runge-Kutta methods for semilinear parabolic problems*. SIAM J. Num. Anal. **43** (2005), 1069–1090.

## Métodos de volúmenes finitos bien equilibrados de alto orden para sistemas de leyes de equilibrio

I. GÓMEZ BUENO<sup>1</sup>, M.J. CASTRO<sup>1</sup>, C. PARÉS<sup>1</sup>, G. RUSSO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada, Universidad de Málaga (Spain). E-mails: igomezbueno@uma.es, mjcastro@uma.es, pares@uma.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas e Informática, Universidad de Catania (Italia). E-mails: russo@dmi.unict.it.

### Resumen

El objetivo de este trabajo es el desarrollo de esquemas numéricos bien equilibrados de alto orden para sistemas de leyes de equilibrio. En trabajos previos (see [1]), dos de los autores introdujeron una técnica para diseñar métodos numéricos de alto orden para leyes de equilibrio unidimensionales que preservaban todas sus soluciones estacionarias basada en un operador de reconstrucción bien equilibrado (well-balanced). También se introdujo una estrategia que permite modificar cualquier operador de reconstrucción estándar para que sea bien equilibrado. Esta estrategia requiere la resolución en cada celda, en cada paso de tiempo, y para cada variable conservada, de un problema no lineal consistente en encontrar la solución estacionaria cuyo promedio coincida con el promedio dado en la celda. En [2] se presenta un método fully well-balanced (bien equilibrado para todas las soluciones estacionarias), donde los problemas no lineales a resolver en el proceso de reconstrucción se interpretan como problemas de control. Nuestro objetivo ahora es presentar otra implementación general de esta técnica basada en la aplicación de los métodos Runge-Kutta de colocación. Además, se tiene especial cuidado en el análisis de los efectos del uso de fórmulas de cuadratura para calcular los promedios en las celdas y los términos fuente. Se presenta también una técnica general que permite tratar con problemas resonantes. Para comprobar la eficiencia de estos métodos y la propiedad de bien equilibrado se han aplicado en numerosos tests, desde problemas académicos sencillos basados en la ecuación de Burgers con términos fuentes no lineales, hasta problemas más complejos como las ecuaciones de aguas someras con y sin fricción o las ecuaciones de Euler con gravedad.

### Referencias

- [1] M.J. Castro, C. Parés. Well-balanced high-order finite volume methods for systems of balance laws *Journal of Scientific Computing*, 82, Article number: 48 (2020).
- [2] Gómez-Bueno, I., Castro, M.J., Parés, C. “High-order well-balanced methods for systems of balance laws: a control-based approach.”, *Applied Mathematics and Computation*, 394, 125820, 2021.

## Resolución de las ecuaciones de la elastodinámica lineal isotrópica 2D mediante potenciales escalares

J. ALBELLA <sup>1</sup>, S. IMPERIALE <sup>2,3</sup>, P. JOLY <sup>2,4</sup>, J. RODRÍGUEZ <sup>1,5</sup>

<sup>1</sup> CITMaga-ITMATI, Campus Sur, 15706 Santiago de Compostela, España. Emails:  
jorge.albella@usc.es, jeronimo.rodriguez@usc.es

<sup>2</sup> INRIA, Université Paris-Saclay, Francia. E-mails: sebastien.imperiale@inria.fr,  
patrick.joly@inria.fr

<sup>3</sup> LMS, Ecole Polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, Francia.

<sup>4</sup> UMA, ENSTA, CNRS, Université Paris-Saclay, Francia.

<sup>5</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela, 15706 Santiago de  
Compostela, España.

### Resumen

En la resolución de las ecuaciones de la elastodinámica lineal 2D, una descomposición de Helmholtz del campo de desplazamientos desacopla el sistema, lo que conduce a dos ecuaciones de ondas escalares independientes que solamente interactúan en las fronteras del dominio. En consecuencia, parece natural buscar esquemas numéricos que resuelvan de manera independiente ambas ecuaciones escalares y acoplarlos en la frontera. En [2, 1] se aborda el caso de una frontera rígida sin dificultades aparentes. Sin embargo, el caso de condiciones de tracción libre [3, 4] y de condiciones de transmisión introducen inestabilidades cuando se emplea una formulación estándar. En esta charla se presentará un marco funcional adecuado de cara a resolver estas dificultades.

### Referencias

- [1] A. Burel, S. Imperiale, P. Joly. *Solving the homogeneous isotropic linear elastodynamics equations using potentials and finite elements. The case of the rigid boundary condition*, Numerical Analysis and Applications, 2012.
- [2] A. Burel. *Contributions à la simulation numérique en élastodynamique: découplage des ondes P et S, modèles asymptotiques pour la traversée de couches minces*. PhD thesis, Université Paris Sud-Paris XI, 2014.
- [3] J. Albella, S. Imperiale, P. Joly, J. Rodríguez. *Solving 2d linear isotropic elastodynamics by means of scalar potentials: a new challenge for finite elements*. Journal of Scientific Computing, 2018.
- [4] J. Albella. *Advanced numerical methods for wave propagation problems: The Arlequin method & Potential formulation for elastodynamics*. PhD thesis, Universidade de Santiago de Compostela, 2020.

## Integración de problemas de ondas no lineales mediante un método Gautschi sin reducción de orden

M. J. MORETA<sup>1</sup>, B. CANO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Económico y Economía Cuantitativa, Universidad Complutense de Madrid (Spain).  
E-mail: mjesusmoreta@ccee.ucm.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid, Valladolid (Spain). E-mail: bcano@uva.es.*

### Resumen

En este trabajo analizamos la reducción de orden que aparece cuando se utiliza el conocido método multipaso de Gautschi [1] al integrar la ecuación de ondas no lineal de segundo orden en tiempo con condiciones frontera no homogéneas y que dependen del tiempo.

Para que el estudio sea lo más completo posible, hemos abordado directamente el problema no lineal, estudiando la reducción de orden que aparece cuando se realiza primero la discretización espacial y después la temporal. De esta forma, cuando las condiciones frontera son periódicas, para el error global el orden en tiempo que se observa es 2. Sin embargo, cuando las condiciones frontera son no periódicas y dependen del tiempo, se observa reducción de orden. Para evitar esta reducción de orden, sugerimos una técnica de forma que se recupera el orden local 4 y el orden global 2. La técnica sugerida se basa en integrar primero en tiempo, de manera que algunos de los términos que definen el método se determinan mediante algunos problemas diferenciales con condiciones frontera adecuadas, que se pueden calcular en términos de los datos del problema. Posteriormente, se realiza la discretización espacial para aproximar la solución de estos nuevos problemas diferenciales.

Por otra parte, aunque el método original de Gautschi sólo aproxima la solución, también es usual considerar una aproximación a la derivada. Hemos analizado el error para la derivada con la aproximación clásica cuando se consideran condiciones frontera que dependen del tiempo y sugerimos una modificación para mejorar el error, obteniendo cotas que son uniformes en la red espacial.

Para finalizar la presentación, mostraremos además varios experimentos numéricos que corroboran los resultados previos.

### Referencias

- [1] W. Gautschi, Numerical integration of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials, *Numer. Math.*, 3, 381–397 (1961)



## Modelos de orden reducido basados en muestreo adaptativo y expansiones modales para la integración de sistemas de formación de patrones

M.L. RAPÚN<sup>1</sup> F. TERRAGNI<sup>2</sup> J.M. VEGA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid.

E-mails: [marialuisa.rapun@upm.es](mailto:marialuisa.rapun@upm.es), [josemanuel.vega@upm.es](mailto:josemanuel.vega@upm.es).

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid. E-mail: [fterragn@ing.uc3m.es](mailto:fterragn@ing.uc3m.es)

### Resumen

En este trabajo adaptaremos la técnica de muestreo que se propuso en [1] para ser integrada en modelos de orden reducido. El resultado es un algoritmo adaptativo novedoso que será utilizado para la simulación de dinámicas no lineales dependientes del tiempo en sistemas de formación de patrones [2].

El método seleccionará de manera automática y adaptativa conjuntos de snapshots a lo largo del tiempo. También de manera automática se irán seleccionando conjuntos reducidos de puntos del mallado, que irán variando a lo largo de la integración temporal y serán utilizados para construir la base modal y proyectar las ecuaciones.

Se discutirá sobre la robustez, la precisión y la eficiencia computacional del modelo de orden reducido propuesto para algunos sistemas de formación de patrones relevantes, tanto en una como en dos dimensiones espaciales.

### Referencias

- [1] M.L. Rapún, F. Terragni and J.M. Vega, *LUPOD: Collocation in POD via LU decomposition*. Journal of Computational Physics 335 (2017) pp. 1-20
- [2] M.L. Rapún, F. Terragni and J.M. Vega, *Adaptive sampling and modal expansions in pattern-forming systems*. Advances in Computational Mathematics 47 (2021), art. 48.

## Métodos Lawson para integrar problemas no lineales de valor en la frontera: análisis de la reducción de orden y cómo evitarla

BEGOÑA CANO<sup>1</sup>, NURIA REGUERA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid, IMUVA (Spain). E-mails: [bego@mac.uva.es](mailto:bego@mac.uva.es).

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de Burgos, IMUVA (Spain). E-mail: [nreguera@ubu.es](mailto:nreguera@ubu.es).

### Resumen

Una buena opción a la hora de integrar numéricamente ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) es utilizar un integrador exponencial, ya que estos métodos integran la parte lineal y rígida del problema de manera exacta y así tienen la ventaja de ser explícitos y linealmente estables al mismo tiempo. Además, si consideramos el caso particular de los métodos exponenciales Lawson, tenemos otra cuestión interesante: la posibilidad de construir métodos Lawson con orden clásico tan alto como deseemos. Sin embargo, esta ventaja se ve afectada por la fuerte reducción de orden que sufren los métodos Lawson al integrar numéricamente problemas de EDPs sujetas a condiciones de frontera no periódicas y dependientes del tiempo.

En este trabajo vamos a analizar dicha reducción de orden cuando el problema de EDPs considerado es no lineal [2]. Además propondremos una técnica para evitar dicha reducción de orden [1].

### Referencias

- [1] B. Cano, N. Reguera, *How to avoid order reduction when Lawson methods integrate nonlinear initial boundary value problems*, Bit Numer Math (2021). <https://doi.org/10.1007/s10543-021-00879-8>
- [2] B. Cano, N. Reguera, *Order reduction and how to avoid it when Lawson methods integrate reaction-diffusion boundary value problems*, <http://arxiv.org/abs/1909.12659>.

## Esquemas WENO de tercer orden global

PEP MULET<sup>1</sup>, ANTONIO BAEZA<sup>1</sup>, RAIMUND BÜRGER<sup>2</sup>, DAVID  
ZORÍO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universitat de València (España). E-mails: pep.mulet@uv.es,  
antonio.baeza@uv.es.*

<sup>2</sup> *CFMA y Dpto. de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Casilla 160-C, Concepción  
(Chile). E-Mail: rburger@ing-mat.udec.cl.*

<sup>3</sup> *Escuela Superior de Ingeniería, Ciencia y Tecnología, Universidad Internacional de Valencia (España).  
E-mail: david.zorio@campusviu.es.es.*

### Resumen

Se presenta un nuevo esquema de tercer orden ponderado esencialmente no oscilatorio (Weighted Essentially Non Oscillatory), que logra precisión incondicional de tercer orden cuando los datos son suficientemente suaves sin el uso de parámetros dependientes de la malla computacional, incluso en presencia de puntos críticos y precisión de segundo orden si una discontinuidad cruza los datos.

Mostramos experimentos numéricos en los que se observa que este esquema es más eficiente que sus contrapartes tradicionales de tercer orden y que varios esquemas WENO de orden superior que se encuentran en la literatura.

## Integración numérica eficiente con métodos Rosenbrock de ecuaciones en derivadas parciales no lineales

I. ALONSO-MALLO<sup>1</sup>, B. CANO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, IMUVA, Universidad de Valladolid (Spain). E-mails: isaias@mac.uva.es, bego@mac.uva.es.*

### Resumen

Evitamos en lo posible la reducción de orden de los métodos Rosenbrock cuando se aplican a ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Para ello utilizamos una elección adecuada de valores de frontera para las etapas intermedias. La implementación es eficiente y sencilla ya que, en cada etapa, solo deben agregarse, a lo que sería el método de líneas estándar, algunos términos adicionales relativos a la frontera y no a toda la malla discreta.

### Referencias

- [1] Alonso-Mallo, I.; Cano B., *Spectral/Rosenbrock discretizations without order reduction for linear parabolic problems*, Appl. Num. Math., (2002), 247–268.
- [2] Ostermann, A.; Roche, M., *Rosenbrock methods for partial differential equations and fractional orders of convergence*, SIAM J. Numer. Anal.,(1993), 1084–1098.

## MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA FÍSICA Y LA INGENIERÍA

### ORGANIZADORES

**Andrés Arrarás** (Universidad Pública de Navarra)

**Laura Portero** (Universidad Pública de Navarra)

**Carmen Rodrigo** (Universidad de Zaragoza)

## Algoritmo de dos niveles basado en el método multiplicativo de Schwarz para la resolución eficiente de discretizaciones isogeométricas

A. PÉ DE LA RIVA<sup>1</sup>, C. RODRIGO<sup>1</sup>, F.J. GASPAR<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada & IUMA, Universidad de Zaragoza (Spain).*  
*E-mails: apedelariva@unizar.es, carmenr@unizar.es, fjaspar@unizar.es.*

### Resumen

El análisis isogeométrico se basa en considerar para la aproximación de la solución de EDPs el mismo tipo de funciones que se utilizan para el modelado de la geometría del dominio físico. Las funciones B-spline permiten capturar de forma exacta la geometría de dominios no triviales como las secciones cónicas. Además, este tipo de funciones permite dar una base para los espacios de aproximación que mantiene una suavidad global de la solución hasta  $p - 1$  veces diferenciable. En este trabajo, consideramos el análisis isogeométrico para la discretización del problema de Poisson, y se propone para la resolución del sistema de ecuaciones resultante un método de dos niveles eficiente y robusto respecto al grado polinomial de la discretización, ver [1]. En el primer nivel se considera la discretización elegida para resolver el problema con un grado polinomial  $p$  y un tamaño  $h$  de la malla. En la malla basta, sin embargo, se considera una discretización lineal o cuadrática dependiendo de los requerimientos del dominio computacional y se dobla el tamaño de la malla a  $H = 2h$ . Para obtener un método robusto respecto al grado polinomial, en la malla fina se propone el uso de un suavizador apropiado basado en una descomposición del dominio en bloques. En particular, consideramos métodos multiplicativos de Schwarz y justificamos esta elección mediante un análisis local de Fourier. En el segundo nivel se puede aplicar cualquier solver exacto, sin embargo aquí proponemos el uso de un método multimalla para mayor eficiencia de nuestro algoritmo de dos niveles. Finalmente, en nuestros experimentos numéricos mostraremos que el método propuesto es robusto respecto al grado polinomial.

### Referencias

- [1] A. Pé de la Riva, C. Rodrigo, F.J. Gaspar. *A two-level method for isogeometric discretizations based on multiplicative Schwarz iterations*. *Computers & Mathematics with Applications*, 100 (2021), 41–50.

## Diseño de *splines* cúbicos monótonos para datos procedentes de funciones discontinuas<sup>1</sup>

F. ARÀNDIGA<sup>2</sup>, A. BAEZA<sup>2</sup> D. F. YÁÑEZ<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Valencia (Spain). E-mails: dionisio.yanez@uv.es.

### Resumen

La interpolación de Hermite, en particular la interpolación basada en *splines* cúbicos, ha sido utilizada en gran número de aplicaciones debido a las propiedades que presenta, como suavidad y precisión del polinomio interpolante, p. ej. [1, 3]. Sin embargo, cuando existe una discontinuidad o los datos de los que partimos tienen un salto relevante, los interpoladores no se adaptan correctamente y aparecen fenómenos no deseados como el de Gibbs. En este trabajo presentamos dos algoritmos para evitar estos fenómenos produciendo interpolantes de Hermite monótonos [2]. Presentamos distintos experimentos numéricos que confirman los resultados teóricos.

### Referencias

- [1] H. Akima *A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures*, J. Assoc. Comput. Mach., 17 (1970), 589–602.
- [2] F. Aràndiga, A. Baeza and D. F. Yáñez, *Monotone cubic spline interpolation for functions with a strong gradient*, submitted.
- [3] G. Wolberg and I. Alfy, *An energy-minimization framework for monotonic cubic spline interpolation*, J. Comput. and Applied Math., 143 (2002), 145–188.

---

<sup>1</sup>Esta investigación ha sido financiada por el proyecto MINECO PID2020-117211GB-I00.

## Modelos de flujo reactivo para el estudio de mecanismos de reparación autónoma en hormigón

ETELVINA JAVIERRE<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar, Zaragoza (Spain). E-mail: [etelvina@unizar.es](mailto:etelvina@unizar.es).

### Resumen

El hormigón es un material poroso que posee la capacidad de reparar, de manera autónoma, pequeñas grietas [1]. Esta reparación se inicia con el ingreso y transporte de agua y aire desde el exterior hasta la grieta, donde se activan reacciones de hidratación y carbonatación que terminan con la precipitación de fases sólidas. Este mecanismo, sin embargo, solo es capaz de sellar grietas de anchuras menores a  $300\mu m$ . Algunas de las alternativas que buscan mejorar esta capacidad incluyen la incorporación en la composición de elementos externos (bacterias, polímeros superabsorbentes, fibras con memoria de forma, ...) capaces de modular la capacidad de autorreparación a condiciones más generales.

El modelado matemático y la simulación computacional son herramientas muy útiles para ayudar a comprender estos mecanismos con una fuerte interacción físico-química [3]. Este trabajo utiliza como prototipo la reacción de carbonatación, y sobre ella se formula un modelo de flujo y transporte reactivo acoplados, en línea con [2]. El modelo incorpora la evolución de la porosidad debida a la remodelación de la microestructura e incluye distribuciones discretas de partículas de polímeros superabsorbentes.

### Referencias

- [1] K. van Tittelboom, N. de Belie. *Self-Healing in Cementitious Materials-A Review*. Materials (2013), 2182–2217.
- [2] F.A. Radu, A. Muntean, I.S. Pop, N. Suci, O Kolditz. *A mixed finite element discretization scheme for a concrete carbonation model with concentration-dependent porosity*. J. Comp. Appl. Math. (2013), 74–85.
- [3] T. Jefferson, E. Javierre, B. Freeman, A. Zaoui, E. Koenders, L. Ferrara. *Research Progress on Numerical Models for Self-Healing Cementitious Materials*. Adv. Mater. Interfaces (2018), 1701378.



## Desarrollos asintóticos y esquemas de aproximación para el $p$ -Laplaciano

F. DEL TESO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid (Spain).*  
*E-mails: fdelteso@ucm.es, felix.delteso@gmail.com.*

### Resumen

El objetivo de esta charla es introducir los conceptos de desarrollos asintóticos y esquemas de aproximación para los siguientes operadores del tipo  $p$ -Laplaciano

$$\Delta_p u := \nabla(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad \text{and} \quad \Delta_p^N u := \frac{1}{|\nabla u|^{p-2}} \Delta_p u.$$

Los resultados están basados en una colaboración con J. J. Manfredi y M. Parviainen ([3]). En ellos, se mostrará un marco unificado para probar convergencia de esquemas de aproximación de problemas de contorno para  $\Delta_p^N$ , el llamado  $p$ -Laplaciano normalizado, que ha de ser tratado en el contexto de soluciones de viscosidad.

Mientras que para  $\Delta_p^N$ , desarrollos asintóticos y discretizaciones de diferencias finitas eran bien conocidas, este no era el caso para  $\Delta_p$ . En la segunda parte de la charla, presentaremos tales resultados. Este es un trabajo en colaboración con E. Lindgren ([1, 2]). Aquí, introducimos nuevos desarrollos asintóticos y discretizaciones de diferencias finitas y demostraremos convergencia para esquemas de aproximación de los problemas asociados.

### Referencias

- [1] del Teso, Félix; Lindgren, Erik; A mean value formula for the variational  $p$ -Laplacian. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 28 (2021), no. 3, Paper No. 27, 33 pp.
- [2] del Teso, Félix; Lindgren, Erik; A finite difference method for the variational  $p$ -Laplacian *Preprint*, <https://arxiv.org/abs/2103.06945>. (2021)
- [3] del Teso, Félix; Manfredi, Juan J.; Parviainen, Mikko; Convergence of dynamic programming principles for the  $p$ -Laplacian *Advances in Calculus of Variations*, Ahead of print. (2019).

## Un método multimalla para el modelo de Biot en mallas rectangulares lógicas

J. ZARATIEGUI<sup>1</sup>, A. ARRARÁS<sup>2</sup>, C. RODRIGO<sup>1</sup>, L. PORTERO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada & IUMA, Universidad de Zaragoza (Spain).

E-mails: javierzu@unizar.es, carmenr@unizar.es.

<sup>2</sup> Dpto. de Estadística, Informática y Matemáticas & INAMAT, Universidad Pública de Navarra (Spain).

E-mails: andres.arraras@unavarra.es, laura.portero@unavarra.es.

### Resumen

Los modelos de poroelasticidad aparecen con frecuencia en problemas de diversos campos de relevancia social, tales como la extracción de energía geotérmica, el almacenamiento de CO<sub>2</sub> o la fracturación hidráulica. En [1], Maurice Biot estableció la formulación matemática general sobre dominios tridimensionales para este tipo de problemas. En aplicaciones reales, es necesario recurrir a la simulación numérica para su resolución, por lo que existe abundante literatura sobre técnicas de discretización y métodos de resolución de sistemas para la obtención de soluciones numéricas.

En este trabajo, consideramos un método de elementos finitos mixtos combinado de tensión y flujo multipunto para el modelo cuasi-estático de Biot, introducido recientemente en [2]. Este método es localmente conservativo, puede formularse sobre mallas de cuadriláteros y símplices, y admite discontinuidades en los tensores de permeabilidad y los coeficientes de Lamé. Es bien conocido que gran parte del costo computacional en simulaciones de modelos realistas proviene de la resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas obtenidos tras la discretización, pudiendo llevarse a cabo mediante métodos monolíticos o métodos que resuelven el problema acoplado iterando entre los subproblemas involucrados. Dentro de los primeros, proponemos un esquema multimalla geométrico para el método de tensión y flujo multipunto sobre mallas rectangulares lógicas. Este tipo de mallas permite mejoras notables en el rendimiento, ya que admite el uso de datos estructurados. Finalmente, se presentan resultados numéricos que ilustran la robustez del método propuesto respecto a los parámetros del modelo y de la discretización.

### Referencias

- [1] M.A. Biot. *General theory of three-dimensional consolidation*. J. Appl. Phys., 12 (1941), 155–164.
- [2] I. Ambartsumyan, E. Khattatov, I. Yotov. *A coupled multipoint stress–multipoint flux mixed finite element method for the Biot system of poroelasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 372 (2020), 113407.

## Métodos de Lagrange-Galerkin estabilizados para la simulación de flujos turbulentos

R. BERMEJO<sup>1</sup>, L. SAAVEDRA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, E.T.S.I. Industriales, Universidad Politécnica de Madrid. E-mail: [rodolfo.bermejo@upm.es](mailto:rodolfo.bermejo@upm.es).

<sup>2</sup> Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, E.T.S.I. Aeronáutica y del Espacio, Universidad Politécnica de Madrid. E-mail: [laura.saavedra@upm.es](mailto:laura.saavedra@upm.es).

### Resumen

En esta charla presentaremos un método de Lagrange-Galerkin (LG) de segundo orden en tiempo para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes a alto número de Reynolds. Este método, que sería incondicionalmente estable si fuese posible realizar integración exacta, se combina con un método LPS (del inglés “local projection stabilization”). Estos métodos de Lagrange-Galerkin estabilizados, que llamamos LG-LPS, fueron presentados inicialmente en [1] y [2], donde realizamos el análisis numérico de los mismos. En esta presentación, introduciremos un nuevo estabilizador basado en la estructura de macro-elemento, de forma que las escalas grandes y las pequeñas del fluido se definen en el mismo espacio de elementos finitos pero en diferentes mallas. La discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes la realizamos con elementos finitos  $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_2$  y “forzamos” el cumplimiento de la condición *inf-sup* incorporando el mismo estabilizador en la ecuación de continuidad. Veremos que los resultados obtenidos con este nuevo método numérico son más precisos que los obtenidos anteriormente y, además, nos permiten la simulación de problemas con flujos completamente turbulentos.

### Referencias

- [1] R. Bermejo, L. Saavedra. *A second order in time local projection stabilized Lagrange-Galerkin method for Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers*, Computers & Mathematics with Applications, 72 (4), 820-845, 2016.
- [2] R. Bermejo, L. Saavedra. *Local projection stabilized Lagrange-Galerkin methods for Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers*. SeMA Journal 75 (4), 607-627, 2018.

## Análisis del error a posteriori de un método de Galerkin enriquecido para el problema de Stokes

V. GIRAULT<sup>1</sup>, M. GONZÁLEZ<sup>2</sup>, F. HECHT<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université, París (Francia). E-mails: vivette.girault@sorbonne-universite.fr, frederic.hecht@sorbonne-universite.fr.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidade ca Coruña, A Coruña (España). E-mail: maria.gonzalez.taboada@udc.es.*

### Resumen

En el reciente trabajo [1], los autores presentan y analizan un nuevo método de Galerkin enriquecido estable para el problema de Stokes con una condición de contorno de tipo Dirichlet no homogénea. En el caso de mallas de triángulos (en  $\mathbb{R}^2$ ) o tetraedros (en  $\mathbb{R}^3$ ), la presión se aproxima mediante constantes a trozos y la velocidad se aproxima usando funciones continuas polinomiales a trozos de grado uno enriquecidas con funciones constantes a trozos. Este par de espacios satisface una condición inf-sup uniforme (véase [1]) tanto en dos como en tres dimensiones. El análisis a priori muestra que el método es de orden uno. Además, este nuevo esquema se puede emplear para resolver problemas de gran tamaño puesto que requiere menos grados de libertad que los métodos de Galerkin discontinuos de primer orden estándar y es más fácil de implementar.

En esta charla presentaremos el análisis del error a posteriori del método propuesto en [1]. Describiremos indicadores del error de tipo residual y estudiaremos su fiabilidad y eficiencia. En ambos casos, los resultados son óptimos. También mostraremos algunos resultados numéricos que confirman las buenas propiedades del método.

### Referencias

- [1] N. Chaabane, V. Girault, B. Rivière, y T. Thompson, *A stable enriched Galerkin element for the Stokes problem*, Applied Numerical Mathematics, 132 (2018), pp. 1-21.
- [2] V. Girault, M. González, y F. Hecht. *A posteriori error analysis of an enriched Galerkin method of order one for the Stokes problem*. Aparecerá en J. Numer. Math. (2022).

## Algoritmos eficientes para convoluciones adaptados a las aplicaciones

L. BANJAI<sup>1</sup>, M. LÓPEZ-FERNÁNDEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático, Estadística e I.O. y Matemática Aplicada, Universidad de Málaga (Spain). E-mails: maria.lopezf@uma.es.*

<sup>2</sup> *School of Mathematical and Computer Sciences, Heriot-Watt University, Edinburgh (UK). E-mail: l.banjai@hw.ac.uk.*

### Resumen

En esta charla proponemos algoritmos para la aproximación de determinadas ecuaciones integrales de Volterra relevantes en las aplicaciones, que consiguen minimizar el coste computacional, comprimir la memoria y son fáciles de implementar. La novedad con respecto a otros métodos existentes en la literatura es que estos nuevos algoritmos utilizan más información acerca del problema, estando diseñados para tratar familias específicas de aplicaciones. En primer lugar, consideraremos la aproximación de integrales fraccionarios y, gracias a esto, la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias en tiempo. En segundo lugar, consideraremos la resolución de ecuaciones de Schrödinger con potencial concentrado en un conjunto discreto de puntos. Típicamente el análisis de estos problemas se realiza reformulando las ecuaciones como sistemas de ecuaciones integrales de Volterra. Para las dos familias de aplicaciones consideradas, proponemos una implementación especial de las cuadraturas de convolución de Lubich, en la que conseguimos comprimir enormemente la memoria, manteniendo el coste computacional al nivel de los mejores algoritmos propuestos hasta la fecha. Además los nuevos algoritmos simplifican enormemente la implementación con respecto a los métodos pre-existentes y abren la puerta a implementaciones con paso variable. La idea de base es una representación especial de los pesos de convolución y cuadraturas especiales para calcularlos. Finalmente, se mostrarán resultados numéricos que ilustrarán el funcionamiento de esta nueva generación de algoritmos.

### Referencias

- [1] L. Banjai, M. López-Fernández, *Efficient high order algorithms for fractional integrals and fractional differential equations*, Numer. Math 141, 289–317, 2019.
- [2] L. Banjai, M. López-Fernández, *Numerical approximation of the Schrödinger equation with concentrated potential*, J. Comp. Physics 405, 109155, 2020.

## Métodos numéricos para la detección de objetos en medios con atenuación

A. CARPIO<sup>1</sup> M.L. RAPÚN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid. E-mail: carpio@mat.ucm.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Aeroespacial, Universidad Politécnica de Madrid. E-mail: marialuisa.rapun@upm.es.*

### Resumen

Este trabajo se centra en la detección de objetos inmersos dentro de un medio a partir de mediciones del campo acústico registradas en un conjunto reducido de detectores. Se trata de un problema inverso en oposición al problema directo que describe el comportamiento de las ondas acústicas en presencia de objetos conocidos.

La mayoría de los algoritmos para la detección de objetos a partir de datos acústicos suponen que el coeficiente de atenuación en el medio es despreciable. Sin embargo, en algunas aplicaciones de tomografía para el estudio del subsuelo o en estudios médicos de tejidos biológicos no se pueden descartar los efectos de la atenuación.

En esta comunicación se propondrán métodos numéricos basados en el cálculo de la derivada topológica para reconstruir objetos enterrados en medios atenuantes. Los emisores y receptores se situarán en la parte accesible de la región sondeada, lo que complica en gran medida la detección. Mostraremos que las implementaciones de un paso del algoritmo proporcionan aproximaciones iniciales, que se mejoran en unas pocas iteraciones. Se discutirá sobre las capacidades y limitaciones de los métodos propuestos.

### Referencias

- [1] A. Carpio and M.L. Rapún, *Multifrequency topological derivative approach to inverse scattering problems in attenuating media*. *Symmetry* 13 (2021), art. 1702.

## El método de muestreo lineal para las ecuaciones de Maxwell en régimen de evolución

T. LÄHIVAARA<sup>1</sup>, P. MONK<sup>2</sup>, V. SELGAS<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dept. of Applied Physics, University of Eastern Finland, 70211 Kuopio (Finland). E-mail: [timo.lahivaara@uef.fi](mailto:timo.lahivaara@uef.fi).

<sup>2</sup> Dept. of Mathematical Sciences, University of Delaware, Newark, DE 19716 (USA). E-mail: [monk@udel.edu](mailto:monk@udel.edu).

<sup>3</sup> Depto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo, EPIG, C/ Luis Ortiz Berrocal s/n, 33203 Gijón (Spain). E-mail: [selgasvirginia@uniovi.es](mailto:selgasvirginia@uniovi.es).

### Resumen

El método de muestreo lineal en dominio de tiempo (TD-LSM) es una técnica cualitativa que permite resolver problemas inversos de dispersión utilizando datos tomados en el dominio de tiempo. Concretamente, define una función indicatriz del soporte del objeto dispersor que se trata de localizar y reconstruir. Para definir esta función en cada punto, se resuelve una ecuación integral lineal conocida como *ecuación de campo próximo*, y en la que únicamente cambia el segundo miembro al modificar el punto muestreado. Hasta la fecha, el TD-LSM se ha analizado para la ecuación de ondas con diferentes tipos de objetos (con frontera rígida, condiciones de impedancia, o penetrables [3, 4, 2]) y para guías de onda acústicas [5], pero no para electromagnetismo. En este trabajo lo estudiamos para las ecuaciones de Maxwell con condiciones de frontera de impedancia (para un conductor eléctrico perfecto, PEC, el estudio es análogo): Hacemos un análisis del TD-LSM basado en la transformada de Laplace y que justifica su uso; también mostramos resultados numéricos usando datos sintéticos.

### Referencias

- [1] F. Cakoni, D. Colton, and P. Monk. *The Linear Sampling Method in Inverse Electromagnetic Scattering*. SIAM (vol. 80 of CBMS), Philadelphia, 2011.
- [2] F. Cakoni, P. Monk, and V. Selgas. *Analysis of the linear sampling method for imaging penetrable obstacles in the time domain*. *Anal. PDE*, 14 (2021), 667–688.
- [3] Y. Guo, P. Monk, and D. Colton. *Toward a time domain approach to the linear sampling method*. *Inv. Prob.*, 29 (2013), 095016.
- [4] H. Haddar, A. Lechleiter, and S. Marmorat. *An improved time domain linear sampling method for Robin and Neumann obstacles*. *Appl. Anal.*, 93 (2014), 369–390.
- [5] P. Monk and V. Selgas. *An inverse acoustic waveguide problem in the time domain*. *IP*, 32 (2016), 055001.

## **POLINOMIOS ORTOGONALES, FUNCIONES ESPECIALES Y APLICACIONES**

### **ORGANIZADORES**

**Óscar Ciaurri** (Universidad de La Rioja)  
**Edmundo J. Huertas** (Universidad de Alcalá)  
**Alberto Lastra** (Universidad de Alcalá)



## Sumabilidad y ecuaciones momento-diferenciales

ALBERTO LASTRA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad de Alcalá, Departamento de Física y Matemáticas, Alcalá de Henares, Madrid (Spain).*  
*E-mail: alberto.lastra@uah.es.*

### Resumen

Dada una sucesión fuertemente regular para la que es posible determinar núcleos para la sumabilidad, es admisible construir sucesiones de momentos asociadas que se encuentran íntimamente relacionadas con procesos generales de sumación de soluciones formales de ecuaciones funcionales.

En la comunicación se presentarán ciertas familias de ecuaciones momento diferenciales en las que se proporciona la solución a partir de un proceso de sumación desde su solución formal. En los casos en los que las familias de momentos están ligadas a la función Gamma las ecuaciones momento-diferenciales se manifiestan en la forma de ecuaciones diferenciales clásicas, pero también como ecuaciones diferenciales fraccionarias. Las ecuaciones funcionales en q-diferencias serán mencionados, en conexión con ciertos momentos asociados a sucesiones sin crecimiento moderado.

La presentación está basada principalmente en el trabajo [1], así como en la teoría general de sumabilidad que puede encontrarse en sus referencias.

### Referencias

- [1] A. Lastra, S. Michalik, M. Suwińska. *Summability of formal solutions for some generalized moment partial differential equations*. Result. Math. 76, No. 1, Paper No. 22, 27 p. (2021).

## Computación de funciones hipergeométricas confluentes

AMPARO GIL<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Universidad de Cantabria (Spain).*  
*E-mail: amparo.gil@unican.es.*

### Resumen

Como es bien conocido, las funciones hipergeométricas confluentes aparecen en un buen número de aplicaciones en física e ingeniería. En el listado de casos particulares de hipergeométricas confluentes se incluyen funciones tan relevantes como los polinomios de Laguerre, las funciones de Bessel modificadas o las funciones del cilindro parabólico, entre otras. A pesar de su importancia, se dispone de pocos algoritmos para la evaluación de cualquiera de las soluciones estándar de la ecuación de Kummer en el caso de parámetros reales o complejos. En esta charla, discutiré resultados recientes obtenidos por nuestro grupo para el cálculo de las funciones de Kummer  $U(a, b, z)$  y  $M(a, b, z)$  para valores reales de la variable  $z$  [1]. También comentaré avances realizados para el caso particular de las funciones del cilindro parabólico  $U(a, z)$  para valores complejos del argumento  $z$  [2]. Este último caso completa trabajos previos de nuestro grupo [3, 4] en relación a la evaluación de estas funciones para valores reales de  $z$ .

### Referencias

- [1] A. Gil, D. Ruiz-Antolín, J. Segura, N.M. Temme. *Efficient and accurate computation of confluent hypergeometric functions*. In progress.
- [2] T.M. Dunster, A. Gil, J. Segura. *Computation of parabolic functions having complex arguments*. In progress.
- [3] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. *Fast and accurate computation of the Weber parabolic cylinder function  $W(a, x)$* . IMA J. Numer. Anal 31(3) (2011) 1194-1216
- [4] A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. *Computing the Real Parabolic Cylinder Functions  $U(a, x)$ ,  $V(a, x)$* . ACM Trans. Math. Softw. 32(1) (2006) 70-101.

## Hypergeometric Multiple Orthogonal Polynomials and Random Walks

AMÍLCAR BRANQUINHO<sup>1</sup>, JUAN E. FERNÁNDEZ-DÍAZ<sup>2</sup>,  
ANA FOULQUIÉ-MORENO<sup>3</sup>, MANUEL MAÑAS<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática, Universidad de Coimbra (Portugal). E-mail: ajplb@mat.uc.pt.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática, Universidad de Aveiro (Portugal). E-mail: juan.enri@ua.pt.*

<sup>3</sup> *Dpto. de Matemática, Universidad de Aveiro (Portugal). E-mail: foulquie@ua.pt.*

<sup>4</sup> *Dpto. de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid(España). E-mail: manuel.manas@ucm.es.*

### Resumen

The recently found hypergeometric multiple orthogonal polynomials on the step-line by Lima and Loureiro [3] are shown to be random walk polynomials. It is proven that the corresponding Jacobi matrix and its transpose, which are nonnegative matrices and describe higher recurrence relations, can be normalized to two stochastic matrices, dual to each other. The corresponding Karlin-McGregor representation formula is given for these new Markov chains. The regions of hypergeometric parameters where the Markov chains are recurrent or transient are given. Stochastic factorizations, in terms of pure birth and of pure death factors, for the corresponding Markov matrices of types I and II, are provided. Twelve uniform Jacobi matrices and the corresponding random walks, related to a Jacobi matrix of Toeplitz type, and their stochastic or semi-stochastic matrices (with sinks and sources), that describe Markov chains beyond birth and death, are found and studied.

### Referencias

- [1] Amílcar Branquinho, Juan E. Fernández-Díaz, Ana Foulquié-Moreno and Manuel Mañas, *Hypergeometric Multiple Orthogonal Polynomials and Random Walks*, arXiv:2107.00770 [math.CA].
- [2] Amílcar Branquinho, Ana Foulquié-Moreno, Manuel Mañas, Carlos Álvarez-Fernández, Juan E. Fernández-Díaz, *Multiple Orthogonal Polynomials and Random Walks*, arXiv:2103.13715[math.CA]
- [3] Hélder Lima and Ana Loureiro, *Multiple orthogonal polynomials with respect to Gauss' hypergeometric function*, arXiv:2012.13913 [math.CA].

## Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters

ANTONIO J. DURÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático and IMUS, Universidad de Sevilla (Spain). E-mails: duran@us.es.*

### Resumen

We construct new examples of exceptional Hahn and Jacobi polynomials [1]. Exceptional polynomials are orthogonal polynomials with respect to a measure which are also eigenfunctions of a second order difference or differential operator. In mathematical physics, they allow the explicit computation of bound states of rational extensions of classical quantum-mechanical potentials. The most apparent difference between classical or classical discrete orthogonal polynomials and their exceptional counterparts is that the exceptional families have gaps in their degrees, in the sense that not all degrees are present in the sequence of polynomials. The new examples have the novelty that they depend on an arbitrary number of continuous parameters. These families are constructed by using the new families of Krall dual Hahn polynomials depending on an arbitrary number of continuous parameters introduced in [2]. Krall polynomials are orthogonal polynomials which are eigenfunctions of a higher order differential or difference operator. The new Krall dual Hahn families provide further examples for the problem explicitly posed by Richard Askey in 1991.

### Referencias

- [1] Antonio J. Durán, *Exceptional Hahn and Jacobi polynomials with an arbitrary number of continuous parameters*, Stud. Appl. Math. DOI: 10.1111/sapm.12451.
- [2] Antonio J. Durán, *Bispectral dual Hahn polynomials with an arbitrary number of continuous parameters*, Submitted.

## Polinomios ortogonales y funciones especiales en la generación de puntos aleatorios

CARLOS BELTRÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. MATESCO, Universidad de Cantabria (Spain). E-mail: beltranc@unican.es.  
Proyecto PID2020-113887GB-I00 financiado por MCIN/AEI /10.13039/501100011033.*

### Resumen

En los últimos años, el uso de los llamados Procesos de Puntos Determinantales (DPPs en su acrónimo inglés) se ha extendido como una herramienta para distribuir correctamente puntos aleatorios en distintos espacios, de cara a la discretización necesaria para cálculo de integrales, interpolación, minimización de energía, etc. En muchos de los casos, las herramientas necesarias para llevar a cabo los cálculos involucran distintas propiedades de los polinomios ortogonales y funciones especiales, lo que ha dado lugar a algunos resultados que no parecían estar claramente expuestos en la literatura y a una aplicación práctica más de esta fructífera área de las matemáticas. En esta charla, expondré el problema general y algunos de los resultados relacionados con el tema de la sesión que son de utilidad en problema de los DPPs.

Partes de la charla son trabajo conjunto con varios autores citados en la bibliografía.

### Referencias

- [1] C. Beltrán, Damir Ferizović. *Approximation to uniform distribution in  $SO(3)$* . Constructive Approximation 2020. DOI: 10.1007/s00365-020-09506-1
- [2] C. Beltrán, Ujué Etayo. *A generalization of the spherical ensemble to even-dimensional spheres*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 2019. DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.03.004.
- [3] C. Beltrán, Antonia M. Delgado, Lidia Fernández, Joaquín F. Sánchez Lara. *On Gegenbauer Point Processes on the unit interval*. arXiv:2110.05918.

## Stability of third degree linear functionals and rational spectral transformations

FRANCISCO MARCELLÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid - 28911 - Leganés, Madrid, Spain.  
E-mail: pacomarc@ing.uc3m.es.*

### Resumen

In this presentation we focus our attention on linear functionals of the third degree. This means that the Stieltjes function associated with the corresponding moment sequence satisfies a cubic equation with polynomial coefficients. The notion of a primitive triple of a strict third degree linear functional is introduced. A simplification criterion of the corresponding cubic algebraic equation is given. Moreover, we show that the class of third degree linear functionals is closed under rational spectral transformations. Several consequences of this fact are deduced. In particular, we illustrate with several examples the fact that the set of third degree linear forms is stable for the most standard algebraic operations in the linear space of linear functionals.

This is a joint work with Imed Ben Salah and Mohamed Khalfallah, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Monastir, Monastir, Tunisia.

# Entropy-like functionals of hypergeometric polynomials with application to $D$ -dimensional spherically symmetric potentials

I. V. TORANZO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Rey Juan Carlos (Spain). E-mails:  
irene.vtoranzo@urjc.es.*

## Resumen

In this talk we study some power and logarithmic integral functionals that involve hypergeometric orthogonal polynomials (such as Laguerre,  $L_m^{(\alpha)}(x)$ , and Jacobi  $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ ) in terms of their degree and parameter, respectively. These orthogonal polynomials control the radial wavefunction of various  $D$ -dimensional quantum systems, in position space, subject to a particular type of spherically symmetric potential (Kratzer-Fues, Morse, Hulthén, Mie, pseudoharmonic). Then, these results are applied to determine entropic uncertainty measures (Fisher information, Shannon and  $q$ -entropies) for all the stationary states of these  $D$ -dimensional quantum systems.

## Referencias

- [1] J. S. Dehesa, I. V. Toranzo. *Analytical Shannon information entropies for all discrete multidimensional hydrogenic states*, Int. J. Quantum Chem. 120 (2020), e26077.
- [2] I. V. Toranzo, J. S. Dehesa. *Exact Shannon entropies for the multidimensional harmonic states*, Phys. A: Stat. Mech. Appl. 516 (2019), 273-279.
- [3] R. L. Hall, N. Saad, K. D. Sen. *Exact normalized eigenfunctions for general deformed Hulthén potentials*, J. Math. Phys. 59 (2018), 122103.
- [4] S. Miraboutalebi, L. Rajaei. *Solutions of  $N$ -dimensional Schrödinger equation with Morse potential via Laplace transformation*, J. Math. Chem. 52 (2014), 1119-1128.
- [5] H. Akcay, R. Sever. *Analytical solutions of Schrödinger equation for the diatomic molecular potentials with any angular momentum*, J. Math. Chem. 50 (2012), 1973-1987.
- [6] A. D. Agboola. *Complete analytical solutions of the Mie-type potentials in  $N$ -dimensions*, Acta Phys. Pol. A 120 (2011), 371-377.
- [7] K. J. Oyewumi, F. O. Akinpelu, A. D. Agboola. *Exactly complete solutions of the pseudoharmonic potential in  $N$ -dimensions*, Int. J. Phys. 47 (2008), 1039-1057.
- [8] A. D. Agboola. *The Hulthén potential in  $D$ -dimensions*, Phys. Scr. 80 (2009), 065304.

## Darboux transformations for sequences of $d$ -orthogonal polynomials

JUAN CARLOS GARCÍA ARDILA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial  
Universidad Politécnica de Madrid*

*Calle José Gutiérrez Abascal 2, 28006 Madrid, Spain.. E-mails: juancarlos.garciaa@upm.es.es.*

### Resumen

In this talk an extension of the concept of Christoffel and Geronimus transformations for sequences of  $d$ -orthogonal polynomials  $\{P_n\}$  is introduced. These transformed sequences  $\{P_n^{(k)}\}$ , for  $k = 1, \dots, d$ , are analyzed and some relationships between them are given. Finally the relation between their associated Hessenberg matrices is studied. This presentation is based on joint work with

Dolores Barrios Rolanía (Universidad Politécnica de Madrid), and Daniel Manrique (Universidad Politécnica de Madrid).

### Referencias

- [1] D. Barrios-Rolanía J. C. García-Ardila, *Geronimus transformations for sequences of  $d$ -orthogonal polynomials*. Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat. 114: 26, (2020)
- [2] D. Barrios Rolanía, J. C. García-Ardila, D. Manrique *On the Darboux transformations and sequences of  $p$ -orthogonal polynomials*, *Appl. Math. Comput.*, 382, (2020), 125337.



## Exceptional orthogonal polynomials and isospectral transformations

MARÍA ÁNGELES GARCÍA-FERRERO<sup>1</sup>, DAVID GÓMEZ-ULLATE<sup>2,3</sup>,  
ROBERT MILSON<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *BCAM - Basque Center for Applied Mathematics, Alameda de Mazarredo 14, 48009 Bilbao (Spain).*  
*E-mail: mgarcia@bcamath.org.*

<sup>2</sup> *Departamento de Ingeniería Informática, Escuela Superior de Ingeniería, Universidad de Cádiz, 11519 Puerto Real (Spain). E-mail: david.gomezullate@uca.es.*

<sup>3</sup> *Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid (Spain).*

<sup>4</sup> *Department of Mathematics and Statistics, Dalhousie University, Halifax, NS, B3H 3J5 (Canada).*  
*E-mail: rmilson@dal.ca.*

### Resumen

The double commutation method or the confluent Darboux transformations give rise to isospectral Schrödinger operators in one dimension. In this talk, we will introduce this mechanism and we will seek to apply it to the construction of exceptional orthogonal polynomial systems, which are complete polynomial systems arising as eigenfunctions of Sturm-Liouville problems and generalizing the classical families of Hermite, Laguerre and Jacobi. In particular, we will focus on the exceptional Legendre polynomials and we will emphasize the main differences with the usual construction method.

### Referencias

- [1] M.Á. García-Ferrero, D. Gómez-Ullate, R. Milson, *Exceptional Legendre polynomials and confluent Darboux transformations, Symmetry Integr. Geom.* 17 (2021) 016.

## Ortogonalidad variante. Aplicaciones

M. BELLO HERNÁNDEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja (Spain).*  
*E-mails: mbello@unirioja.es.*

### Resumen

Los polinomios ortogonales respecto a medidas variantes son útiles en el estudio de la aproximación racional y de familias de polinomios ortogonales respecto a una medida fija. En esta charla presentamos algunos resultados recientes de esta línea de investigación.

### Referencias

- [1] Bello Hernández, M.; Santos Touza, C. Frobenius-Padé approximants of  $|x|$ . *J. Approx. Theory* 211 (2016), 1–15.
- [2] Bello Hernández, M.; López Lagomasino, G. Ratio and relative asymptotics of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle. *J. Approx. Theory* 92 (1998), no. 2, 216–244.
- [3] Bello Hernández, M.; López Lagomasino, G.; Mínguez-Ceniceros, J. Fourier-Padé approximants for Angelesco systems. *Constr. Approx.* 26 (2007), no. 3, 339–359.
- [4] Bello Hernández, M.; Miña Díaz, E. Strong asymptotic behavior and weak convergence of polynomials orthogonal on an arc of the unit circle. *J. Approx. Theory* 111 (2001), no. 2, 233–255.
- [5] Gonchar, A. A.; Rakhmanov, E. A. The equilibrium measure and distribution of zeros of extremal polynomials. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 125(167) (1984), no. 1(9), 117–127.
- [6] Kuijlaars, A. B. J.; Van Assche, W. The asymptotic zero distribution of orthogonal polynomials with varying recurrence coefficients. *J. Approx. Theory* 99 (1999), no. 1, 167–197.
- [7] López Lagomasino, G.; Medina Peralta, S.; Szmigielski, J. Mixed type Hermite-Padé approximation inspired by the Degasperis-Procesi equation. *Adv. Math.* 349 (2019), 813–838.
- [8] Nuwacu, J.; Van Assche, W. Multiple Askey-Wilson polynomials and related basic hypergeometric multiple orthogonal polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* 373 (2020), no. 12, 8289–8312
- [9] Stahl, H.; Totik, V. General orthogonal polynomials. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

## Structural formulas for matrix-valued orthogonal polynomials related to $2 \times 2$ hypergeometric operators

MIRTA M. CASTRO SMIRNOVA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla, España. E-mail: mirta@us.es.*

### Resumen

In the last few years, the search for examples of matrix-valued orthogonal polynomials that are common eigenfunctions of a second order differential operator has received a lot of attention after the seminal work of A. Durán in [3].

Recently, in [2], a new family of matrix-valued orthogonal polynomials of size  $2 \times 2$  was introduced, which are common eigenfunctions of a differential operator of *hypergeometric type* (in the sense defined by A. Tirao in [4]), with diagonal matrix eigenvalues.

As the case of classical orthogonal polynomials, the families of matrix-valued orthogonal polynomials satisfy many formal properties such as structural formulas, which have been very useful to compute explicitly the orthogonal polynomials related with several of these families.

We give some structural formulas for the family of matrix-valued orthogonal polynomials introduced in [2]. In particular, we give a Rodrigues formula, which allows us to write this family of polynomials explicitly in terms of the classical Jacobi polynomials. We also obtain a Pearson equation, which allows us to prove that the sequence of derivatives of  $k$  order,  $k \geq 1$ , of the orthogonal polynomials is also orthogonal.

This is a joint work with Celeste Calderón from Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina [1].

### Referencias

- [1] C. Calderón and M. M. Castro, *On a family of Jacobi type polynomials as eigenfunctions of  $2 \times 2$  hypergeometric operators: Structural formulas*, (2021), arXiv:2105.06991.
- [2] C. Calderón, Y. González, I. Pacharoni, S. Simondi, and I. Zurrián,  *$2 \times 2$  hypergeometric operators with diagonal eigenvalues*, *J. Approx. Theory*, 248:105299, 17pp (2019).
- [3] A. J. Durán, *Matrix inner product having a matrix symmetric second-order differential operator*, *Rocky Mt. J. Math.*, 27(2):585–600 (1997).
- [4] J. Tirao, *The matrix-valued hypergeometric equation*, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 100(14):8138–8141 (2003).

## Disk orthogonal functions satisfying three term relations

CLEONICE F. BRACCIALI<sup>1</sup>, TERESA E. PÉREZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 15054-000, São José do Rio Preto, SP, Brazil. E-mail: cleonice.bracciali@unesp.br.

<sup>2</sup> Instituto de Matemáticas IMAG & Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias. Universidad de Granada, 18071 Spain. E-mail: tperez@ugr.es.

### Resumen

We consider multivariate functions satisfying mixed orthogonality conditions with respect to a given moment functional. This kind of orthogonality means that the product of functions of different parity order is computed by means of the moment functional, and the product of elements of the same parity order is computed by a modification of the original moment functional. Three term relations and a Favard type theorem for this kind of mixed orthogonal functions are proved. In addition, a method to construct bivariate mixed orthogonal functions from univariate orthogonal polynomials and univariate mixed orthogonal functions is presented. Finally, we give a complete description of a sequence of mixed orthogonal functions on the unit disk on  $\mathbb{R}^2$ , that includes, as particular case, the classical orthogonal polynomials on the disk.

### Referencias

- [1] C. F. Bracciali, J. H. McCabe, T. E. Pérez, A. Sri Ranga, *A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula*, Mathematics of Computation, 85 (2016), 1837-1859.
- [2] C. F. Bracciali, T. E. Pérez, *Mixed orthogonality on the unit ball*, Comput. Appl. Math. 40 (2021), no. 8, Paper No. 274.

**RECENT TRENDS IN THE ANALYSIS OF  
NON-LOCAL AND NON-LINEAR EQUATIONS**

ORGANIZADORES

**Félix del Teso** (Universidad Complutense de Madrid)

**David Gómez-Castro** (University of Oxford)

**Juan Luis Vázquez** (Universidad Autónoma de Madrid)

## Elliptic PDE's, Stochastic Processes and Dynamic Programming Equations

ÁNGEL ARROYO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Complutense de Madrid. E-mail: [angelrea@ucm.es](mailto:angelrea@ucm.es)

### Resumen

In the recent years, the study of discrete stochastic processes and mean value properties in connection with PDE's has gained and increasing attention. This interplay can be described by a *dynamic programming equation*, a sort of discretization of the PDE which is stated as the functional equation

$$\int_{B_1} \frac{u(x + \varepsilon z) - u(x)}{\varepsilon^2} d\mu_x(z) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

where  $\varepsilon > 0$  and  $x \mapsto \mu_x$  is any choice of symmetric probability measures on  $B_1$  satisfying certain uniform ellipticity condition. It turns out that the solutions to this equation can be regarded as approximations to viscosity solutions of the corresponding PDE, and hence questions such as the regularity of its solutions have become more relevant.

We present a proof of an asymptotic Hölder estimate and Harnack's inequality for solutions of dynamic programming equations with bounded and measurable increments, an analogous result to the celebrated Krylov-Safonov regularity method for non-divergence form elliptic equations. The results also generalize to functions satisfying Pucci-type inequalities for discrete extremal operators, which cover a quite general class of equations. (Joint work with Pablo Blanc and Mikko Parviainen, University of Jyväskylä).

## The bubble solution for the critical fractional Hénon equation in $\mathbb{R}^N$ : non-degeneracy and uniqueness.

BEGOÑA BARRIOS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Universidad de La Laguna. Tenerife. Canary Islands. Spain. E-mail: bbarrios@ull.es*

### Resumen

In this talk we show a linear non-degeneracy result of positive radially symmetric solutions of the critical Henon equation associated to the fractional Laplacian operator in the  $N$ -dimensional Euclidean space; that is,

$$(-\Delta)^s u = |x|^\alpha u^{\frac{N+2s+2\alpha}{N-2s}}, \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

As a consequence a uniqueness result of those solutions with Morse index equal to one is obtained. In particular, we get that the ground state solution is unique. Our approach follows some ideas developed in the deep, and celebrated, papers done by R. Frank and E. Lenzmann (Acta Math. 2013) and R. Frank, E. Lenzmann, L. Silvestre (Comm. Pure Appl. Math. 2016), but, of course, our proofs are not based on ODE arguments as occurs in the local case. Our non-degeneracy result extends, in the radial setting, some known theorems proved by J. Dávila, M. del Pino and Y. Sire (Proc. Amer. Math. Soc. 2013) and by F. Gladiali, M. Grossi and S.L.N. Neves (Adv. Math. 2013). However, due to the nature of the fractional operator and the weight in nonlinearity, we also argue in a different way than these authors do.

The results presented in this talk have been obtained in collaboration with S. Alarcón and A. Quaas from U. Valparaíso (Chile).

## Stability in Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities: nonlinear flows, regularity and the entropy method

MATTEO BONFORTE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Universidad Autónoma de Madrid and ICMAT. Spain. E-mail: [matteo.bonforte@uam.es](mailto:matteo.bonforte@uam.es)*

### Resumen

We discuss stability results in Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities, a joint project with J. Dolbeault, B. Nazaret and N. Simonov. We have developed a new quantitative and constructive "flow method", based on entropy methods and sharp regularity estimates for solutions to the fast diffusion equation (FDE). This allows to study refined versions of the Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities that are nothing but explicit stability estimates. Using the quantitative regularity estimates, we go beyond the variational results and provide fully constructive estimates, to the price of a small restriction of the functional space which is inherent to the method.



## Singular solutions for fractional parabolic boundary value problems

HARDY CHAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Ciencias Matemáticas. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Spain.  
E-mail: hardychan69@gmail.com*

### Resumen

The standard problem for the classical heat equation posed in a bounded domain  $\Omega$  of  $\mathbb{R}^n$  is the initial and boundary value problem. If the Laplace operator is replaced by a version of the fractional Laplacian, the initial and boundary value problem can still be solved on the condition that the non-zero boundary data must be singular, i.e., the solution  $u(t, x)$  blows up as  $x$  approaches  $\partial\Omega$  in a definite way. In this paper we construct a theory of existence and uniqueness of solutions of the parabolic problem with singular data taken in a very precise sense, and also admitting initial data and a forcing term. When the boundary data are zero we recover the standard fractional heat semigroup. A general class of integro-differential operators may replace the classical fractional Laplacian operators, thus enlarging the scope of the work.

As further results on the spectral theory of the fractional heat semigroup, we show that a one-sided Weyl-type law holds in the general class, which was previously known for the restricted and spectral fractional Laplacians, but is new for the censored (or regional) fractional Laplacian. This yields bounds on the fractional heat kernel.

## Symmetry and symmetry-breaking for the fractional Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality

AZAHARA DE LA TORRE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Universidad de Granada. Spain. E-mail: adelatorre@ugr.es*

### Resumen

In this talk we will consider a new fractional version of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality which is invariant under scaling and represents an interpolation between the fractional Sobolev inequality and the (usual or weighted) fractional Hardy inequality. We will focus on three different goals. First, the existence and nonexistence of extremal solutions. Next, some results on the symmetry and symmetry-breaking region for the minimizers, where we will observe that the non-local version presents a contrasted behavior from its local counterpart. Finally, we will show non-degeneracy of critical points and uniqueness of minimizers in the radial symmetry class.

This is a joint work with W. Ao and MdM. González.

## Instantaneous boundedness in linear and nonlinear diffusion equations, and related functional inequalities

JØRGEN ENDAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Madrid (UAM)  
Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid, Spain E-mail: jorgen.endal@uam.es*

### Resumen

We establish instantaneous boundedness, i.e.  $L^1$ - $L^\infty$ -smoothing, for generalized porous medium equations of the form

$$\partial_t u + (-\mathfrak{L})[u^m] = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times (0, T),$$

where  $m \geq 1$  and  $-\mathfrak{L}$  is a linear, symmetric, and nonnegative operator. The class of operators we consider includes, but is not limited to, Lévy operators. Our method is based on the interplay between a dual formulation of the problem and estimates on the Green function of  $-\mathfrak{L}$ .

In the linear case ( $m = 1$ ), it is well-known that the  $L^1$ - $L^\infty$ -smoothing effect is equivalent to Nash inequalities, which in turn is equivalent to heat kernel estimates, from which the Green function estimates, needed for our method to work, can be deduced.

We are far from such a complete picture in the nonlinear setting ( $m > 1$ ), but we can show that operators which give instantaneous boundedness in the linear case also do so in the nonlinear case. This is not an equivalence since, for instance, Lévy operators which have 0-order (i.e., operators like  $-\mathfrak{L} = I - J*$ ) do not regularize when  $m = 1$ , but they do regularize when  $m > 1$ ; we provide explicit examples when this occurs. We therefore conclude that the situation in the nonlinear case completely changes since smoothing largely depends on the nonlinearity as well, and is, in some situations, (somehow) independent of the “smoothing properties” of the linear operator.

Finally, we show that smoothing effects, both linear and nonlinear, imply Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities, and we explore equivalences both in the linear and nonlinear settings.

This is a work in collaboration with M. Bonforte.

## Nonlocal macroscopic limits of kinetic equations leading to chemotactic superdiffusion and swarming

GISELL ESTRADA-RODRIGUEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Basque Center for Applied Mathematics, Spain. E-mail: gestrada@bcamath.org*

### Resumen

The long range movement of certain organisms in the presence of a chemoattractant can be governed by long distance runs, according to an approximate Lévy distribution. In the first part of this talk we clarify the form of biologically relevant PDE descriptions for such movements. We derive Patlak–Keller–Segel-like equations involving nonlocal, fractional Laplacians from a kinetic model for cell movement. In the second part of the talk, motivated by the previous nonlocal movement of biological organisms, we considered Lévy systems of interacting particles which combine superdiffusive random movement with emergent collective behaviour from local communication and alignment. The resulting kinetic model is studied at short and long time scales. We derived a fractional PDE from the movement strategies of the individuals, introducing long range interactions and alignment into the analysis.

## Optimal regularity for the fully nonlinear thin obstacle problem

XAVIER FERNÁNDEZ-REAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup>EPFL. Switzerland E-mail: xavier.fernandez-real@epfl.ch

### Resumen

The thin obstacle problem for an elliptic operator  $L$  with zero obstacle is

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } B_1 \setminus \{x_n = 0, u = 0\} \\ Lu \leq 0 & \text{in } B_1 \\ u \geq 0 & \text{on } B_1 \cap \{x_n = 0\}. \end{cases} \quad (1)$$

When  $L$  is the Laplacian, this is also called the Signorini problem, and it is now a classical free boundary problem. In this case, the  $C^{1,\alpha}$  (one-sided) regularity of solutions was first proved by Caffarelli in 1979, and it was not until 2004 that Athanasopoulos and Caffarelli were able to prove the optimal regularity of solutions,  $C^{1,1/2}$ . This was done by observing that solutions to the thin obstacle problem satisfy certain monotonicity formulas, available only because  $L = \Delta$ .

In this talk we deal with the nonlinear generalization consisting in taking  $Lu = F(D^2u)$  for some convex uniformly elliptic fully nonlinear operator  $F$ .

Under such conditions, the  $C^{1,\alpha}$  regularity was proved in 2016, and then a study of regular points was performed in 2017 by Ros-Oton and Serra, where they are locally a  $C^1$  manifold. Nonetheless, due to the lack of monotonicity formulas, the optimal regularity of solutions was still not known.

In this talk, we present our recent results together with M. Colombo and X. Ros-Oton, where we show what is the optimal regularity of (1). In particular, we prove that, if in addition  $F$  is rotationally invariant, then solutions are always  $C^{1,1/2}$ .

## Logarithmic Sobolev inequalities and equilibrium fluctuations for weakly interacting diffusions

RISHAHB GVALANI<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Max-Planck Institute. Germany E-mail: rishabh.gvalani@mis.mpg.de*

### Resumen

We study the mean field limit of interacting diffusions for confining and interaction potentials that are non-convex. The limiting behaviour is described by the nonlocal McKean–Vlasov PDE. We explore the relationship between the limit  $N \rightarrow \infty$  of the constant in the logarithmic Sobolev inequality (LSI) for the  $N$ -particle system and the presence or absence phase transitions for the mean field limit, conjecturing a limiting form of the LSI constant. We also explore the consequences of the non-degeneracy of the LSI constant as they relate to uniform-in-time propagation of chaos and equilibrium fluctuations. Our results extend previous results on unbounded spin systems as well as recent results on (uniform-in-time) propagation of chaos using novel coupling arguments. Joint work with Matías Delgadino, Greg Pavliotis, and Scott Smith.

## A new notion of solutions to the $p$ -Laplacian evolution equation in metric measure spaces

JOSÉ M. MAZÓN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Análisis Matemático. Universitat de Valencia. E-mail: jose.m.mazon@uv.es*

### Resumen

The  $p$ -Laplacian evolution equation in metric measure spaces has been studied as the gradient flow in  $L^2$  of the  $p$ -Cheeger energy (for  $1 < p < \infty$ ). In this paper, using the first-order differential structure on a metric measure space introduced by Gigli, we characterize the subdifferential in  $L^2$  of the  $p$ -Cheeger energy. This gives rise to a new definition of the  $p$ -Laplacian operator in metric measure spaces, which allows us to work with this operator in more detail. In this way, we introduce a new notion of solutions to the  $p$ -Laplacian evolution equation in metric measure spaces. For  $p = 1$ , we obtain a Green-Gauss formula similar to the one by Anzellotti for Euclidean spaces, and use it to characterise the 1-Laplacian operator and study the total variation flow. We also study the asymptotic behaviour of the solutions of the  $p$ -Laplacian evolution equation, showing that for  $1 \leq p < 2$  we have finite extinction time.

## From sign-changing solutions to the Yamabe equation to critical competitive systems

MARÍA MEDINA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Universidad Autónoma de Madrid. Spain. E-mail: maria.medina@uam.es*

### Resumen

In this talk we will analyze the existence and the structure of different sign-changing solutions to the Yamabe equation in the whole space. Later on, we will use these constructions to find positive solutions to critical competitive systems in dimension 4.



## A result of uniqueness of trivial solutions for the fractional laplacian operator

ALEXIS MOLINO<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Matemáticas, Universidad de Almería.  
Facultad de Ciencias Experimentales, Ctra. de Sacramento sn. 04120  
La Cañada de San Urbano. Almería, Spain. E-mail: amolino@ual.es*

### Resumen

In this talk we establish the nonexistence of nontrivial solution to

$$\begin{cases} (-\Delta^s)u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

being  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) a bounded domain and  $f$  locally Lipschitz with non-positive primitive.

Joint work with J. Carmona (U. Almería)

## Large-time behaviour for anisotropic stable nonlocal diffusion problems with convection

FERNANDO QUIRÓS<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*U. Autónoma de Madrid, Spain. E-mail: fernando.quirós@uam.es*

### Resumen

We study the large-time behaviour of nonnegative solutions to the Cauchy problem for the convection-diffusion nonlocal heat equation

$$u_t + \mathcal{L}u + \mathbf{a} \cdot \nabla(|u|^{q-1}u) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty),$$

where  $\mathbf{a}$  is a constant direction,  $q > 1$ , and  $\mathcal{L}$  is an anisotropic  $\alpha$ -stable diffusion operator,  $\alpha \in (0, 2)$ . The initial data are assumed to be bounded and integrable, with integral  $M$ . The mass of the solution is conserved along the evolution.

The large-time behaviour is given by the source-type solution with initial datum  $M\delta_0$  of an equation that depends on the relative strength of convection and diffusion:

- $u_t + \mathcal{L}u = 0$  if  $q > 1 + \frac{\alpha-1}{N}$  (diffusive range);
- the original equation if  $q = 1 + \frac{\alpha-1}{N}$  (critical case);
- $u_t + \mathcal{L}'u + \mathbf{a} \cdot \nabla(|u|^{q-1}u) = 0$  where  $\mathcal{L}'$  is a “projection” of the original operator acting only in the subspace orthogonal to  $\mathbf{a}$  if  $1 < q < 1 + \frac{\alpha-1}{N}$  (convective range).

The determination of the “projected” operator  $\mathcal{L}'$  is one of the main issues here.

This is a joint work with Jørgen Endal (U. Autónoma de Madrid) and Liviu Ignat (Simion Stoilow Institute of Mathematics of the Romanian Academy).

## Fractional discrete Laplacian and weak unique continuation

LUZ RONCAL<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Basque Center for Applied Mathematics. Spain. E-mail: lroncal@bcamath.org*

### Resumen

For the fractional Laplacian very strong uniqueness properties hold, which fail for local operators like the Laplacian. In the physics community this property is known as the *antilocality* of the fractional Laplacian.

The first purpose of this talk is to illustrate that for discrete versions of this nonlocal operator, this property fails. We will provide counterexamples for the weak unique continuation property (UCP) for discrete Schrödinger equations with bounded potential.

Our results will be complemented by others of positive nature concerning global behaviour for exterior domains and boundary bulk doubling estimates for the discrete half-Laplacian.

Joint work with Aingeru Fernández-Bertolin, Angkana Rüland, and Diana Stan.

## Convergence in relative error for the fast diffusion equation and consequences

NIKITA SIMONOV<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Université Paris-Dauphine, PSL Research University. France. E-mail: [simonov.nikita@gmail.com](mailto:simonov.nikita@gmail.com)*

### Resumen

In this talk, I will discuss the asymptotic behavior of solutions to the fast diffusion equation when the tails of the initial datum have a certain decay. In this setting, I will provide a fully constructive estimate of the threshold time after which the solution enters a neighborhood of the Barenblatt profile in a uniform relative norm. This estimate plays a fundamental role in obtaining a constructive stability result in Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities.

The results are based on a joint work with Matteo Bonforte, Jean Dolbeault, and Bruno Nazaret.

**RED ADVANCES IN LINEAR ALGEBRA AND  
MATRIX ANALYSIS**

ORGANIZADORES

**Ana Marco** (Universidad de Alcalá)

**Carlos Marijuán** (Universidad de Valladolid)

**Fernando de Terán** (Universidad Carlos III de Madrid)

## Changes of the Weyr characteristics of matrix pencils after rank-one perturbations

ITZIAR BARAGAÑA<sup>1</sup>, ALICIA ROCA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Ciencia de la Computación e IA, Universidad del País Vasco UPV/EHU (Spain). E-mail: [itziar.baragana@ehu.eus](mailto:itziar.baragana@ehu.eus).

<sup>2</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, IMM, Universitat Politècnica de València (Spain). E-mail: [aroca@mat.upv.es](mailto:aroca@mat.upv.es).

### Resumen

The notion of Jordan chain at a given eigenvalue for square matrix pencils has recently been introduced in the literature on the field. Out of it, the Weyr characteristic of a regular matrix pencil has been extended to square pencils, and bounds for the possible Weyr characteristic of a square pencil obtained by a rank-one perturbation of another pencil have been provided ([3]).

On the other hand, the change of the Kronecker structure of a matrix pencil perturbed by another pencil of rank one has been characterized in terms of the homogeneous invariant factors and the chains of column and row minimal indices of the initial and the perturbed pencils ([1]). See also [2].

In this work, we present a new characterization in terms of the homogeneous invariant factors and the conjugate partitions of the corresponding chains of column and row minimal indices of both pencils. We also introduce the generalized Weyr characteristic of an arbitrary matrix pencil, and, with the help of the mentioned result, we obtain bounds for its variation when the pencil is perturbed by another pencil of rank one. The results improve known results on the problem, and hold for arbitrary perturbation pencils of rank one and for any algebraically closed field.

### Referencias

- [1] I. Baragaña, A. Roca, *Rank-one perturbations of matrix pencils*, Linear Algebra and its Applications, 606 (2020), 170-191.
- [2] M. Dodig, M. Stošić, *Rank One Perturbations of Matrix Pencils*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 41, 4 (2020), 1889-1911.
- [3] L. Leben, F. Martínez-Pería, F. Philipp, C. Trunk, H. Winkler, *Finite Rank Perturbations of Linear Relations and Singular Matrix Pencils*, Complex Analysis and Operator Theory, 15:37 (2021).

## On the inverse $M$ -matrix problem for singular, symmetric and irreducible $M$ -matrices

A. CARMONA<sup>1</sup>, A.M. ENCINAS<sup>1</sup>, M. MITJANA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya (Spain). E-mails: angeles.carmona@upc.edu, andres.marcos.encinas@upc.edu, margarida.mitjana@upc.edu.*

### Resumen

In this communication we are concerned with the problem of characterizing when the group inverse of a singular, symmetric and irreducible  $M$ -matrix is also an  $M$ -matrix. This question has generated a great amount of works and has only been solved in a few specific cases, mainly involving the combinatorial laplacian of a network. Specifically, Y. Chen et al. established in [2] that the group inverse of a d.d. Jacobi matrix; that is the Laplacian associated with a weighted path, is also an  $M$ -matrix when its order is lower than 4 and moreover under severe constraints on the weights. More generally, S.J. Kirkland et al. proved in [3] that the only weighted trees whose Laplacian matrix satisfy the required property are, in addition to the above paths, stars with some constraints on their conductances. Under these constraints they proved that there exists an infinity family of stars with the referred property. The use of Potential Theory techniques, has allowed us to consider the problem with generality, avoiding the diagonal dominance hypothesis. Since each singular and symmetric and irreducible  $M$ -matrix can be identified with a singular and positive semidefinite Schrödinger operator on the connected graph associated with the matrix, the proposed problem consists on determining when the matrix associated with the corresponding Green operator is also an  $M$ -matrix. With this point of view, we obtained a necessary and sufficient condition for the general case, that allowed us to show that there exist infinitely many singular, symmetric and irreducible Jacobi matrices of any order such that its group inverse is also an  $M$ -matrix, see [1]. The aim of this work is to analyze the question for singular, symmetric and semidefinite Schrödinger operators on stars.

### Referencias

- [1] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, *The  $M$ -matrix inverse problem for singular and symmetric Jacobi matrices*, *Linear Algebra Appl.*, **432** (2012), 1090–1098.
- [2] Y. Cheng, S.J. Kirkland, M. Neumann, *The Group generalized inverses of  $M$ -matrices associated with periodic and nonperiodic Jacobi matrices*, *Linear and Multilinear Algebra*, **39** (1995), 325–340.
- [3] S.J. Kirkland, M. Neumann, *The  $M$ -matrix group inverse problem for weighted trees*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **19** (1998), 226–234.

## A combinatorial characterization of C-realizability in the Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem

C. MARIJUÁN<sup>1</sup>, J. MORO<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid / IMUVA (Spain). E-mails: marijuan@mat.uva.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid (Spain). E-mail: jmoromath@math.uc3m.es.*

### Resumen

The SNIEP (Symmetric Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem) deals with characterizing the possible spectra of symmetric entrywise nonnegative matrices. Any such spectrum is said to be a realizable list. Among all realizable list a subclass was identified as those ‘realizable by compensation’ (in short, C-realizable), which was shown in [1] to include most of subclasses known so far associated with sufficient realizability conditions.

In this talk we present a combinatorial characterization of C-realizable lists, first for the special case of zero-sum lists [2], and then for arbitrary ones with nonnegative sum. One of the consequences of this characterization is that the set of zero-sum C-realizable lists is the union of polyhedral cones whose faces are described by equations involving only linear combinations with coefficients 1 and -1 of the entries in the list.

### Referencias

- [1] A. Borobia, J. Moro & R. Soto *A unified view on compensation criteria in the real nonnegative inverse eigenvalue problem*, Linear Algebra Appl., vol. 428 (2008), pp. 2574–2584.
- [2] C. Marijuán & J. Moro *A characterization of trace-zero sets realizable by compensation in the SNIEP*, Linear Algebra Appl., vol. 615 (2021), DOI: 10.1016/j.laa.2020.12.021



## Bidiagonal decomposition of totally positive h-Bernstein-Vandermonde matrices: error analysis, perturbation theory and applications

A. MARCO<sup>1</sup>, J.J. MARTÍNEZ<sup>1</sup>, R. VIAÑA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Física y Matemáticas, Universidad de Alcalá (Spain). E-mails: ana.marco@uah.es, jjavier.martinez@uah.es, raquel.viana@uah.es.*

### Resumen

A fast and accurate algorithm to compute the bidiagonal decomposition of totally positive h-Bernstein-Vandermonde (hBV) matrices is shown. The hBV matrices are a generalization of the Vandermonde matrices obtained when the h-Bernstein bases, instead of the monomimal basis, are considered. The h-Bernstein bases are used in the area of CAGD and arise as a generalization of the Bernstein basis.

The error analysis of the algorithm and the perturbation theory of the bidiagonal factorization of an hBV matrix are carried out [1]. The application of our algorithm to the computation of the Moore-Penrose inverse of an hBV matrix is presented. An algorithm of Koev [2] is also used in this stage.

### Referencias

- [1] A. Marco, J.J. Martínez, R. Viaña, *Error analysis, perturbation theory and applications of the bidiagonal decomposition of rectangular totally positive h-Bernstein-Vandermonde matrices*. *Linear Algebra Appl.* 613 (2021), 377–392.
- [2] P. Koev, *Accurate computations with totally nonnegative matrices*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 29 (2007), 731–751.

## If you concatenate two stable algorithms, when will you get a stable algorithm?

CARLOS BELTRÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. MATESCO, Universidad de Cantabria (Spain). E-mail: beltranc@unican.es.  
Grant PID2020-113887GB-I00 funded by MCIN/AEI /10.13039/501100011033.*

### Resumen

In the Numerical Linear Algebra community, there exist at least three well-known and widely accepted definitions of what is a stable algorithm. Following [1, 2], we will consider the definitions of *backward*, *forward* and *mixed stability* as measures of when to say that a given algorithm computes a mathematical function and how to quantify its precision. But... it is a common practice to take the output of a given method and use it as an input for another one. If both methods are stable, under which conditions can we grant that their composition -which is also an algorithm- is also stable? In this talk we will see that this apparently innocent question shows the tip of an iceberg. And we will discuss a proposal in order to melt it.

### Referencias

- [1] N. J. HIGHAM, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.
- [2] L. N. TREFETHEN AND D. BAU, III, *Numerical linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.

## On the consistency of $X^\top AX = B$ when either $B$ is symmetric or skew-symmetric

A. BOROBIA<sup>1</sup>, R. CANOGAR<sup>1</sup>, F. DE TERÁN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas Fundamentales, Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED).*  
*E-mails: aborobia@mat.uned.es, rcanogar@mat.uned.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés (Spain). E-mail:*  
*fteran@math.uc3m.es.*

### Resumen

In this talk, we analyze the consistency of the matrix equation

$$X^\top AX = B \tag{1}$$

where  $A, B$  are square complex matrices not necessarily of the same size, and  $X$  is an unknown matrix. In particular, we will first provide a necessary condition for (1) to have a solution  $X$ . Then, we will prove that this condition is also sufficient for most matrices  $A$  and an arbitrary symmetric (or skew-symmetric)  $B$ . An important simplification to prove the last statement is that we can restrict ourselves to the case where  $A$  and  $B$  are in canonical form for congruence. We use the canonical form for congruence introduced in [3], which consists of a direct sum of blocks of three types.

We want to emphasize that the question on the consistency of (1), when  $B$  is symmetric (or skew-symmetric), is equivalent to the following problem: given a bilinear form over the complex numbers (represented by the matrix  $A$ ), find the maximum dimension of a subspace such that the restriction of the bilinear form to this subspace is a symmetric (or skew-symmetric) non-degenerate bilinear form.

The results presented in this talk are in [1], and [2] (submitted).

### Referencias

- [1] A. Borobia, R. Canogar, F. De Terán. *On the consistency of the matrix equation  $X^\top AX = B$  when  $B$  is symmetric.* *Mediterr. J. Math.* 18, 40 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01656-7>
- [2] A. Borobia, R. Canogar, F. De Terán. *The equation  $X^\top AX = B$  with  $B$  skew-symmetric: How much of a bilinear form is skew-symmetric?* submitted (2021).
- [3] R. A. Horn, V. V. Sergeichuk. *Canonical forms for complex matrix congruence and \*-congruence.* *Linear Algebra Appl.* , 416 (2006) 1010–1032.

## Nonnegative Universal Realization Problem

C. MARIJUÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid (Spain). E-mail: cmarijuan@uva.es.*

### Resumen

We say that a list  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  of complex numbers is realizable, if it is the spectrum of a nonnegative matrix  $A$ . The Nonnegative Inverse Eigenvalue Problem (NIEP) is the problem of characterizing all possible realizable lists. If there exists a nonnegative matrix with spectrum  $\Lambda$  for each possible Jordan canonical form allowed by  $\Lambda$ , we say that  $\Lambda$  is Universally Realizable. The problem of determining the universal realizability of spectra is called the Nonnegative Universal Realization Problem.

In terms of  $n$ , the NIEP is completely solved only for  $n \leq 4$  and for  $n = 5$  with trace zero. It is clear that for  $n \leq 3$  the concepts of universally realizable and realizable are equivalent. We characterize the universal realizability of spectra of size 4 and of real spectra of size 5 with trace zero, and we describe a region for the universal realizability of nonreal spectra of size 5 with trace zero.

We will stress the use of techniques from Graph Theory.

### Referencias

- [1] C. R. Johnson, C. Marijuán, P. Paparella, M. Pisonero, *The NIEP*. Operator Theory: Advances and Applications 267 (2018) 199–220.
- [2] A. I. Julio, C. Marijuán, M. Pisonero, R. L. Soto, *On universal realizability of spectra*. Linear Algebra Appl. 563 (2019) 353–372.
- [3] A. I. Julio, C. Marijuán, M. Pisonero, R. L. Soto, *Universal realizability in low dimension*. Linear Algebra Appl. 619 (2021) 107–136.
- [4] R. Loewy, D. London, *A note on an inverse problem for nonnegative matrices*. Linear and Multilinear Algebra 6 (1978) 83–90.
- [5] H. Šmigoc, *The inverse eigenvalue problem for nonnegative matrices*. Linear Algebra Appl. 393 (2004) 365–374.
- [6] O. Spector, *A characterization of trace zero symmetric  $5 \times 5$  matrices*. Linear Algebra Appl. 434 (2011) 1000–1017.
- [7] J. Torre-Mayo, M. R. Abril-Raymundo, E. Alarcia-Estévez, C. Marijuán, M. Pisonero, *The nonnegative inverse eigenvalue problem from the coefficients of the characteristic polynomial*. EBL digraphs. Linear Algebra Appl. 426 (2007) 729–773.

## Low rank perturbation of regular matrix pencils with symmetry structures

FERNANDO DE TERÁN<sup>1</sup>, CHRISTIAN MEHL<sup>2</sup>, VOLKER MEHRMANN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid. E-mail: fteran@math.uc3m.es.*

<sup>2</sup> *Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin (Germany). E-mails: mehl@math.tu-berlin.es, mehrmann@math.tu-berlin.es.*

### Resumen

We will analyze the generic change of the Weierstraß Canonical Form of regular complex structured matrix pencils under generic structure-preserving additive low-rank perturbations. Several different symmetry structures are considered and it is shown that, for most of the structures, the generic change in the eigenvalues is analogous to the case of generic perturbations that ignore the structure. However, for some odd/even and palindromic structures, there is a different behavior for the eigenvalues 0 and  $\infty$ , respectively  $+1$  and  $-1$ . The differences arise in those cases where the parity of the partial multiplicities in the perturbed matrix pencil provided by the generic behavior in the general structure-ignoring case is not in accordance with the restrictions imposed by the structure. The new results extend results for the rank-1 and rank-2 cases that were obtained in [1, 2] for the case of special structure-preserving perturbations. As the main tool, we use decompositions of matrix pencils with symmetry structure into sums of rank-one matrix pencils, as those allow a parametrization of the set of matrix pencils with a given symmetry structure and a given rank.

Part of the contents of this talk have been recently published in [3].

### Referencias

- [1] L. Batzke, *Generic rank-one perturbations of structured regular matrix pencils*. Linear Algebra Appl., 458:638–670, 2014.
- [2] L. Batzke. *Generic rank-two perturbations of structured regular matrix pencils*. Oper. Matrices, 10:83–112, 2016.
- [3] F. De Terán, C. Mehl, V. Mehrmann. *Low rank perturbation of regular matrix pencils with symmetry structures*. Found. Comput. Math. (2021). <https://doi.org/10.1007/s10208-021-09500-4>

## Pivoting AISM

J. MAS<sup>1</sup>, J. MARÍN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Inst. de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València (Spain). E-mails: jmasm@imm.upv.es, jmarinma@imm.upv.es.*

### Resumen

It is well known that the accuracy of Gaussian elimination is related with the so called growth factor, see [5]. Pivoting strategies as partial, complete or rook pivoting can be used to maintain the growth factor under some bounds, see again [5].

We have developed preconditioners [2, 3, 4] for iterative methods based on the ISM factorization [1], which computes the LDU factorization of a matrix  $A$  using recursion formulas derived from the Sherman-Morrison formula.

To allow the use of pivoting strategies we present a modification in the recursion formulas of the ISM factorization. The aim is to construct more accurate preconditioners for any nonsingular matrix.

The original algorithm computes a vector at each step, by contrast the new pivoting algorithm in the  $k$ th step modifies all the vectors from  $k$  to  $n$ . Thus, it can be seen as a right-looking version of the ISM factorization. Since the Schur complement is available in this version of the algorithm, it is possible to implement pivoting strategies, including those mentioned above.

However, iterative methods are frequently used when the coefficient matrix of the system is sparse. Then the fill-in of the factors should be also considered. We study also the implementation of pivoting strategies that try to control simultaneously accuracy of the factorization and growth factor.

### Referencias

- [1] R. Bru, J. Cerdán, J. Marín, J. Mas, *Preconditioning sparse nonsymmetric linear systems with the Sherman-Morrison formula*, SIAM J. Sci. Comput., 25 (2), (2003), 701–715.
- [2] R. Bru, J. Marín, J. Mas, M. Tũma, *Balanced incomplete factorization*, SIAM J. Sci. Comput., 30(5), (2008), 2302–2318.
- [3] R. Bru, J. Marín, J. Mas, M. Tũma, M., *Improved balanced incomplete factorization*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 31(5), (2010), 2431–2452.
- [4] R. Bru, J. Marín, J. Mas, M. Tũma, *Balanced incomplete factorization preconditioners for least squares problems*, SIAM J. Sci. Comput. 36(4), pp. A2002-A2022.
- [5] N. J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 2002, <https://doi.org/10.1137/1.978089718027>.

## Herramientas eficientes para matrices ASSR

P. ALONSO<sup>1</sup>, J. MEANA<sup>1</sup>, J.M. PEÑA<sup>2</sup>, M.L. SERRANO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Oviedo (Spain). E-mails: palonso@uniovi.es, meana@uniovi.es, mlserrano@uniovi.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mail: jmpena@unizar.es.*

### Resumen

Los métodos numéricos adaptados a algunas clases de matrices estructuradas han adquirido gran importancia en los últimos años. Una clase de matrices estructuradas importante por sus aplicaciones son las matrices signo regulares (SR).

Nuestro objetivo en este estudio es aplicar algunas herramientas especialmente eficientes a una subclase de matrices, las casi estrictamente signo regulares (ASSR) introducidas en 2012 [4]. Estas matrices verifican que todos sus menores no triviales del mismo orden tienen el mismo signo estrictamente. Además generalizan las matrices casi estrictamente totalmente positivas (ASTP) introducidas en 1992 por Gasca, Micchelli y Peña en [3]. Un ejemplo importante de este tipo de matrices son las matrices de Hurwitz y las matrices de colocación de los B-splines.

En [1], se presentó una caracterización de las matrices ASSR utilizando la eliminación de Neville. El coste computacional de dicha caracterización puede ser reducido, cuando se trabaja con algunas subclases de matrices, como son las matrices ASTP o las M-bandeadas. En este trabajo, se han implementado varios algoritmos con Matlab para obtener una caracterización algorítmica eficiente de las matrices ASSR, considerando para ello algunos resultados previos (ver, por ejemplo, [1, 2, 3, 5]).

### Referencias

- [1] Pedro Alonso, J.M. Peña, and María Luisa Serrano. *On the characterization of almost strictly sign regular matrices*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 275:480–488, 2015.
- [2] V. Cortés and J. M. Peña. *Sign regular matrices and neville elimination*. Linear Algebra and its Applications, 421(1):53–62, 2007. Special Issue devoted to the 12th ILAS Conference.
- [3] M. Gasca, C. A. Micchelli, and J. M. Peña. *Almost strictly totally positive matrices*. Numerical Algorithms, 2:225–236, 1992.
- [4] Rong Huang, Jianzhou Liu, and Li Zhu. *Nonsingular almost strictly sign regular matrices*. Linear Algebra and its Applications, 436(11):4179–4192, 2012.
- [5] G. Mühlbach and M. Gasca. *A test for strict total positivity via Neville elimination*. In *Current Trends in Matrix Theory*, pages 225–232. North Holland, 1987.

## Alta precisión relativa para matrices de $q$ -enteros

HÉCTOR ORERA<sup>1</sup>, JORGE DELGADO<sup>1</sup>, JUAN MANUEL PEÑA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemática Aplicada / IUMA, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mails: hectororera@unizar.es, jorgedel@unizar.es, jmpena@unizar.es.*

### Resumen

Las matrices totalmente positivas tienen todos los menores no negativos [1]. Las matrices totalmente positivas no singulares pueden representarse como un producto de matrices bidiagonales. Esta factorización se conoce como descomposición bidiagonal y puede utilizarse como una parametrización natural de esta clase de matrices para llevar a cabo operaciones con alta precisión relativa [2]. De hecho, si conocemos su descomposición bidiagonal con alta precisión relativa podemos calcular sus valores propios, sus valores singulares o su inversa también con alta precisión relativa. En esta presentación introduciremos alguna nueva clase de matrices basadas en los  $q$ -enteros [3] para la que hemos logrado obtener la descomposición bidiagonal con alta precisión relativa, y, por tanto, podemos realizar dichos cálculos algebraicos con alta precisión relativa.

### Referencias

- [1] S. M. Fallat y Ch. R. Johnson, *Totally nonnegative matrices*, Princeton University Press, 2011.
- [2] P. Koev. *Accurate computations with totally nonnegative matrices*. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 29 (2007), 731-751.
- [3] J. Delgado, H. Orera y J. M. Peña. *High relative accuracy with matrices of  $q$ -integers*. Numer. Linear Algebra Appl. 28 (2021), e2383.



## Computing the partial GSVD by means of restarted Lanczos

F. ALVARRUIZ<sup>1</sup>, C. CAMPOS<sup>2</sup>, J. E. ROMAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *D. de Sistemes Informàtics i Computació, Universitat Politècnica de València, València (España).*

*E-mails: fbermejo@dsic.upv.es, jroman@dsic.upv.es.*

<sup>2</sup> *D. de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, València (España). E-mail:*

*carmen.campos-gonzalez@uv.es.*

### Resumen

The computation of the partial generalized singular value decomposition (GSVD) [1] of a pair of large-scale matrices can be approached by means of iterative methods based on subspaces of increasing dimension, and particularly Krylov subspaces [2]. In this work, we consider several strategies based on Lanczos bidiagonalization in one way or another, and assess the viability of adapting the thick restart to this problem, since this technique is already being used successfully in the context of other related linear algebra problems [3]. Numerical experiments illustrate the effectiveness of the proposed methods. We also compare the new methods with an alternative solution scheme via an equivalent generalized eigenvalue problem [4], evaluating both the accuracy and the computational performance. The analysis is done by means of a parallel implementation in the SLEPc library [5].

### Referencias

- [1] C. C. Paige and M. A. Saunders. *Towards a generalized singular value decomposition*. SIAM J. Numer. Anal., 18(3) (1981), 398–405.
- [2] H. Zha. *Computing the generalized singular values/vectors of large sparse or structured matrix pairs*. Numer. Math., 72(3) (1996), 391–417.
- [3] Vicente Hernandez, Jose E. Roman, and Andres Tomas. *A robust and efficient parallel SVD solver based on restarted Lanczos bidiagonalization*. Electron. Trans. Numer. Anal., 31 (2008), 68–85.
- [4] J. Huang and Z. Jia. *On choices of formulations of computing the generalized singular value decomposition of a large matrix pair*. Numer. Algorithms, 87(2) (2020), 689–718.
- [5] V. Hernandez, J. E. Roman, and V. Vidal. *SLEPc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems*. ACM Trans. Math. Software, 31(3) (2005), 351–362.

## RED DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA Y SINGULARIDADES

### ORGANIZADORES

**Leovigildo Alonso** (Universidad de Santiago de Compostela)

**Carlos Galindo** (Universitat Jaume I)

**Ana Jeremías** (Universidad de Santiago de Compostela)

## Topología Algebraica Moderadamente Discontinua

M. PE PEREIRA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología e Instituto de Matemática Interdisciplinar. Universidad Complutense de Madrid. E-mails: maria.pe@mat.ucm.es.*

### Resumen

En los trabajos [1] y [2] desarrollamos una nueva topología algebraica métrica que comprende una Teoría de Homología y Homotopía Moderadamente Discontinua que se aplica a gérmenes subanalíticos en  $\mathbb{R}^n$  (con una estructura métrica suplementaria). y que satisface los análogos a los teoremas usuales en topología algebraica: sucesiones exactas largas, en particular para pares, Mayer Vietoris, Seifert van Kampen para recubrimientos especiales, etc...

Esta teoría captura información invariante por transformaciones bilipschitz o casi isometrías. Los ejemplos típicos son gérmenes subanalíticos en  $\mathbb{R}^n$  o bien con la métrica interna (la métrica dada por el ínfimo de longitudes de caminos inducida por la métrica euclídea del ambiente) o bien la métrica externa (la restricción de métrica euclídea del ambiente).

Un germen subanalítico es topológicamente un cono sobre su enlace y la teoría moderadamente discontinua captura las diferentes velocidades, con respecto a la distancia al origen, en las que la topología del enlace colapsa al origen.

En esta charla presentaré los conceptos más importantes en la teoría y algunos resultados o aplicaciones que tenemos hasta el momento. En particular estudiamos la topología algebraica MD de algunas singularidades complejas como las ramas de curvas planas, gérmenes de superficie normales o el germen liso.

### Referencias

- [1] J. Fernández de Bobadilla, S. Heinze, M. Pe Pereira, E. Sampaio, *Moderately discontinuous homology*, Aceptado en Comm. Pure App. Math.. <https://doi.org/10.1002/cpa.22013>.  
Disponible en <https://arxiv.org/pdf/1910.12552.pdf>
- [2] J. Fernández de Bobadilla, S. Heinze, M. Pe Pereira, *Moderately discontinuous homotopy*. Aceptado en IMRN.  
Disponible en <https://arxiv.org/pdf/2007.01538.pdf>

## Clasificación de fibrados de Ulrich no big

R. MUÑOZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, CC. e Ing. de Materiales y Tecnología Electrónica, Universidad Rey Juan Carlos (Spain). E-mail: roberto.munoz@urjc.es.*

### Resumen

Un fibrado vectorial  $E$  sobre una variedad projectiva lisa  $X \subset \mathbb{P}^N$  se dice de Ulrich si la cohomología  $H^\bullet(X, E(-p))$  se anula para  $1 \leq p \leq \dim X$ . Estos fibrados tienen propiedades de positividad, en particular son globalmente generados, por lo que resulta de interés clasificar aquellos donde esta propiedad se ve limitada, por ejemplo cuando  $E$  no es big. En esta charla presentaremos un resultado de clasificación de fibrados de Ulrich no big sobre variedades de dimensión pequeña.

Es un trabajo conjunto con A. F. Lopez (Roma 3).

### Referencias

- [1] A. F. Lopez, *On the positivity of the first Chern class of an Ulrich vector bundle*, Communications in Contemporary Mathematics, 2021.
- [2] A. F. Lopez, R. Muñoz. *On the classification of non-big Ulrich vector bundles on surfaces and threefolds*. Internat. J. of Math., 2021.
- [3] A. F. Lopez, J. C. Sierra. *A geometrical view of Ulrich vector bundles*. arXiv:2105.05979

## Effective computation of the Sullivan model of a topological space and its rational homotopy type

C. ALQUÉZAR-BAETA<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, University of Zaragoza (Spain).*

<sup>2</sup> *Institute of Mathematics and Applications (IUMA), Zaragoza (Spain).*

*E-mail: alquezar@unizar.es.*

### Resumen

The rational homotopy type of a space is a simplified version of the homotopy type where all homotopy groups are tensored by  $\mathbb{Q}$ . Despite the lost information, rational homotopy has the advantage of being constructive.

Due to Sullivan [1, 2], for a particular topological space  $X$  that satisfies some conditions, it is known theoretically how to obtain its rational homotopy type via the construction of a commutative differential graded algebra, called the Sullivan model of  $X$ . This algebra is quasi-isomorphic to the normalized singular cochain algebra of  $X$ ,  $C^*(X)$ , and it allows us to establish a categorical equivalence between homotopy types of spaces and isomorphism classes of Sullivan models:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rational homotopy} \\ \text{types of spaces} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{isomorphism classes of} \\ \text{minimal Sullivan models} \end{array} \right\} \quad (1)$$

In this talk, we will: (1) introduce the notion of the Sullivan model of a space, (2) explain in which cases this model captures the topological information we are interested in, and (3) we will present an effective algorithm (with a concrete implementation) for the computation of the rational homotopy type of this kind of topological spaces. Finally, we will discuss the possible applications of this theory in the field of singularity theory.

### Referencias

- [1] Félix, Yves; Halperin, Stephen; Thomas, Jean-Claude. *Rational Homotopy Theory*. Springer Nature (2001)
- [2] Griffiths, P. and Morgan J. *Rational homotopy theory and differential forms*. Progress in Mathematics vol. 16, Birkhäuser (2013).

## Bernstein-Sato polynomials in singular varieties

J. ÀLVAREZ MONTANER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dept. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya. E-mail: josep.alvarez@upc.edu.*

### Resumen

The theory of D-modules over singular varieties does not behave as well as in the smooth case. However, in some cases, we may reproduce some parts of it. In this talk we will pay attention to Bernstein-Sato polynomials and related D-module theoretic invariants in the case of direct summands of polynomial rings. This is a class of singular varieties that includes toric varieties and rings of invariants of finite groups.

This talk is based on joint work with C. Huneke, D. Hernández, J. Jeffries, L. Núñez-Betancourt, P. Teixeira and E. Witt.

### Referencias

- [1] J. Àlvarez Montaner, C. Huneke and L. Núñez-Betancourt, *D-modules, Bernstein-Sato polynomials and F-invariants of direct summands*, Adv. Math., 321, (2017), 298-325.
- [2] J. Àlvarez Montaner, D. Hernández, J. Jeffries, L. Núñez-Betancourt, P. Teixeira and E. Witt, *Bernstein-Sato functional equations, V-filtrations and multiplier ideals of direct summands*, Comm. Contemp. Math., (2021) online first.
- [3] J. Àlvarez Montaner, D. Hernández, J. Jeffries, L. Núñez-Betancourt, P. Teixeira and E. Witt, *Bernstein's inequality and holonomicity for certain singular rings*, arXiv:2103.02986. .

## Yano's conjecture

G. BLANCO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, KU Leuven (Belgium). E-mail: guillem.blanco@kuleuven.be.*

### Resumen

In 1982, T. Yano [1] proposed a conjecture about the generic  $b$ -exponents of an irreducible plane curve singularity. Given any holomorphic function  $f : (\mathbb{C}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  defining an irreducible plane curve, the conjecture gives an explicit description for the generic  $b$ -exponents of the singularity in terms of the resolution of  $f$ . In this talk, we will present a proof of Yano's conjecture [2].

### Referencias

- [1] T. Yano, *Exponents of singularities of plane irreducible curves*, Sci. Rep. Saitama Univ. Ser. **10** (1982), no. 2, 21–28.
- [2] G. Blanco, *Yano's conjecture*, Invent. Math., 226 (2021), 421–465.

## Soporte singular de singularidades racionales

L. ALONSO TARRÍO<sup>1</sup>, A. CASTAÑO DOMÍNGUEZ<sup>2</sup>, A. JEREMÍAS  
LÓPEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela (Spain). E-mails:*  
`leo.alonso@usc.es`, `ana.jeremias@usc.es`.

<sup>2</sup> *Dpto. de Álgebra, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail: albertocd@us.es.*

### Resumen

Dado un esquema  $X$ , la categoría derivada  $D(X)$  de complejos de haces casi-coherentes sobre  $X$  es un objeto muy útil para comprender cómo es el esquema. Una manera de estudiar dicha categoría que ha resultado ser realmente útil es construir una correspondencia entre ella y cierto espacio topológico. Balmer desarrolló esta idea en [1], asociando a una categoría tensorial triangulada una noción de soporte en cierto espacio localmente anillado, que en el caso particular de  $D(X)$ , permite recuperar el espacio subyacente a partir de la categoría derivada de los complejos perfectos.

Stevenson extendió en [2] esta construcción al caso de una acción de una categoría tensorial triangulada sobre otra, lo que permitió estudiar categorías sin estructura tensorial, como la de singularidades de un esquema,  $S(X)$ , que mide cómo de singular es un esquema. De hecho, utilizó dicho trabajo en [3] para estudiar  $S(X)$  cuando  $X$  es una intersección completa aislada o solo tiene singularidades de hipersuperficie.

En esta charla presentaremos un trabajo que trata de modo global el caso de un esquema con singularidades racionales utilizando, entre otras, las técnicas de [2] para proporcionar un soporte en el divisor excepcional a los objetos de  $S(X)$ . Comentaremos los antecedentes de los párrafos anteriores y las ideas del trabajo y los principales resultados que se pueden obtener.

### Referencias

- [1] P. Balmer. *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*. J. Reine Angew. Math., 588 (2005), 149–168.
- [2] G. Stevenson. *Support theory via actions of tensor triangulated categories*. J. Reine Angew. Math., 681 (2013), 219–254.
- [3] G. Stevenson. *Subcategories of singularity categories via tensor actions*. Compos. Math., 150 (2014), no. 2, 229–272.



## El problem de Gröbner y la geometría de las $GT$ -variedades

L. COLARTE GÓMEZ<sup>1</sup>, R. M. MIRÓ ROIG <sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalunya. (Spain). E-mail: liena.colarte@ub.edu.*

<sup>2</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Catalunya. (Spain). E-mail: miro@ub.edu.*

### Resumen

En esta ponencia, presentamos nuevas contribuciones en el problema, propuesto por Gröbner en [1], de determinar cuándo una proyección monomial de la variedad de Veronese  $X_{n,d} \subset \mathbb{P}^{N_{n,d}}$  es aritméticamente Cohen-Macaulay (aCM), donde  $N_{n,d} = \binom{n+d}{n}$ . Nuestro enfoque relaciona el problema de Gröbner con el problema clásico y fundamental de describir la estructura interna del anillo de invariantes de un grupo finito de  $GL(n+1, \mathbb{K})$  con una aplicación a las propiedades de Lefschetz de los ideales artinianos. Demostramos que, dado un grupo  $G \subset GL(n+1, \mathbb{K})$  abeliano y finito de orden  $d$ , el conjunto de invariantes monomiales de  $G$  de grado  $d$  forma un sistema minimal de generadores del anillo de invariantes de su extensión cíclica  $\bar{G} \subset GL(n+1, \mathbb{K})$ . Dicho conjunto de monomios parametriza una proyección monomial aCM  $X_d$  de la variedad de Veronese  $X_{n,d}$ , que llamamos  $\bar{G}$ -variedades con grupo  $G \subset GL(n+1, \mathbb{K})$  y que forman una familia de variedades aCM que conectan la geometría algebraica, el álgebra conmutativa, la combinatoria y las propiedades de Lefschetz. Seguidamente, nos centraremos en la geometría de las  $\bar{G}$ -variedades con grupo  $G \subset GL(n+1, \mathbb{K})$  en aras de determinar una resolución libre y minimal de su anillo de coordenadas homogéneo  $A(X_d)$ . Analizamos su función de Hilbert y serie de Hilbert desde el punto de vista de la combinatoria y la teoría de invariantes. Demostramos que su ideal homogéneo está minimalmente generado por binomios de grado como máximo 3. Estudiaremos el módulo canónico  $\omega_{X_d}$  de  $A(X_d)$  y caracterizamos la regularidad de Castelnuovo-Mumford de  $A(X_d)$  en términos de  $\omega_{X_d}$ .

### Referencias

- [1] W. Gröbner, *Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen*. Archiv der Mathematik. **16** (1965), 257–264.

## El espacio de módulos de fibrados principales con trivialización formal sobre una curva algebraica

J. MARTÍN OVEJERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. Matemáticas, Universidad de Salamanca (Spain). E-mails: lemurx@usal.es*

### Resumen

El problema de módulos de fibrados principales sobre curvas algebraicas ha sido abordado por diferentes autores a lo largo de la literatura, entre los que se pueden destacar a A. Ramanathan [3, 4], A. H. W. Schmitt [5], Tomás L. Gómez, A. Langer e Ignacio Sols [1]. Debido a que los fibrados principales tienen automorfismos no triviales, el funtor de módulos fino no es representable, por lo que los anteriores autores introducen una noción de estabilidad restringiendo el problema de clasificación a dichos objetos. En esta charla explicaremos un enfoque alternativo: consideraremos la categoría de esquemas sin imponer condiciones de noetherianidad, quasi-compacidad o quasi-separabilidad, y dotaremos a los fibrados principales de un dato extra que llamaremos trivialización formal. Se probará que fijada una curva algebraica proyectiva  $C$  sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, un grupo lineal semisimple  $G$  y una representación fiel del grupo, existe un espacio de módulos, denotado por  $\text{Bun}_{G,C}^{\infty}$ , que parametriza a las parejas formadas por un fibrado principal y una trivialización formal. Relacionaremos el espacio de módulos  $\text{Bun}_{G,C}^{\infty}$  con el stack usual de  $G$ -fibrados principales sobre  $C$ , probando que este último se obtiene como el stack cociente de  $\text{Bun}_{G,C}^{\infty}$  por la acción del Positive Loop Group de  $G$ .

Basado en un trabajo conjunto con A. L. Muñoz Castañeda y F. J. Plaza Martín [2].

### Referencias

- [1] L. Gómez, T., Langer, A., Schmitt, A. H. W. and Sols, I., *Moduli spaces for principal bundles in arbitrary characteristic*, Advances in Mathematics, vol. 219, pp. 1177–1245, 2008.
- [2] Martín Ovejero, J., Muñoz Castañeda, A. L. and Plaza Martín, F. J., *Moduli space of pointed principal bundles over an algebraic curve* (In preparation).
- [3] Ramanathan, A., *Moduli for principal bundles over algebraic curves: I*, Proc. Indian. Acad. Sci, vol. 106, **3**, pp. 301–328, 1996.
- [4] Ramanathan, A., *Moduli for principal bundles over algebraic curves: II*, Proc. Indian. Acad. Sci, vol. 106, **4**, pp. 421–449, 1996.
- [5] Schmitt, A. H. W., *Singular principal bundles over higher-dimensional manifolds and their moduli spaces*, International Mathematics Research Notices, Issue 23, pp. 1183–1210, 2002.

## Zariski multiplicity conjecture via Floer homology

J. F. DE BOBADILLA<sup>1</sup>, T. PELKA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Basque Center for Applied Mathematics, (Spain).*  
*E-mails: jbobadilla@bcamath.org, tpelka@bcamath.org.*

### Resumen

The family version of Zariski conjecture A asks if a family of isolated hypersurface singularities  $(f_t)$  with constant Milnor number  $\mu$  has constant multiplicity [5]. I will explain its proof using a new construction of the McLean spectral sequence.

More precisely, let  $X$  be a Stein space with isolated singularities, and let  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  be a holomorphic function such that  $f^{-1}(0)$  has isolated singularities, too. The *McLean spectral sequence* converges to the fixed point Floer cohomology  $\mathrm{HF}^*(\phi^m, +)$  of the symplectic monodromy  $\phi$  of  $f$ . In [4], McLean constructed it for  $X$  being a Milnor ball around  $0 \in f^{-1}(0)$ , and proved that it computes the multiplicity  $\nu$  of  $f$  at 0: in fact,  $\nu = \min\{m \geq 1 : \mathrm{HF}^*(\phi^m, +) \neq 0\}$ . To prove Zariski conjecture, we need to apply it for two  $X$ 's: a Milnor ball for  $f_0$ , and for  $f_t$ . Hence the general setting is crucial here.

To get such a spectral sequence, one needs to choose a representative of  $\phi$  with good dynamical properties. We achieve this by performing A'Campo construction [1] symplectically. Note that McLean's approach is different: he first constructs a symplectomorphism  $\tilde{\phi}$  with good dynamics, shows that the contact pair associated by Giroux to  $\tilde{\phi}$  and  $\phi$  is the same; and that  $\mathrm{HF}^*$  depends only on that pair. All the above steps are subtle, and do not easily generalize to our setting, so we need to avoid them.

As a corollary from our result, we get a positive answer to a weak version of Zariski question B, too. To state it, let  $f_\nu$  be the initial term of  $f$ , and let  $T_f = \{f_\nu = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ . Then [5] asks if the homeomorphism type of  $T_f$  stays invariant in a  $\mu$ -constant family. This is known to be false [3]. However, by [2, 1.6],  $H_*(T_f; \mathbb{Z}) = \mathrm{HF}^*(\phi^\nu, +)$ , up to a degree shift. Thus our result implies that what stays invariant is the *homology* of  $T_f$ .

### Referencias

- [1] N. A'Campo, *La fonction zêta d'une monodromie*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 233–248.
- [2] N. Budur, J. F. de Bobadilla, Q. T. Lê and H.D. Nguyen, *Cohomology of contact loci*, arxiv:1911.08213.
- [3] J. F. de Bobadilla, *Answers to some equisingularity questions*, Invent. Math. **161** (2005), 657–675.
- [4] M. McLean, *Floer cohomology, multiplicity and the log canonical threshold*, Geom. Topol. **23** (2019), 957–1056.
- [5] O. Zariski, *Some open questions in the theory of singularities*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 481–491.

## Soluciones Racionales de Ecuaciones Diferenciales de Abel

J. L. BRAVO<sup>1</sup>, L. A. CALDERÓN<sup>1</sup>, M. FERNÁNDEZ<sup>1</sup>, I. OJEDA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Extremadura (Spain). E-mails: trinidad@unex.es, lucalderonp@unex.es, ghierro@unex.es, ojedamc@unex.es.

### Resumen

La ecuación diferencial

$$x' = A(t)x^3 + B(t)x^2,$$

donde  $A, B$  son polinomios o polinomios trigonométricos, genera algunos problemas clásicos como el Problema de Centro-Foco de Poincaré o el Problema de Smale-Pugh, que plantea acotar el número de ciclos límite de la ecuación. Lins-Neto [1] probó que no existe cota superior para el número de ciclos límite.

En este contexto, un problema natural consiste en estudiar soluciones polinómicas o polinómico-trigonométricas de la ecuación. Gine et al. [2] probaron que la ecuación de Abel generalizada

$$x' = A_0(t) + A_1(t)x + \dots + A_n(t)x^n$$

tiene a lo sumo  $n$  soluciones polinomiales cuando  $A_i(t)$  son polinomios.

En este trabajo, consideramos que la ecuación de Abel tiene coeficientes polinomiales y estudiamos el número de soluciones racionales. Nuestro resultado principal establece que si  $n := \deg(A)$  es par o  $\deg(B) > (n-1)/2$ , entonces la ecuación tiene a lo sumo dos soluciones racionales y, en cualquier otro caso,  $\binom{n}{(n+1)/2} + 1$  es una cota superior (no óptima) para el número de soluciones racionales.

El problema de estudiar soluciones racionales es equivalente a estudiar curvas invariantes de grado uno en  $x$ ,  $p(t)x + q(t) = 0$ . Usando la Teoría de Integración de Darboux, obtenemos que si el número de soluciones racionales es mayor o igual que  $(n+1)/2$ , entonces la ecuación es Darboux integrable.

Por último, utilizamos métodos computacionales para comprobar, en los casos de  $n$  más pequeño, si las cotas obtenidas son óptimas o no.

### Referencias

- [1] A. Lins Neto, *On the number of solutions of the equation  $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , for which  $x(0) = x(1)$* , Inv. Math. **59**, (1980), 67–76.
- [2] J. Giné, T. Grau, J. Llibre, *On the polynomial limit cycles of polynomial differential equations*, Israel J. Math., 106 (2013), 481–507.

## La correspondencia de McKay y la receta de Reid para grupos no abelianos

A. NOLLA DE CELIS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Didácticas Específicas, Universidad Autónoma de Madrid (Spain).*  
*E-mail: alvaro.nolla@uam.es.*

### Resumen

Para un grupo finito  $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ , la correspondencia de McKay establece una conexión entre la geometría de las resoluciones de singularidades  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{C}^n/G$  y la teoría de representaciones de  $G$ . Para  $n = 3$  existen varias preguntas abiertas cuando el grupo  $G$  es no abeliano, siendo una de ellas la versión *integral* de la correspondencia que establece la biyección:

$$\{\text{Representaciones Irreducibles de } G\} \longleftrightarrow \text{Base de } H^*(Y, \mathbb{Z})$$

Esta biyección fue demostrada de forma explícita para el caso  $G$  abeliano en [1]. En ella el ingrediente fundamental lo constituye la llamada *receta de Reid*, la cual asocia a cada estrato de  $\pi^{-1}(0)$  una representación irreducible de  $G$ .

En esta presentación se mostrará cómo construir ejemplos de esta correspondencia para subgrupos diédricos y triédricos en  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ . Aún teniendo algunas diferencias con el caso abeliano, varias de las características y espíritu de la receta de Reid original se mantienen en el caso no abeliano. La charla está basada en [2].

### Referencias

- [1] A. Craw, An explicit construction of the McKay correspondence for  $A$ -Hilb( $\mathbb{C}$ ), *J. Algebra*, 285(2): 682–705, 2005.
- [2] A. Nolla de Celis, On Reid's recipe for non abelian groups, *arXiv e-print 2109.10039*.

## Seshadri-type constants and Newton-Okounkov bodies for non-positive at infinity valuations of Hirzebruch surfaces

C.-J MORENO-ÁVILA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Universidad de Valladolid (Spain).*  
*E-mails: carlosjesus.moreno@uva.es.*

### Resumen

We consider flags  $E_\bullet = \{Z \supset E \supset \{q\}\}$ , where  $E$  is the exceptional divisor defining a non-positive at infinity divisorial valuation  $\nu_E$  of a Hirzebruch surface and  $Z$  the surface defined by  $\nu_E$ . In this talk we determine an analogue of the Seshadri constant for pairs  $(\nu_E, D)$ ,  $D$  being a big divisor on  $\mathbb{F}_\delta$ . We also give an explicit description of Newton-Okounkov bodies of big divisors on a Hirzebruch surface with respect to a flag as  $E_\bullet$ , showing that they are triangles or quadrilaterals and characterizing each case.

This talk is based on a joint work with C. Galindo and F. Monserrat.

## On the degree of curves with prescribed multiplicities and bounded negativity

FRANCISCO MONSERRAT<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia (Spain).*  
*E-mail: framonde@mat.upv.es.*

### Resumen

We provide a lower bound on the degree of curves of the projective plane  $\mathbb{P}^2$  passing through the centers of a divisorial valuation  $\nu$  of  $\mathbb{P}^2$  with prescribed multiplicities, and an upper bound for the Seshadri-type constant of  $\nu$ ,  $\hat{\mu}(\nu)$ , constant that is crucial in the Nagata-type valuative conjecture [2]. We also give some results related to the bounded negativity conjecture concerning those rational surfaces having the projective plane as a relatively minimal model.

This talk is based on a joint work with C. Galindo, C. J. Moreno Ávila and E. Pérez Callejo [1].

### Referencias

- [1] G. Galindo, F. Monserrat, C. J. Moreno-Ávila & E. Pérez-Callejo, *On the degree of curves with prescribed multiplicities and bounded negativity*, arXiv:2105.01483
- [2] C. Galindo, F. Monserrat & J. J. Moyano-Fernández. *Minimal plane valuations*. J. Alg. Geom. (2018) 27:751–783.

## Motivic integration and zeta functions on $\mathbb{Q}$ -Gorenstein varieties

J. MARTÍN-MORALES<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mathematics, IUMA, University of Zaragoza (Spain). E-mail: jorge.martin@unizar.es.*

### Resumen

In this joint work with E. León-Cardenal, W. Veys, and J. Viu-Sos, we study motivic zeta functions for  $\mathbb{Q}$ -divisors in a  $\mathbb{Q}$ -Gorenstein variety. By using a toric partial resolution of singularities we reduce this study to the local case of two normal crossing divisors where the ambient space is an abelian quotient singularity. For the latter we provide a closed formula which is worked out directly on the quotient singular variety. In the talk we will present an example of a quotient singularity under the action of a nonabelian group and compute some invariants of motivic nature.



## Complejos relativamente perfectos

F. SANCHO DE SALAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Salamanca (Spain). E-mail: fsancho@usal.es.*

### Resumen

Los complejos relativamente perfectos, junto con su versión absoluta, fueron introducidos y estudiados en SGA 6 ([1],[2],[3]). En esta charla damos una definición alternativa, más transparente y sobre todo, más operativa. Veremos cómo son estos complejos, según las distintas propiedades que tenga el morfismo, o la base del mismo. También estudiaremos su comportamiento por imágenes directas, lo cual nos llevará a generalizar los teoremas de semicontinuidad y Grauert-Grothendieck a situaciones mucho más generales, eliminando hipótesis de noetherianidad y plitud.

Basado en un trabajo conjunto con L. Alonso Tarrío y A. Jeremías López.

### Referencias

- [1] L. Illusie, *Généralités sur les conditions de finitude dans les catégories dérivées*, in Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch (SGA 6), Lecture Notes in Math., no. 225, Springer-Verlag, New York, 1971, 78–159.
- [2] L. Illusie, *Existence de résolutions globales*, in Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch (SGA 6), Lecture Notes in Math., no. 225, Springer-Verlag, New York, 1971, 160–221.
- [3] L. Illusie, *Conditions de finitude relatives*, in Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch (SGA 6), Lecture Notes in Math., no. 225, Springer-Verlag, New York, 1971, 221–273.

## Puntos múltiples y homología evanescente de aplicaciones singulares

G. PEÑAFORT SANCHIS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universitat de València (Spain).*  
*E-mail: guillermo.penafort@uv.es.*

### Resumen

Sea  $f: U \rightarrow V$  una aplicación holomorfa entre variedades complejas y sea  $X$  la imagen de  $f$ . La homología de  $X$  proviene de la homología de  $U$  y de las identificaciones producidas por  $f$ . Estas identificaciones están codificadas por los espacios de puntos múltiples de  $f$  que, a pesar de partir de una idea simple, son unos objetos complejos y bastante desconocidos. En esta charla trataremos avances recientes y problemas abiertos acerca de la estructura algebraica de los espacios de puntos múltiples y sus consecuencias en el estudio de la homología de  $X$ .

## **RED DE ANÁLISIS FUNCIONAL Y APLICACIONES**

### **ORGANIZADORES**

**Víctor Almeida** (Universidad de La Laguna)

**Jorge Betancor** (Universidad de La Laguna)

**Javier Falcón** (Universidad de Valencia)

## Operadores de Cesàro generalizados actuando en espacios de funciones analíticas

P. GALANOPOULOS<sup>1</sup>, D. GIRELA<sup>2</sup>, N. MERCHÁN<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dept. of Mathematics, Aristotle University of Thessaloniki (Greece). E-mail: petrosgala@math.auth.gr.

<sup>2</sup> Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de Málaga (Spain). E-mail: girela@uma.es.

<sup>3</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Málaga (Spain). E-mail: noel@uma.es.

### Resumen

Sea  $\mathbb{D}$  el disco unidad en  $\mathbb{C}$ . Si  $\mu$  es una medida de Borel finita y positiva en el intervalo  $[0, 1)$  y  $f$  es una función analítica en  $\mathbb{D}$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ( $z \in \mathbb{D}$ ), definimos

$$\mathcal{C}_\mu(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

donde, para  $n \geq 0$ ,  $\mu_n$  denota el momento  $n$ -ésimo de la medida  $\mu$ , es decir,  $\mu_n = \int_{[0,1)} t^n d\mu(t)$ . De esta forma,  $\mathcal{C}_\mu$  es un operador lineal definido en el espacio  $\mathcal{H}\uparrow(\mathbb{D})$  de todas las funciones analíticas en  $\mathbb{D}$ . Cuando  $\mu$  es la medida de Lebesgue en  $[0, 1)$ , el operador  $\mathcal{C}_\mu$  se reduce al operador clásico de Cesàro.

En este trabajo estudiamos la acción de los operadores  $\mathcal{C}_\mu$  en distintos espacios de funciones analíticas en  $\mathbb{D}$ , tales como los espacios de Hardy  $H^p$ , los espacios de Bergman  $A_\alpha^p$ ,  $BMOA$ , o el espacio de Bloch  $\mathcal{B}$ .

### Referencias

- [1] K. F. Andersen, *Cesàro averaging operators on Hardy spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **126** (1996), no. 3, 617-624.
- [2] G. H. Hardy, *Note on a theorem of Hilbert*, Math. Z. **6** (1920), no. 3-4, 314-317
- [3] E. Landau, *A Note on a Theorem Concerning Series of Positive Terms: Extract from a Letter from Prof. E. Landau to Prof. I. Schur (communicated by G. H. Hardy)*, J. London Math. Soc. **1** (1926), 38-39.
- [4] J. Miao, *The Cesàro operator is bounded on  $H^p$  for  $0 < p < 1$* , Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), no. 4, 1077-1079.
- [5] A. G. Siskakis, *Composition semigroups and the Cesàro operator on  $H^p$* , J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), no. 1, 153-164.
- [6] A. G. Siskakis, *The Cesàro operator is bounded on  $H^1$* , Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), no. 2, 461-462.

## Espacios Banach frente a retículos de Banach

PEDRO TRADACETE

*Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC (Spain). E-mail: pedro.tradacete@icmat.es.*

### Resumen

Un retículo de Banach es un espacio de Banach con un orden reticular compatible. En esta charla discutiremos algunas de las diferencias y similitudes entre la categoría de espacios de Banach y la de los retículos de Banach. En particular, veremos que la construcción reciente del retículo de Banach libre generado por un espacio de Banach [1] define un functor no trivial entre ambas categorías, y estudiaremos cómo podemos utilizarlo para establecer un diccionario que nos permita traducir diferentes propiedades clásicas: subespacios-subretículos, tipo-convexidad, sucesiones básicas, etc.

### Referencias

- [1] A. Avilés, J. Rodríguez, and P. Tradacete, *The free Banach lattice generated by a Banach space*, J. Funct. Anal. **274**, No. 10, 2955–2977 (2018).
- [2] T. Oikhberg, M.A. Taylor, P. Tradacete, V.G. Troitsky, *Free Banach lattices*, preprint.

## La propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás para radio numérico y operadores compactos

Ó. ROLDÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático, Universitat de València. E-mail: Oscar.Roldan@uv.es.*

### Resumen

La propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás, o BPBp, nos permite estudiar de forma cuantitativa espacios de Banach en los que un operador  $T$  que casi alcanza su norma en  $x$  se puede aproximar por un nuevo operador  $S$  con  $\|S\| = \|T\|$  que alcanza su norma en un punto  $y$  cercano a  $x$  (véase [1]). Versiones de esta propiedad para radio numérico ([3]) y para operadores compactos ([2]) han sido estudiadas por separado.

En esta charla hablaremos de una versión de la BPBp para radio numérico en la que todos los operadores involucrados son compactos. Veremos que, de hecho, dicha propiedad se cumple para muchos espacios de Banach clásicos: espacios finito dimensionales, todos los  $L_p(\mu)$  donde  $\mu$  es una medida y  $1 \leq p \leq \infty$ , todos los preduales de  $\ell_1$ , y todos los  $C_0(L)$  con  $L$  localmente compacto Hausdorff, entre otros.

La charla está basada en un trabajo conjunto con Domingo García, Manuel Maestre y Miguel Martín (véase [4]). El autor recibe financiación por parte de la beca FPU17/02023 del Ministerio de Universidades, y mediante el proyecto MINECO y FEDER MTM2017-83262-C2-1-P.

### Referencias

- [1] M.D. Acosta, R.M. Aron, D. García, and M. Maestre, *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators*, J. Funct. Anal. **254** (2008), 2780–2799
- [2] S. Dantas, D. García, M. Maestre, M. Martín, *The Bishop-Phelps-Bollobás property for compact operators*, Canad. J. Math. **70** (2018), 56–73.
- [3] A. J. Guirao, O. Kozhushkina, *The Bishop-Phelps-Bollobás property for numerical radius in  $\ell_1(\mathbb{C})$* , Studia Math. **218** (2013), 41–54.
- [4] D. García, M. Maestre, M. Martín, Ó. Roldán, *On the Compact Operators Case of the Bishop-Phelps-Bollobás Property for Numerical Radius*, Results in Mathematics **76**, Article number 122 (2021).

## Convexidad uniforme y cotipos en espacios de Banach

L. C. GARCÍA-LIROLA<sup>1</sup>, M. RAJA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 50009, Zaragoza (Spain). E-mail: luiscarlos@unizar.es.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia, Murcia (Spain). E-mail: matias@um.es.*

### Resumen

La noción convexidad uniforme, introducida por Clarkson en 1936, puede verse como un debilitamiento de la identidad del paralelogramo (exclusiva de los espacios de Hilbert), pero que todavía implica un comportamiento “razonable” de la métrica inducida por la norma. Los espacios que admiten una norma equivalente uniformemente convexa fueron caracterizados por Enflo en 1972 por medio de la propiedad de super-reflexividad introducida por James. Unos años después, en 1975, Pisier encontró la forma más adecuada de “desigualdad del paralelogramo” que es la que se usa desde entonces en aplicaciones. Entre todas las normas equivalentes en un espacio super-reflexivo, uno puede buscar a la “más uniformemente convexa”. Analizaremos la existencia de dicha norma óptima y su relación con los cotipos generalizados introducidos por Figiel. La charla está basada en el trabajo conjunto con M. Raja [1].

### Referencias

- [1] *Advances in Mathematics*, 383 (2021), 107679

## Subespacios Invariantes Para Operadores Positivos

F.J. GONZÁLEZ-DOÑA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid e ICMAT (España). E-mail: javier.gonzalez@icmat.es*

### Resumen

El Problema del Subespacio Invariante es uno de los problemas abiertos más estudiados en Teoría de Operadores. A pesar de que se conocen contraejemplos en espacios como  $\ell_1$  ([5]), el problema sigue abierto para operadores positivos ([1] y [2]). En esta charla, estudiaremos el problema del subespacio invariante para operadores positivos definidos en retículos de Banach cuyo orden está inducido por una base incondicional. En particular, presentaremos resultados sobre la existencia de subespacios invariantes no triviales (e ideales invariantes no triviales) para ciertas clases de operadores positivos, como homomorfismos de retículos y operadores «diagonales por bandas», y discutiremos los límites de nuestros métodos. Estos resultados son parte de trabajos conjuntos con Eva A. Gallardo-Gutiérrez y Pedro Tradacete ([3] y [4]).

### Referencias

- [1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, and O. Burkinshaw, *Invariant subspace theorems for positive operators*, J. Funct. Anal. **124** (1994), no. 1, 95–111.
- [2] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis, G. Sirotkin, V.G. Troitsky, *Some open problems and conjectures associated to the invariant subspace problem*, Positivity 9 (2005), no.3, 273-286.
- [3] E. A. Gallardo-Gutiérrez, F.J. González-Doña, P. Tradacete, *Invariant subspaces for positive operators on Banach spaces with unconditional basis*, <https://arxiv.org/abs/2005.01150>, (2020).
- [4] E. A. Gallardo-Gutiérrez, F.J. González-Doña, *Band-diagonal operators on Banach spaces with unconditional basis*, 29 pp. Submitted, (2021).
- [5] C. Read, *A solution to invariant subspace problem on the space  $\ell_1$* , Bull. London Math. Soc. 17 (1985), no. 4, 305-317.



## Propiedades de Banach-Saks uniforme

G.GRELIER<sup>1</sup>, M.RAJA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, 30100 Espinardo, Murcia, Spain. E-mails: g.grelier@um.es.*

<sup>2</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, 30100 Espinardo, Murcia, Spain. E-mail: matias@um.es.*

### Resumen

Introducimos la noción de propiedad de Banach-Saks uniforme y sus variantes. Mediante el uso de spreading models, se establecerán varias propiedades equivalentes. En particular se vinculará con la propiedad  $(A_\infty)$  introducida por Partington. Uno de los resultados principales permite afirmar que la propiedad de Banach-Saks uniforme es equivalente a tener la propiedad  $p$ -Banach-Saks para cierto  $p \in (1, \infty)$  que se puede determinar con precisión. La clase de los espacios que tienen dicha propiedad incluye los espacios superreflexivos, los espacios con la propiedad  $(\beta)$  de Rolewicz y los espacios NUS (nearly uniformly smooth).

### Referencias

- [1] A. Brunel and L. Sucheston. *On  $J$ -convexity and some ergodic super-properties of Banach spaces*. Transactions of the American Mathematical Society, 204, 79–90, 1975.
- [2] J. R. Partington. *On the Banach Saks property*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 82(3), 369–374, 1977.
- [3] S. Prus. *Nearly uniformly smooth spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. Serie VII, 507–522, 1989.
- [4] S. A. Rakov. *Banach Saks property of a Banach space*, Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR, 32(5):909–916, 1979
- [5] S. Rolewicz. *On  $\Delta$  uniform convexity and drop property*, Studia Math, 87:181–191, 1987.

## Semigrupos y operadores coseno de operadores de diferencias finitas en $\ell^1(\mathbb{Z})$

ALEJANDRO MAHILLO<sup>1</sup>, PEDRO J. MIANA <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, Spain. E-mail: almahill@unizar.es, pjmiana@unizar.es.*

### Resumen

Aplicamos la teoría de álgebras de Banach a los operadores en diferencias finitas tratados en [1]. Siguiendo las técnicas de [2], presentamos las estructuras lineales y algebraicas (en particular, las propiedades de factorización) de estos operadores en diferencias finitas. Calculamos sus normas y espectros en  $\ell^1(\mathbb{Z})$ , utilizando la transformada de Fourier discreta. Obtenemos los semigrupos y funciones coseno definidos por estos operadores mediante la transformada de Laplace. Por último, definimos las potencias fraccionarias de estos elementos del álgebra  $\ell^1(\mathbb{Z})$  utilizando el binomio de Newton generalizado y damos resultados y propiedades para las potencias fraccionarias de algunos de los operadores estudiados, ampliando así los resultados de [2].

### Referencias

- [1] H. Bateman.: *Some simple differential difference equations and the related functions*. Bull. Am. Math. Soc. **49**, 494-512 (1943)
- [2] J. González-Camus, C. Lizama, P. J. Miana: *Fundamental solutions for semidiscrete evolution equations via Banach algebras*. Adv. Differ. Equ. **2021**, 35 (2021)

## Normas suaves y poliédricas a través de sistemas biortogonales fundamentales

S. DANTAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques and Institut Universitari de Matemàtiques i Aplicacions de Castelló (IMAC), Universitat Jaume I, Campus del Riu Sec. s/n, 12071 Castelló, Spain. E-mail: dantas@uji.es.*

### Resumen

Sea  $\mathcal{X}$  un espacio de Banach con un sistema biortogonal fundamental y denotamos por  $\mathcal{Y}$  el subespacio denso generado por los vectores de este sistema. En esta charla, analizaremos cuándo  $\mathcal{Y}$  admite una norma  $C^\infty$ -suave. En particular, mostraremos que  $\mathcal{Y}$  admite una norma  $C^\infty$ -suave que depende de un número finito de coordenadas (LFC, de manera abreviada) y que también admite una norma poliédrica que también es LFC. Como consecuencia,  $\mathcal{Y}$  admitirá particiones de la unidad que son LFC, localmente finitas y  $\sigma$ -uniformemente discretas como también admitirá una norma que es localmente uniformemente convexa y  $C^1$ -suave. Los resultados de esta charla están basados en trabajos con Petr Hájek (Czech Technical University in Prague) y Tommaso Russo (Czech Academy of Sciences y Czech Technical University in Prague).

## Existencia de operadores que no alcanzan la norma

GONZALO MARTÍNEZ-CERVANTES<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Alicante (Spain). E-mail: gonzalo.martinez@ua.es.*

### Resumen

El objetivo de esta charla es estudiar qué condiciones garantizan la igualdad  $\text{NA}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ , es decir, que todo operador de un espacio de Banach  $E$  en un espacio de Banach  $F$  alcanza la norma. Si  $F = \mathbb{R}$ , el teorema de James garantiza que esto ocurre si y sólo si  $E$  es reflexivo. En general, la igualdad  $\text{NA}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$  está íntimamente relacionada con algunas de las topologías naturales del espacio  $\mathcal{L}(E, F)$  de operadores de  $E$  en  $F$ . En esta charla estudiaremos estas topologías y presentaremos varios resultados obtenidos recientemente en un trabajo conjunto con Sheldon Dantas y Mingu Jung.

La investigación asociada a esta charla ha sido financiada parcialmente por la Fundación Séneca (20797/PI/18), la Agencia Estatal de Investigación (MTM2017-86182-P, cofinanciada por ERDF, EU) y por el Fondo Social Europeo (FSE) a través del Programa Operativo de Empleo Juvenil y la Iniciativa de Empleo Juvenil (POEJ) (21319/PDGI/19).

### Referencias

- [1] S. Dantas, M. Jung y G. Martínez-Cervantes. *On the existence of non norm-attaining operators*. J. Inst. Math., 1–13 (DOI:10.1017/S1474748021000311).
- [2] J.R. Holub, *Reflexivity of  $L(E, F)$* , Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), 175–177.

## Extensión de funciones Lipschitzianas vector-valuadas y preduales de $L_1$

ABRAHAM RUEDA ZOCA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad de Murcia, Departamento de Matemáticas, Campus de Espinardo, 30100 (Murcia).*  
*E-mails: abraham.rueda@um.es.*

### Resumen

El teorema clásico de McShane dice que cualquier función Lipschitziana  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  admite una extensión  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $N \subseteq M$ , sin incrementar la norma Lipschitziana. Este teorema es conocidamente falso si reemplazamos  $\mathbb{R}$  por un espacio de Banach  $X$ . En esta charla, analizamos espacios de Banach  $X$  que son buenos para extender funciones Lipschitzianas cuando  $N$  y  $M$  son finitos (o más en general, cuando  $f$  es una función Lipschitziana compacta). Para ello, los espacios Lipschitz libres, preduales de espacios de funciones Lipschitzianas, jugarán un papel fundamental. El contenido de esta charla está basado en [1]

Investigación financiada por Juan de la Cierva-Formación FJC2019-039973, por MTM2017-86182-P (Gobierno de España, AEI/FEDER, EU), by MICINN PGC2018-093794-B-I00 (MCIU, AEI, FEDER, UE), por Fundación Séneca, ACyT Región de Murcia 20797/PI/18, por Junta de Andalucía A-FQM-484-UGR18 y por Junta de Andalucía FQM-0185.

### Referencias

- [1] A. Rueda Zoca, *A characterisation of  $L_1$ -preduals in terms of extending Lipschitz maps*, J. Funct. Anal. **281** (2021), article 109221.

## Desigualdades de Hölder inversas para funciones cóncavas

JAVIER MARTÍN GOÑI<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mails: 745533@unizar.es, javiermargo@gmail.com.*

### Resumen

Dado un cuerpo convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$ , es decir, un conjunto convexo, compacto y con interior no vacío, y una función integrable  $f : K \rightarrow [0, \infty)$ , la desigualdad de Hölder dice que si  $0 < p < q$ , entonces

$$\left( \frac{1}{|K|} \int_K f(x)^p \right)^{1/p} \leq \left( \frac{1}{|K|} \int_K f(x)^q \right)^{1/q}.$$

Berwald en [2] demostró que bajo la hipótesis de concavidad de  $f$ , dicha desigualdad se puede invertir obteniendo que si  $0 < p < q$ ,

$$\left( \frac{\binom{n+p}{n}}{|K|} \int_K f(x)^p \right)^{1/p} \geq \left( \frac{\binom{n+q}{n}}{|K|} \int_K f(x)^q \right)^{1/q}.$$

Analizando la demostración de Berwald, obtendremos una desigualdad que permitirá mejorar la relación de contenido en una familia de cuerpos definidos por  $K$ . Ball en [1] asociados a funciones log-cóncavas, en caso de que estas verifiquen mejores condiciones de concavidad.

### Referencias

- [1] K. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in  $\mathbb{R}^n$* , Stud. Math. **88** (1), 69-84 (1988).
- [2] L. Berwald, Verallgemeinerung eines Mittelwertsatzes von J. Favard, *Für positive konkave Funktionen*. Acta Math. 79, 17-37 (1947).

## Propiedades de automejora de la condición de densidad de capacidad de Hajłasz

J. CANTO<sup>1</sup>, A. VÄHÄKANGAS<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *BCAM – Basque Center of Applied Mathematics (Spain). E-mails: [jcanto@bcamath.org](mailto:jcanto@bcamath.org).*

<sup>2</sup> *Dpt. of Mathematics, University of Jyväskylä (Finland). E-mail: [antti.v.vahakangas@jyu.fi](mailto:antti.v.vahakangas@jyu.fi).*

### Resumen

En esta charla, introducimos una condición de densidad de capacidad en términos de gradientes de Hajłasz no locales y demostramos su automejora. La manera en que lo hacemos es caracterizándola en términos de una cota superior de la codimensión superior de Assouad del conjunto subyacente. La prueba relaciona estas condiciones de densidad de capacidad con desigualdades de Poincaré en el borde, y adapta técnicas para conjuntos de nivel de tipo Keith–Zhong para establecer desigualdades de Hardy locales.

## TEORÍA DE NÚMEROS

### ORGANIZADORES

**Jordi Guàrdia** (Universidad Politécnica de Cataluña)

**José María Tornero** (Universidad de Sevilla)



## La conjetura de Wilf para semigrupos de con parte izquierda inferior a 13 y su generalización

D. MARÍN-ARAGÓN<sup>1</sup>, S. ELIAHOU<sup>1</sup>, J.I. GARCÍA-GARCÍA<sup>1</sup>, A.  
VIGNERON<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Cádiz (Spain). E-mail: daniel.marin@uca.es,  
ignacio.garcia@uca.es, alberto.vigneron@uca.es.*

<sup>2</sup> *Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville, Université du Littoral Côte  
d'Opale (France).*

### Resumen

Para un semigrupo numéricos  $S$ , con dimensión de inmersión  $e$ , conductor  $c$  y parte izquierda  $L = S \cap [0, c - 1]$ , Wilf conjeturó que  $e|L| - c \geq 0$ . En [1] probamos que si  $L < 13$  entonces, la conjetura es cierta. Además, si  $\mathcal{C}$  es un cono poliédrico en  $\mathbb{N}^p$ , podemos definir un  $\mathcal{C}$ -semigrupo,  $H$ , como un semigrupo afín que verifica que  $|\mathcal{C} \setminus H|$  es finito. En [2] generalizamos la conjetura de Wilf a este tipo de semigrupos y la probamos para algunas familias de  $\mathcal{C}$ -semigrupos.

### Referencias

- [1] Eliahou, S., Marín-Aragón, D. (2021). On numerical semigroups with at most 12 left elements. *Communications in Algebra*, 49(6), pp 2402-2422.
- [2] García-García, J.I., Marín-Aragón, D., Vigneron-Tenorio, A. (2018) An extension of Wilf's conjecture to affine semigroups. *Semigroup Forum*, 96(2), pp. 396-408.

## Reduction type of hyperelliptic curves in terms of the valuations of their invariants

E. LORENZO GARCÍA<sup>12</sup>

<sup>1</sup> *Université de Neuchâtel (Switzerland). E-mails: elisa.lorenzo@unine.ch.*

<sup>2</sup> *Univeristé de Rennes 1 (France). E-mail: elisa.lorenzogarcia@univ-rennes1.fr.*

### Resumen

In this talk we will first review the classical criteria to determine the (stable) reduction type of elliptic curves (Tate) and of genus 2 curves (Liu) in terms of the valuations of some particular combinations of their invariants. We will also revisit the theory of cluster pictures to determine the reduction type of hyperelliptic curves (Dokchitser's et al.). Via Mumford theta constants and Takase and Tomae's formulas we will be able to read the cluster picture information by looking at the valuations of some (à la Tsuyumine) invariants in the genus 3 case. We will also discuss the possible generalization of this strategy for any genus and some related open questions.

### Referencias

- [1] E. Lorenzo García, *On determining the reduction type of hyperelliptic curves in terms of their invariants*, preprint, 2021.

## Dominios fundamentales del árbol de Bruhat-Tits por $GL_2(F_p)$

E. TORRENTS

*Dpto. de Matemáticas, Universitat autònoma de Barcelona (Spain). E-mail: etorrents@mat.uab.cat.*

### Resumen

El cómputo de dominios fundamentales del árbol de Bruhat-Tits por la acción de grupos cuaternionicos permite el cálculo de cociclos harmónicos en el mismo. Estos están relacionados con formas automorfas y de este hecho se desprenden varias aplicaciones, como por ejemplo el cálculo de puntos en curvas de Shimura y de puntos de Heegner en curvas elípticas.

En esta charla revisaremos estos conceptos, y explicaremos como se pueden aplicar en el cómputo de puntos de Heegner en curvas elípticas en casos donde la hipótesis de Heegner clásica no se cumple, y por lo tanto, la construcción clásica arquimediana de estos puntos es difícil de calcular.

### Referencias

- [1] C. Franc y M. Masdeu, *Computing fundamental domains for the Bruhat-Tits tree for  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ ,  $p$ -adic automorphic forms, and the canonical embedding of Shimura curves*, LMS Journal of Computation and Mathematics, vol. 17, no. 1, 2014.
- [2] M. Greenberg, *Heegner points and rigid analytic modular forms*, 2006.
- [3] J. Van Order, *On the quaternionic  $p$ -adic  $L$ -functions associated to Hilbert modular eigenforms*, International Journal of Number Theory, vol. 8, no 04, 2012.

## Crecimiento del subgrupo de torsión de una curva elíptica con multiplicación compleja

E. GONZÁLEZ-JIMÉNEZ

*Dpto. de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.*  
*E-mail: enrique.gonzalez.jimenez@uam.es.*

### Resumen

Sea  $E$  una curva elíptica definida sobre un cuerpo de números  $K$ . El Teorema de Mordell-Weil establece que el conjunto de puntos  $K$ -rationales es un grupo abeliano finitamente generado. Uno de los principales objetivos dentro de la Teoría de curvas elípticas es caracterizar los posibles subgrupos de torsión de curvas elípticas sobre un cuerpo de números, o sobre todos los cuerpos de números de un grado dado.

Se dice que una curva elíptica tiene multiplicación compleja si tiene más endomorfismos que la multiplicación por enteros. El objetivo de esta charla es arrojar luz en como el subgrupo de torsión de una curva elíptica definida sobre los racionales con multiplicación compleja crece cuando es considerado sobre un cuerpo de números. Se expondrán los resultados obtenidos en [1] y [2].

### Referencias

- [1] E. González–Jiménez. *Explicit characterization of the torsion growth of rational elliptic curves with complex multiplication over quadratic fields*. Glas. Mat. Ser. III 56(76) (2021) 47–61
- [2] E. González–Jiménez. *Torsion growth over cubic fields of rational elliptic curves with complex multiplication*. Publ. Math. Debrecen 97/1-2 (2020) 63-76.

## Semigrupos numéricos generalizados de repitunos

MANUEL B. BRANCO<sup>1</sup>, ISABEL COLAÇO<sup>2</sup>, IGNACIO OJEDA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Departamento de Matemáticas, Universidade de Évora, 7000-671 Évora, Portugal.*

*E-mail: mbb@uevora.pt.*

<sup>2</sup>*Departamento de Matemática e Ciências Físicas, Instituto Politécnico de Beja, 7800-295 Beja, Portugal.*

*E-mail: isabel.colaco@ipbeja.pt.*

<sup>3</sup>*Departamento de Matemáticas, Universidad de Extremadura, 06071 Badajoz, Spain.*

*E-mail: ojedamc@unex.es.*

### Resumen

En esta charla, introduciremos y estudiaremos los semigrupos numéricos generados por  $\{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$  donde  $a_1$  es el número repituno en base  $b > 0$  y longitud  $n > 1$  y  $a_i - a_{i-1} = a b^{i-2}$ ,  $i \geq 2$ . Estos semigrupos numéricos generalizan a los Semigrupos numéricos repitunos ([2]) entre muchos otros (véase, por ejemplo, [3] o [4]) y tienen propiedades interesantes como ser homogéneos o Wilf (véase, por ejemplo, ([5]) y ([6])). Además, resolvemos el problema de Frobenius para esta familia, dando una fórmula cerrada para el número de Frobenius en términos de  $a, b$  y  $n$ , y calculamos otros invariantes de interés como son el género, el tipo o el conjunto de Apéry respecto de la multiplicidad.

El contenido de esta conferencia recorre, esencialmente, los resultados de [1].

### Referencias

- [1] Branco, M.B.; Colaço, I., Ojeda, I.: *Generalized repunit numerical semigroups* (work in progress).
- [2] Rosales, J.C.; Branco, M.B.; Torráo, D.: *The Frobenius problem for repunit numerical semigroups*, Ramanujan J. **40** (2016), 323–334.
- [3] Rosales, J.C.; Branco, M.B.; Torráo, D.: *The Frobenius problem for Mersenne numerical semigroups*, Math. Z. **286** (2017), 741–749.
- [4] Ugolini, S.: *On numerical semigroups closed with respect to the action of affine maps*, Publ. Math. Debrecen **90** (2017), 149–167.
- [5] JAFARI, R., ZARZUELA ARMENGOU, S.: *Homogeneous numerical semigroups*, Semigroup Forum **97**, (2018), 278–306.
- [6] DELGADO, M.: *Conjecture of Wilf: a survey*. Numerical semigroups, 39–62, Springer INdAM Ser., **40**, Springer, Cham, 2020.

## Estabilidad diofántica en variedades algebraicas

J.-C. LARIO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dept. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya. E-mails: joan.carles.lario@upc.edu.*

### Resumen

Analizaremos cuestiones de estabilidad diofántica en variedades algebraicas tanto en característica nula como positiva, poniendo especial énfasis en el segundo caso. En general, una variedad algebraica  $V$  definida sobre un cuerpo  $K$  se dice que tiene estabilidad diofántica para una extensión  $L/K$  si

$$V(L) = V(K).$$

Es decir, si la variedad  $V$  no adquiere nuevos puntos sobre  $L$ . La noción de estabilidad diofántica surge de manera natural en el contexto de las conjeturas de Lang, que generalizan el Teorema de Faltings para curvas de género mayor o igual a 2 definidas sobre cuerpos de números.

En caso de ser  $K = \mathbb{F}_q$  un cuerpo finito y  $V/K$  proyectiva no-singular e irreducible, la función zeta de la variedad

$$\zeta_V(T) = \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} N_m \frac{T^m}{m} \right),$$

con  $N_m = |V(\mathbb{F}_{q^m})|$ , resulta una herramienta útil para el estudio de la estabilidad diofántica de  $V$ . Abordaremos el caso de curvas y superficies, discutiendo ejemplos y algunos resultados estadísticos.

### Referencias

- [1] B. Mazur. *New issues, and expectations, in the study of rational points.* <https://people.math.harvard.edu/~mazur/papers/ETH.2.pdf>
- [2] B. Mazur, K. Rubin. *New rational points of algebraic curves.* <https://www.youtube.com/watch?v=TDkcOgdeQ-U>.
- [3] B. Mazur, K. Rubin, M. Larsen. *Diophantine stability*, American Journal of Mathematics Johns Hopkins University Press Volume 140, Number 3, June 2018, 571–616.
- [4] B. Vrioni, A Census of Curves and Surfaces over Finite Fields. PhD Thesis 2021. UPC, Barcelona.

## Resolución del problema de Frobenius con un computador cuántico adiabático

JOAQUÍN OSSORIO-CASTILLO<sup>1</sup>, JOSÉ M. TORNERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Álgebra, Universidad de Sevilla (Spain). E-mails: joaquin@mestrelab.com, tornero@us.es*

### Resumen

El problema (diofántico) de Frobenius, también conocido como el problema de la moneda, es uno de los problemas pertenecientes a la clase de complejidad NP-hard más conocidos, y sus orígenes residen en la teoría combinatoria de números. En esta charla presentaremos un algoritmo para resolverlo por medio de una transformación del conjunto de Apéry de un semigrupo numérico a un problema tipo QUBO. Este algoritmo ha sido especialmente diseñado para lanzarse en un computador cuántico adiabático —y más concretamente, en el computador D-Wave 2X— por lo que también explicaremos los problemas encontrados en el proceso de adaptación.

### Referencias

- [1] J. Ossorio-Castillo and J. M. Tornero. *Resolution of the Frobenius Problem with an Adiabatic Quantum Computer*. *Intelligent Computing* (2022), 292–310.

## Sobre las preimágenes de la multiplicación por $\ell$ en curvas elípticas sobre cuerpos finitos

JOSEP M. MIRET<sup>1</sup>, JORDI PUJOLÀS<sup>1</sup>, NICOLAS THÉRIAULT<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpt. de Matemàtica, Universitat de Lleida. E-mails: josepmaria.miret@udl.cat,  
jordi.pujolas@udl.cat.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile (Chile). E-mail:  
nicolas.theriault@usach.cl.*

### Resumen

Dados dos primos  $\ell$  y  $p$  con  $\ell < p$ , y un cuerpo finito  $\mathbb{F}_q$  de característica  $p \neq 2, 3$ , en esta comunicación se da una caracterización de la imagen de la multiplicación por  $\ell$  en curvas elípticas definidas sobre  $\mathbb{F}_q$  donde toda la  $\ell$ -torsión esté definida sobre  $\mathbb{F}_q$ . El caso  $\ell = 2$  es bien conocido y aparece en [1, pg. 38]. Para  $\ell = 3$  se da un resultado similar en [2, pg. 1780]. Como consecuencia, se muestra detalladamente el cálculo de las preimágenes de la multiplicación por  $\ell$  para  $\ell = 2, 3$ . Estos cálculos tienen un coste polinómico más a lo sumo el del cálculo de 2 raíces  $\ell$ -ésimas.

### Referencias

- [1] D. Husemöller, *Elliptic Curves*. Segunda edición. Graduate Texts in Mathematics 111, Springer-Verlag, 2004.
- [2] J. Miret, R. Moreno, A. Rio, M. Valls *Computing the  $\ell$ -power torsion of an elliptic curve over a finite field*, *Mathematics of Computation* **78** no. 206 (2009), 1767–1786.



## El grupo de automorfismos de la curva modular $X_0^*(N)$ con $N$ libre de cuadrados

FRANCESC BARS<sup>1</sup>, JOSEP GONZÁLEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpt. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona (Catalonia). E-mails: francesc@mat.uab.cat.*

<sup>2</sup> *Dpt. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, (Catalonia). E-mail: josep.gonzalez@upc.edu.*

### Resumen

En [6], Kenku y Momose determinaron el grupo de automorfismos de todas las curvas modulares  $X_0(N)$  con género  $> 1$ , excepto para  $N = 63$ , caso que fue solucionado por Elkies en [3]. Posteriormente, Harrison detectó un error en estos resultados, concerniente a la curva  $X_0(108)$ . In [5], se prueba que esta curva tiene una involución extra que no proviene del normalizador de  $\Gamma_0(108)$  en  $SL_2(\mathbb{R})$ , como sucede para la curvas  $X_0(37)$  and  $X_0(63)$ .

Para la curva modular  $X_0^+(N) = X_0(N)/\langle w_N \rangle$ , donde  $w_N$  denota la involución de Fricke, Baker and Hasegawa determinaron el grupo de automorfismos cuando  $N$  es primo en [1] y, más tarde, en [4] se determinó el grupo de automorfismos cuando  $N$  es el cuadrado de un primo.

Aquí determinamos el grupo de automorfismos de las curvas modulares  $X_0^*(N)$ , obtenidas como el cociente de la curva modular  $X_0(N)$  por el grupo de sus involuciones de Atkin-Lehner, para todos los valores de  $N$  que son libre de cuadrados. Este trabajo ha sido publicado en [2].

### Referencias

- [1] Baker, M. H. and Hasegawa, Y., *Automorphisms of  $X_0^*(p)$* , J. Number Theory, 100 (1), (2003), 72–87.
- [2] Bars, F. and González, J., *The automorphism group of the modular curve  $X_0^*(N)$  with square-free level*, Trans. Amer. Math. Soc., 374 (8), (2012), 5783–5803.
- [3] Elkies, N. D., *The automorphism group of the modular curve  $X_0(63)$* . Compositio Math., 74 (2), (1990), 203–208.
- [4] González, J., *Automorphism group of split Cartan modular curves*, Bull. Lond. Math. Soc., 48 (4), (2016), 628–636.
- [5] Harrison, M., *A new automorphism of  $X_0(108)$* , <https://arxiv.org/abs/1108.5595>, 2014.
- [6] Kenku, M. A. and Momose, F., *Automorphism groups of the modular curves  $X_0(N)$* . Compositio Math., 65 (1), (1988), 51–80.

## Formalismo de Artin para sistemas de Euler

Ó. RIVERO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Mathematics Institute, University of Warwick (United Kingdom). E-mails:*  
Oscar.Rivero-Salgado@warwick.ac.uk, riverosalgado@gmail.com.

### Resumen

Unha filosofía xeral no estudo dos sistemas de Euler pasa por considerar situacións nas que unha forma cuspidal dexenera a unha serie de Eisenstein. Nesta presentación discutirei dúas aproximacións diferentes a esta cuestión. A primeira delas baséase no estudo de congruencias entre sistemas de Euler cando unha forma cuspidal é congruente cunha serie de Eisenstein. Esta idea foi estudada recentemente nun traballo conxunto con V. Rotger, no caso particular dos sistemas de Euler de Beilinson–Kato e unidades circulares. Espérase que este tipo de técnicas poidan aplicarse nun contexto máis xeral. O segundo enfoque pasa por considerar familias de Coleman a través dunha serie de Eisenstein crítica, e estudar os fenómenos de dexeneración que achamos. Isto é parte dun traballo conxunto con David Loeffler, aínda en progreso. Pensamos que estes métodos poderían ser usados para a construción de sistemas de Euler onde a ausencia de unidades modulares dificulta notablemente ese labor.

*Una filosofía general en el estudio de los sistemas de Euler pasa por considerar situaciones en las que una forma cuspidal degenera a una serie de Eisenstein. En esta presentación discutiré dos aproximaciones diferentes a esta cuestión. La primera de ellas se basa en el estudio de congruencias entre sistemas de Euler cuando una forma cuspidal es congruente con una serie de Eisenstein. Este acercamiento fue estudiado recientemente en un trabajo conjunto con V. Rotger, en el caso particular de los sistemas de Euler de Beilinson–Kato y unidades circulares. Se espera que este tipo de técnicas puedan dar también resultados en contextos más generales. El segundo enfoque pasa por considerar familias de Coleman a través de una serie de Eisenstein crítica, y estudiar los fenómenos de degeneración asociados. Esto es parte de un trabajo conjunto con David Loeffler, todavía en progreso. Creemos que estos métodos pueden ser usados para la construcción de sistemas de Euler en contextos donde la ausencia de unidades modulares dificulta notablemente dicha labor.*

### Referencias

- [1] D. Loeffler, O. Rivero, *Eisenstein degeneration of Euler systems*, en progreso.
- [2] O. Rivero, V. Rotger, *Motivic congruences and Sharifi's conjectures*, prepublicación.

## Una construcción cuaterniónica de módulos singulares $p$ -ádicos

X. GUITART<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona (Barcelona). E-mail: xavier.guitart@ub.edu.*

### Resumen

Los cociclos rígidos analíticos meromorfos han sido introducidos recientemente por Henri Darmon y Jan Vonk, como una extensión conjetural  $p$ -ádica de la teoría de módulos singulares al caso de cuerpos base cuadráticos reales. Son ciertas clases de cohomología de  $SL_2(\mathbb{Z}[1/p])$  que se pueden evaluar en números cuadráticos reales y los valores así obtenidos se conjetura que son algebraicos, y que pertenecen a ciertas extensiones reales del cuerpo base. En esta charla explicaré un trabajo conjunto con Marc Masdeu y Xavier Xarles, de la Universitat Autònoma de Barcelona, en el cual se propone una construcción similar de clases de cohomología de órdenes en álgebras de cuaterniones indefinidas sobre cuerpos de números totalmente reales  $F$ . Estas clases de cohomología pueden ser evaluadas en elementos pertenecientes a extensiones casi totalmente complejas  $K$  de  $F$ , y conjeturamos que los valores obtenidos son algebraicos y pertenecientes a extensiones abelianas de  $K$ . Esta conjetura se sustenta en abundantes cálculos y experimentos numéricos.

### Referencias

- [1] X. Guitart, M. Masdeu, X. Xarles *A quaternionic construction of  $p$ -adic singular moduli*, Res. Math. Sci. 8 (2021), no. 3, Paper No. 45, 20 pp.

## Aritmética de extensiones cuárticas vía teoría Hopf-Galois

D. GIL-MUÑOZ

*Charles University in Prague (Chequia).*  
*E-mail: daniel.gilmu@hotmail.com.*

### Resumen

La teoría Hopf-Galois es una generalización de la teoría de Galois mediante el uso de álgebras de Hopf. Dicha generalización consiste en la introducción del concepto de estructura Hopf-Galois de una extensión, que es un par formado por un álgebra de Hopf y una acción sobre la extensión que juegan el papel del grupo de Galois y su acción sobre la correspondiente extensión de Galois. Este enfoque se puede aplicar a la teoría de módulos de Galois, consistente en el estudio de la estructura del anillo de enteros de la extensión como módulo sobre un orden adecuado de la correspondiente estructura Hopf-Galois. En esta charla abordamos el estudio de esta cuestión en extensiones cuárticas del cuerpo de los números racionales. Nuestros resultados demuestran una sorprendente conexión de la libertad de la estructura de módulo con la solubilidad de ciertas ecuaciones de Pell generalizadas, que explotamos para la obtención de nuevos resultados. Este es un trabajo conjunto con Anna Rio.

**TOPOLOGICAL STRUCTURES IN ALGEBRA,  
COMBINATORICS AND GEOMETRY AND THEIR  
APPLICATIONS**

ORGANIZADORES

**Enrique Artal Bartolo** (Universidad de Zaragoza)

**Imma Gálvez Carrillo** (Universidad Politécnica de Cataluña)

## Una categoría de complejos de cadenas que no es una categoría de modelos de Quillen

C. CASACUBERTA<sup>1</sup>, A. ROIG<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, carles.casacuberta@ub.edu*  
<sup>2</sup> *Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya*

### Resumen

Se trata de un artículo inacabado con Agustí [2]. Esta presentación está dedicada al recuerdo de 42 años de amistad.

Las categorías de complejos de cadenas de módulos sobre un anillo son ejemplos paradigmáticos de categorías de modelos de Quillen, donde las equivalencias débiles son los morfismos de complejos que inducen isomorfismos en homología. Sin embargo, este hecho no puede generalizarse a complejos de cadenas sobre una categoría abeliana arbitraria. Existe una categoría abeliana  $\mathcal{A}$  descrita por Freyd en [3] que no posee suficientes proyectivos y tal que la categoría de complejos de cadenas  $\text{Ch}(\mathcal{A})$  no admite estructura de categoría de modelos de Quillen. La categoría derivada  $D(\mathcal{A})$  fue usada en [1] como ejemplo de una categoría triangulada donde no se cumple la representabilidad de Brown ni en ella ni en su dual.

### Referencias

- [1] C. Casacuberta, A. Neeman, *Brown representability does not come for free*, Math. Res. Lett. 16 (2009), 1–5.
- [2] C. Casacuberta, A. Roig, *A category of complexes which is not a Quillen model category*, preprint.
- [3] P. Freyd, *Abelian Categories*, Harper and Row, New York, 1964.

## Homology of even Artin kernels and Sigma invariants

CONCHITA MARTÍNEZ PÉREZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza. E-mail: conmar@unizar.es.*

### Resumen

Cocyclic subgroups of right angled Artin groups (including Bestvina-Brady groups) are well-known for their interesting cohomological properties. Here, we consider cocyclic groups in a natural generalization of right angled Artin groups: even Artin groups of FC. We describe the homology groups of those cocyclic subgroups as modules over the ring of Laurent polynomials and relate these description with the Sigma invariants of the ambient group.

## Cuadrados de Steenrod en homología de Khovanov

FEDERICO CANTERO MORÁN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid E-mail: federico.cantero@uam.es.*

### Resumen

Título: Cuadrados de Steenrod en homología de Khovanov Abstract: La homología de Khovanov es un invariante de nudos que ha sido recientemente refinado a un invariante con valores en espectros (i.e., espacios topológicos salvo suspensión). Como consecuencia, la homología de Khovanov tiene estructura adicional, entre la que se encuentra una acción del álgebra de Steenrod. En esta charla explicaremos esta acción y cómo calcularla.

Título: Steenrod squares in Khovanov homology Abstract: Khovanov homology is a link invariant that has been recently refined to an invariant in spectra (i.e., topological spaces up to suspension). As a consequence, Khovanov homology becomes endowed with additional structure, such as an action of the Steenrod algebra. In this talk we will explain this action and how to compute it.



## Catalan many (more) associahedra

LUIS CRESPO RUIZ, FRANCISCO SANTOS

<sup>4</sup> *Dep. de Matemáticas, Estadística y Computación, Univ. de Cantabria, Spain. E-mail: francisco.santos@unican.es, luis.cresporuiz@unican.es.*

### Resumen

The *associahedron* is an ubiquitous object in combinatorics, with its origin in topology. It first appeared in Tamari's PhD thesis (1951) and was described as a cell complex in Jim Stasheff's work on the associativity of  $H$ -spaces [6]. Since the 1980s many realizations of it as a polytope have been found, some of them ad-hoc (Haiman, Lee) and some as a particular example of a more general object (as a secondary polytope by Gel'fand, Kapranov and Zelevinskii [4], as a cluster complex of type A by Gel'fand, Chapoton and Zelevinskii [1], or as a subword complex by Ceballos, Labbé and Stump [2]).

They are also extremely versatile. Hohlweg-Lange [5] construct  $2^{n-1}$  different associahedra of dimension  $n$ , all with facet normals in  $\{0, \pm 1\}$ , and Santos constructs  $C_{n+1} \in \Theta(4^n n^{-3/2})$  of them, one for each "seed triangulation" of the  $n$ -gon [3].

After reviewing (some of) these constructions, we show that the Hohlweg-Lange associahedra are also part of a family of size  $C_{n+1}$ , but a different one. Our construction uses tropical geometry ideas, more precisely the (known) relation of the associahedron with the positive part of the tropical variety of antisymmetric matrices of rank two (which coincides with the Grassmanian  $Gr(n, 2)$ ).

### Referencias

- [1] Frédéric Chapoton, Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. *Polytopal realizations of generalized associahedra*. Can. Math. Bull. 45 (2002), 537–566.
- [2] Cesar Ceballos, Jean-Philippe Labbé and Christian Stump. *Subword complexes, cluster complexes, and generalized multi-associahedra*. J. Algebraic Combin., 39 (2014), 17–51.
- [3] Cesar Ceballos, Francisco Santos, Günter M. Ziegler. Many non-equivalent realizations of the associahedron. *Combinatorica*, 35:5 (2015), 513–551.
- [4] Israel M. Gelfand, Mikhail M. Kapranov and Andrei V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston 1994.
- [5] Christophe Hohlweg and Carsten Lange. *Realizations of the associahedron and cyclohedron*. Discrete & Comput. Geometry 37 (2007), 517–543.
- [6] James D. Stasheff. *Homotopy associativity of H-spaces, I*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275–292.

## Análisis topológico de datos y aplicaciones

ROCÍO GONZÁLEZ-DÍAZ

*Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail: rogodius.es.*

### Resumen

En esta charla recordaremos los ingredientes básicos para el análisis topológico de datos [1] y sus características más importantes que hacen que sea una herramienta robusta, potente y alternativa a las técnicas clásicas de análisis de datos. Además, expondremos aplicaciones de muy diversa índole en las que quedará de manifiesto la versatilidad de dicha herramienta. Concretamente, hablaremos de la entropía persistente que no es más que la entropía del código de barras de una filtración y comentaremos sus propiedades más interesantes [2]. Algunas de las aplicaciones que veremos son:

- Clasificación de señales.
- Clasificación de emociones en videos de personas hablando a la cámara.
- Identificación de patrones de escritura de un autor para certificar la autoría de un escrito.
- Extracción de un conjunto representativo que aseguren un entrenamiento de una red neuronal equivalente al entrenamiento realizado con el conjunto original.

Terminaremos la charla comentando recientes aplicaciones de técnicas de la topología algebraica para el diseño de redes neuronales [3] con el objetivo de que sean explicables, robustas y confiables.

**Financiación:** Advances in Topología Computacional y Aplicaciones. PID2019-107339 GB-I00. Proyecto de investigación. Plan Estatal 2017-2020 Generación Conocimiento-Proyectos I+D+i. Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades.

### Referencias

- [1] H. Edelsbrunner, J. Harer (2010). Computational Topology - an Introduction.. American Mathematical Society. ISBN: 978-0-8218-4925-5
- [2] N.s Atienza, R. González-Díaz, M. Soriano-Trigueros, On the stability of persistent entropy and new summary functions for topological data analysis, Pattern Recognition, Volume 107, 2020, 107509
- [3] E. Paluzo-Hidalgo, R. González-Díaz, M.A. Gutiérrez-Naranjo, Two-hidden-layer feed-forward networks are universal approximators: A constructive approach, Neural Networks, Volume 131, 2020, Pages 29-36

## Complejidad topológica mediante recubrimientos arbitrarios

JOSÉ MANUEL GARCÍA CALCINES<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Estadística e I.O. Universidad de La Laguna (Spain). E-mail: jmgarc@ull.edu.es.*

### Resumen

Siguiendo el mismo espíritu que en el trabajo de Srinivasan, extendemos la noción de categoría de Lusternik-Schnirelmann generalizada a la categoría seccional, con la denominada *categoría seccional generalizada*, denotada como  $\text{secat}_g(-)$ , estableciendo que coincide con la categoría seccional estándar cuando tratamos espacios ANR:

**Teorema.** Sea  $p : E \rightarrow B$  una fibración entre espacios ANR. Entonces se tiene la igualdad  $\text{secat}_g(p) = \text{secat}(p)$ .

Este resultado tiene una consecuencia interesante que involucra a la complejidad topológica. En este sentido, si  $X$  tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo, se prueba que la complejidad topológica de  $X$  puede definirse usando un recubrimiento general de  $X \times X$ , no necesariamente abierto. Otra consecuencia es que se recupera el resultado de T. Srinivasan  $\text{cat}(X) = \text{cat}_g(X)$  cuando  $X$  es un ANR.

Usando una caracterización por cubiertas de la categoría relativa en el sentido de Doeraene-El Haouari también introducimos una versión generalizada de  $\text{relcat}(-)$ , denotada como  $\text{relcat}_g(-)$ . Se tiene entonces el siguiente resultado:

**Teorema.** Sea  $i_X : A \hookrightarrow X$  una cofibración entre espacios ANR. Entonces se tiene la igualdad  $\text{relcat}(i_X) = \text{relcat}_g(i_X)$ .

Como consecuencia, podemos comparar la complejidad topológica monoidal con su homóloga generalizada, estableciendo que coinciden cuando consideramos espacios ANR.

### Referencias

- [1] N. Iwase, M. Sakai, Topological complexity is a fibrewise L-S category, *Topol. Appl.* 157 (2010) 10–21. (Erratum to "Topological complexity is a fibrewise LS-category", *Topol. Appl.* 159 (2012) 2810–2813).
- [2] Srinivasan, Tulsi. On the Lusternik-Schnirelmann category of Peano continua. *Topology Appl.* 160 (2013), no. 13, 1742–1749.
- [3] Srinivasan, Tulsi. The Lusternik-Schnirelmann category of metric spaces. *Topology Appl.* 167 (2014), 87–95.

## Diagramas de Rudolph de curvas planas

M.A. MARCO-BUZUNARIZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza (Spain). E-mails: mmarco@unizar.es.*

### Resumen

La proyección de una curva algebraica en el plano complejo sobre una coordenada determina una fibración localmente trivial de pares. A su vez, esta fibración da una representación el grupo fundamental del complemento del lugar de ramificación (es decir, el discriminante) en el grupo de trenzas.

Los puntos donde se producen los cruzamientos de estas trenzas forman el llamado Diagrama de Rudolph de la curva. Estos diagramas determinan completamente la topología del encaje de la curva, y de hecho dan una forma explícita de construir la curva como superficie de Riemann.

A pesar de su utilidad, los diagramas de Rudolph apenas han sido estudiados en la literatura, tal vez por la dificultad que supone calcularlos en la práctica.

En esta charla vemos algunas de sus propiedades, y un método factible para calcular un diagrama de Rudolph compatible con una curva dada.

### Referencias

- [1] S. Orevkov. *Rudolph diagrams and analytic realization of the Vitushkin covering*, Mat. Zametki, 1996.
- [2] S. Orevkov. *The fundamental group of the complement of a plane algebraic curve*. Mat. Sb. (N.S.), (1988), 260–270.
- [3] L. Rudolph. *Algebraic functions and closes braids*. Topology, (1983), 191–202.

## Distancia homotópica

E. MACÍAS VIRGÓS<sup>1</sup>, D. MOSQUERA LOIS<sup>1</sup>, M.J. PEREIRA SÁEZ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela (Spain). E-mails:*  
quique.macias@usc.es, david.mosquera.lois@usc.es.

<sup>2</sup> *Facultade de Economía e Empresa, Universidade da Coruña (Spain). E-mail:*  
maria.jose.pereira@udc.es.

### Resumen

La categoría de Lusternik-Schnirelmann y la complejidad topológica son casos particulares de una noción más general, que llamamos distancia homotópica entre dos aplicaciones continuas. En consecuencia, varias propiedades de esos invariantes pueden probarse de manera unificada y surgen nuevos resultados. Como aplicación, mostramos cómo se puede utilizar la distancia homotópica para resolver un problema de planificación de movimientos generalizado.

### Referencias

- [1] E. Macías-Virgós, D. Mosquera-Lois, M. J. Pereira-Sáez, Homotopic distance and generalized motion planning, *arXiv:2105.13006* (2021).
- [2] Enrique Macías-Virgós, David Mosquera-Lois, Homotopic distance between maps, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1–21 (2021), publicado online 22/02/2021.
- [3] Enrique Macías-Virgós, David Mosquera-Lois, Homotopic distance between functors, *J. Homotopy Relat. Struct.* Vol. 15, 537–555 (2020).

## De la torre cromática al espectro de un anillo a través de los derivadores

L. ALONSO TARRÍO<sup>1</sup>, B. ÁLVAREZ DÍAZ<sup>1</sup>, A. JEREMÍAS LÓPEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Dpto. de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela (Spain). E-mails:  
beatrizalvarez.diaz@usc.es, leo.alonso@usc.es, ana.jeremias@usc.es.*

### Resumen

El artículo clásico de Neeman de 1992 [1], sobre la categoría derivada de un anillo conmutativo noetheriano  $R$ , proporciona una clasificación de las subcategorías localizantes de  $\mathbf{D}(R)$  mediante subconjuntos de  $\text{Spec}(R)$ . Esta clasificación señala un paralelismo entre el espectro de un anillo y la torre cromática en homotopía estable.

En esta línea, daremos una descripción explícita de los funtores localización y aciclización en el caso de una subcategoría *smashing*, aquella en que la localización conmuta con coproductos. Teniendo en cuenta que una localización *smashing* está generada por objetos compactos y empleando un nuevo lenguaje, el de los derivadores [2], describiremos estos funtores utilizando exclusivamente objetos perfectos de la categoría derivada de módulos.

### Referencias

- [1] Neeman, A. *The chromatic tower for  $\mathbf{D}(R)$* . *Topology*, 31 (3), 519–532, 1992.
- [2] Groth. M. *Derivators, pointed derivators and stable derivators*. *Algebr. Geom. Topol.*, 13 (1), 313–374, 2013.

## Agustí y las matemáticas

ANICETO MURILLO MAS<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga. E-mail: aniceto@uma.es.*

### Resumen

Dedicaremos este rato a recordar pasajes matemáticos y personales de Agustí que seguro dejarán constancia de su carácter abnegado, afable, tolerante y divertido, así como del excelente nivel de sus matemáticas que siempre compartía de forma amena y generosa.

## Fusión de clases de conjugación en grupos de Artin-Tits

MARÍA CUMPLIDO CABELLO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail: cumplido@us.es.*

### Resumen

Los grupos de Artin-Tits son generalizaciones de los grupos de trenzas que se definen a partir de un conjunto finito de generadores y relaciones de la forma  $abab \cdots = baba \cdots$ , donde las dos palabras de la igualdad tienen la misma longitud. Aunque esta definición es bastante simple, hay pocos resultados generales para estos grupos. En esta charla estudiaremos un problema relativo a una familia de subgrupos: los subgrupos parabólicos. Estos subgrupos han resultado ser útiles para construir interesantes complejos simpliciales que nos han ayudado a saber más sobre los grupos de Artin-Tits, pero de nuevo: no sabemos mucho sobre ellos en general. El problema a estudiar será el siguiente: Dados dos elementos dentro de un subgrupo parabólico  $P$  de un grupo de Artin  $A$ , que son conjugados por un elemento de  $A$ , ¿son también conjugados por un elemento del propio  $P$ ? En 2014, González-Meneses provó que esto siempre es cierto para trenzas, es decir, que los encajes geométricos de trenzas no fusionan clases de conjugación. En un artículo de 2020 con Calvez y Cisneros de la Cruz, dimos una clasificación para grupos de Artin-Tits esféricos y demostramos que la respuesta no es siempre afirmativa. En esta ponencia, explicaremos como resolver este problema para todo grupo de Artin-Tits que satisfaga tres condiciones conjeturadas siempre verdaderas.



## Cohaces localmente constante con estructura multiplicativa

FERNANDO MURO JIMÉNEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Álgebra, Universidad de Sevilla (Spain). E-mail: fmuro@us.es.*

### Resumen

En geometría, los haces juegan un papel mucho más relevante que los cohaces. No obstante, los segundos han cobrado relevancia a la luz de nuevos métodos para construir teorías de campos a través de lo que se conoce como homología quiral o de factorización, cuyos coeficientes pueden ser cierto tipo de cohaces en variedades diferenciables. Estas teorías establecen un puente entre la geometría y la física.

La categoría de haces es una localización de la de prehaces. El funtor de localización es la conocida hacificación. Esto permite, por ejemplo, ver que la categoría de haces tiene colímites, y calcularlos.

Los cohaces en cambio no poseen una teoría general con resultados óptimos ya que las colocalizaciones en geometría no existen en general por razones conjuntistas. En esta charla mostraremos que, para los cohaces que aparecen en homología de factorización, sí que existe una cohacificación homotópica y mostraremos cómo se puede construir. Esto es parte de un trabajo conjunto con Víctor Carmona y Ramón Flores.

## EXPERIENCIAS DOCENTES

### PONENCIAS

*Cuadráticas habitadas*

**Diego J. Arrebola Serrano** (IES Hernán Pérez del Pulgar, Ciudad Real)

*Simbiosis matemática: Sucesiones y fractales*

**Amparo María Fernández Vico** (IES M. Juan de Ávila, Ciudad Real)

*Si el logaritmo es la aspirina, ¿Cómo provocamos el dolor de cabeza?*

**Elena Gajate Paniagua** (IES M. Juan de Ávila, Ciudad Real)

*¿Cuántos días tiene un año?*

**José Ángel López Mateos** (IES Dámaso Alonso, Puertollano)

*Cinco Tips para poner chispa a las clases tradicionales*

**Óscar Parada Maroto** (IES Peñalba, Moral de Calatrava)

*Decidir matemáticamente*

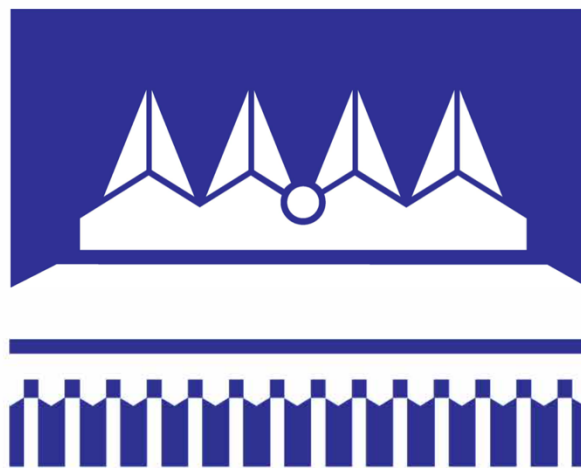
**Raúl Rivilla Bastante** (IES Juan de Távora, Puertollano)

*Criterios de divisi... ¿qué?*

**Luz María Sánchez García** (IES Berenguela de Castilla, Bolaños de Calatrava)

*Hasta el infinito y más allá*

**Eduardo Calle Calahorra** (IES Hernán Pérez del Pulgar, Ciudad Real)



**PÓSTERES**

## A mathematical model of the low-grade gliomas response to chemotherapy and radiotherapy

Luis E. Ayala-Hernández<sup>1\*</sup>, Armando Gallegos<sup>1</sup>, Philippe Schucht<sup>2</sup>, Michael Murek<sup>2</sup>,  
Luis Pérez-Romasanta<sup>3</sup>, Juan Belmonte-Beitia<sup>4</sup> and Víctor M. Pérez-García<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ciencias Exactas y Tecnología

Centro Universitario de los Lagos, Universidad de Guadalajara, Lagos de Moreno, Jalisco, Mexico.

<sup>2</sup>Universitätsklinik für Neurochirurgie

Bern University Hospital, Bern, Switzerland.

<sup>3</sup>Radiation Oncology Service

Salamanca University Hospital, Salamanca, Spain.

<sup>4</sup>Mathematical Oncology Laboratory (MOLAB)

Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain.

\*[quique.a.h@hotmail.com](mailto:quique.a.h@hotmail.com)

Adult supratentorial WHO grade II diffuse low-grade gliomas (LGGs) are slow-growing primary brain tumors that are in general incurable. There is evidence that the combination of chemotherapy and radiotherapy could be a beneficial strategy for its management but their optimal use is still under study [1]. We constructed a mathematical model describing the response of LGGs to combinations of TMZ and radiation therapy. Patient-specific parameters were obtained from longitudinal real imaging data of each patient response to both treatments. Computer simulations show that concurrent cycles of radiotherapy and temozolomide could provide the best therapeutical efficacy in-silico [2].

### References

- [1] Lombardi G, Barresi V, Castellano A, Tabouret E, Pasqualetti F, Salvalaggio A, et al. Clinical Management of Diffuse Low-Grade Gliomas, *Cancers*, 12(10): 3008, 2020.
- [2] Ayala-Hernández LE, Gallegos A, Schucht P, et al. Optimal combinations of chemotherapy and radiotherapy in low-grade gliomas: A mathematical approach. “Accepted in *Journal of Personalized Medicine* (no published yet)”.

## Behavioral Landscapes of Immune Cells

David G. Aragonés<sup>1</sup>, Gabriel F. Calvo<sup>1</sup>, Georgiana Crainiciuc<sup>2</sup>,  
Miguel Palomino-Segura<sup>2</sup>, Jon Sicilia<sup>2,3</sup>, Andrés Hidalgo<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics & MOLAB-Mathematical Oncology Laboratory  
University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

<sup>2</sup>Area of Cell and Developmental Biology  
Centro Nacional de Investigaciones Cardiovasculares Carlos III, Madrid, Spain

<sup>3</sup>Bioinformatics Unit  
Centro Nacional de Investigaciones Cardiovasculares Carlos III, Madrid, Spain

<sup>4</sup>Vascular Biology and Therapeutics Program and Department of Immunobiology  
Yale University School of Medicine, New Haven, USA

david.aragones@uclm.es

Mapping in vivo the different states of immune cells is an important open problem in biology. In this work, using data from movement and shape of over 100000 cells, we found that supervised selection of morpho-kinetic variables guided by a combination of wrapper and filter methods captured the behavioural landscapes of active inflammation. Our mathematical modelling, based on logistic regression, decision tree methods and correlation networks, provided distributions on graphs which allowed us to identify the most important variables for immune cell prediction. The Euclidean projection was made using multidimensional scaling, employing Pearson's distances as entries of the dissimilarity matrix.

# On robust stability for Hurwitz polynomials via recurrence relations and linear combinations of orthogonal polynomials

Alejandro Arceo<sup>1</sup>, Héctor F. Flores<sup>2</sup>, Lino G. Garza<sup>3</sup>,  
Luis E. Garza<sup>2</sup> and Gerardo Romero<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Tamaulipas, Reynosa, Tamaulipas, México,

<sup>2</sup>Universidad de Colima, Colima, Colima, México,

<sup>3</sup>Universidad de Monterrey, San Pedro Garza García, Nuevo León, México.

lino.garza@udem.edu

In this contribution, we use the connection between stable polynomials and orthogonal polynomials on the real line to construct sequences of Hurwitz polynomials that are robustly stable in terms of several uncertain parameters [1]. These sequences are constructed by using properties of orthogonal polynomials [2], such as the well-known three-term recurrence relation, as well as by considering linear combinations of two orthogonal polynomials with consecutive degree. Some examples are presented.

## References

- [1] Martínez, N.; Garza, L. E.; Aguirre-Hernández, B. *On sequences of Hurwitz polynomials related to orthogonal polynomials*. Linear Multilinear A, 67 (11), 2191–2208, 2019.
- [2] Chihara, T. S. *An introduction to orthogonal polynomials*. Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York; 1978.

## Coloured graphs and finite fields

Pilar Benito<sup>1</sup>, Javier Rández-Ibáñez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas y Computación  
Universidad de La Rioja, Logroño, Spain

pilar.benito@unirioja.es, javier.randez@alum.unirioja.es

In 1955, Gleason and Greenwood [2] gave a pretty method that uses finite fields to colour graphs. The authors were looking for Ramsey number bounds by trying to colour the edges of a complete graph in such a way as to avoid monochromatic triangles. Gleason-Greenwood method leads to the concept of sum-free partition sets on finite groups. In the case of the multiplicative group of a field, such partitions appear by using  $r$ -th power residues. In this work we will explain the algebraic foundations of Gleason-Greenwood method and we will present a computational algorithm to colour graphs that simulates it. Examples, generalisations and applications of coloured graphs by using finite groups and sum-free sets can be found in [1], [3] and [4].

### References

- [1] E. FERNÁNDEZ MORAL, L. RONCAL, Los números de Ramsey y el álgebra, *La Gaceta de la RSME*, Vol 15, 4, pp. 651-674, 2012.
- [2] A. M. GLEASON, R. E. GREENWOOD, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canad. J. Math.*, 7, pp.1-7, 1955.
- [3] R. HILL Y R. W. IRVING, On group partitions associated with lower bounds for symmetric Ramsey numbers, *Europ. J. Combinatorics*, 3, pp. 35-50, 1982.
- [4] A. P. STREET, W. D. WALLIS, Sum-free sets, coloured graphs and designs, *J. Austral. Math. Soc.*, pp. 35-53, 1976.

# Existence and smoothness of the density of the solution to fractional stochastic integral Volterra equations

M.Besalú<sup>1</sup>, D.Márquez-Carreras<sup>2</sup>, E.Nualart<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Department of Statistics

Faculty of Biology, University of Barcelona

<sup>2</sup>Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Mathematics, University of Barcelona

<sup>3</sup>Department of Economics

University Pompeu Fabra, Barcelona

davidmarquez@ub.edu

We consider stochastic Volterra integral equations driven by a fractional Brownian motion with Hurst parameter  $H \in ]1/2, 1[$ . We first derive supremum norm estimates for the solution and its Malliavin derivative. We then show existence and smoothness of the density under suitable nondegeneracy conditions. This extends the results in Hu-Nualart and Nualart-Saussereau where stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion are considered. The proof uses a priori estimates for deterministic differential equations driven by a function in a suitable Sobolev space.



# Mathematical modelling of hyperthermia treatment of cancer

J.J. Bosque<sup>1</sup>, G.F. Calvo<sup>1</sup>, M.C. Navarro<sup>2</sup>, V.M. Pérez-García<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Mathematical Oncology Laboratory (MOLAB),  
University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

<sup>2</sup>Department of Mathematics-IMACI, Facultad de Ciencias y Tecnologías Químicas.  
University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

jesus.bosque@uclm.es

The elevation of temperature of a tumour (hyperthermia) has been proposed as an effective complement to traditional cancer therapies. Its main benefits are the rise in oxygen levels and additional cell death. We use a mathematical model of ordinary differential equations to study the evolution of temperature and blood flow during the treatment, finding that the time scales do not support a key role of vasodilation. We then use a model of partial differential equations to study the cell and oxygen evolution at the microscale. The results attribute a critical role for vasculature, being hypoxic areas much more affected by cell death due to higher temperatures.

## References

- [1] J.J. Bosque, G.F. Calvo, V.M. Pérez-García, and M.C. Navarro, The interplay of blood flow and temperature in regional hyperthermia: a mathematical approach, Royal Society Open Science, 2021.
- [2] J.J. Bosque, G.F. Calvo, and M.C. Navarro, Modelling the effect of vascular status on tumour evolution and outcome after thermal therapy, *sent for review*

# On Multivariate Symmetric Orthogonal Polynomials

Cleonice F. Bracciali<sup>1</sup>, Miguel A. Piñar<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática

IBILCE, UNESP - Universidade Estadual Paulista, 15054-000, São José do Rio Preto, SP, Brazil.

<sup>2</sup>Departamento de Matemática Aplicada

Universidad de Granada. 18071 Granada. Spain

mpinar@ugr.es

We study families of multivariate orthogonal polynomials with respect to the symmetric weight function in  $d$  variables

$$B_\gamma(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d w(x_i) \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{2\gamma+1}, \quad \mathbf{x} \in (a, b)^d,$$

for  $\gamma > -1$ , where  $w(t)$  is an univariate weight function in  $t \in (a, b)$  and  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  with  $x_i \in (a, b)$ . Using the change of variables  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d)$  where,  $u_r$  are the  **$r$ -th elementary symmetric functions** we study multivariate orthogonal polynomials in the variable  $\mathbf{u}$  associated with the weight function  $W_\gamma(\mathbf{u})$  defined by means of  $W_\gamma(\mathbf{u}) = B_\gamma(\mathbf{x})$ . For the new weight function, the domain is described in terms of the discriminant of the polynomial having  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ , as its zeros and in terms of the associated Sturm sequence. Obviously, generalized classical orthogonal polynomials as defined by Lassalle [2] and Macdonald [3] are included in our study. Choosing the univariate weight function as the Hermite, Laguerre and Jacobi weight functions, we obtain the representation in terms of the variables  $u_r$  for the partial differential operators having the respective Hermite, Laguerre and Jacobi generalized multivariate orthogonal polynomials as the corresponding eigenfunctions. The case  $d = 2$  coincides with the polynomials studied by Koornwinder in [1]. Finally, we present explicitly the partial differential operators for Hermite, Laguerre and Jacobi generalized polynomials in the cases  $d = 2$  and  $d = 3$ .

## References

- [1] T. H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators I*, Indag. Math., **36** (1974), 48–58.
- [2] M. Lassalle, *Polynômes de Jacobi généralisés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), 425–428.
- [3] I. G. Macdonald, *Hypergeometric Functions I*, arXiv:1309.4568 [math.CA]

# Explicit Runge-Kutta methods for the numerical solution of linear inhomogeneous IVPs

M. Calvo<sup>1</sup>, J. I. Montijano<sup>1</sup>, L. Rández<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IUMA-Department of Mathematics  
University Zaragoza, Spain

randez@unizar.es.es

We consider IVPs for  $d$ -dimensional differential systems of linear inhomogeneous equations given by the equations

$$\begin{aligned}y'(t) &= D y(t) + f(t), & t \in [t_0, t_0 + T] \\y(t_0) &= y_0 \in \mathbf{R}^d,\end{aligned}\tag{1}$$

where  $D \in \mathbf{R}^{d \times d}$  is a constant matrix and  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$  is a sufficiently smooth function in the interval of interest.

We approximate the solution of (1) at  $t = t_0 + h$  by means of an  $s$ -stage explicit Runge-Kutta (RK) ([3], [4]) method given by

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^s b_j K_j, \quad K_j = h D \left( y_0 + \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} K_k \right) + h f(t_0 + c_j h), \quad j = 1, \dots, s,\tag{2}$$

where  $b_j, c_j, a_{jk}$  are the coefficients that define the method.

As remarked by several authors ([1], [2]) the number of order conditions for the linear case is smaller than in the general case and this extra freedom allows to derive new special methods.

We will derive the order conditions of the RK methods (2) without the simplifying condition  $\sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} = c_j, j = 1, \dots, s$ . Therefore we have additional free parameters of the RK scheme and this leads to methods for problems (1) with special properties to be considered.

## References

- [1] T. E. Simos and Ch. Tsitouras: "Evolutionary derivation of Runge-Kutta pairs for addressing inhomogeneous linear problems." *Numerical Algorithms* (2020): 87(2), 1–15. DOI:10.1007/s11075-020-00976-9
- [2] D. W. Zingg and T. T. Chrisholm: "Runge-Kutta methods for linear ordinary differential equations". *Applied Numer. Math.* 31, 227–238 (1999).
- [3] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 2003.
- [4] E. Hairer, S. Nørsett, G. Wanner: *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Berlin Heidelberg. (1993).

# Optimal divisions of a convex body

Antonio Cañete

Departamento de Matemática Aplicada I  
Universidad de Sevilla

antonioc@us.es

For a convex body  $C$  in  $\mathbb{R}^d$  and a given division of  $C$  into  $n$  convex subsets  $C_1, \dots, C_n$ , we can consider  $\max\{F(C_1), \dots, F(C_n)\}$  (respectively,  $\min\{F(C_1), \dots, F(C_n)\}$ ), where  $F$  represents one of these classical geometric functionals: the diameter, the width or the inradius. In some sense, the previous value provides a measure of the quality of the division.

In this work we will study the divisions of  $C$  minimizing (respectively, maximizing) the previous value. In particular, we will treat the existence, uniqueness and balancing behaviour of the optimal divisions, bounds for the corresponding optimal values, and algorithms leading to these optimal divisions.

This is part of a joint work with Isabel Fernández and Alberto Márquez (Universidad de Sevilla).

## References

A. Cañete, I. Fernández, A. Márquez, *Optimal divisions of a convex body*, preprint, 2021.

# A new approach to rotational Weingarten surfaces

Paula Carretero<sup>1</sup>, Ildefonso Castro<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics

University of Jaén, Jaén, Spain

<sup>2</sup>Department of Mathematics

University of Jaén, Jaén, Spain

pch00005@red.ujaen.es, icaastro@ujaen.es

Weingarten surfaces are those whose principal curvatures satisfy a functional relation [3]. By introducing the notion of *geometric linear momentum* of a plane curve [1], we make a contribution to the study of rotational Weingarten surfaces in Euclidean 3-space (see [2]) reducing any type of Weingarten condition on a rotational surface to a first order differential equation on the momentum of the generatrix curve. In particular, we deal with the problem of prescribing mean or Gauss curvature on rotational surfaces in terms of distance to the revolution axis. As a consequence, we recover in an easy way some classical results (e.g. Euler's theorem about minimal rotational surfaces) and provide new characterizations of some simple rotational surfaces.

## References

- [1] I. Castro and I. Castro-Infantes, Plane curves with curvature depending on distance to a line, *Diff. Geom. Appl.* 44: 77–97, 2016.
- [2] R. López and A. Pámpano, Clasificación of rotational surfaces in Euclidean space satisfying a lineal relation between their principal curvatures, *Math. Nachr.* 293(4): 735–753, 2020.
- [3] J. Weingarten, Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen, *J. Reine Angew. Math.* 59: 382–393, 1861.

## Conjugate Constructions for $H$ –Surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Jesús Castro-Infantes<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Geometría y Topología  
University of Granada, Spain

jcastroinfantes@ugr.es

We present two constructions of constant mean curvature  $0 \leq H \leq 1/2$  surfaces in the product space  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  via Daniel’s sister correspondence.

In the first construction, for each  $k \geq 3$ , we show the existence of a 1-parameter family of complete properly Alexandrov-embedded minimal surfaces with total finite curvature  $-4k\pi$  in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  with genus 1 and  $k$  embedded ends asymptotic to vertical planes.

In the second construction, we show the existence of a 2-parameter family of Alexandrov-embedded constant mean curvature  $0 < H \leq 1/2$  surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  with  $k \geq 2$  ends and genus 0. We will discuss the embeddedness of the constant mean curvature surfaces of this family showing that the Krust property does not hold for  $0 < H \leq 1/2$ .

### References

- [1] Jesús Castro-Infantes and José M. Manzano. Genus one minimal  $k$ -noids and saddle towers in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *arXiv:2001.07028 [math]*, April 2021.
- [2] Jesús Castro-Infantes, José M. Manzano, and Magdalena Rodríguez. A construction of constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  and the Krust property. *To appear in International Mathematics Research Notices*, December 2020.

# B-cell leukemia relapse prediction based on topological data analysis

Salvador Chulián García<sup>1,2</sup>, Álvaro Martínez-Rubio<sup>1,2</sup>,  
Ana Niño-López<sup>1</sup>, Víctor M. Pérez-García<sup>3,4,5</sup>, María Rosa<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics

Universidad de Cádiz, 11510 Puerto Real, Cádiz, Spain

<sup>2</sup> Biomedical Research and Innovation Institute of Cádiz (INiBICA)

Hospital Universitario Puerta del Mar, 11009 Cádiz, Spain

<sup>3</sup> Department of Mathematics, Mathematical Oncology Laboratory (MOLAB)

Universidad de Castilla-La Mancha, 13005 Ciudad Real, Spain

<sup>4</sup> Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería (IMACI)

Universidad de Castilla-La Mancha, 13005 Ciudad Real, Spain

<sup>5</sup> ETSI Industriales

Universidad de Castilla-La Mancha, 13005 Ciudad Real, Spain

salvador.chulian@uca.es

Early detection of leukaemia relapse is of major clinical importance, so that early action can be taken for patients at risk of recurrence. High-dimensional, pretreatment datasets available for acute lymphoblastic leukaemia patients [1], particularly children, contain information based on the shape of the data point clouds, which is relevant for current prognosis. Here we considered topological data analysis [2] and machine learning, obtaining predictive biomarkers for flow cytometry data [3]. Relapsing and non-relapsing patients differed in shape features such as the number of connected components and loops. Our study highlights the potential of topology and artificial intelligence methods for predicting leukaemia relapse.

## References

- [1] Y. Saeys, S. Van Gassen, and B. N. Lambrecht, Computational flow cytometry: helping to make sense of high-dimensional immunology data, *Nature Rev Immunol*, 16(7): 449-462, 2016.
- [2] N. Otter, M.A. Porter, U. Tillmann, P. Grindrod, and H.A. Harrington, A roadmap for the computation of persistent homology, *EPJ Data Sci*, 6: 17, 2017.
- [2] T. Lakshmikanth, et al., Mass cytometry and topological data analysis reveal immune parameters associated with complications after allogeneic stem cell transplantation, *Cell Reports*, 20: 2238-2250, 2017.

# Dynamics of a two prey and one predator system with indirect effect

R. Colucci<sup>1</sup>, E. Diz-Pita<sup>2</sup>, M. V. Otero-Espinar<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Dipartimento di Ingegneria Industriale e Scienze Matematiche,  
Università Politecnica delle Marche, Ancona, Italy

<sup>2</sup> Departamento de Estadística, Análise Matemática e Optimización,  
Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, España

erikadiz.pita@usc.es

We study a population model with two preys and one predator, considering a Holling type II functional response for the interaction between first prey and predator and taking into account indirect effect of predation. We study the system

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{cxz}{a + \alpha\eta y + x} + Lyz, \\ \dot{y} &= y(\beta - \delta z) - Lyz, \\ \dot{z} &= \frac{bxz}{a + \alpha\eta y + x} + \gamma yz - mz.\end{aligned}$$

In [1] we perform the stability analysis of equilibria and study the possibility of Hopf bifurcation. We also include a discussion on the problem of persistence. The theoretical results are illustrated with several numerical simulations.

## References

[1] R. Colucci, E. Diz-Pita, M. V. Otero-Espinar, Dynamics of a Two Prey and One Predator System with Indirect Effect, *Mathematics* 2021, 9, 436.



## Rigidez y multitriangulaciones

Luis Crespo Ruiz<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria, Santander

crespol@unican.es

La teoría de la rigidez de grafos permite decidir cuándo un grafo es rígido, es decir, no admite deformaciones que mantengan la longitud de las aristas. Además de la rigidez clásica, otras formas de rigidez son la rigidez de cofactores o la rigidez hipergeométrica, que hemos demostrado que coinciden en ciertos casos [1].

Las multitriangulaciones son grafos que generalizan las triangulaciones: grafos maximales en los que no se cruzan más de  $k$  aristas [2]. Estamos investigando la rigidez de estos grafos con el objetivo de realizar un politopo de multitriangulaciones, o multiasociaedro.

### Referencias

- [1] L. Crespo Ruiz, F. Santos, *Bar-and-joint rigidity on the moment curve coincides with cofactor rigidity on a conic*, preprint arXiv:2106.08923, junio de 2021.
- [2] V. Pilaud, F. Santos, *Multitriangulations as Complexes of Star Polygons*, Discrete Comput Geom 41, 284–317 (2009)

# Theory on fractional and nonlocal gradients. A framework for nonlocal hyperelasticity

Javier Cueto<sup>1</sup>, José Carlos Bellido<sup>1</sup>, Carlos Mora-Corral<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics

University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

<sup>2</sup>Department of Mathematics

Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spain

Javier.Cueto@uclm.es

The aim of this work is to obtain suitable models of nonlocal hyperelasticity which may admit functions exhibiting singularities. Since bond-based peridynamics fails to recover hyperelasticity when the nonlocality vanishes, we decided to study existence of minimizers of energy functional based on fractional gradients. This comes with a proper study of functional spaces, fractional vector calculus and a recovering of the classical model when the fractionality index  $s$  goes to 1. A similar study is done with the nonlocal gradient (more relevant for applications), thanks to the proof of a nonlocal version of the fundamental theorem of calculus.

## A structurable algebra which generates $D_4$

Alberto Daza Garcia

<sup>1</sup>Department of Mathematics

Universidad de Zaragoza, Zaragoza, Spain

albertodg@unizar.es

In 1978, Bruce Allison introduces a class of algebras which generalize Jordan algebras with a generalized Kantor-Koecher-Tits construction [1]. An important class of those algebras is the class of structurable algebras related to an hermitian form. Over an algebraically closed field, in this class, there is a remarkable algebra which generates a Lie algebra of type  $D_4$ . We will review some properties.

### References

[1] B.N. Allison, A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras., Math. Ann. (237): 133-156, 1978.

# Cálculos efectivos en sucesiones espectrales

J.A. Delgado Tejada <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas y Computación  
Universidad de La Rioja, Logroño, España

juan-antonio.delgado@alum.unirioja.es

Las sucesiones espectrales son una importante herramienta en álgebra homológica y topología algebraica, consistentes en una sucesión de páginas que se presentan cada una como la homología de la anterior; calcular dichas páginas es en general una tarea muy difícil. En este póster se introducen algoritmos, basados en resultados de Baues y Jibladze, sobre la tercera página de la sucesión espectral de Adams, así como otras técnicas, como la homología efectiva y los campos de vectores discretos, que han permitido la implementación de forma efectiva de sucesiones espectrales como la de Serre, la de Eilenberg-Moore o la de Bousfield-Kan.

## Referencias

- [1] H. J. Baues and M. Jibladze, Secondary derived functors and the Adams spectral sequence, *Topology* vol. 45, no 2, p. 295-324, 2006.
- [2] H. J. Baues and M. Jibladze, Computations of the E3-term of the Adams spectral sequence, arXiv preprint math/0407045, 2004.
- [3] A. R. Ibáñez, Homología efectiva y sucesiones espectrales, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2007.
- [4] J. Rubio and F. Sergeraert, Constructive Algebraic Topology, *Bulletin des Sciences Mathématiques* 126, 389-412, 2002.

## Inner ideals of real Lie algebras

C.Draper<sup>1</sup>, J. Meulewaeter<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Mathematics  
University of Málaga, Málaga, Spain

<sup>2</sup>Department of Mathematics: Algebra and Geometry,  
Ghent University, Ghent, Belgium

cdf@uma.es

If  $L$  is a Lie algebra, a subspace  $B$  of  $L$  is called an *inner ideal* if  $[B, [B, L]] \subset B$ . This notion is inspired in Jordan algebras and it dues to [1], which used it to reconstruct the geometry defined by Tits from the corresponding Chevalley group. Soon, [2] began a sistematic study of inner ideals of Lie algebras with a view in an Artinian theory for Lie algebras (no restrictions on the dimension or on the characteristic of the field). A good compilation from the algebraic approach can be found in the recent monograph [3].

In this poster, we clasify abelian inner ideals of the finite-dimensional simple real Lie algebras. Note that the classification of the abelian inner ideals of the finite-dimensional simple complex Lie algebras was previously obtained in [4], which provided a concrete description up to automorphisms of these inner ideals in terms of roots. Both classifications are related, since clearly if  $B$  is an inner ideal of a real algebra  $L$ , then the complexification  $B^{\mathbb{C}} = B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  is an inner ideal of  $L^{\mathbb{C}}$ .

### References

- [1] J.R.Faulkner, On the geometry of inner ideals, J. Algebra 26: 1–9, 1973.
- [2] G. Benkart, On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 232: 61–81, 1977.
- [3] A.Fernández López, Jordan structures in Lie algebras, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.
- [4] C. Draper, A. Fernández López, E.García and M.Gómez Lozano, The inner ideals of the simple finite dimensional Lie algebras, Journal of Lie Theory, 22 (4): 907–929, 2012.

# A contribution to Mathematical Modelling and Numerical Simulation in Welding with a Lagrange-Galerkin Methodology

Mario Freire-Torres<sup>1</sup>, Jaime Carpio<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Energética, E.T.S. Ingenieros Industriales

Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain

mario.freire.torres@alumnos.upm.es

This present work describes a model of the thermo-hydrodynamic phenomena of the welding process. First, we used the energy equation expressed only in enthalpy terms to analyze the mushy zone. On the other hand, to study the liquid phase within the melted material, we used the Navier-Stokes equations with a term for fluid flow through porous medium according to Darcy's model and the buoyancy term explained by Boussinesq's model. A numerical solution of this model was built using the finite element method, applying a Lagrange-Galerkin framework and emphasizing the method of characteristics. Our model is described as follows.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} (\theta - 1) \mathbf{e}_y - \frac{1}{\text{ReDa}} \frac{\mathbf{v}}{K} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h = \frac{\text{Ste}}{\text{Pe}} \nabla \cdot (\kappa \nabla h) + \frac{\text{Ste}}{Q} Q, \end{array} \right.$$

## Analysis of intracoronary physiology data

E. Gallego, A. Quirós<sup>1</sup>, J. Escaned<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics  
University of León, León, Spain

<sup>2</sup>Instituto Cardiovascular  
Hospital Clínico San Carlos, Madrid, Spain

<sup>3</sup>Complutense University of Madrid, Madrid, Spain

alicia.quiros@unileon.es

Cardiovascular diseases are the leading cause of death in the world. Due to the current recommendations of clinical practice guidelines<sup>1</sup>, the use of physiological indices in diagnosis is gaining strength every day. Currently, these indices are calculated by averaging physiological variables without taking into account the time series nature of the data. Therefore, in this work a new way of calculating these indices is proposed. The correlation between both methods is evaluated and a correspondence map is studied between an extended selection that includes conductance and zero flow pressure, of already known and proposed indices<sup>2</sup>.

### References

- [1] Knuuti, J., Wijns, W., *et al.*, 2019 ESC Guidelines for the diagnosis and management of chronic coronary syndromes: the Task Force for the diagnosis and management of chronic coronary syndromes of the European Society of Cardiology (ESC), *European heart journal*, 41(3), 407-477, 2020.
- [2] Escaned, J. and Davies, J. eds., 2017. *Physiological Assessment of Coronary Stenoses and the Microcirculation*, Springer.

# Learning Rigidity-based Flocking Control with Gaussian Processes

Manuela Gamonal <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UCM-UC3M)  
Madrid, Spain

manuela.gamonal@icmat.es

In this poster, an strategy is proposed to overcome the inability of a typical control law to adjust by itself to different situations. It consists of the incorporation of Gaussian Processes (GP) into control design problems. GPs are a valuable tool to improve classical control laws if we perform regression with them, together with a Bayesian approach to train and make predictions. This indicates new decentralized control laws can be designed to be more robust in front of external unknown forces and offer, at the same time, safety guarantees with probability bounds for predictions about the error.

## References

- [1] H. G. Tanner , A. Jadbabaie, G. J.Pappas. Stable flocking of mobile agents part I: dynamic topology. In 42nd IEEE International Conference on Decision and Control (IEEE Cat. No. 03CH37475) (Vol. 2, pp. 2016-2021),2003.
- [2] C. W. Reynolds, Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model, Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, p. 25-34, 1987.
- [3] M. Gamonal Fernández, P. Moreno, L. J. Colombo. Learning Shape Control of Multi-Agent Systems with Lagrangian Neural Networks. 2021 Proceedings of the SIAM Conference on Control and its Applications, 40-47, 2021.
- [4] M. Gamonal,T. Beckers ,G. Pappas ,L.J. Colombo. Learning Rigidity-based Flocking Control with Gaussian Processes. (Under preparation), 2021.



## Gradings induced by nilpotent elements

E. García <sup>1</sup>, M. Gómez Lozano<sup>2</sup>, R. Muñoz Alcázar<sup>1</sup>, G. Vera de Salas<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ESCET

Universidad Rey Juan Carlos, Spain

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias

Universidad de Málaga, Spain

esther.garcia@urjc.es

Let  $R$  be an associative algebra. We show that as soon as  $R$  contains a nilpotent element whose last nonzero power is von Neumann regular, there exists a complete system of idempotents in  $R^1$  such that  $R$  is graded with respect to it. If  $R$  has an involution  $*$  and the nilpotent element is either symmetric or skew-symmetric, we obtain a  $*$ -complete family of idempotents and the grading is compatible with the involution.

Nilpotent elements are ad-nilpotent in the Lie algebra  $R^-$ , and the condition of having a nilpotent element with regular last nonzero power implies the existence of an  $\mathfrak{sl}_2$ -triple of  $R$  with semisimple adjoint map  $\text{ad}_h$ . We prove that the grading of  $R$  with respect to the complete system of orthogonal idempotents coincides with the grading of  $R$  induced by the eigenspaces of  $\text{ad}_h$ .

As an application of these results we show that, under the appropriate torsion conditions, a nilpotent element  $a \in R$  can be completed to an  $\mathfrak{sl}_2$ -triple if and only if every nonzero power of  $a$  is von Neumann regular.

### References

[1] E. García, M. Gómez Lozano, R. Muñoz Alcázar<sup>1</sup>, G. Vera de Salas. Gradings induced by nilpotent elements, *in preparation*.

# Skew Braces and Co-quasitriangular Hopf algebras in SupLat

Aryan Ghobadi<sup>1</sup>

<sup>1</sup>School of Mathematics

Queen Mary University of London, Mile End Road, London, E1 4NS, UK

a.ghobadi@qmul.ac.uk

The Yang-Baxter equation, or YBE, first appeared in Statistical Mechanics, and plays a key role in the applications of quantum groups to knot theory and topology. The classification of YBE solutions on sets was proposed by Drinfeld in the 90s [4] and remains an open problem. Recent advances in the classification have come from the study of skew braces [1,5] and their interactions with combinatorics and ring theory. In this poster we present an overview of the relation of skew braces and co-quasitriangular Hopf algebras in the monoidal category, **SupLat**, of complete lattices and join-preserving maps, as developed in [3] and [4].

## References

- [1] F. Cedó, E. Jespers, J. Okniński, Braces and the Yang–Baxter equation, *Communications in Mathematical Physics*, volume(327): 101-116, 2014
- [2] V. G. Drinfeld. On some unsolved problems in quantum group theory. In *Quantum groups*, pages 1–8, Springer, 1992.
- [3] A. Ghobadi, Skew braces as remnants of co-quasitriangular Hopf algebras in **SupLat**, *Journal of Algebra*, volume(586):607-642, 2021.
- [4] A. Ghobadi. Drinfeld twists on skew braces. arXiv preprint arXiv:2105.03286, 2021
- [5] L. Guarnieri and L. Vendramin. Skew braces and the Yang-Baxter equation, *Mathematics of Computation*, 86(307):2519–2534, 2017.

# Invariant Subspaces For Positive Operators on Banach Lattices

F. Javier González-Doña<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics  
Complutense University of Madrid and ICMAT, Madrid, Spain

javier.gonzalez@icmat.es

We study the Invariant Subspace Problem for positive operators on Banach lattices. In particular, we address results about the existence of non-trivial invariant subspaces (and non-trivial invariant ideals) for lattice homomorphisms and band-diagonal positive operators defined on Banach lattices whose order is induced by an unconditional basis. This is part of joint works with Eva A. Gallardo-Gutiérrez and Pedro Tradacete ([2] and [3]).

## References

- [1] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, and O. Burkinshaw, *Invariant subspace theorems for positive operators*, J. Funct. Anal. **124** (1994), no. 1, 95–111.
- [2] E. A. Gallardo-Gutiérrez, F.J. González-Doña, P. Tradacete, *Invariant subspaces for positive operators on Banach spaces with unconditional basis*, <https://arxiv.org/abs/2005.01150>, (2020).
- [3] E. A. Gallardo-Gutiérrez, F.J. González-Doña, *Band-diagonal operators on Banach spaces with unconditional basis*, 29 pp. Submitted, (2021).
- [4] A. K. Kitover and A. W. Wickstead, *Invariant sublattices for positive operators*, Indag. Math. (N.S.) **18** (2007), no. 1, 39–60.
- [5] H. Radjavi and V. G. Troitsky, *Invariant sublattices*, Illinois J. Math. **52** (2008), no. 2, 437–462.

# On certain discrete Sobolev orthogonal polynomials of higher order

Carlos Hermoso Ortiz

Departamento de Física y Matemáticas  
Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares, Madrid, Spain

carlos.hermoso@uah.es

We study a polynomial family associated to a Sobolev-type inner product, orthogonal with respect to an inner product involving an arbitrary number ( $j$ ) of  $q$ -derivatives on the two boundaries of the corresponding orthogonality interval, and which is closely related to the well-known family of Al-Salam-Carlitz I orthogonal polynomials. We present several analytic results: hypergeometric character, connection formulas, ladder operators, and three versions of the holonomic second order  $q$ -difference equations satisfied by the aforementioned nonstandard sequence.

This poster is based on a joint work with Anier Soria-Lorente, Alberto Lastra, and Edmundo J. Huertas

## References

- [1] Carlos Hermoso, Edmundo J. Huertas, Alberto Lastra, and Anier Soria-Lorente, On Second Order  $q$ -Difference Equations Satisfied by Al-Salam-Carlitz I-Sobolev Type Polynomials of Higher Order, *Mathematics*, 8 (8), (2020), 1300.
- [2] Chihara, T.S. An Introduction to Orthogonal Polynomials, *Mathematics Applied Series 13*, Gordon and Breach: New York, NY, USA, 1978.

# Phenotypic volatility as a driver for evolution and adaptation in competing populations

Juan Jiménez Sánchez<sup>1</sup>, Tommaso Lorenzi<sup>2</sup>, Philip K. Maini<sup>3</sup>, Víctor M. Pérez-García<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics

University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

<sup>2</sup>Department of Mathematical Sciences G. L. Lagrange

Polytechnic University of Turin, Turin, Italy

<sup>3</sup>Wolfson Centre for Mathematical Biology, Oxford, United Kingdom

Juan.JSanchez@uclm.es

Through mathematical analysis and numerical simulation of the following nonlocal PDE model:

$$\begin{cases} \partial_t n = (\rho(y) - \kappa N)n + \omega \partial_x^2 n + \mu(x) \partial_y^2 n, & (t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ N(t) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} n(t, x, y) dx dy, \end{cases} \quad (1)$$

that describes the cell number  $n(x, y, t)$  dynamics of a population with two varying phenotypic traits (proliferation rate  $y$  and volatility  $x$ ), we uncovered a robust evolutionary path governing the phenotypic evolution of the whole population.

In this work we describe and analyze both continuous and discrete versions of previous model, we compare numerical results between both versions to depict the effects of stochasticity, and we explore the effect of different selective pressures on the evolutionary dynamics of the cell population.

## References

- [1] Ardaševa A, Anderson ARA, Gatenby RA, et al. Comparative study between discrete and continuum models for the evolution of competing phenotype-structured cell populations in dynamical environments. *Physical review. E*. 2020; 102(4-1):042404. DOI: 10.1103/physreve.102.042404. PMID: 33212726.
- [2] Ardaševa A, Gatenby RA, Anderson ARA, et al. Evolutionary dynamics of competing phenotype-structured populations in periodically fluctuating environments. *Journal of Mathematical Biology*. 2020; 80(3):775-807. DOI: 10.1007/s00285-019-01441-5. PMID: 31641842.
- [3] Bouin E., Calvez V., Meunier N., Mirrahimi S., Perthame B., et al. Invasion fronts with variable motility: phenotype selection, spatial sorting and wave acceleration. *Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série I, Mathématique*, Elsevier. 2012; 350(15-16):761-766. DOI: 10.1016/j.crma.2012.09.010
- [4] Chisholm RH, Lorenzi T, Lorz A, Larsen AK, de Almeida LN, Escargueil A, Clairambault J. Emergence of drug tolerance in cancer cell populations: an evolutionary outcome of selection, nongenetic instability, and stress-induced adaptation. *Cancer Res*. 2015; 75(6):930-9. DOI: 10.1158/0008-5472.CAN-14-2103. PMID: 25627977
- [5] Dowsett, I.T., Sneed, J.L., Olson, B.J. et al. Rate volatility and asymmetric segregation diversify mutation burden in cells with mutator alleles. *Commun Biol*. 2021; 4(21). DOI: 10.1038/s42003-020-01544-6

# Bernstein-type Operators based on the Jacobi inner product

David Lara Velasco, Teresa E. Pérez  
IMAG - Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Granada, Spain

dlara@ugr.es

Bernstein polynomials were introduced by S. Bernstein in 1912 to provide a constructive proof of the Weierstrass approximation theorem. In this way it was established that every continuous function defined in the interval  $[0, 1]$  can be uniformly approximated by Bernstein polynomials in such interval.

In this work we study a modification of the Bernstein operator that was studied in [2] by means of the Jacobi inner product. We analyze its properties on different types of functions and their possible applications.

## References

- [1] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications, vol. 13, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [2] V. Gupta, A. J. López-Moreno, J. M. Latorre-Palacios, *On simultaneous approximation of the Bernstein Durrmeyer operators*, Appl. Math. Comput. 213 (2009), no. 1, 112–120.
- [3] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Second edition. Chelsea Publishing Co., New York, 1986.
- [4] P. Sablonnière, *Opérateurs de Bernstein-Jacobi et Polynômes Orthogonaux*, Publ. ANO 37, Laboratoire de Calcul, Lille, 1981.

# Nilvariedades complejas con estructuras geométricas especiales

Adela Latorre<sup>1</sup>, Luis Ugarte<sup>2</sup>, Raquel Villacampa<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Matemática Aplicada

Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spain

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias - IUMA

Universidad de Zaragoza, Zaragoza, Spain

<sup>3</sup> Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza - IUMA

Universidad de Zaragoza, Zaragoza, Spain

raquelvg@unizar.es

En [1, 2], clasificamos las álgebras de Lie reales nilpotentes 8-dimensionales y centro unidimensional que admiten estructura compleja, describiendo todo el espacio de estructuras complejas sobre cada álgebra salvo isomorfismo. Como consecuencia, obtenemos ejemplos con interesantes propiedades geométricas y topológicas.

- En [3, 4] probamos que existen infinitas nilvariedades 8-dimensionales con distintos tipos de homotopía real admitiendo cada una de ellas estructuras complejas generalizadas de tipo  $k$ , para todo  $0 \leq k \leq 4$ , así como admitiendo estructuras complejas y métricas Hermíticas de tipo balanced y Gauduchon generalizadas. Estos ejemplos presentan una clara diferencia con dimensiones inferiores, donde el número de nilvariedades con distintos tipos de homotopía real es finito.
- En [5], obtenemos nilvariedades Calabi-Yau neutrales que poseen pequeñas deformaciones holomorfas para las cuales no existe ninguna estructura pseudo-Kähler, lo que muestra una importante diferencia con la geometría Kähler Calabi-Yau.
- En [6], para cada entero no negativo  $k$ , encontramos los primeros ejemplos conocidos de variedades balanced cuya sucesión espectral de Frölicher no degenera en paso  $k$ .

## References

- [1] A. Latorre, L. Ugarte, R. Villacampa, Complex structures on nilpotent Lie algebras with one-dimensional center. Preprint. arXiv: 2011.09916 [math.RA].
- [2] A. Latorre, L. Ugarte, R. Villacampa, The ascending central series of nilpotent Lie algebras with complex structure, Transactions of the AMS, 372: 3867-3903, 2019.
- [3] A. Latorre, L. Ugarte, R. Villacampa, On the real homotopy type of generalized complex nilmanifolds, Mathematics, 8: 1562, 2020.
- [4] A. Latorre, L. Ugarte, R. Villacampa, A family of complex nilmanifolds with infinitely many real homotopy types, Complex Manifolds 5: 89-102, 2018.
- [5] A. Latorre, L. Ugarte, On the stability of compact pseudo-Kähler and neutral Calabi-Yau manifolds, J. Math. Pures Appl. 145: 240-262, 2021.
- [6] A. Latorre, L. Ugarte, R. Villacampa, Frölicher spectral sequence of complex nilmanifolds with balanced metrics, En preparación.

# The geometry of mechanical systems with external forces

Manuel de León<sup>1,2</sup>, Manuel Lainz<sup>2</sup> and Asier López-Gordón<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), CSIC

C/ Nicolás Cabrera, 13-15, Campus Cantoblanco, UAM, 28049 Madrid, Spain

<sup>2</sup>Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

C/ Valverde, 22, 28004, Madrid, Spain

asier.lopez@icmat.es

Symplectic geometry is the natural framework for Hamiltonian mechanics. This formalism can also be extended for mechanical systems with external (non-conservative) forces. We have generalized several results for these systems, particularizing for the so-called Rayleigh systems. In a first paper [1, 4], we have obtained a Noether's theorem, as well as other results relating symmetries and constants of the motion, and generalized the symplectic reduction method. In a second paper [2], we have developed a Hamilton-Jacobi theory. In a third paper [3], we have introduced the notion of discrete Rayleigh forces and developed a discrete Hamilton-Jacobi theory.

## References

- [1] M. de León, M. Lainz, and A. López-Gordón, “*Symmetries, constants of the motion, and reduction of mechanical systems with external forces*”, J. Math. Phys. **62**, 042901 (2021), arXiv: 2101.09036
- [2] M. de León, M. Lainz, and A. López-Gordón, “*Geometric Hamilton-Jacobi theory for systems with external forces*” (2021), in review, arXiv: 2109.13802
- [3] M. de León, M. Lainz, and A. López-Gordón, “*Discrete Hamilton-Jacobi theory for systems with external forces*”, under preparation
- [4] A. López-Gordón, “*The geometry of Rayleigh dissipation*”, Master's thesis, Universidad Autónoma de Madrid (2021), arXiv: 2107.03780



# Mathematical model of CAR T cell therapies for B-acute lymphoblastic leukemia

O. León-Triana<sup>1</sup>, S. Sabir<sup>2</sup>, G.F. Calvo<sup>1</sup>, J. Belmonte-Beitia<sup>1</sup>, S. Chulián<sup>3</sup>,  
Ál. Martínez-Rubio<sup>3</sup>, M. Rosa<sup>3</sup>, A. Pérez-Martínez<sup>4</sup>,  
M. Ramirez Orellana<sup>5</sup>, V.M. Pérez-García<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Mathematical Oncology Laboratory (MOLAB)  
Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

<sup>2</sup> Faculty of Sciences, University Mohammed V, Rabat, Morocco

<sup>3</sup> Department of Mathematics, Universidad de Cádiz, Puerto Real, Cádiz, Spain

<sup>4</sup> Translational Research Unit in Paediatric Haemato-Oncology,  
Hematopoietic Stem Cell Transplantation and Cell Therapy,  
Hospital Universitario La Paz, Madrid, Spain

<sup>5</sup> Department of Pediatric Hematology and Oncology,  
Hospital Infantil Universitario Niño Jesús, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, Spain

odelaisy.leon@uclm.es

Chimeric antigen receptor (CAR) T-cell therapy represents a major step in personalized cancer treatment, being the most successful type of immunotherapy [1]. In this work we have developed a mathematical model that describes the response of leukemia to the injection of CAR T cells and explain CD19+ relapses [2]. The model accounts for mature and progenitor B-cells, tumor cells and CAR T cells. The equations describing the dynamics of these populations are

$$\frac{dC}{dt} = \rho_C (L + B) C + \frac{\rho_C \beta I_0}{1 + C/C_{50}} C - \frac{1}{\tau_C} C, \quad (1)$$

$$\frac{dL}{dt} = \rho_L L - \alpha LC, \quad (2)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{I_0/\tau_I}{1 + C/C_{50}} - \alpha BC - \frac{1}{\tau_B} B. \quad (3)$$

We will discuss some implications for CD19<sup>+</sup> relapses and how it could be possible to control them by early rechallenging the tumor with CAR T cells.

## References

- [1] Sadelain M. CAR therapy: the CD19 paradigm. *J Clin Invest* 2015;125:3392-400.
- [2] León-Triana, O.; Soukaina, S.; Calvo, G.F.; Belmonte-Beitia, J.; Chulián, S.; Martínez-Rubio, A.; Rosa, M.; Pérez-Martínez, A.; Ramírez-Orellana, M.; Pérez-García, V.M. CAR T cell therapy in B-cell acute lymphoblastic leukaemia: Insights from mathematical models, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2021, 94, 105570.

## Lie symmetry reductions of a transport equation under stream-function coordinates

V.J. Llorente<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Mathematics to Aerospace Engineering,  
Technical University of Madrid, Pl. Cardenal Cisneros 3, E-28040 Madrid, Spain

<sup>2</sup>Center for Computational Simulation,  
Technical University of Madrid, Campus Montegancedo, Boadilla del Monte, 28660 Madrid, Spain

victorjavier.llorente@upm.es

In this poster the Lie-group method is applied for studying the symmetry reduction of a transport equation within a convection field which curl goes to zero. First, the transport equation is mapped onto a curvilinear coordinate system by integrating the convective field what allows to simplified the partial differential equation and gets a four-dimensional algebra. Finally, this Lie algebra allows to get the invariants and provided some analytical solutions by solving the corresponding reduced ordinary differential equations.

# Resultados de separación para puntos de mínima energía en esferas

Pedro R. López Gómez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería de Comunicaciones / Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación  
Universidad de Cantabria, Santander, España

lopezpr@unican.es

Entre las diferentes formas posibles de obtener una buena distribución de puntos, una de las que ha recibido mayor atención consiste en considerar colecciones  $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$  de  $N$  puntos en la esfera  $\mathbb{S}^d$  que minimicen la energía de Riesz o  $s$ -energía:

$$E_s(\omega_n) = \begin{cases} \sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^{-s}, & \text{si } s > 0, \\ \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\|^{-1}, & \text{si } s = \log. \end{cases}$$

Podríamos plantearnos entonces la siguiente pregunta: dados  $N$  puntos que minimizan la  $s$ -energía en  $\mathbb{S}^d$ , ¿estarán dichos puntos bien separados? Este problema, que podría parecer sencillo, se encuentra resuelto sólo parcialmente. Con el objetivo de mejorar nuestra comprensión de esta cuestión, en este trabajo analizamos la buena separación de los puntos de mínima energía en tres de los casos conocidos:  $s > 0$  y  $s = \log$  en  $\mathbb{S}^1$ ,  $s = \log$  en  $\mathbb{S}^2$  y  $d - 1 \leq s < d$  en  $\mathbb{S}^d$ , con  $d \geq 2$ .

# Local asymptotics for some $q$ -hypergeometric polynomials

J. F. Mañas–Mañas<sup>1</sup>, J. J. Moreno–Balcázar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics  
University of Almería, Almería, Spain

jmm939@ual.es, balcazar@ual.es

The basic  $q$ -hypergeometric function  ${}_r\phi_s$  is defined by the series (see [1])

$${}_r\phi_s \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} ; q, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k}{(b_1; q)_k \cdots (b_s; q)_k} \left( (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \right)^{1+s-r} \frac{z^k}{(q; q)_k}, \quad (1)$$

where  $0 < q < 1$  and  $(a_j; q)_k$  and  $(b_j; q)_k$  denote the  $q$ -analogues of the Pochhammer symbol.

When one of the parameters  $a_j$  in (1) is equal to  $q^{-n}$  the basic  $q$ -hypergeometric function is a polynomial of degree at most  $n$  in the variable  $z$ . Our objective is to obtain a type of local asymptotics, known as Mehler–Heine asymptotics, for  $q$ -hypergeometric polynomials when  $r = s$ .

Concretely, by scaling adequately these polynomials we intend to get a limit relation between them and a  $q$ -analogue of the Bessel function of the first kind. Originally, this type of local asymptotics was introduced for Legendre orthogonal polynomials (OP) by the German mathematicians H. E. Heine and G. F. Mehler in the 19th century. Later, it was extended to the families of classical OP (Jacobi, Laguerre, Hermite), and more recently, these formulae were obtained for other families as discrete OP, generalized Freud OP, multiple OP or Sobolev OP, among others.

These formulae have a nice consequence about the scaled zeros of the polynomials, i.e. using the well-known Hurwitz's theorem we can establish a limit relation between these scaled zeros and the ones of a Bessel function of the first kind. In this way, we are looking for a similar result in the context of the  $q$ -analysis. We also discuss the case  $r - 1 \leq s$  and we will illustrate the results with numerical examples (see [2]).

## References

- [1] R. Koekoek, P. A. Lesky and R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their  $q$ -Analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2010.
- [2] J. F. Mañas–Mañas and J. J. Moreno–Balcázar, *Asymptotics for some  $q$ -hypergeometric polynomials*, submitted.

# Numerical tests on an Schwarz alternating Legendre collocation method for a convection problem

D. MARTÍNEZ, H. HERRERO AND F. PLA

Department of Mathematics  
University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain  
dario.martinez@uclm.es, henar.herrero@uclm.es, francisco.pla@uclm.es

Numerical tests for a Schwarz alternating domain decomposition method based on Legendre collocation applied to a Rayleigh-Bénard problem are presented in this work. The problem is modeled with the incompressible Navier-Stokes equations coupled with a heat equation in a rectangular domain. The Boussinesq approximation and the stationary problem are considered [3, 4, 5]. The nonlinearity in the heat equation is solved with a Newton method [1, 2]. Then, each iteration of the Newton method is discretized with a Legendre collocation method. This method has the drawback that it is ill conditioned. To avoid this disadvantage, a Schwarz domain decomposition strategy is used. The original domain is divided into several subdomains, and the problem at each subdomain is solved with a Legendre collocation method with a reduced mesh. This approach allows us to reach more complex solutions than the Legendre collocation method by its own.

## References

- [1] C. BÉNARDI AND Y. MADAY. *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*. Springer-Verlag, 1991Ann.
- [2] C. CANUTO, M.Y. HUSSAINI, A. QUARTERONI AND T.A. ZANG. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] H. HERRERO, F. PLA AND M. RUIZ-FERNÁNDEZ. *A Schwarz Method for a Rayleigh-Bénard Problem*. J. of Scientific Computing, 78 (2019), 376-392.
- [4] F. PLA, A.M. MANCHO AND H. HERRERO. *Bifurcation phenomena in a convection problem with temperature dependent viscosity at low aspect ratio*. Physica D, D238 (2008), 572-580.
- [5] F. PLA, H. HERRERO AND J.M. VEGA. *A flexible symmetry-preserving Galerkin/POD reduced order model applied to a convective instability problem*. Computers and Fluids, 119 (2015), 162-175.

# Mathematical modelling of immunotherapy of leukemia in the bone marrow

Álvaro Martínez-Rubio<sup>1,2</sup>, Salvador Chulián García<sup>1,2</sup>,  
Ana Niño-López<sup>1</sup>, Víctor M. Pérez-García<sup>3,4,5</sup>, María Rosa<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics

Universidad de Cádiz, 11510 Puerto Real, Cádiz, Spain

<sup>2</sup> Biomedical Research and Innovation Institute of Cádiz (INiBICA)

Hospital Universitario Puerta del Mar, 11009 Cádiz, Spain

<sup>3</sup> Department of Mathematics, Mathematical Oncology Laboratory (MOLAB)

Universidad de Castilla-La Mancha, 13005 Ciudad Real, Spain

<sup>4</sup> Instituto de Matemática Aplicada a la Ciencia y la Ingeniería (IMACI)

Universidad de Castilla-La Mancha, 13005 Ciudad Real, Spain

<sup>5</sup> ETSI Industriales

Universidad de Castilla-La Mancha, 13005 Ciudad Real, Spain

alvaro.martinezrubio@uca.es

B-cell leukemia is characterized by the abnormal growth of bone marrow malignant B-cells. A recent therapeutic advance called CAR T-cell therapy consists of the modification of the patient's immune system (T-cells) in order to redirect it towards B-cells, both healthy and leukemic<sup>1</sup>. This modification gives rise to predator-prey-like dynamics between those cells types, which can be described mathematically by means of ordinary differential equations<sup>2</sup>. We develop a mathematical model that includes the maturation of healthy B-cells, the growth of the cancer and the action of the therapy, with the intention of proposing hypotheses and mechanistic explanations for its success.

## References

- [1] Maude, S.L., et. al., Chimeric antigen receptor T cells for sustained remissions in leukemia. *New England Journal of Medicine* (2014), 371, 1507–1517.
- [2] Chaudhury, A., Zhu, X., Chu, L., Goliaei, A., June, C.H., Kearns, J.D., Stein, A.M. Chimeric Antigen Receptor T Cell Therapies: A Review of Cellular Kinetic-Pharmacodynamic Modeling Approaches. *The Journal of Clinical Pharmacology* (2020), 60, S147–S159.

## Álgebras en categorías de fusión grupo-teóricas

Yiby Morales<sup>1</sup>, Monique Müller<sup>2</sup>, Julia Plavnik<sup>3</sup>,  
**Ana Ros Camacho**<sup>4</sup>, Angela Tabiri<sup>5</sup> y Chelsea Walton<sup>6</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas

Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia

<sup>2</sup> Departamento de Matemática e Estatística

Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, Brasil

<sup>3</sup> Faculty of Mathematics

Indiana University, Bloomington (Indiana), Estados Unidos de América

<sup>4</sup> School of Mathematics

Cardiff University, Cardiff, Wales

<sup>5</sup> African Institute for Mathematical Sciences Ghana

Accra, Ghana

<sup>6</sup> Department of Mathematics

Rice University, Houston (Texas), Estados Unidos de América

roscamachoa@cardiff.ac.uk

Los objetos álgebra (o sencillamente, álgebras) en categorías con un producto tensorial son unos objetos matemáticos muy interesantes, relevantes en diversos temas de física matemática como por ejemplo teorías conformes de campos de tipo racional o extensiones de álgebras de operadores vértice. En este póster presentaremos los resultados principales del artículo [3], donde mis colaboradoras y yo generalizamos resultados de Natale [1] y Ostrik [2] que describen álgebras en categorías de fusión punteadas al caso de las categorías de fusión grupo-teóricas.

### References

- [1] S. Natale, *On the equivalence of module categories over a group-theoretical fusion category*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 13:042, 9 pages, 2017.
- [2] V. Ostrik, *Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants*, Transform. Groups, 8(2):177–206, 2003.
- [3] Y. Morales, M. Müller, J. Plavnik, **A. Ros Camacho**, A. Tabiri and C. Walton, *Algebraic structures in group-theoretical fusion categories*, arXiv:2001.03837 [math.QA], submitted.

# Conformal ambient metric construction and Weingarten endomorphisms of spacelike submanifolds

Rodrigo Morón<sup>1</sup>, Francisco J. Palomo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Málaga, Málaga, España

<sup>2</sup>Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Málaga, Málaga, España

ruyman@uma.es

It is well-known that conformal geometry for Riemann surfaces carries no local information. A Mbius structure is an additional structure on such surfaces which, in some sense, remedies this fact. The Mbius structures play the role of the Schouten tensor for greater dimensions. In this talk, we introduce a relationship between Mbius structures and Lorentzian geometry. Namely, every Mbius structure can be realized by means of Weingarten endomorphisms of certain spacelike immersions of the Riemann surface into a 4-dimensional Lorentzian manifold.

## References

- [1] A. Čap and R. Gover, Standard tractors and the conformal ambient metric construction, *Ann. Global Anal. Geom.*, **24** (3)(2003), 231–259, 2003.
- [2] M. Randall, Local obstructions to a conformally invariant equation on Mbius surfaces, *Differ. Geom. Appl.*, **33** Supplement (2014), 112–122.
- [3] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [4] R. Moron and F. J. Palomo, Conformal ambient metric construction and Weingarten endomorphisms of spacelike submanifolds, arXiv:2107.12652v1 (2021).



# Linear complementary pairs of skew codes\*

J.M. Muñoz, F.J. Lobillo

Departamento de Álgebra

Universidad de Granada, Granada, Spain

munoz@ugr.es

The concept of linear complementary pairs (LCP) of codes, which is defined as a pair of linear codes  $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  in a vector space  $V$  such that  $V = \mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ , was proposed in [1] in order to design electronic circuits which are as resistant as possible to hardware trojan horses. The construction and properties of LCP of codes within some elementary families of algebraic codes have been studied in [2] and [3]. This work starts the study of LCP of codes in skew polynomial rings, as presented in [4] and [5].

## References

- [1] X. T. Ngo and S. Bhasin and J-L. Danger and S. Guilley and Z. Najm, Linear complementary dual code improvement to strengthen encoded circuit against hardware Trojan horses, IEEE International Symposium on Hardware Oriented Security and Trust (HOST). May 2015, pp. 82–87
- [2] C. Carlet and C. Güneri and F. Özbudak and B. Özkaya and P. Solé, On Linear Complementary Pairs of Codes, IEEE Transactions on Information Theory, 64(10): 6583-6589. 2018.
- [3] C. Güneri and Edgar Martínez-Moro and Selcen Sayıcı, Linear complementary pair of group codes over finite chain rings, Des. Codes Cryptogr., 88: 2397-2405, 2020.
- [4] J. Gómez-Torrecillas and F.J. Lobillo and G. Navarro, A new perspective of cyclicity in convolutional codes, IEEE Transactions on Information Theory, 62(5): 2702-2706, 2016.
- [5] J. Gómez-Torrecillas and G. Navarro and F.J. Lobillo and A. Neri, Hartmann-Tzeng bound and skew cyclic codes of designed Hamming distance, Finite Fields and their Applications, 50: 84-112, 2018.

---

\*Supported by grants PID2019-110525GB-I00 from Agencia Estatal de Investigación (AEI / 10.13039/501100011033) and A-FQM-470-UGR18 from FEDER / Junta de Andalucía-Consejería de Economía y Conocimiento

# The Riemann-Roch theorem for the Adams operations on algebraic $K$ -theory

A. Navarro<sup>1</sup>, J. Navarro<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMat)  
Madrid, España

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas  
Universidad de Extremadura, Badajoz, España

navarrogarmendia@unex.es

We explain how the classical Riemann-Roch theorem for the Adams operations of algebraic  $K$ -theory fits with Panin's formalism of oriented cohomology theories (cf. [2]).

Our explanation covers both the standard formulation [1, Thm. 7.6] and the integral statement for closed immersions [1, Ch.V, §6], but our framework permits to reinterpret these theorems as particular cases of more general statements valid for arbitrary morphisms of rings between oriented cohomology theories.

As an application of this level of generality, we also present a new theorem relating the Riemann-Roch formula for the Adams operations with the Grothendieck-Riemann-Roch formula for the Chern character.

We build on previous work of A. Navarro [2], which in turn elaborates content of [3].

## References

- [1] W. Fulton and S. Lang, Riemann-Roch algebra, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1985.
- [2] A. Navarro, On Grothendieck's Riemann-Roch theorem, *Expo. Math.*, 35(3): 326–342, 2017.
- [3] I. Panin, Oriented cohomology theories of algebraic varieties II, *Homology, Homotopy and Applications*, 11(1): 349–405, 2009.

# Cyclonic and anticyclonic rotation in a cylinder cooled inhomogeneously on the top

M.C. Navarro<sup>1</sup>, D. Castaño<sup>2</sup>, H. Herrero<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Facultad de CC. y TT. Químicas  
Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, Escuela de Ingeniería Industrial y Aeroespacial,  
Universidad de Castilla-La Mancha, Toledo, Spain

mariacruz.navarro@uclm.es

In this work, we study the development of vortical structures generated in a rotating cylinder non-homogeneously cooled on the top. In the axisymmetric regime, for moderate vertical temperature differences and any rotation rate, cyclonic and anticyclonic rotations coexist in the flow: a counterclockwise motion at upper levels, giving place to a vertical top-down vortex, and a clockwise rotation at lower levels that generates a spin up motion. For lower rotation rates and high enough vertical temperature differences, only cyclonic top-down vortices survive and get stronger. We perform a force balance analysis to explain the phenomena. In the non-axisymmetric regime, no anticyclonic rotation at the bottom is reported and the cyclonic top-down vortex either disappears or splits up in two top-down vortices, depending on the ambient rotation rate. The intensity of the cooling on the top and how localized this cool region is affect the flow developed. When the horizontal temperature difference on the top is larger than the vertical temperature difference between top and bottom, stable axisymmetric top-down vortices with an inner updraft of warmer air are reported. The more localized the cooling above, the more difficult the development of the inner updraft becomes. Results may contribute to the understanding of the relevance of thermal processes in tornadogenesis.

# A Dynamical System Model for B-cell Leukemia Treatments

Ana Niño-López<sup>1</sup>, Salvador Chulián García<sup>1,2</sup>,  
Álvaro Martínez-Rubio<sup>1,2</sup>, María Rosa<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics

Universidad de Cádiz, 11510 Puerto Real, Cádiz, Spain

<sup>2</sup> Biomedical Research and Innovation Institute of Cádiz (INIBICA)

Hospital Universitario Puerta del Mar, 11009 Cádiz, Spain

ana.nino@uca.es

In this work, we consider B-Cell Acute Lymphoblastic Leukemia, which accounts for 25% of childhood cancers. Survival of these patients has increased by a considerable amount in recent years, however, around 20% of treatments are unsuccessful. For this reason, it is required to determinate new strategies to study which patients are at higher risk of relapse [1].

We develop a mathematical model which describes the behavior of the disease, considering the evolution of a leukemic clone [2, 3] and simulating therapies, allowing new work field. Methodology employed combines ordinary differential equations, numerical simulations along with data analysis techniques with Python.

## References

- [1] S. Chulián, A. Martínez-Rubio, M. Rosa & V.M. Pérez-García. Mathematical models of Leukaemia and its treatment: A review. *arXiv preprint arXiv: 2011.05881*, 2020.
- [2] A. Marciniak-Czochra, T. Stiehl, A.D. Ho, W. Jäger & W. Wagner. Modeling of asymmetric cell division in hematopoietic stem cells regulation of self-renewal is essential for efficient repopulation. *Stem cells and development*, 18(3):377–386, 2009.
- [3] T. Lorenzi, A. Marciniak-Czochra & T. Stiehl. A structured population model of clonal selection in acute leukemias with multiple maturation stages. *Journal of mathematical biology*, 79(5), 1587-1621, 2019.

## Scaling laws to characterize the growth of brain metastases

B. Ocaña-Tienda<sup>1</sup>, J. Pérez-Beteta<sup>1</sup>, D. Molina-García<sup>1</sup>, O. León-Triana<sup>1</sup>, E. Arana<sup>2</sup>,  
A. Ortiz De Mendivil<sup>3</sup>, B. Asenjo<sup>4</sup>, D. Albillo<sup>5</sup>, L. Pérez-Romasanta<sup>6</sup>, M. LLorente<sup>5</sup>,  
N. Carballo<sup>5</sup>, E. González-del Portillo<sup>6</sup>, V.M. Pérez-García<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics,

University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

<sup>2</sup>Fundación Instituto Valenciano de Onlogía, Valencia, Spain

<sup>3</sup> Sanchinarro University Hospital, Madrid, Spain

<sup>4</sup> Hospital Regional Universitario Carlos Haya, Málaga, Spain

<sup>5</sup> MD Anderson Cancer Center, Madrid, Spain

<sup>6</sup> Salamanca University Hospital, Salamanca, Spain

beatriz.ocana@uclm.es

Scaling laws were used in this study to characterize the growth dynamics of brain metastases (BM), the most common intracranial tumor in adults [1], subject to different treatments. To characterize the dynamics, a growth factor, the scaling law exponent beta, was used.

We have shown that radiation necrosis (an adverse event appearing after irradiation) and tumor relapse have different growth patterns what may help in their differentiation in clinical settings [2] and have substantiated our findings using mathematical models incorporating aspects of the tumor biology and inflammatory response and found the results to be in line with the observations.

### References

- [1] L. M. Halasz, J. C. Weeks, B. A. Neville, N. Taback, and R. S. Punglia, Use of stereotactic radiosurgery for brain metastases from non-small cell lung cancer in the United States, *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.*, vol. 85 (2): e109-e116, 2013.
- [2] D. Lee, R. A. Riestenberg, A. Haskell-Mendoza, and O. Bloch, Brain Metastasis Recurrence Versus Radiation Necrosis: Evaluation and Treatment, *Neurosurg. Clin. N. Am.*, vol. 31 (4): 575-587, 2020.

# Looking at the forces behind tumour growth acceleration from a mathematical perspective

Carmen Ortega-Sabater<sup>1</sup>, Gabriel Fernández-Calvo<sup>1</sup>, Víctor M. Pérez-García<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Department of Mathematics

University of Castilla-La Mancha, Ciudad Real, Spain

carmen.ortegasabater@uclm.es

Evidence from oncological patients [1,2] demonstrates that tumours exhibit a fast-increasing proliferation not fully compatible with classical biological interpretations. We intended to assess the evolutionary dynamics affecting a tumoral, proliferative, cell population  $n(\rho, t)$ . Firstly, we propose a non-local PDE (1).

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = [\rho(1 - N) - \mu]n + D \frac{\partial^2 n}{\partial \rho^2}, & (\rho, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^+, \\ N(t) := \int_{\mathbb{R}^+} n(\rho, t) d\rho, \\ \partial_\rho n(0, t) = 0, & t \in (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

where  $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ ,  $\mu > 0$  and  $D > 0$  are real numbers and  $n = n(\rho, t)$  represents the number of cells that at time  $t$  have a proliferation rate between  $\rho$  and  $\rho + d\rho$ . Moreover, its local PDE counterpart (2):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial \rho^2} - v \frac{\partial n}{\partial \rho} + \rho n - \mu n, \quad (2)$$

yields explicit solutions that together with experimental data let us conclude that noisy variations affecting  $\rho$  could drive the tumor to spontaneously acquire a more proliferative behaviour.

## References

- [1] Pérez-García VM et al. 2020 Universal scaling laws rule explosive growth in human cancers. *Nat. Phys.* **16**, 1232–1237. (doi:10.1038/s41567-020-0978-6)
- [2] Jiménez-Sánchez J et al. 2021 Evolutionary dynamics at the tumor edge reveal metabolic imaging biomarkers. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **118**, e2018110118. (doi:10.1073/pnas.2018110118)

## $c$ -almost periodic functions of complex variable

H. Ounis<sup>1</sup>, J.M. Sepulcre<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Mathematics  
University of Alicante, Spain

<sup>2</sup>Department of Mathematics  
University of Alicante, Spain

ho9@alu.ua.es; JM.Sepulcre@ua.es

In this work, we develop the notion of  $c$ -almost periodicity for the case of complex functions defined on vertical strips in the complex plane. As a generalization of Bohr's concept of almost periodicity, we study the main properties of this new class of functions which were recently introduced for the case of a real variable. In fact, we extend some important results of this theory which were already demonstrated for some particular cases.

### References

- [1] E. Alvarez, A. Gómez, and M. Pinto,  $(w, c)$ -periodic functions and mild solutions to abstract fractional integro-differential equations, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **16** (16) (2018) 1–8.
- [2] H. Bohr, *Almost periodic functions*, Chelsea, New York, 1947.
- [3] M. T. Khalladi, M. Kostić, M. Pinto, A. Rahmani, and D. Velinov,  $c$ -Almost periodic type functions and applications, *Nonauton. Dyn. Syst.*, **7** (1) (2020), 176–193.
- [4] H. Ounis and J.M. Sepulcre, The class of  $c$ -almost periodic functions defined on vertical strips in the complex plane, submitted, 2021.
- [5] J.M. Sepulcre, T. Vidal, Almost periodic functions in terms of Bohr's equivalence relation. *Ramanujan J.*, **46** (1) (2018) 245–267; Corrigendum, *ibid.*, **48** (3) (2019) 685–690.
- [6] J.M. Sepulcre, T. Vidal, Bochner-type property on spaces of generalized almost periodic functions, *Mediterr. J. Math.*, **17**, 193 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01628-x>.

## Geometric properties of chemical graphs

J. Rada<sup>1</sup>, J. M. Rodríguez<sup>2</sup>, J. M. Sigarreta<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Spain

<sup>3</sup>Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, Acapulco, Mexico

pablo.rada@udea.edu.co

The study of Gromov hyperbolic graphs has many applications. In this paper we study the hyperbolicity constant of hexagonal systems. In particular, we compute the hyperbolicity constant of every catacondensed hexagonal system. Besides, we obtain upper and lower bounds of general hexagonal systems. Since the hyperbolicity constant of a graph measures the deviation of the graph from a tree, we also study the chemical graphs with small hyperbolicity constant.



## A class of Bernstein-type operators on the unit disk

M. J. Recarte<sup>1</sup>, M. E. Marriaga<sup>2</sup>, T. E. Pérez<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física

Univ. Nacional Autónoma de Honduras - Valle de Sula

<sup>2</sup>Departamento de Matemática Aplicada,

Ciencia e Ingeniería de Materiales y Tecnología Electrónica,

Univ. Rey Juan Carlos, Spain

<sup>3</sup>IMAG - Instituto de Matemáticas,

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias,

Universidad de Granada (Spain)

marlon.recarte@unah.edu.hn, misael.marriaga@urjc.es, tperez@ugr.es

The purpose of this work is to study an extension of the well-known Bernstein polynomials to the bivariate case. We present a construction of bivariate Bernstein-type operators defined on a domain bounded by two curves and two straight lines, and we show that they converge uniformly to continuous functions on the corresponding domain. In particular, we consider Bernstein-type polynomials defined on each of the quadrants of the unit disk. Numerical examples are provided to illustrate our results.

## Speaking of Mathematical Realism

L. Segura-Abad <sup>1</sup>, J.A. Nescolarde-Selva <sup>2</sup>, J.L. Us-Domnech <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics

University of Alicante, Alicante, Spain

<sup>2</sup>Department of Applied Mathematics

University of Alicante, Alicante, Spain

lorena.segura@ua.es

One of the most important problems of the foundations of mathematics concerns the ontological status of mathematical objects: they are independent of the human mind or are only ideas in our mind? The first position corresponds to Platonism or realism. In order not to abandon a project that could be considered Quine's heir, an alternative of mathematical realism is proposed, which would have its roots in a confrontation of the realistic and anti-realist theses with respect to the mathematical entities, supported by Hilary Putnam and Hartry Field respectively, and that would lead to extending it to other scientific disciplines.

### References

- [1] K. Appel and W. Haken, Every Planar Map is Four Colorable, I, Discharging, Illinois Journal of Mathematics, 21 (3): 429-490, 1977a.
- [2] K.Appel, W. Haken and J. Koch, Every Planar Map is Four Colorable. II, Reducibility, Illinois Journal of Mathematics, 21 (3): 491-567,1977.
- [3] K. Appel and W. Haken, Solution of the Four Color Map Problem, Scientific American, 237 (4), pp. 108-121, 1977b.
- [4] J.,Ph. Davis and R. Hersh, The Mathematical Experience, Harvester Press: London, 1981.
- [5] H. Putnam, What is Mathematical Truth? In Mathematics, Matter and Method, Cambridge University Press, pp. 60-78, 1975.
- [6] H. Putnam, Realism and Reason, Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association 50 (6):483-498, 1977.
- [7] H. Putnam, Reason, Truth and History, Cambridge University Press, 1981.
- [8] H. Putnam, The Many Faces of Realism, Paul Carus Lectures, Open Court Publishing Company, 1988.
- [9] H. Putnam, Representation and Reality (Representation and Mind), MIT Press, 1991.

# Prime Spectrum of the Ring of Adeles of a Number Field

Álvaro Serrano Holgado

Department of Mathematics  
University of Salamanca, Salamanca, Spain

Alvaro\_Serrano@usal.es

Much is known about the adèle ring of an algebraic number field from the perspective of Harmonic Analysis and Class Field Theory. However, its ring-theoretical aspects are often ignored (there is in [2] a characterization of closed prime ideals, but results like this are scarce).

Here we present a description of the prime and maximal spectra of this ring using some of the techniques based on ultrafilters developed in [1] for the study of primes in products of rings, and study some of the algebraic and topological properties of these prime ideals.

## References

- [1] Finocchiaro, Carmelo. “Prime Ideals in Infinite Products of Commutative Rings.” arXiv.org, Cornell University Library, arXiv.org, Sept. 2020, <http://search.proquest.com/docview/2440759397/>.
- [2] Connes, A.; Consani, C. (2011). “The hyperring of adèle classes.” *Journal of Number Theory*, 131 (2), 159–194. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2010.09.001>

# Malliavin calculus for additive processes: application to pricing cumulative loss derivatives

Josep Vives<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departament de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona, Barcelona, Spain

josep.vives@ub.edu

In this poster, following [1], we present the main tools of the Malliavin-Skorohod calculus for additive processes and in particular its integration by parts formula. This formula helps us to compute quantities like the expectation  $E(L_T h(L_T))$ , or more generally, the expectation  $E(H(L_T))$ , for different suitable functions  $h$  or  $H$  and different models for the cumulative loss process  $L$ . This is what is done in [3].

These quantities are important in Insurance and Finance. For example they appear in computing expected shortfall risk measures or prices of stop-loss contracts. The formulas given here generalize the formulas given in the recent paper [2]. In [2], the treatment of the formulas is based only on Malliavin calculus techniques for the standard Poisson process, a particular case of additive process, whereas in [3], Malliavin calculus techniques for additive processes are used and more general results are obtained.

## References

- [1] G. Di Nunno and J. Vives, A Malliavin-Skorohod calculus in  $L^0$  and  $L^1$  for additive and Volterra-type processes, *Stochastics*, 89(1): 142-170, 2017.
- [2] C. Hillairet, Y. Jiao and A. Réveillac, Pricing formulae for derivatives in insurance using the Malliavin calculus, *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk*, 3: article 7, 2018.
- [3] M. Khalfallah, M. Hadji and J. Vives, Pricing cumulative loss derivatives under additive models via Malliavin calculus, *Boletim da Sociedade Panaerense de Matematica (Brasil)*, 2021.

# Polygons in the Sphere and Inner Products

D.Yanez

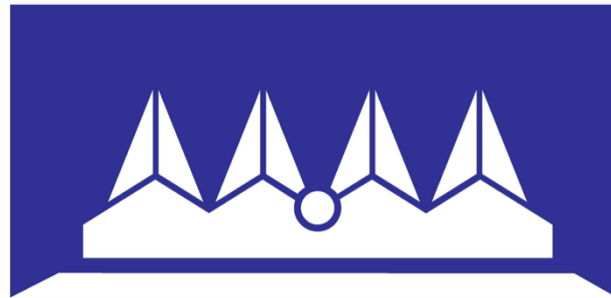
Department of Mathematics  
University of Extremadura, Badajoz, Spain

dyanez@unex.es

We present a geometric concept in the plain having non trivial properties and that is essential to obtain some important characterizations of inner products.

## References

- [1] D. Amir, Characterization of Inner Product Spaces, Birkhuser Verlag, Basel, 1986.
- [2] C. Benítez, P. Martín and D. Yáñez, Inscribed and circumscribed polygons that characterize inner products, Aequationes Math., 92: 529-541, 2018.
- [3] C. Benítez and D. Yáñez, Middle points and inner products, Bull. London Math. Soc., 39: 811-817, 2007.
- [4] C. Benítez and D. Yáñez, Middle points, medians and inner products, Proc. Amer. Math. Soc., 135: 1725-1734, 2007.
- [5] D. Yáñez, Una caracterización bidimensional de los espacios prehilbertianos, Ph. Tesis Doctoral, Dpto Matemáticas UEx, 2007, ISBN: 84 – 87042 – 21 – 1.



**CONFERENCIAS  
DIVULGATIVAS  
E  
INFORMATIVAS**

## El espejismo de la mayoría

EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad de la Rioja (Spain). E-mail: eduardo.saenz-de-cabazon@unirioja.es.*

### Resumen

Nuestro comportamiento colectivo tiene aspectos muy positivos, pero también carencias que a veces nos hacen “equivocarnos juntos” más de lo que lo haríamos de forma individual. Esto es especialmente notable en las redes sociales, donde ocurren fenómenos que pueden escapar a nuestro control. En esta charla veremos cómo las matemáticas pueden ayudarnos a descubrir y poner remedio a algunos de estos fenómenos y evitar los efectos negativos del funcionamiento de las redes.

## Leonardo Torres Quevedo: el ingeniero total

FRANCISCO A. GONZÁLEZ REDONDO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Complutense de Madrid (Spain). E-mail: faglezr@edu.ucm.es.*

### Resumen

Entre todos los ingenieros e inventores españoles, Leonardo Torres Quevedo (Santa Cruz de Iguña, Cantabria, 1852-Madrid, 1936), ocupa un lugar muy especial. Formalmente fue sólo ingeniero de Caminos, y, efectivamente, desde su Valle de Iguña natal, registró en Austria, Alemania, Italia, Francia, Reino Unido, Suiza, EE.UU. y España la patente del primer teleférico especialmente concebido para personas del mundo, el *transbordador* (1887). Años más tarde, construiría el primer teleférico abierto al público en el mundo, el *transbordador del Monte Ulía* en San Sebastián (1907), replicado en el Niagara Spanish Aerocar (1916), que lleva funcionando más de 100 años sin haber sufrido ni un solo accidente.

Pero, mientras intentaba poner en marcha su invención en el Monte Pilatus (Lucerna, Suiza) a partir de 1889, se convirtió en uno de los más importantes (si no el más) ingeniero matemático de finales del siglo XIX cuando llevó hasta el límite la aplicación de la tecnología mecánica diseñando y construyendo sus *máquinas algébricas* (1893-1901), unas máquinas que resuelven ecuaciones polinómicas que previamente fundamentado teóricamente publicando diferentes memorias y artículos científicos.

En tanto que ingeniero aeronáutico, concibió un sistema de dirigibles *autorrígidos* (1902-1906) que, ensayados en España, patentados también en Francia y el Reino Unido, y consagrados durante la I Guerra Mundial con casi cien unidades operando en las Armadas de Reino Unido, Francia, Rusia y EE.UU., siguen construyéndose en el siglo XXI.

Como ingeniero naval, si en 1913 patentó el *buque-campamento*, concepción de barco porta-dirigibles utilizada por la Armada española para construir en 1922 el portaaeronaves *Dédalo*. Entre 1916 y 1919 patentó, construyó y ensayó la *Binave*, el precedente de los catamaranes motorizados de casco metálico.

También puede ser considerado ingeniero de telecomunicaciones (además de ingeniero industrial) por haber inventado, patentado, fabricado y demostrado el funcionamiento del primer mando a distancia completo, efectivo, de la Historia, el *telekino* (1902-1906), precedente no sólo de los actuales drones sino del conjunto de vehículos autónomos.

Pero hoy, sobre todo, debe ser considerado uno de los pioneros de la Ingeniería Informática de talla mundial por su fundamental tratado teórico, los *Ensayos sobre*



---

*Automática* (1914), sus ajedrecistas (1913-1922) -los primeros autómatas dotados de “inteligencia artificial”, diseñados y construidos en el mundo- y su *aritmómetro electromecánico* (1920), obras con las que se adelantó en varias décadas a los pioneros de la Informática del siglo XX, tanto a los teóricos de la computación como a los constructores de los primeros ordenadores.

En suma, por la dimensión de su obra, debe ser considerado “el ingeniero total”.

## La Matemática en la historia de [todas y cada una de] las ciencias...contada en 45 minutos

FRANCISCO A. GONZÁLEZ REDONDO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad Complutense de Madrid (Spain). E-mail: faglezr@edu.ucm.es.*

### Resumen

Al organizar la Historia de una disciplina científica, por ejemplo, la Matemática o la Astronomía, sea con motivo de una conferencia o durante un curso completo, nos encontramos siempre con un problema: nos sorprendemos con los posibles registros contables-calendáricos asociados al arte parietal y mobiliario, nos animamos con los conocimientos contenidos en las tablillas cuneiformes mesopotámicas, y nos entusiasmos con la evolución de los saberes matemáticos y astronómicos del mundo griego desde la *Teogonía* de Hesíodo hasta los momentos finales de la Escuela neoplatónica alejandrina que asociamos con la trágica desaparición de Hipatia. En suma, no habremos llegado a exponer las tres leyes de Kepler para cuando el moderador nos esté avisando de que nos quedan 5 minutos de conferencia o los alumnos nos recuerden que queda una semana para el examen final de la asignatura.

Y el problema probablemente radique en que no se habrá resuelto previamente, para cada disciplina concreta, una pregunta (im)pertinente: en tanto que “Ciencia”, ¿qué es la Matemática?, o ¿qué es la Astronomía?, o ¿Qué es la Física?, o ¿qué es la Biología? ...

Con el ánimo de contribuir a la solución de estas dificultades, en este seminario se propone un modelo diferente para la delimitación teórica, estructuración histórica y organización docente de cualquier *disciplina científica* basado en: 1) la precisión del *objeto historiable* una vez establecido un *criterio de científicidad* [lo que permitiría precisar cuándo una disciplina empieza a ser verdaderamente *científica*, y, por tanto, cuándo comienza su *Historia*]; 2) la determinación de unos *hitos singulares* que permitan establecer cortes en la evolución histórica de los conocimientos propios de la Ciencia que se está historiando; 3) la caracterización de las etapas o períodos de distinta naturaleza histórico-científica en esa evolución, previas a su constitución como Ciencia [por ejemplo, los períodos -sucesivos- *pre-científico* y *proto-científico*, de la disciplina concreta antes de alcanzar naturaleza inequívocamente científica]; y 4) la caracterización de las etapas propiamente *históricas* de la disciplina [para cada una de ellas, su *etapa clásica* y su *edad contemporánea*].

---

Explicitado y ejemplificado el modelo historiográfico para la Matemática y la Astronomía, en el seminario se avanzará en su proyección hacia otras ciencias tales como la Física, la Biología, la Geología o la Química... y otras disciplinas que reivindican su carácter de Ciencias, como pueden ser las Económicas, las Jurídicas, etc.

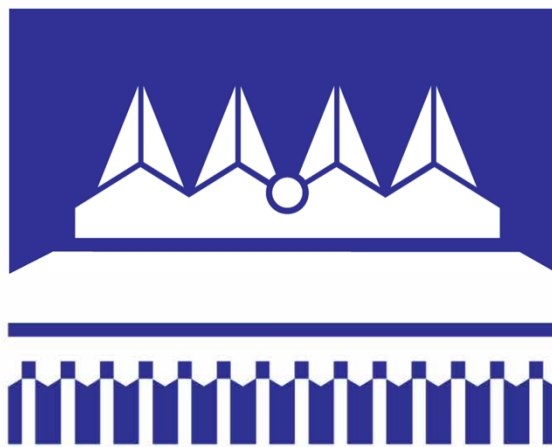
**Mejora de la terminología matemática en el Diccionario de  
la lengua española: una colaboración entre la RSME y la  
RAE**

MARÍA VICTORIA OTERO ESPINAR<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Universidad de Santiago de Compostela (Spain). E-mail: mvictoria.otero@usc.es.*

**Resumen**

Sesión informativa sobre los avances del convenio entre la RAE y la RSME.



# MESAS REDONDAS

## MESA REDONDA: MATEMÁTIC@S ESPAÑOL@S EN EL MUNDO:AYUDAS A LA INVESTIGACIÓN

Organizador:

**Luis Narváez Macarro** (Universidad de Sevilla)

Los ponentes serán:

María Jesús Carro Rossell (España) (presencial)  
Manuel Domínguez de la Iglesia (México) (online)  
M. Ángeles García Ferrero (Alemania/España) (presencial)  
Elisa Lorenzo García (Francia/Suiza) (online)  
Juan J. Manfredi Díaz (EEUU) (online)  
María C. Reguera Rodríguez (RU) (online)

La actividad será transmitida en streaming y se podrá seguir de modo presencial u online.

En la mesa redonda realizaremos un repaso comparativo entre los sistemas de ayudas a la investigación de varios países del entorno científico español. Nos referiremos tanto a las ayudas, becas y contratos predoctorales, como a los post-doctorales y a los proyectos de investigación en sus distintos niveles, así como a otras ayudas a la movilidad de investigadores. Trataremos de incidir también en la comparación del desarrollo de una carrera científica o académica y de la evaluación de investigadores y proyectos en diferentes países.

## MESA REDONDA: UN CAMINO CON ARISTAS: DEL DOCTORADO A LA EMPRESA Y DE LA EMPRESA AL DOCTORADO

Organizadores:

**M. Pilar Vélez** (U. Antonio de Nebrija)

**Alberto Espuny Díaz** (Technische Universität Ilmenau)

El objetivo de esta mesa redonda es presentar diferentes aspectos sobre el tránsito de graduados, másteres y doctores en Matemáticas al mundo laboral en la empresa, la docencia o la investigación. Vivimos un auténtico boom de las Matemáticas. Los matemáticos han pasado a ser perfiles demandados por las empresas, mientras que la docencia (en secundaria y en universidades) y la investigación se encuentra con escasez de perfiles matemáticos para cubrir sus plazas. Esto se agrava cuando hablamos de perfiles de doctor, con acreditaciones, como exigen los entornos de educación superior o las estructuras de investigación.

Buscaremos responder a estas y otras preguntas:

¿Por qué se demandan matemáticos desde la empresas? ¿Es indiferente el perfil de graduado, master o doctor estos casos? ¿Qué aporta el doctorado a la empleabilidad en la empresa? ¿Cómo enfoca el mundo académico los doctorados? ¿Los doctorados industriales pueden ser una solución? ¿Por qué no hay matemáticos que opten a las plazas de secundaria? ¿Qué oportunidades y perspectivas tienen nuestros jóvenes investigadores?

Pero, sobre todo, queremos conocer:

¿Cuál es la visión de la empresa?, ¿Cuál es la visión de la academia y la investigación?, ¿Cuál es la visión de los jóvenes?

La propuesta se hace conjuntamente desde la Comisión de Jóvenes y la Comisión de Profesiones y Empleabilidad de la RSME.

Se propone una sesión de entre 1 hora y 1 hora y media, en la que podrán intervenir 4 personas ente 10 y 15 minutos cada uno, dejando unos 15 minutos para debate.

Como ponentes contaríamos con matemáticos/as del ámbito académico y del ámbito de la empresa, abarcando perfiles variados: doctores que han pasado a la empresa, personas

---

que no terminaron su doctorado porque la empresa se topó en su camino, investigadores senior con experiencia en dirección de tesis o jóvenes doctorados y doctorandos que dudan sobre el siguiente paso en su carrera.

Los ponentes serán:

Manuel de León (ICMAT, RACEFN)

Pilar Barrios (AFI)

Andrea Cadarso (BBVA)

José Miguel Zapata (U. Murcia)

Ramón López Trueba (CIC)



## MESA REDONDA: EL ACCESO A LA PROFESIÓN DOCENTE EN SECUNDARIA: SITUACIÓN Y PERSPECTIVAS

Organizador:

**Luis J. Rodríguez Muñiz** (Universidad de Oviedo)

En los últimos años se ha observado un problema en el acceso a la profesión de docente de educación secundaria por parte de los graduados y las graduadas en matemáticas. Se trata de una problemática que podemos considerar multifactorial, ya que convergen en ellas diferentes aspectos:

-El acceso al máster de profesorado: en algunas universidades públicas los graduados y las graduadas en matemáticas no tienen acceso prioritario al máster, lo que implica que se quedan fuera ante candidaturas con mejor expediente o tienen que cursarlo en universidades privadas (que, por otro lado, suelen dar más facilidades al ofrecer opciones en línea).

-El hecho de que desde el mercado laboral haya una importante oferta de puestos cualificados para matemáticos y matemáticas hace que la profesión de docente deje de ser una prioridad para quienes se gradúan en matemáticas, estadística o grados similares. Cada vez son menos los estudiantes que cursan el grado de matemáticas que tienen vocación docente (tal vez en este punto también influya el propio diseño de la carrera docente, bastante estanca y con pocos incentivos de progresión profesional).

-En los grados de matemáticas no se proporciona formación en didáctica y, por tanto, para el alumnado, esta rama de conocimiento y sus posibilidades de desarrollo profesional, resulta poco afín a su campo.

-Pese a que hay numerosas investigaciones que confirman la importancia del conocimiento disciplinar en la enseñanza, no hay un consenso claro sobre la formación matemática suficiente y necesaria para poder el profesorado de matemáticas en educación secundaria. Esto deriva en el primer factor descrito, pues necesariamente se debería priorizar en el máster de formación del profesorado a los graduados con un conocimiento matemático suficiente. Pero tampoco se puede obviar el conocimiento didáctico de la matemática, que se adquiere de manera muy superficial durante el máster.

---

Participantes:

Iván Chércoles (Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid)

Elena Gajate (Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha)

Victoria Otero Espinar (Universidad de Santiago de Compostela, Comisión de Educación RSME)

Adolfo Quirós (Universidad Autónoma de Madrid, Comisión de Educación RSME)

Luis J. Rodríguez-Muñiz (Universidad de Oviedo, Comisión de Educación RSME)

## **MESA REDONDA: DIVULGACIÓN EN INTERNET Y REDES SOCIALES**

Organizador:

**Fernando Blasco** (Universidad Politécnica de Madrid)

Los ponentes serán:

Urtzi Burjis

Edith Padrón

Miguel Ángel Morales

Javier Álvarez

Laura Toribio

**MESA REDONDA: INFLUENCIA DE LOS  
INDICADORES BIBLIOMÉTRICOS EN EL  
DESARROLLO PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS**

Organizadora:

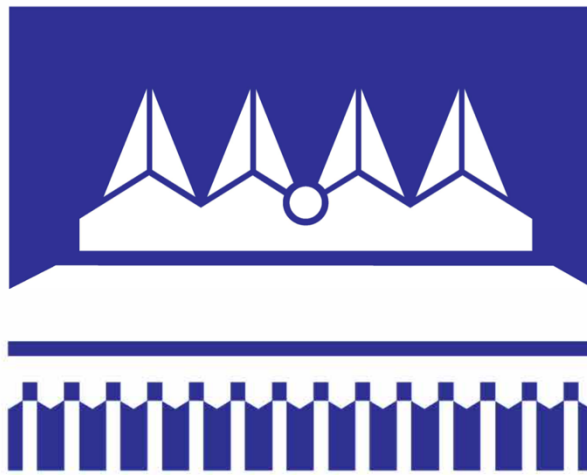
**Elena Fernández Areizaga** (Universidad de Cádiz)

Los ponentes serán:

Mercedes Siles (Presidenta de la ANECA)

Elías Sanz Casado (Director del Instituto INAECU, UC3M)

Domingo Docampo ( Ex-rector de la Universidad de Vigo)



**EXPOSICIONES**

## EXPOSICIÓN: LEONARDO TORRES QUEVEDO

Ingeniero y Matemático. 3º Presidente de la RSME

COMISARIADO: **Francisco A. González Redondo** (U. Complutense de Madrid)

COORDINACIÓN: **Henar Herrero Sanz** (U. Castilla - La Mancha)

### Resumen

En 1920 Leonardo Torres Quevedo era elegido tercer presidente de la Sociedad Matemática Española. Como el primer presidente, José Echegaray, eran “oficialmente” ingenieros de Caminos, aunque ambos trascendieron ampliamente esa categoría destacando en muchos otros campos; en el caso de Torres Quevedo, el de la invención, que llevaría a que el Presidente de la Sociedad Matemática Francesa, Maurice d’Ocagne, le caracterizase en 1930, en las páginas de *Figaro*, como “el más prodigioso inventor de su tiempo”. Y esta realidad multidisciplinar es la que se muestra en esta exposición.

La primera sección está dedicada al *transbordador*, el sistema que concibió para el transporte de pasajeros mediante un funicular aéreo de cables múltiples, trabajando a tensión constante e independiente de la carga transportada, que se **auto-equilibran** en el caso de la rotura de alguno de ellos. Patentado en 1887 en Alemania, Austria-Hungría y España; en 1888 en Francia, Reino Unido e Italia, y en 1889 en Suiza y EE.UU, el primer teleférico para personas abierto al público, el *transbordador* del Monte Ulía, se inauguraría en 1907 en San Sebastián. Le seguiría en 1916 el *transbordador* del Niágara, primer teleférico para personas de Norteamérica que continúa en funcionamiento hoy en día, tras más de cien años sin haber sufrido ningún accidente.

La segunda sección está dedicada a la solución del problema de la navegación aérea mediante *dirigibles* caracterizados por su viga funicular interior de elementos no metálicos que se **auto-rigidizan** por la presión interior del gas, invención patentada entre 1902 y 1907 en Francia, España y el Reino Unido, con soluciones vigentes hoy en día, que se completaría con las patentes del *poste de amarre* (1911) y el *buque campamento* (1913). Entre 1911 y el final de la I Guerra Mundial, se fabricarían en Francia y el Reino Unido más 90 dirigibles del sistema, tarea que continuaron en Francia la casa Astra en los años veinte y la casa Zodiac en los años treinta.

La tercera y más importante sección está dedicada a la **Computación** y la **Automática**, a sus *máquinas algébricas* del siglo XIX, que resuelven ecuaciones polinómicas, y al desarrollo del potencial implícito en el *telekino* como autómatas electromecánicos: el *primer ajedrecista* (1913), una máquina que juega al ajedrez y derrota

---

indefectible al contrincante humano en un final de partida de torre y rey (que maneja la máquina) contra rey, demostrando las posibilidades de la Inteligencia Artificial; sus *Ensayos sobre Automática* (1914), donde define esta nueva ciencia, referida a “autómatas dotados de discernimiento”; y, finalmente, su *aritmómetro electro-mecánico* (1920) que, con su teclado, unidad de computación, memoria artificial e impresora puede considerarse la primera realización efectiva, tras los fracasos de Babbage, hacia el ordenador actual.

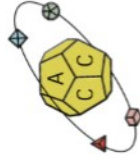
La exposición se completa con cinco vitrinas en las que se muestran **originales** de sus patentes de invención, de publicaciones de los primeros presidentes de la RSME, artículos en revistas españolas e internacionales, tesis doctorales en matemáticas, libros de actas de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, etc.

# Leonardo Torres Quevedo

1852. Nace en **Santa Cruz de Iguña** (Cantabria).
1876. Ingeniero de Caminos. Se retira en el **Valle de Iguña** "para dedicarme a pensar en mis cosas".
1885. Se casa con **Luz Polanco** en **Portolin** (Mollejo).
1887. Patenta el *transbordador* en España, Suiza, Francia, Alemania, EE.UU., Reino Unido, Austria, etc.
1889. Presenta en **Suiza** su proyecto de *transbordador*, que sería rechazado. Se traslada a Madrid.
1893. Presenta a la Real Academia de Ciencias de **Madrid** su *Memoria sobre las máquinas algébricas*.
1900. Presenta en las Academias de Ciencias de Madrid y **París** la memoria "Machines à calculer".
1902. Presenta en **Francia** las patentes del *dirigible* y del *telekino*, primer mando a distancia de la historia.
1904. Se crea el **Centro de Ensayos de Aeronáutica** para desarrollar el *dirigible* y el *telekino*.
1906. Pruebas del *telekino* en el Abra de **Bilbao** en presencia del Rey Alfonso XIII.
1907. Botadura en **Guadalajara** del "Torres Quevedo nº 1", primer *dirigible* español.
1911. Se crea el **Laboratorio de Automática**. Éxito de las pruebas del "Astra-Torres nº 1". El Almirantazgo británico construirá más de 60 dirigibles del sistema Torres Quevedo hasta 1919 y la casa francesa *Astra* más de 30 hasta 1924.
1914. Presenta en **París** su *ajedrecista*, primera manifestación de "inteligencia artificial" de la historia.
- Publica *Ensayos sobre Automática. Su definición. Extensión teórica de sus aplicaciones*, obra cumbre en la historia de la Ciencia española.
1920. Presenta en **París** su *aritmómetro electromecánico*, probablemente el primer ordenador en el sentido actual de la historia.
1923. Presenta en **Salamanca** y **París** su *segundo ajedrecista*, completado por su hijo Gonzalo
1936. Muere en **Madrid** durante la Guerra Civil.



Academia de Ciencias, Ingenierías y Humanidades de Lanzarote



AMIGOS DE LA CULTURA CIENTÍFICA



Dpto. de Matemáticas  
Universidad de Castilla-La Mancha



Universidad de Castilla-La Mancha  
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID  
FACULTAD DE EDUCACIÓN



UCLM  
Universidad de Castilla-La Mancha



Congreso Bienal de la  
**Real Sociedad Matemática Española**  
Del 17 al 21 de Enero

## EXPOSICIÓN

### LEONARDO TORRES QUEVEDO

Ingeniero y matemático. 3º Presidente de la RSME

E.T.S. de Ingeniería Industrial  
Edificio Politécnico

Universidad de Castilla-La Mancha  
Avda. Camilo José Cela nº 2, Ciudad Real

**ENTRADA LIBRE**

**Visitas:** lunes a viernes, de 9:00 a 21:00 horas

Comisariado: **Francisco A. González Redondo**  
Universidad Complutense de Madrid

Coordinación: **Henar Herrero Sanz**  
Universidad de Castilla-La Mancha



## El transbordador

En torno a 1884 Leonardo Torres Quevedo inicia sus estudios para conquistar los aires mediante su *transbordador*, un funicular de cables múltiples a tensión constante e independiente de la carga transportada, ensayando un primer modelo con una luz de unos doscientos metros y un desnivel de cuarenta, en el entorno de la "Casa de Doña Jimena", en Portolín (Mollado, Cantabria).

Le seguiría en 1886 un segundo modelo que serviría de base para la patente presentada en 1887 en España y Alemania, en 1888 en Francia, Reino Unido, Austria-Hungría e Italia, y en 1889 en Suiza y EE.UU.



En 1890 experimenta el rechazo de su invención en Suiza y pasa a dedicarse de pleno al desarrollo de sus *máquinas algébricas*, máquinas de calcular que resuelven ecuaciones, sus dirigibles *autorrígidos* y el *telekino*, hasta septiembre de 1907, cuando se inauguraba en San Sebastián el "transbordador del Monte Ulía", el primer teleférico abierto al público del mundo.

Finalmente, en agosto de 1916 se inauguraba en Canadá, sobrevolando también territorio de los EE.UU., el "transbordador del Niágara", primer teleférico para personas de Norteamérica y único del sistema "Torres Quevedo" que continúa en funcionamiento, tras más de cien años operando durante los cuales no ha sufrido ningún accidente.

## Los dirigibles

Para la construcción del dirigible patentado entre 1902 y 1906, Torres Quevedo contó en el *Centro de Ensayos de Aeronáutica* con la colaboración del capitán de Ingenieros Alfredo Kindelán, primero en el *Polígono de Aerostación de Guadalejara*, donde las pruebas del "Torres Quevedo nº 1" de 640 m<sup>3</sup>, en 1907, y del "Torres Quevedo nº 2" de 950 m<sup>3</sup>, en 1908, terminaron con el desencuentro entre Kindelán y el inventor, quien se vio forzado a abandonar Guadalejara.

Trasladados los ensayos a París, la casa *Astra* compraría la patente, construiría el "Astra-Torres nº 1" en 1911 y vendería el "Astra-Torres XIV" al Reino Unido en 1913.



Durante la I Guerra Mundial, *Astra* fabricaría los "AT-1" a "AT-4" de 6500 m<sup>3</sup>, "AT-5" a "AT-9" de 7600 m<sup>3</sup>, y los "AT-10" a "AT-17" de 8300 m<sup>3</sup>. Se transfirieron a la US Navy los "AT-1" y "AT-13", y el "AT-18" de 10700 m<sup>3</sup>. En 1922 se entregaría el "AT-20" para Japón y en 1923 el último "Astra-Torres" para la Marina Francesa, el "AT-24".

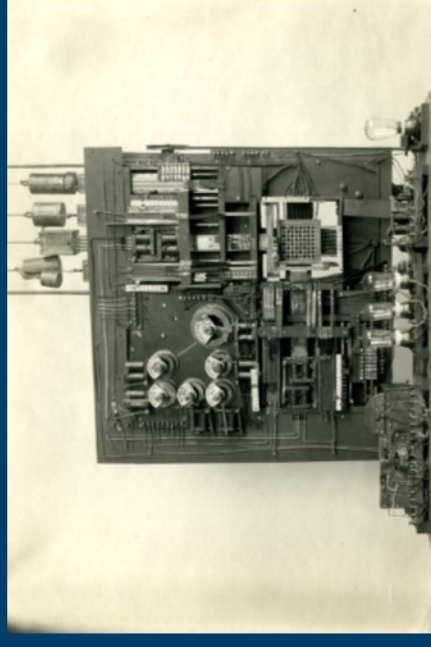
Por su parte, el Almirantazgo británico construyó tres series sucesivas: "Coastal" (30 unidades de 4810 m<sup>3</sup>), "Coastal Star" (10 de 5960 m<sup>3</sup>) y North Sea (18 de 10190 m<sup>3</sup>). Se vendieron además cuatro "Coastal" a Rusia, uno a la Marina Francesa y un "North Sea" a la US Navy.

Entre 1931 y 1936 la también francesa casa *Zodiac* construiría los tribolbulados autorrigidos "V11" y "V12".

## Computación. Automática

Completadas con éxito las pruebas del *Telekino* en Bilbao en presencia del Rey Alfonso XIII, el Ministerio de Fomento crea en febrero de 1907 el *Laboratorio de Mecánica Aplicada* para que Torres Quevedo pueda completar la construcción de sus *máquinas algébricas* propuestas a finales del s. XIX y desarrolle el potencial implícito en el *Telekino* como el primer autómeta electromecánico de la historia.

En 1910 presenta "algunas consideraciones generales sobre los procedimientos de automatización mecánica que permiten sustituir, con frecuencia, al trabajo inteligente del obrero, el trabajo puramente mecánico de una máquina", los diseños de la primera computadora digital de la historia, su primera aproximación a "un nuevo cuerpo de doctrina".



Entre 1913 y 1914 presenta en Madrid y París su *primer ajedrecista*, un autómeta electromecánico que juega al ajedrez y derrota al humano, demostrando de forma práctica las posibilidades de la Inteligencia Artificial.

En 1914 publica sus *Ensayos sobre Automática*, definiendo esta nueva ciencia, referida a "autómetas dotados de discernimiento", que ejemplifica con los diseños de una "máquina analítica" electromecánica.

Finalmente, entre 1919 y 1920 completa su *aritmómetro electromecánico* que, con su teclado, unidad de computación, memoria artificial e impresora podría considerarse el primer ordenador en sentido actual de la historia.

## EXPOSICIÓN: PÓSTER/PRISMA MUJERES Y MATEMÁTICAS

COMISARIADO: **Comisión de Mujeres y Matemáticas de la RSME**

COORDINACIÓN: **Henar Herrero Sanz** (U. Castilla - La Mancha)

### Resumen

En 2020 y 2021 la Comisión de Mujeres y Matemáticas de la RSME realizó un conjunto de actividades online para celebrar el 12 de mayo Día de las Mujeres Matemáticas que conmemora el nacimiento de Maryam Mirzakhani.

El 12 de mayo de 2020 veinticuatro mujeres formaron parte de una mesa redonda muy especial para visibilizar sus intereses, ilusiones, logros, aficiones, etc. Investigadoras predoctorales, posdoctorales, profesoras ayudante y contratada doctora, y profesoras titulares, tanto de universidades españolas como extranjeras. Compartieron sus respuestas a doce preguntas con el objetivo de conocerlas mejor y ayudar a erradicar algunos estereotipos como el de que “las chicas no son buenas en matemáticas” o que “investigar en matemáticas es un trabajo individual”.

El 12 de mayo 2021 se celebró la actividad coloquio “4 matemáticas, 4 mujeres, 4 mensajes”. Conocimos las historias de 4 mujeres matemáticas extraordinarias que nos hablaron de su investigación, de su trayectoria como investigadoras en matemáticas, compartieron con nosotras las experiencias vividas y decisiones tomadas a lo largo de su carrera, y también su visión y sus consejos para alcanzar la igualdad en la investigación en matemáticas.

Si tienes curiosidad por conocer a todas estas matemáticas, en el póster podrás encontrar los enlaces QR para escuchar su mensaje.

12  
p  
r  
e  
g  
u  
n  
t  
a  
s



Lucía Marín Merchán



Ángela Capel



Cristina Brändle



Patricia Contreras Tejada



Ana Luzón



Elena Camacho



Raquel Villacampa



Adela Latorre



Laura Saavedra



Soledad Pérez



Diana Stan



Nª Angeles García Ferrero



12  
d  
e  
M  
A  
Y  
O



Cuatro Matemáticas  
Cuatro Mujeres  
Cuatro Mensajes

12 Mayo

4M + 4M + 4M



Karen Uhlenbeck



Ujué Etayo



María Jesús Carro



Laura Schaposnik



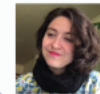
con la colaboración de:



Paralelo de Ciencias  
MATEMÁTICAS



12  
d  
e  
M  
A  
Y  
O



Laura Colmenarejo



Meritxell Sáez



María del Mar González



Ana Bravo



Marina Logares



Teresa Luque



Cristina Naya



María Medina



Maribel González Vasco



Ana Navarro Quiles



Luz Roncal



Elena Vázquez Cerdón



12  
p  
r  
e  
g  
u  
n  
t  
a  
s





Universidad de  
Castilla-La Mancha



RSME2022  
Ciudad Real

Congreso Bienal de la

# Real Sociedad Matemática Española

Del 17 al 21 de Enero

## LIBRO DE RESÚMENES

## Y

## ACTIVIDADES

Organizan:

