



Master Physique des Matériaux, Mécanique, Modélisation Numérique (P3M)

2016/2017

Étude expérimentale de l'effondrement axisymétrique d'un matériau
granulaire

Thomas MEKIL

Rapport de stage

28 juin 2017

Tuteurs de stage : Anselmo SOEIRO-PEREIRA
Stephanie RIBER
Romain CASTELLANI
Rudy VALETTE

Table des matières

Liste des symboles	2
Introduction	2
1 Etat de l'art sur l'écoulement des milieux granulaires denses	4
1.1 Les milieux granulaires	4
1.2 Loi constitutive de l'écoulement de granulaires secs	5
1.3 Effondrement axisymétrique d'une colonne granulaire	6
2 Méthodologie	7
2.1 Ecoulement sur plan incliné	8
2.2 Effondrement axisymétrique d'une colonne de grains	8
3 Théorie	9
3.1 Rhéologie viscoplastique frictionnelle	10
3.2 Analyse théorique du modèle $\mu(I)$	11
4 Résultats expérimentaux	13
4.1 Détermination des paramètres rhéologiques de la loi $\mu(I)$	13
4.2 Etalement axisymétrique de colonnes granulaire	15
Conclusions et perspectives	18
Références	20

Liste des symboles

Alphabet grec

$\dot{\gamma}$	taux de cisaillement	s^{-1}
η	Viscosité	Pa.s
μ	coefficient de friction	Sans dimension
μ_f	coefficient de friction dynamique	Sans dimension
μ_s	coefficient de friction statique	Sans dimension
ρ	Masse volumique	kg/m^3
σ	Tenseur des contraintes	Pa
τ	Contrainte	Pa
θ	Angle d'inclinaison	$^{\circ}$

Alphabet romain

a	Rapport d'aspect de la colonne granulaire	Sans dimension
a_c	Rapport d'aspect critique de la colonne granulaire	Sans dimension
a_r	Rapport entre $h_i + h_r$ sur r_i	Sans dimension
d	Diamètre des grains	m
h	Hauteur d'écoulement du matériau sur plan incliné	m
h_{∞}	Hauteur asymptotique	m
h_i	Hauteur initiale de la colonne	m
I	Nombre inertiel	Sans dimension
I_0	Nombre inertiel donnant la transition entre régime dense/collisionnel	sans dimension
P	Pression de confinement	Pa
P_i	Pression inertiel	Pa
r_{∞}	Rayon asymptotique	m
r_i	Rayon initiale de la colonne	m
t	Temps	s
t_{∞}	Temps asymptotique	s
t_c	Temps de chute microscopique	s
t_m	Temps de chute macroscopique	s
V	Vitesse	$m \cdot s^{-1}$

Introduction

Un matériau granulaire est un matériau constitué d'un ensemble de particules solides macroscopiques. Les équations qui gouvernent l'écoulement de matériaux granulaires denses secs est encore sujet à débat. La compréhension de la rhéologie des milieux granulaires est complexe à faible vitesse d'écoulement, et dépend fortement de la façon dont s'empilent les grains. Une des principales difficultés est que les granulaires secs peuvent se comporter soit comme un solide, un liquide ou un gaz selon la valeur d'un nombre adimensionnelle I . Cependant, à partir d'une vitesse assez élevée, la modélisation d'un point de vue « milieu continu » est possible. Ces trois régimes peuvent être décrits à l'aide d'un nombre inertiel dépendant de 4 paramètres, dominé par les contraintes de frictions entre grains. Jop et al. [2] ont proposé une loi constitutive du comportement, dominé par des contraintes de friction entre grains. L'intérêt principal de l'étude des milieux granulaires est qu'ils représentent plus de la moitié des produits utilisés dans l'industrie (activités minières, génie civil, industrie pharmaceutique, agroalimentaire, etc). On les retrouve également dans les milieux naturels (dunes de sable, écoulements pyroclastiques, avalanches de neiges, astéroïdes ou encore les anneaux de Saturne-Figure 1).



FIGURE 1 – Ecoulement de milieux granulaires dans l'industrie et en milieu géophysique [1].

Dans le cadre de cette étude on ne s'intéressera qu'aux états « solide » et « liquide » . À l'heure actuelle la loi de friction est validée pour des effondrements de colonnes. Les résultats de ces expériences peuvent être appliqués à une large gamme de milieux naturels ou industriels. Dans un premier temps, on cherchera à déterminer expérimentalement quels sont les paramètres de la loi de friction régissant l'écoulement, à l'aide d'un plan incliné

rugueux. On étudiera ensuite l'effondrement de colonnes granulaires afin de savoir si la loi de friction permet de retrouver les résultats expérimentaux et certains phénomènes prédits par les simulations numériques.

1 Etat de l'art sur l'écoulement des milieux granulaires denses

Le comportement aux relativement grandes vitesses d'écoulement des milieux granulaires a été compris théoriquement assez récemment [2]. Ce comportement est dominé par les contraintes de friction entre grains. La littérature montre que l'étalement d'une colonne granulaire initialement au contact d'un substrat solide [3,4] (problème de « dam-break », écoulement de barrage) présente une dynamique universelle, à deux paramètres (une hauteur h_i et r_i), pour une gamme étendue de types grains : le profil d'étalement adimensionné par le rayon initial, fonction du temps peut être ainsi déduit d'une courbe maîtresse $h(r,t)$ (Figure 2).

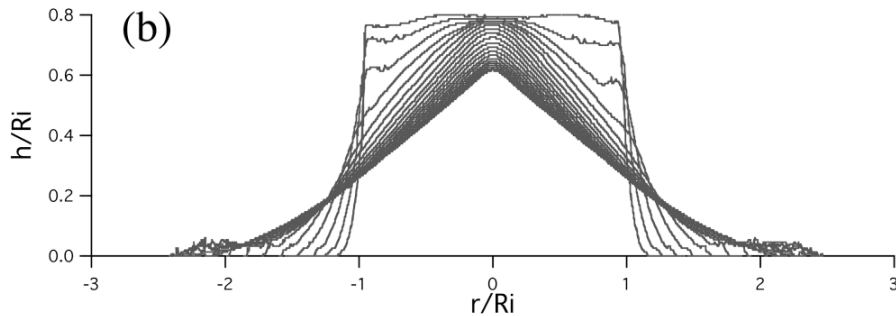


FIGURE 2 – Profil $h(r,t)$ normalisé par le rayon initial du tube Ri , avec $Ri = 7,0$ cm, $a = 0,8$ et la masse $M = 1450$ g [4].

1.1 Les milieux granulaires

Les milieux granulaires se distinguent des poudres et des colloïdes par leur taille de particules : supérieure à $100 \mu\text{m}$ pour les granulaires, $1-100 \mu\text{m}$ pour les poudres, et 1 nm à $1 \mu\text{m}$ pour les colloïdes . Les types d'interactions mises en jeu entre grains sont également différents pour chacune de ces familles. Dans les colloïdes prédominent des mouvements browniens, dépendants de la température, des interactions de Van der Waals (communes aux poudres) et dans les poudres peuvent se trouver des effets d'humidité. On peut regrouper les matériaux granulaires et les poudres dans la sous-famille des granulaires secs, dominés par des contraintes de frictions entre grains et où les effets d'un fluide environnant sont négligés. Les granulaires secs peuvent être décrits par 3 régimes : quasi-statique (solide), dense (liquide),

collisionnel (gazeux) en fonction d'un nombre inertiel I , qui fait intervenir la densité ρ , le diamètre des grains d , la pression P et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$.

1.2 Loi constitutive de l'écoulement de granulaires secs

Le cisaillement simple (encart Figure 2) représente la configuration modèle la plus simple pour mettre en évidence l'écoulement des matériaux granulaires denses. On considère une couche de grains sphériques de diamètre d et de masse volumique ρ confinée entre deux parois rugueuses avec une pression P appliquée sur la plaque supérieure, et un déplacement à une vitesse relative V . Pour un écoulement stationnaire uniforme et en l'absence de gravité, la contrainte tangentielle et la contrainte normale P sont homogènes dans le matériau. L'analyse dimensionnelle du cisaillement suggère que la variation de contrainte tangentielle en fonction de la contrainte normale P ne dépend que du nombre adimensionnel I .

$$\tau = \mu(I)P \text{ et } I = \dot{\gamma}d\sqrt{\frac{\rho}{P}} \quad (1)$$

Le comportement du matériau peut donc être caractérisé par un nombre inertiel I [4,5] sans dimension défini comme le rapport d'un temps $t_c = d\sqrt{\frac{\rho}{P}}$ lié au réarrangement des grains sur un temps macroscopique $t_m = \frac{1}{\dot{\gamma}}$ égal à l'inverse du taux de cisaillement. En considérant deux couches de grains, le temps macroscopique t_m peut être vu comme le temps mis par un grain pour dépasser son voisin du dessous et le temps microscopique t_c comme le temps nécessaire mis par une particule pour tomber dans un trou de taille d sous l'effet de la pression de confinement P . On peut également utiliser le nombre de Savage [6] ou de Coulomb égal au carré de I et défini comme le rapport d'une pression inertiel sur la pression de confinement P . Lorsque $P_i \ll P$ le matériau se dilate, si $P_i \gg P$ il reste dense (fraction volumique d'environ 0.6). Le nombre inertiel I permet donc de caractériser les différents régimes d'écoulement d'un matériau granulaire (figure 3).

Jop et al. [2] ont montré phénoménologiquement que pour différentes configurations il est possible de donner une expression de la loi de friction $\mu(I)$:

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{(\mu_f - \mu_s)}{1 + \frac{I_0}{I}} \quad (2)$$

caractérisant un régime d'écoulement dense pour un nombre inertiel modéré (de 0,01 à 0,5) où $I_0 \approx 0,3$ une constante dépendant du matériau et $\Delta\mu \approx 0,2$ avec $\Delta\mu = \mu_f - \mu_s$ où μ_s est représenté le coefficient de friction statique (angle de repos du matériau typiquement) et μ_f le coefficient de frottement dynamique. Le coefficient de friction débute à une valeur μ_s coïncidant avec la friction de Coulomb du matériau ($\mu_s \approx \tan 21^\circ$ pour des billes de verre monodisperses) et sature à une valeur $\mu_f \approx \tan 32^\circ$ pour une grande valeur de I . Il est difficile d'observer expérimentalement un écoulement homogène pour des valeurs de I supérieures à 0,5 à cause d'instabilités dues à la transition vers un régime cinétique mettant ainsi en question la validité de la loi $\mu(I)$.

La loi de friction a été généralisée à trois dimensions sous forme tensorielle. Pour un écoulement incompressible et une pression P isotrope, le milieu granulaire peut être décrit par un tenseur de contraintes :

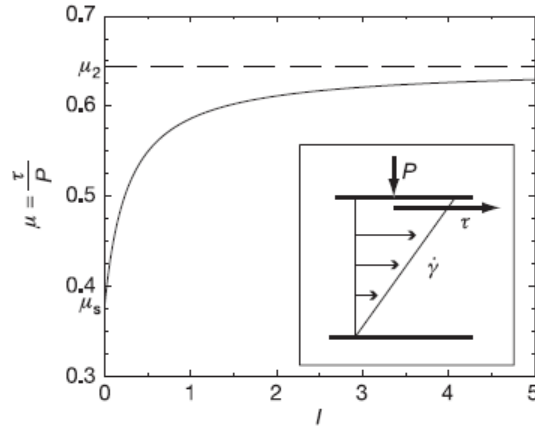


FIGURE 3 – Evolution du coefficient de friction μ en fonction du nombre inertiel I pour les paramètres suivants ($\mu_s = \tan(20,9)$, $\mu_f = \tan(32,76)$ et $I_0 = 0,279$) [2].

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\eta\dot{\gamma} \quad (3)$$

Avec $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement et η la viscosité du fluide granulaire. Cette formulation met donc en évidence l'existence d'un seuil d'écoulement lorsque $\tau \geq \mu_s P$. Par ailleurs, la viscosité effective des matériaux granulaires dépend de la pression et du taux de cisaillement. On retrouve ainsi le modèle de friction de Drücker-Prager avec un seuil d'écoulement proportionnel à la pression comme nous le verrons ultérieurement dans la partie 3-Théorie. La loi de friction $\mu(I)$ a été établie pour un milieu granulaire considéré idéal avec des particules sphériques identiques interagissant par des contacts secs non cohésifs. Le problème est donc de trouver la vitesse d'écoulement dans un milieu granulaire à partir de ce modèle simple afin de pouvoir prédire des écoulements plus complexes.

1.3 Effondrement axisymétrique d'une colonne granulaire

L'effondrement d'une colonne de grains constitue une autre conformation du modèle. Lajeunesse et al. [2] ont réalisé cette expérience en utilisant des grains secs de différentes natures, sable, sel, riz, couscous et de sucre. Le dispositif expérimental consiste à soulever très rapidement un tube cylindrique rempli de grains posé sur une surface solide et plane (figure 6). L'écoulement est analysé à l'aide d'une caméra rapide. Les auteurs ont mis en évidence la présence des trois régimes d'écoulements, dépendant de la valeur du rapport d'aspect :

$$a = \frac{h_i}{r_i} \quad (4)$$

où h_i, h_∞ les hauteurs initiale et finale et r_i, r_∞ les rayons initial et final de la colonne de grains.

Les principaux résultats expérimentaux des mesures du diamètre final du dépôt et du temps de déplacement des grains sont, d'après les résultats présentés, indépendants des coef-

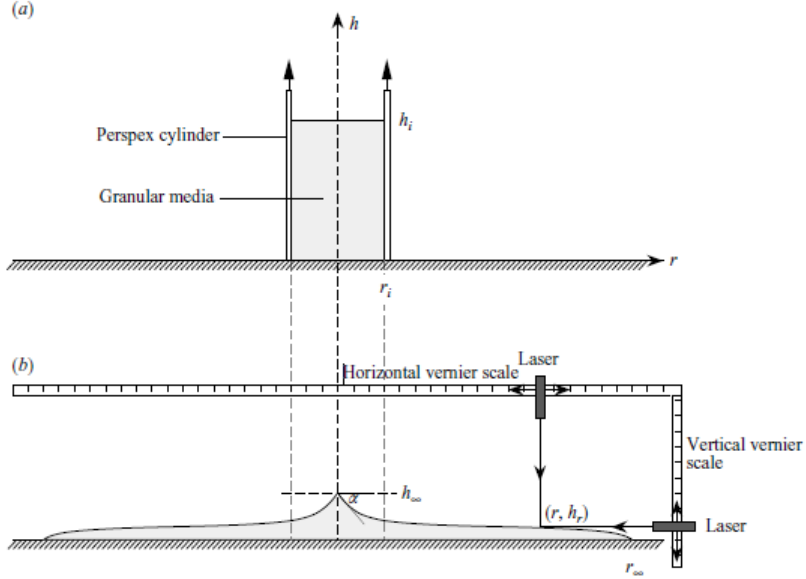


FIGURE 4 – (a) Schéma de la configuration initiale de l’expérience (b) géométrie approximative du dépôt final [3].

ficients de frictions de différents grains utilisés. Pour un faible a le dépôt final prend la forme d’un cône tronqué, puis d’un « chapeau mexicain » pour une grande valeur de a et une forme conique à une valeur critique a_c (figure 7). Pour $a < 1,7$ le rayon final est relié au rayon initial par $r_\infty = r_i(1 + 1,24a)$ et pour $a > 1,7$ la relation est donnée par $r_\infty = r_i(1 + 1,6a^{\frac{1}{2}})$. Le temps t_∞ , mis par les grains pour atteindre r_∞ est $t_\infty = 3(h_i/g)^{\frac{1}{2}}$ où g est l’accélération de la pesanteur. Pour savoir dans quelle mesure la loi viscoplastique $\mu(I)$ est capable de reproduire la dynamique de cet écoulement, il est nécessaire d’implémenter la rhéologie frictionnelle dans un code numérique 3D. Riber et al. [9] ont validé le modèle sur des cas d’effondrements de colonnes granulaires en deux dimensions. Les deux régimes d’écoulements sont retrouvés par simulation numérique. Ils ont observés que le coefficient de frottement statique μ_s est le paramètre dominant sur la distance parcourue par le matériau. Le modèle a également été utilisé pour des effondrements en trois dimensions, retrouvant également les deux régimes associés aux dépôts finaux. En revanche la transition s’effectue à plus grand a_c comparativement aux travaux expérimentaux de Lajeunesse et al. L’analyse de la hauteur initiale de la colonne h_i montre pour la première fois que la dynamique dépend du nombre inertiel I .

2 Méthodologie

Nous allons ici décrire la mise en place et la procédure expérimentale qui permet d’identifier les principaux paramètres qui contrôlent l’écoulement de milieux granulaires denses à l’aide du modèle de friction $\mu(I)$.

2.1 Ecoulement sur plan incliné

On utilise pour cela, une boîte à surface libre de longueur $L=73,8$ cm, de largeur $l=17,9$ cm et de hauteur $h=20,1$ cm. La configuration sur plan incliné (Figure 5) consiste à faire s'écouler un matériau granulaire en inclinant la boîte pour différents angles α à l'aide d'un ressort réglable, la seule force motrice intervenant étant la gravité. Le taux d'écoulement est contrôlé par l'ouverture d'une porte située à 27,8 cm de la face postérieure qui fixera la hauteur d'écoulement. L'écoulement sera étudié pour une gamme d'angles comprises entre le régime solide et liquide, on ne s'intéresse pas au cas collisionnel. Du papier de verre est collé sur la paroi basse de la boîte afin d'éviter le glissement des grains.

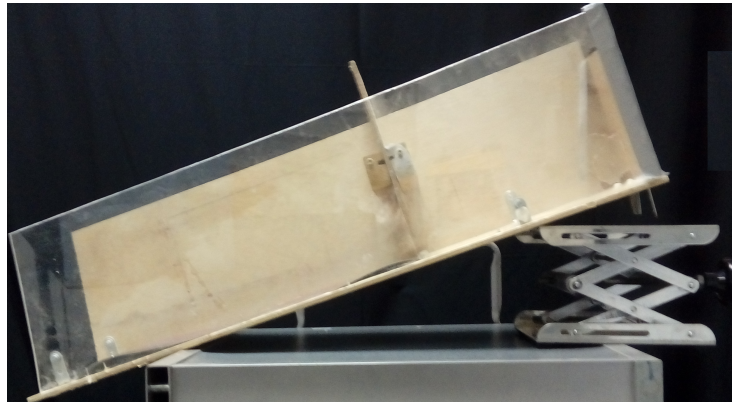


FIGURE 5 – Boîte expérimentale pour l'étude de l'écoulement sur plan incliné avec une porte fixant la hauteur d'écoulement du matériau et un ressort réglable faisant varier l'inclinaison du plan.

Pour assurer la reproductibilité de l'expérience le réservoir est toujours rempli avec la boîte posée sur son support pour un angle initial nul et chaque mesure sera répétée 5 fois. La boîte est inclinée en augmentant la hauteur du ressort positionné à l'arrière dépassant un angle d'avalanche θ_a permettant la mise en écoulement. On diminue ensuite cette hauteur pour obtenir un écoulement stationnaire uniforme. On vérifie la stationnarité en faisant durer l'écoulement assez longtemps pour que la loi $\mu(I)$ soit valide. L'écoulement sera analysé à l'aide d'une caméra rapide de résolution 800×600 pixels et 300 images/s filmant la face latérale et la vitesse sera estimée à l'aide du logiciel ImageJ.

2.2 Effondrement axisymétrique d'une colonne de grains

On dispose de tubes cylindriques en PVC de différents rayons et hauteurs R_i et H_i (Fig 6). La reproductibilité est assurée en remplissant un tube de billes de verres de diamètre $d = 300 \pm 50 \mu m$ formant une colonne cylindrique de matériau granulaire, posée sur une surface plane et rugueuse constitué de feuilles avec des billes de verres collées pour éviter le glissement. Pour obtenir un état initial dense d'environ 60% la densité ϕ de la colonne est estimée par $\phi = \frac{\rho_{verre}}{\rho_{granulaire}}$ où la densité des billes de verres $\rho_{verre} = 2500 \text{ kg/m}^3$, ce qui donne une densité $\rho_{granulaire} = 1500 \text{ kg/m}^3$.

On soulève le tube à la main très rapidement, après quoi la colonne de grains s'effondre sous propre poids formant ainsi un dépôt final en s'étalement. Le suivi de l'étalement est réalisé à

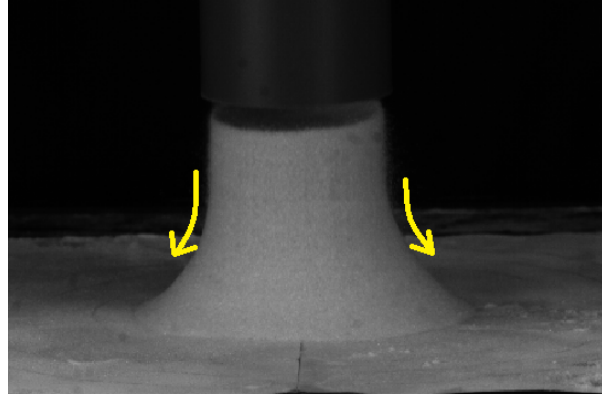


FIGURE 6 – Effondrement axisymétrique d’une colonne granulaire sous son propre poids [4].

l’aide d’une caméra rapide de résolution 800×600 pixels et 600 images/s. Le profil d’étalement adimensionné $h(r,t)$ de la colonne sera extrait de la vidéo. Pour cela on associe des points à la surface de la colonne $h(r)$ avec le logiciel ImageJ où h la hauteur de la colonne et r la distance radiale associée au rayon du matériau granulaire pour différents temps. On mesure la distance des rayons finaux d’étalement avec une règle selon deux axes perpendiculaires pour vérifier que le dépôt est axisymétrique nous donnant des informations sur l’écoulement en trois dimensions.

3 Théorie

Afin de décrire des écoulements plus complexes, la loi de friction a été généralisée à trois dimensions sous forme tensorielle. Si on suppose que l’écoulement est incompressible et la pression isotrope, le milieu granulaire peut être décrit par un tenseur sphérique σ_s associé au confinement (terme de pression) et un tenseur déviatorique σ_d pour générer la plasticité de l’écoulement :

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d \quad (5)$$

Dans la limite d’une compressibilité très faible $Tr(\sigma_d) = 0$ et $Tr(\sigma) = Tr(\sigma_s) = -3P$ (on a donc au moins un terme de pression quelle que soit la direction, même en l’absence d’écoulement). Cette formulation tensorielle permet de décrire le liquide granulaire comme un fluide incompressible non-newtonien.

$$\sigma = -PI + 2\eta\dot{\gamma} \quad (6)$$

avec $\dot{\gamma} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^\dagger)$ la partie symétrique du gradient de vitesse, $|\dot{\gamma}| = u'$ et $\eta = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|}$ la viscosité du fluide granulaire. Cette formulation met donc en évidence l’existence d’un seuil d’écoulement lorsque $\tau \geq \mu_s P$ avec :

$$\tau_{ij} = \eta_{eff} \dot{\gamma}_{ij} \text{ et } \eta_{eff} = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} \quad (7)$$

La loi de friction $\mu(I)$ a été établie pour un milieu granulaire considéré idéal avec des particules sphériques identiques interagissant par des contacts secs non cohésifs. Le modèle

ne fonctionne pas pour des tailles de grains différentes, des défauts d'empilement etc. Le problème est donc de trouver la vitesse d'écoulement dans un milieu granulaire à partir de ce modèle simple afin de pouvoir prédire des écoulements plus complexes.

3.1 Rhéologie viscoplastique frictionnelle

Considérons l'écoulement stationnaire uniforme sur un plan incliné rugueux. Les travaux expérimentaux ont montré que pour un angle donné θ on peut observer un écoulement uniforme continu pour une épaisseur h constante du matériau. On cherche à déterminer le profil de vitesse $u(y)$ dans la couche en écoulement.

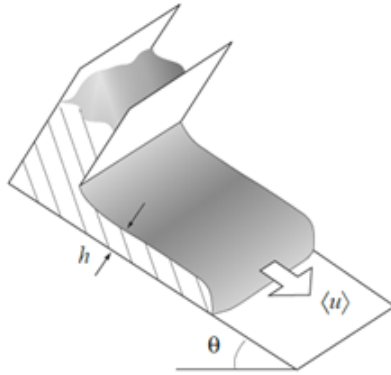


FIGURE 7 – Schéma d'écoulement granulaire sur plan incliné, d'épaisseur h constante avec un angle d'inclinaison θ à une vitesse $\langle u \rangle$ [5].

Hypothèses cinématiques : Soient les données du problème : h la hauteur fixe, g la gravité est la force motrice, les conditions aux limites suivantes, la vitesse $u=0$ sur la paroi rugueuse du bas, le gradient de vitesse $\nabla \cdot u$ nul selon x , la densité des grains ρ constante et les termes diagonaux $\sigma_{xy} = 0$. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement impliquent

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad (9)$$

En tenant compte de la stationnarité de l'écoulement et des conditions sur la vitesse l'équation précédente peut se réécrire telle que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Ce qui implique que quel que soit la loi de comportement l'équation suivante est linéaire

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} - \nabla P = 0 \quad (11)$$

On trouve finalement que :

$$\begin{cases} Axe\ x : \tau_{xy,y} + \rho g_x - P_{,x} = 0 \\ Axe\ y : 0 + \rho g_y - P_{,y} = 0 \end{cases}$$

La gravité crée donc une contrainte $\tau(y)$ selon x pour une pression constante en x et crée de la pression $P(y)$ selon y . En considérant l'écoulement sur plan incliné paramétré avec l'axe x parallèle à l'axe d'écoulement et l'axe y perpendiculaire à celui-ci, lorsque l'on intègre l'équation de 0 à h selon la variable y on trouve :

$$\begin{cases} P(y) = \rho g \cos \alpha (h - y) \\ \tau(y) = \rho g \sin \alpha (h - y) \end{cases}$$

Pour un milieu granulaire, la contrainte tangentielle peut donc être relié à la pression (contrainte normale) par le coefficient de friction $\mu(I)$

$$\tau(y) = \mu(I)P(y) \quad (12)$$

Ce modèle nous permet de relier le coefficient de friction à l'angle d'inclinaison α par $\mu = \tan \alpha$ et la contrainte tangentielle $\tau = \frac{\mu(I)P}{|\dot{\gamma}|} u'$. Le matériau est au repos quand $\tau < \mu(I)P$ et l'écoulement débute lorsque $\tau \geq \mu(I)P$; ceci permet une description frictionnelle, c'est-à-dire qu'il existe un angle α associé à un coefficient de friction statique μ_s en dessous duquel il n'y a pas d'écoulement. Pour trouver la vitesse on se place dans un régime d'écoulement et on cherche $|\dot{\gamma}| = u'$ où $\tau = \mu(I)P = \eta u'$. Le plan incliné est le modèle le plus simple pour avoir un champ de vitesse régulier.

3.2 Analyse théorique du modèle $\mu(I)$

On cherche à identifier les paramètres de la loi $\mu(I)$ qui régissent l'écoulement sur un plan incliné rugueux. Le milieu granulaire s'écoule lorsque la contrainte de cisaillement $\tau \geq \mu P$ avec μ le coefficient de friction qui dépend d'un angle d'inclinaison où $\mu = \tan \alpha$; et reste statique lorsque $\tau < \mu P$. En régime d'écoulement on a donc une vitesse $v(\alpha, h)$ variant avec l'inclinaison et l'épaisseur du matériau, qui nous permettra d'identifier la loi mettant en évidence un effet inertie décrit par le nombre I . Considérons l'écoulement stationnaire uniforme de cisaillement sur un plan incliné décrit par la même équation qu'un cisaillement simple et donné par la loi de comportement

$$\tau = \mu(I)P \quad (13)$$

Le nombre inertiel I peut être défini comme le rapport d'un temps de chute d'un grain sous une pression de confinement P avec $t_c = d\sqrt{\frac{\rho}{P}}$ sur un temps de cisaillement égal à l'inverse du taux de cisaillement $t_m = \frac{1}{\dot{\gamma}}$

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{\frac{P}{\rho}}} \quad (14)$$

On peut considérer que le nombre inertiel mesure une vitesse d'écoulement impliquant le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Lorsque l'on connaît I on connaît donc le taux de cisaillement, ce qui nous donne la pression. Le coefficient de friction est donné par la formule suivante (Jop et al.)

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{(\mu_f - \mu_s)}{1 + \frac{I_0}{I}} \quad (15)$$

avec $\Delta\mu = \mu_f - \mu_s$ où μ_s . L'équation (1) nous permet de réexprimer le coefficient de friction dépendant de I en fonction de l'inclinaison

$$\mu(I) = \frac{\tau}{P} = \tan(\alpha) \quad (16)$$

Les équations (3) et (4) nous permettent de réécrire le nombre inertiel I en fonction des différents paramètres

$$= \frac{\tan \alpha - \mu_s}{\mu_f - \tan \alpha} I_0 = \dot{\gamma} d \sqrt{\frac{\rho}{(h - y) \cos \alpha}} \quad (17)$$

Si le modèle $\mu(I)$ fonctionne, le nombre inertiel I peut être déterminé en fonction de l'angle α sans dépendance en y . Ainsi en fixant l'angle, on fixe I .

$$\left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \infty \text{ quand } \tan \alpha = \mu_f \text{ (régime rapide) = " limite du modèle" } \\ I = I_0 \text{ quand } \tan \alpha = \frac{\mu_s + \mu_f}{2} \\ I = cte = \frac{\tan \alpha - \mu_s}{\mu_f - \tan \alpha} I_0 \text{ pour un angle donné } \alpha \end{array} \right.$$

En pratique, on a rarement des écoulements s'approchant de μ_f . On cherche à retrouver la vitesse à partir de l'équation (17) à un angle fixé. L'équation (17) nous donne le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ en fonction de y .

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dy} = I \frac{\sqrt{(h - y) \rho g h \cos \alpha}}{d} \quad (18)$$

En intégrant l'équation précédente de 0 à h on trouve la vitesse :

$$v = \frac{2}{3} v_{ref} \frac{h}{d} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (19)$$

$\frac{h}{d}$ peut être vu comme le nombre de grains sur une épaisseur h constante, ainsi la vitesse augmente en fonction de ce rapport suivant un profil de Bagnold en puissance $\frac{3}{2}$. Le nombre inertiel I nous indique le régime et la valeur du coefficient de friction et $v_{ref} = (gh \cos \alpha)^{\frac{1}{2}} I$ qui peut se définir comme une vitesse caractéristique pour un angle donné en $\sqrt{gh \cos \alpha}$.

En déterminant la vitesse théorique v en $y = h$ donné par l'équation (13) à l'aide du logiciel ImageJ, on en déduit la vitesse de référence v_{ref} ce qui nous permet ensuite d'obtenir la valeur du nombre inertiel I à angle donné. On regarde ensuite comment varie I en fonction de la tangente de l'angle associé à un coefficient de friction $\mu(I)$. En traçant la variation du coefficient de friction μ en fonction de I , on pourra en tirer les valeurs des coefficient de frottements statique μ_s et dynamique μ_f ainsi que la valeur de I_0 constante caractéristique du matériau granulaire.

4 Résultats expérimentaux

Dans cette section seront présentés les résultats expérimentaux permettant de déterminer les paramètres rhéologiques de la loi de friction, puis comment la loi $\mu(I)$ influence l'étalement d'une colonne granulaire.

4.1 Détermination des paramètres rhéologiques de la loi $\mu(I)$

Une fois placé en régime d'écoulement stationnaire et uniforme, l'acquisition des images avec la caméra rapide nous permet de calculer vitesse d'écoulement à la surface à partir de l'équation 19. Les données nous donnent la vitesse v en $y = h$ pour une inclinaison de θ° .

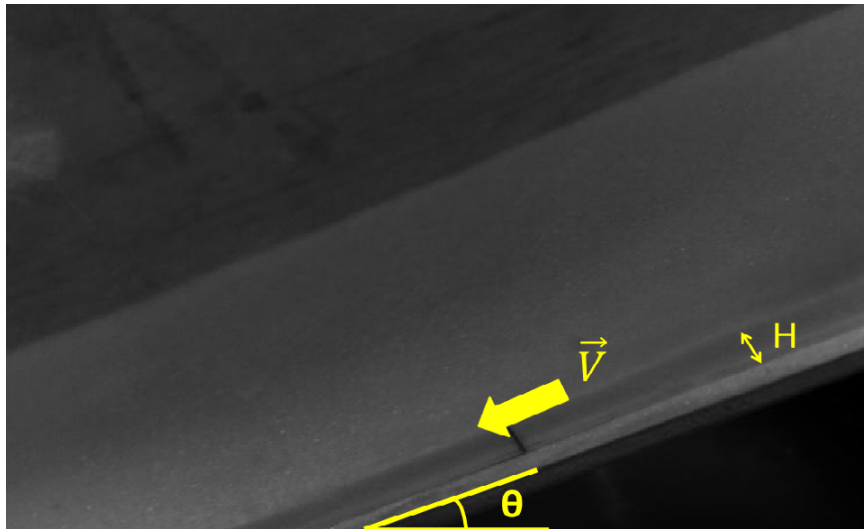


FIGURE 8 – Ecoulement du matériau granulaire sur plan incliné, de hauteur H , vitesse V et d'angle d'inclinaison θ

De là on peut calculer la vitesse de référence v_{ref} et en déduire la valeur du nombre inertiel I pour chaque angle. La courbe ci-dessous (figure 9) montre l'évolution du nombre inertiel I en fonction de l'angle d'inclinaison du plan incliné déterminé expérimentalement. Le nombre inertiel est ici uniquement fonction de l'angle. Ces valeurs sont obtenues pour des écoulements stationnaires uniformes à hauteur constante pour une gamme d'angle comprise entre $24-33 \pm 0,5^\circ$ avec une incertitude d'environ 10% sur la mesure de I . Le protocole rhéologique permet donc de prédire la variation de I indépendamment de l'épaisseur de la couche en écoulement, par une seule variable fixée par l'angle d'inclinaison de la boîte.

En fixant l'angle, on fixe la valeur de I et à partir de l'équation (16) on peut représenter l'évolution du coefficient de friction μ en fonction du nombre inertiel (Figure 10). Les paramètres rhéologiques prédits par le modèle théorique peuvent être identifiés pour le milieu granulaire utilisé, formé de billes de verres de diamètre $d = 250 \pm 50 \mu m$ et de densité $= 2500 kg/m^3$. La figure 10 (à droite) en échelle logarithmique met clairement en évidence les constantes dépendantes du matériau. Le coefficient de friction statique $\mu_s = 0,42$ associé à l'angle de 24° pour lequel le matériau commence à s'écouler débute à une faible valeur de $I = 10^{-4}$. Le coefficient de friction tend vers une valeur asymptotique $\mu_f = 0,68$ où $I \approx 0,2$.

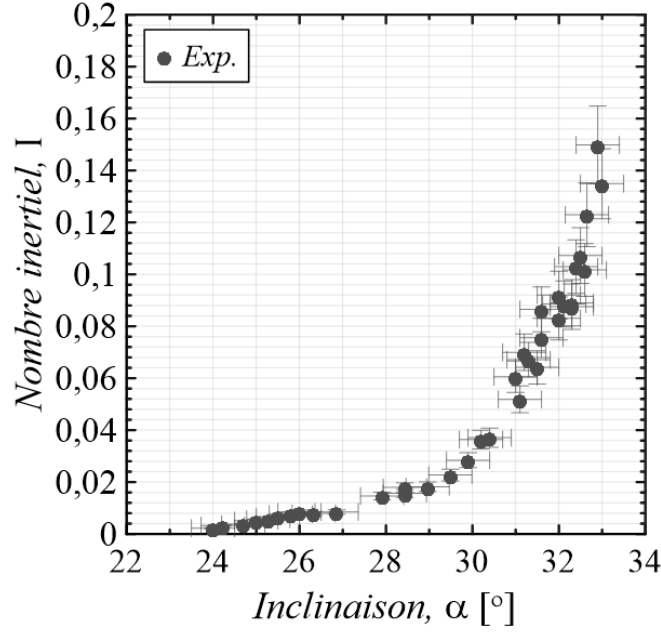


FIGURE 9 – Evolution du nombre inertiel I en fonction de l'angle d'inclinaison α

On identifie également $I_0 = 0,02$ ($I_0 = \frac{\mu_s + \mu_f}{2}$) constante caractéristique du matériau granulaire.

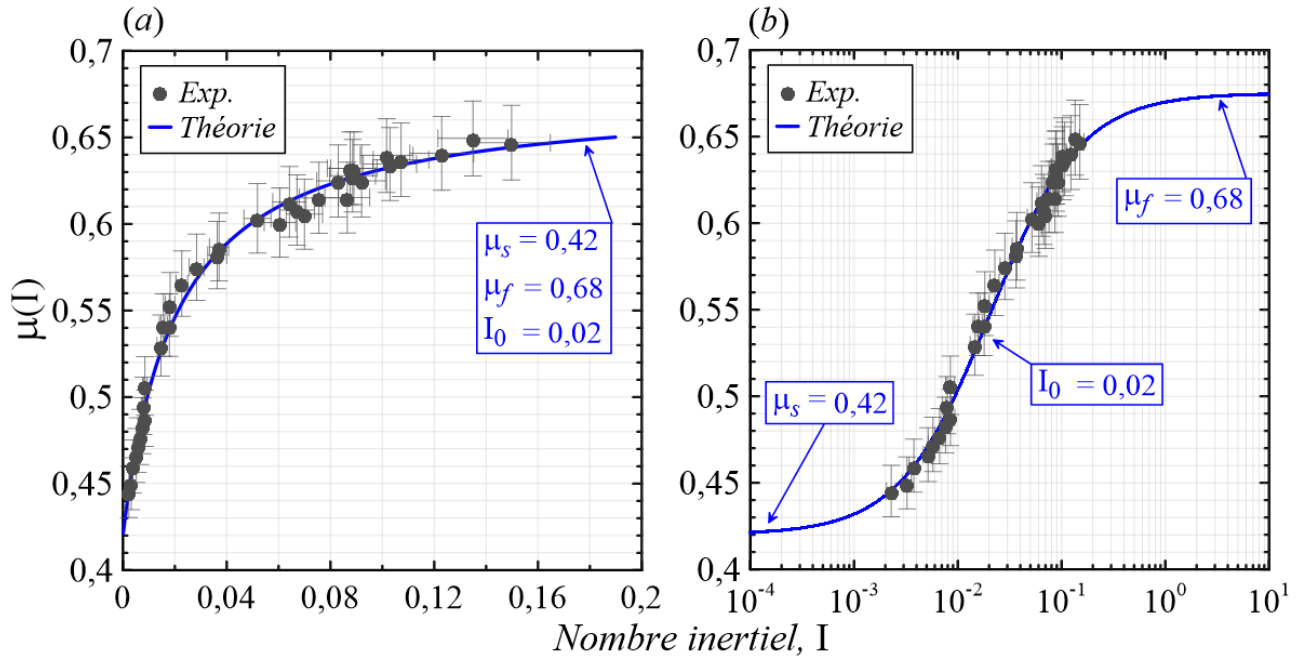


FIGURE 10 – Evolution du coefficient de friction μ en fonction du nombre inertiel I (à gauche en linéaire et à droite en échelle log-log).

Le comportement typique du modèle $\mu(I)$ [2] prévu pour des écoulements denses secs est bien mis en évidence sur la Fig . Le nombre inertiel I détermine les différents régimes

d'écoulements :

- régime quasi-statique pour $I < 10^{-3}$
- régime dense pour I compris entre 10^{-3} et 0,05
- régime collisionnel pour $I > 0,05$

La question est maintenant de savoir comment la coefficient de friction influence les distances d'étalement d'une colonne granulaire.

4.2 Etalement axisymétrique de colonnes granulaire

Les résultats de cette section ont été réalisés pour des tubes de rayon $r_i = 1,3 ; 2,8$ et $4,8$ cm et de hauteur $h_i = 3-20$ cm remplis des mêmes billes de verres de diamètre $d = 250 \pm 50 \mu m$ et masse volumique $\rho = 2500 kg/m^3$ que celles utilisées pour l'écoulement plan. Des feuilles avec des grains collés dessus forment le substrat sur lequel les colonnes de grains s'effondrent. La mesure de l'étalement des colonnes sous leur propre poids, donné par les rayons finaux est étudié en fonction du rapport d'aspect $a = \frac{h_i}{r_i}$.

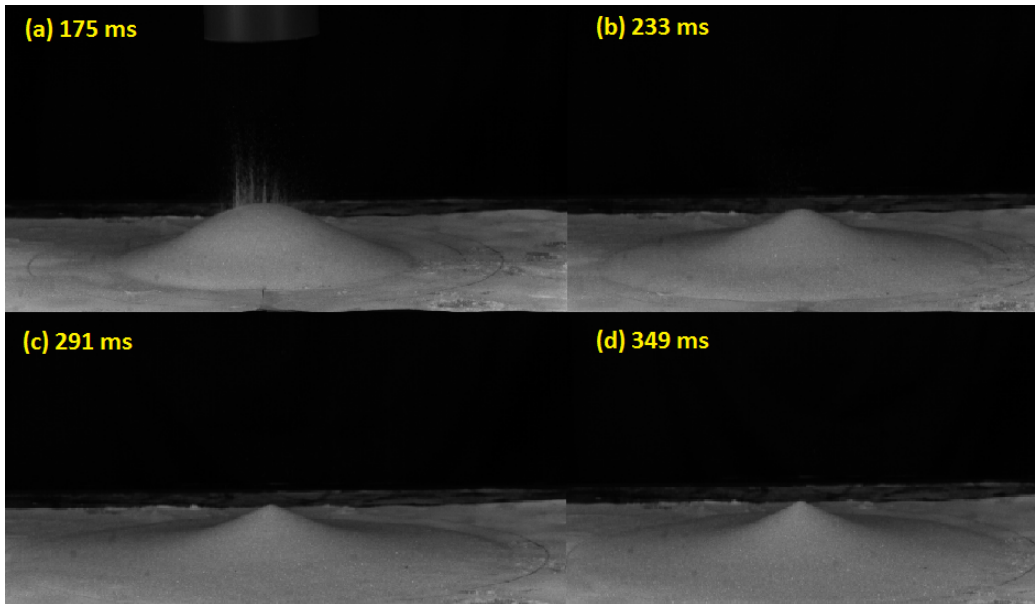


FIGURE 11 – Evolution de l'écoulement à différents temps avec un rapport d'aspect $a = 3,6$.

En reportant sur un graphe la variation du rayon d'étalement adimensionné par le rayon initial r_i en fonction du rapport d'aspect a pour tous les effondrements (Figure 12), on a une évolution qui dépend d'un rapport d'aspect critique a_c . $\frac{\Delta r}{r_i} = 1,4a$ pour des valeurs d'aspect $a < a_c = 1,1$ et $\frac{\Delta r}{r_i} = 1,6a^{\frac{1}{2}}$ pour $a > a_c$.

On voit bien le comportement typique présent dans la littérature [3], mais la transition s'effectue à plus faible a_c (1,1 au lieu de 1,4). Riber et al. [6] ont mis en évidence un phénomène subtil sur l'étalement des colonnes granulaires. Ils ont montré numériquement que l'étalement pouvait être fonction du coefficient de friction à la puissance -1 (μ^{-1}) en utilisant des arguments énergétiques. En égalisant les énergies potentielle et cinétique associées à la distance mise par les grains pour atteindre la distance finale ils trouvent :

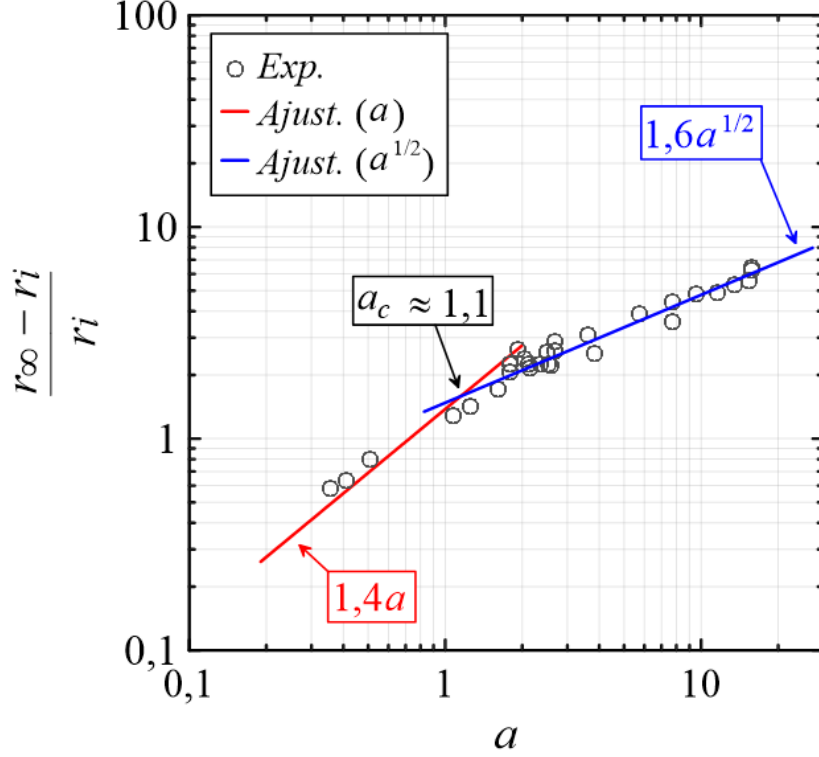


FIGURE 12 – Distance d'étalement adimensionnée fonction du rapport d'aspect a (échelle log-log).

$$mgh_i = \mu mg \Delta r \quad (20)$$

avec $\Delta r = r_f - r_i$ la distance d'étalement. Ce qui donne

$$\frac{a}{\mu} = \frac{r_f - r_i}{r_i} \quad (21)$$

Ils ont considéré le cas particulier $a = a_c$ où la forme du dépôt final (Figure 13) d'un régime statique donne $\mu = \tan(\alpha_r) = \frac{h_i}{r_f}$ et $\frac{a}{\mu} - 1 = \frac{r_f - r_i}{r_i}$ avec α_r l'angle de repos. Afin de vérifier expérimentalement ces prédictions, on a réalisé l'effondrement très lentement pour rester dans un écoulement proche du régime quasi-statique, au rapport d'aspect critique $a_c = 1,1$. On obtient un dépôt en forme de pyramide avec un angle $\alpha_r = 26^\circ$ (Figure 13).

A partir de l'équation (21) pour le cas $a = a_c$ on trouve un coefficient de friction statique $\mu_s = 0,45$. On retrouve une valeur du coefficient μ_s proche de celle obtenue pour l'écoulement sur plan incliné $\mu_s = 0,42$. Pour savoir dans quelle mesure le coefficient de friction influence l'étalement, une analyse plus fine a été faite pour des rapport d'aspect $a > a_c$. La figure x montre que pour des mêmes rapport d'aspect a avec des rayons différents respectivement 1,3; 2,8 et 4,8 cm, l'étalement augmente avec a à la puissance $\frac{2}{3}$ comme sur les résultats numériques [6], et non plus à la puissance un demi vu précédemment (Figure 12).

Nous avons également regardé comment varie le temps d'effondrements en fonction des rapports d'aspect. A partir des vidéos obtenues avec la caméra rapide, nous avons déterminé

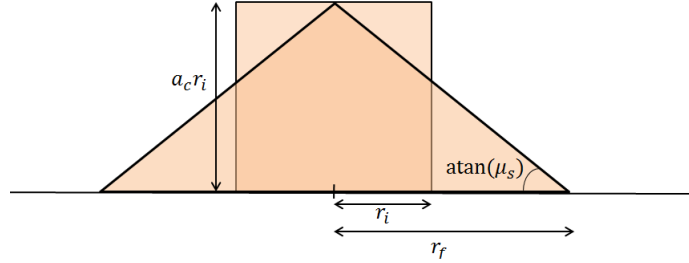
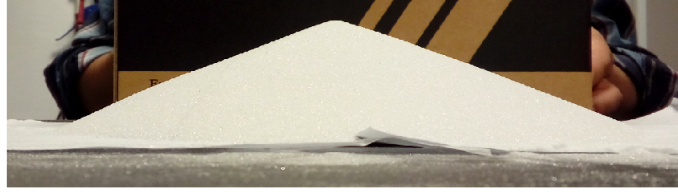


FIGURE 13 – Profil final d’effondrement granulaire avec un rapport d’aspect $a = a_c$.

le temps t_∞ auquel le profil du front d’écoulement de la colonne s’arrête. En utilisant les arguments dimensionnels de Lube et al. [3] t_∞ est mis sous la forme suivante :

$$t_\infty = \left(\frac{r_i}{g}\right)^{\frac{1}{2}} G(a) \quad (22)$$

pour un ensemble de fonctions $G(a)$ et g la gravité.

$$G(a) = K a^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

Sur la Figure X les données récupérées nous donnent une fonction $G(a) = 4,2a^{\frac{1}{2}}$ indépendante du rayon initial r_i pour toute la gamme de a .

En adimensionnant le temps t_∞ par rapport à la hauteur initiale h_i on trouve une fonction $G(a) = K$ avec $K = 4,2$. L’évolution du temps t_∞ reste constant pour chaque rapport a (Figure 15). Les courbes de temps adimensionnés suivent les mêmes tendance que celles de Lube et al. mais la valeur de la constante K est légèrement supérieure (4,2 ici contre 3,3). Les temps mis par les grains du front pour atteindre leur position verticale finale semble indépendant du rapport de taille contrairement au temps mis pour se déplacer selon l’axe du rayon avec une dépendance en $a^{\frac{1}{2}}$. Cela indique que les effets de friction entre grains semblent jouer un rôle uniquement dans les derniers instants.

On peut également tracer le profil d’étalement adimensionné à différents temps de l’effondrement. La Figure en annexe montre le profil d’effondrement $h(r,t)$ adimensionné par le rayon initial r_i . Il serait intéressant de regarder numériquement à partir du profil $h(r,t)$ et des paramètres rhéologiques (μ_s , μ_f et I_0) trouvés expérimentalement dans quelle mesure les distances d’étalements obtenues coïncident.

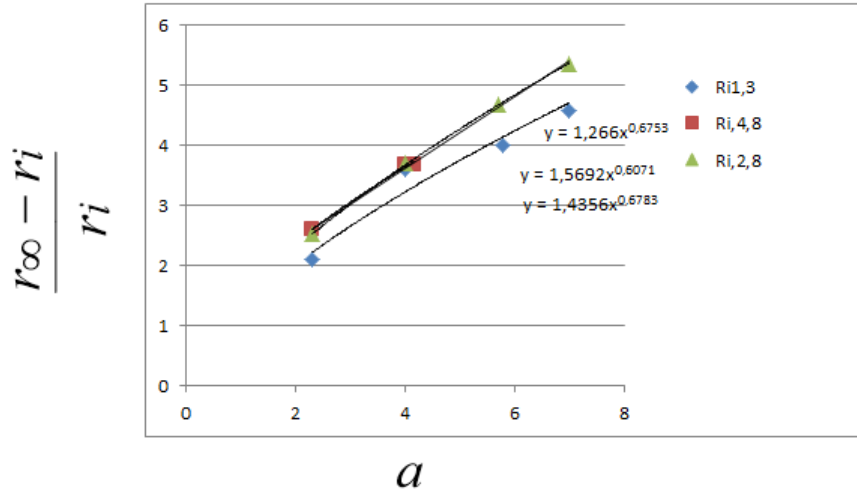


FIGURE 14 – Distance d'étalement adimensionnée pour une gamme de $a > a_c = 1,1$ réalisée pour différents rayons initiaux $r_i = 1,3; 2,8; \text{ et } 4,8$ cm.

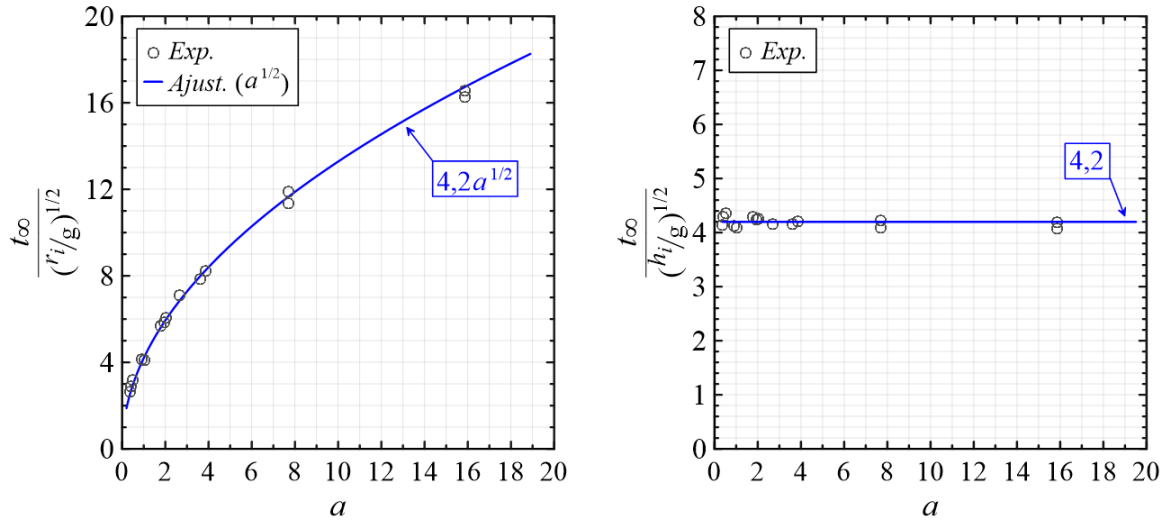


FIGURE 15 – Temps adimensionné en fonction du rayon initial r_i associé au temps mis par le front pour s'arrêter à différents rapports d'aspects a pour des rayons initiaux $r_i = 1,3; 2,8; \text{ et } 4,8$ cm (à gauche adimensionné par le rayon initial et à droite par la hauteur initiale.)

Conclusions et perspectives

La modélisation a été étendue à des cas de chute de colonnes granulaires en trois dimensions, à une distance finie du plan d'impact. Riber et al. ont défini un nouveau nombre adimensionnel a_r égal au rapport de la taille initiale de la colonne h_i et de sa distance h_r du substrat sur un rayon initial r_i :

$$a_r = \frac{h_i + h_r}{r_i} \quad (24)$$

Il a été observé que la distance parcourue par le milieu granulaire suit une courbe en loi de puissance (proche de 0,54) en fonction du rapport a_r lorsque la colonne est assez élancée. Pour des mêmes valeurs de a_r la colonne contenant le plus de grains s'étale sur une plus grande distance. Ce nouveau modèle a été simulé en 3D pour des chutes de colonnes de poudre sur un substrat liquide dense (dont la densité est environ dix fois supérieure à celle des grains) à l'aide de la rhéologie $\mu(I)$ pour la description des différents régimes d'écoulements. La surface liquide semble influencer la distance d'étalement.

La littérature montre que l'étalement d'une colonne granulaire initialement au contact d'un substrat solide [3,4] (problème de « dam-break », écoulement de barrage) présente une dynamique universelle, à deux paramètres, pour une gamme étendue de types de grains : le profil d'étalement fonction du temps peut être ainsi déduit d'une courbe maîtresse. Nous voudrions donc démontrer expérimentalement que cette propriété s'étend (ou non) à une chute (où la colonne est positionnée initialement à une hauteur h au-dessus du substrat) sur un solide, puis un liquide. Pour cela, des essais modèles seront réalisés en variant des paramètres tels que la hauteur de chute, la géométrie du substrat, la nature des frictions grains/substrats, etc. Le suivi de l'étalement (avancée du front de matière, géométrie de la colonne) se fera par des techniques d'imagerie rapide et le traitement numérique des données ainsi récupérées. On aimerait retrouver un certains nombre de phénomènes prédits par les simulations. Cela validerait le modèle de ces expériences qui restent à réaliser. A l'heure actuelle la loi $\mu(I)$ est validée pour des effondrements de colonnes. On cherche donc à savoir si $\mu(I)$ peut décrire la chute sur substrat solide et liquide.

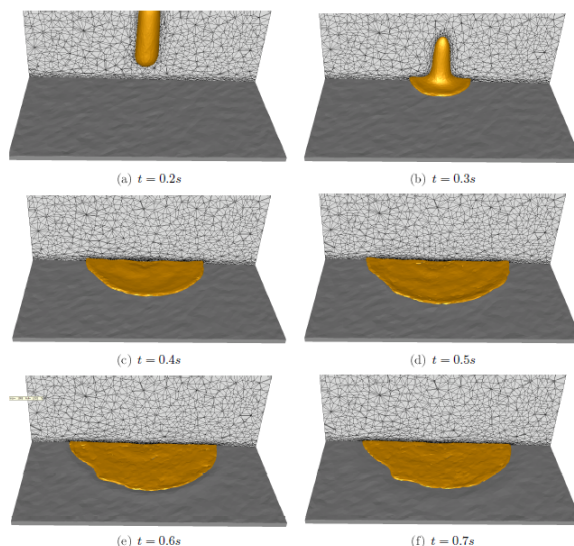


FIGURE 16 – Chute et étalement d'une colonne granulaire sur métal liquide [6]

Annexe

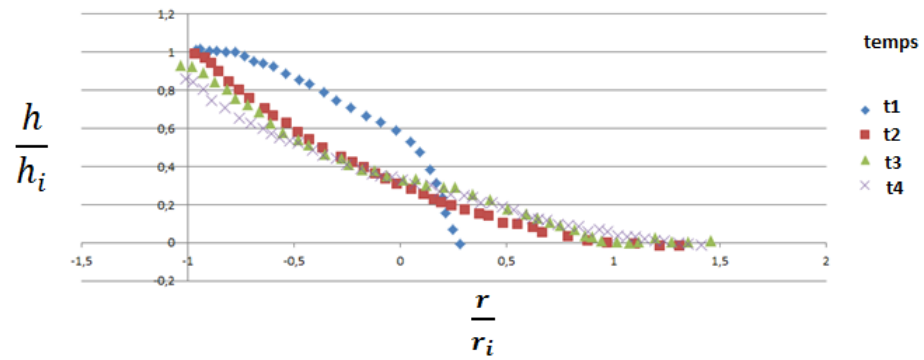


FIGURE 17 – Profil d'étalement expérimentale adimensionné pour un rayon initial $r - i = 4,8$ cm et $a = 3,6$.

Références

- [1] B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen, Les milieux granulaires : entre fluide et solide, EDP Sciences/CNRS Editions, chap 6 - 226, (2011)
- [2] P. Jop, Y. Forterre, O. Pouliquen, A constitutive law for dense granular flows, Nature 441, 727-730 (2006)
- [3] G. Lube, H. Huppert, R. Stephen, J. Sparks, M. Hallworth, Axisymmetric collapses of granular columns, J. Fluid Mech, vol.508, 175–199 (2004)
- [4] E. Lajeunesse, A. Mangeney-Castelnau, J. P. Vilotte, Spreading of a granular mass on a horizontal plane, Physics of Fluids, vol. 16, 7 (2004)
- [5] P. Jop, Y. Forterre, O. Pouliquen, Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology, Volume 541, 167-192 (2005)
- [6] S. Riber, Thèse de doctorat de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres PSL Research University préparée à MINES ParisTech, Sophia-Antipolis, France (2017)