

Geometrická optika v Cabri Geometrii

projekt v rámci modulu P-MAT

RNDr. Tomáš Mikulenk

Gymnázium Kroměříž

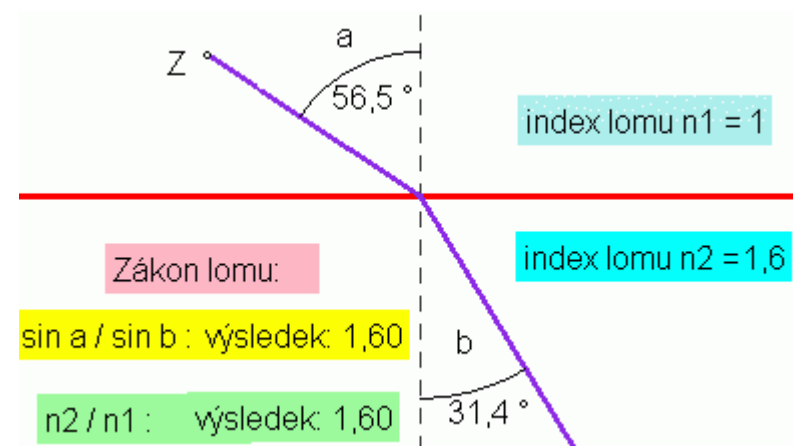
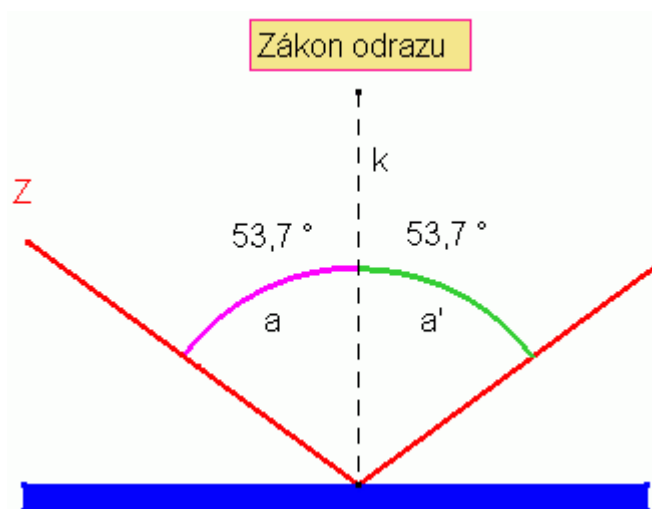
červen 2004

Jako učitel matematiky, fyziky a výpočetní techniky jsem po absolvování kurzu Cabri Geometrie v duchu zajásal, protože tento program nabízí originální uplatnění mezipředmětových vztahů ve všech výše zmíněných oborech. Oblast geometrické optiky jsem zvolil záměrně, neboť s jejími základy se podle současných studijních plánů setkávají žáci 7. a 9. tříd ZŠ (sekunda a kvarta osmiletého studia víceletých gymnáziích) a složitější partie se probírají ve 4. ročníku (resp. v oktávě) gymnázia. Ukázky jsou provedeny ve verzi *Cabri Geometrie II Plus*, která je oproti verzi *CG II* poněkud komfortnější zejména v možnostech pojmenování objektů a v širším výběru barev. Na druhé straně jsem nebyl úspěšný se snahou zakomponovat obrázky vytvořené v *CG II Plus* do webových stránek, našel jsem pouze podporu CabriJava pro verzi *CG II*. Součástí tohoto projektu jsou soubory, jejichž seznam je uveden na konci tohoto dokumentu. Za veškeré připomínky, zlepšovací návrhy a náměty předem děkuji a vítám je na adrese mikulenk@centrum.cz.

1. Zákon odrazu

patří k nejjednodušším demonstracím v Cabri Geometrii. Pohybem bodu Z, který představuje zdroj dopadajícího paprsku, měníme úhel dopadu α ; sledujeme jeho velikost a současně velikost úhlu odrazu α' .

Konstrukce: Odražený paprsek je sestrojen v osové souměrnosti podle kolmice k rozhraní. Omezení pohybu bodu Z na úhly dopadu 0° až 90° - viz následující příklad.

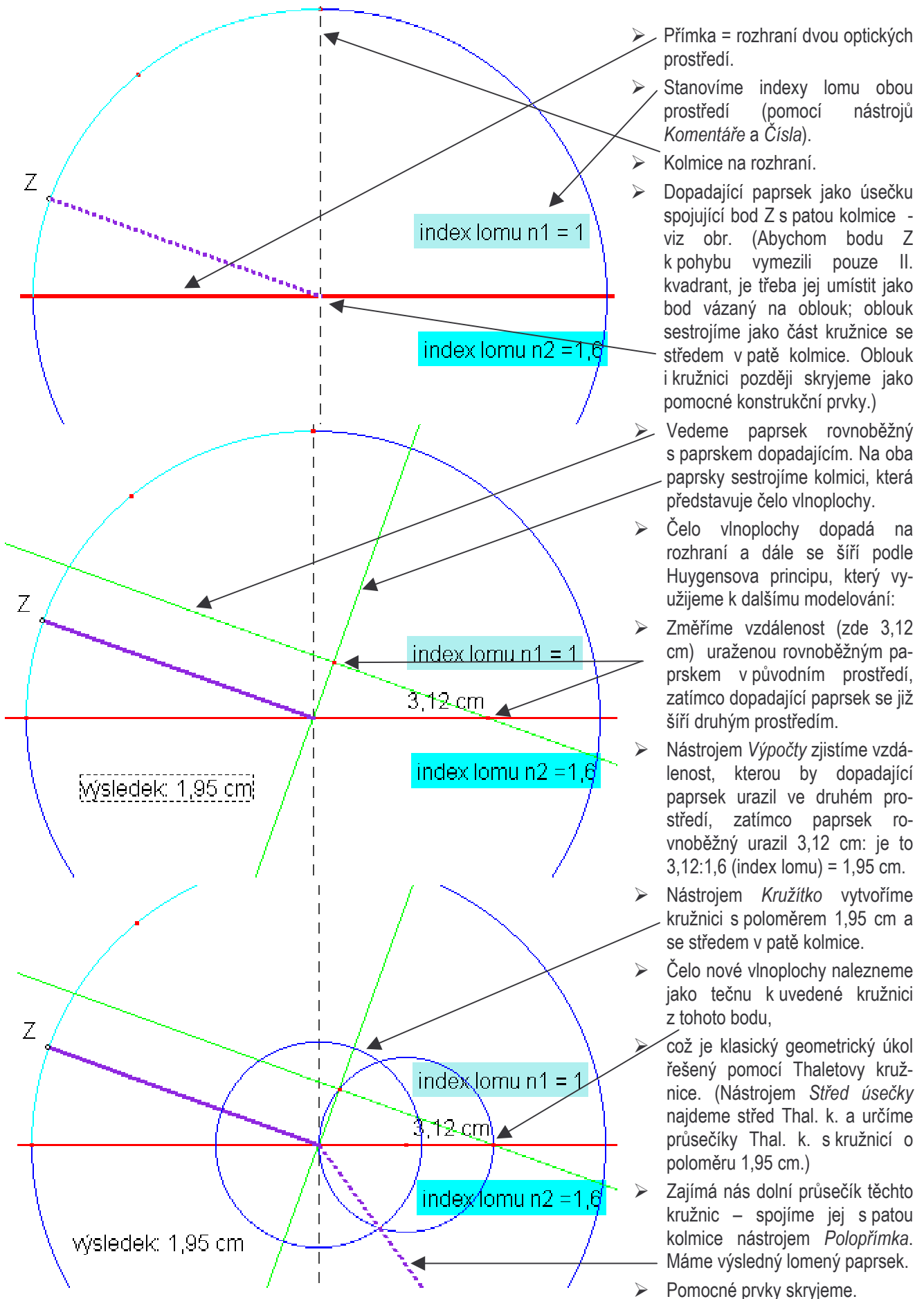


2. Zákon lomu

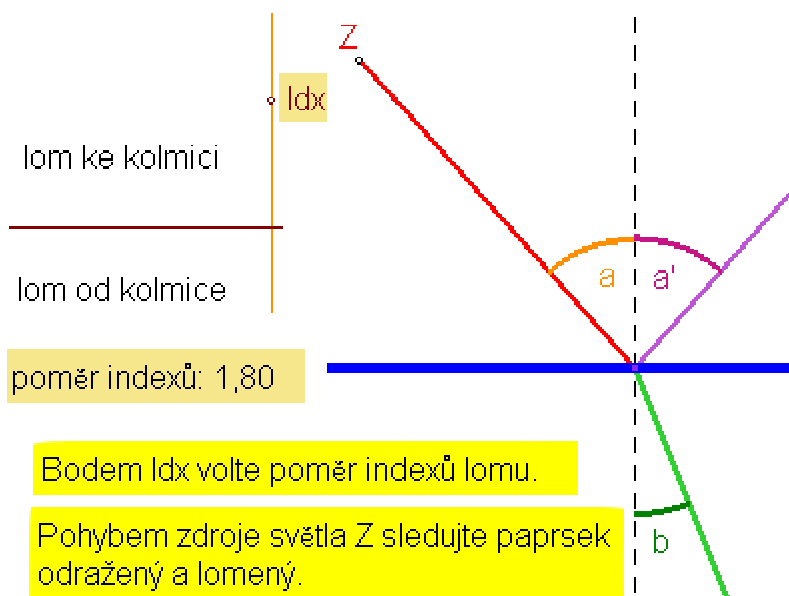
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Pohybem zdroje Z měníme úhel dopadu α a sledujeme současnou změnu úhlu lomu. Aktivací nástroje čísla lze měnit index lomu n_2 a nastavit tak lom ke kolmici případně od kolmice.

Pro uživatele, kteří s programem CG teprve začínají, je zde nastíněna jedna z možností konstrukce lomeného paprsku:



- Přímka = rozhraní dvou optických prostředí.
- Stanovíme indexy lomu obou prostředí (pomocí nástrojů *Komentáře* a *Číslo*).
- Kolmice na rozhraní.
- Dopadající paprsek jako úsečku spojující bod Z s patou kolmice - viz obr. (Abychom bodu Z k pohybu vymezili pouze II. kvadrant, je třeba jej umístit jako bod vázaný na oblouk; oblouk sestrojíme jako část kružnice se středem v patě kolmice. Oblouk i kružnici později skryjeme jako pomocné konstrukční prvky.)
- Vedeme paprsek rovnoběžný s paprskem dopadajícím. Na oba paprsky sestrojíme kolmici, která představuje čelo vlnoplochy.
- Čelo vlnoplochy dopadá na rozhraní a dále se šíří podle Huygensova principu, který využijeme k dalšímu modelování:
- Změříme vzdálenost (zde 3,12 cm) uraženou rovnoběžným paprskem v původním prostředí, zatímco dopadající paprsek se již šíří druhým prostředím.
- Nástrojem *Výpočty* zjistíme vzdálenost, kterou by dopadající paprsek urazil ve druhém prostředí, zatímco paprsek rovnoběžný urazil 3,12 cm: je to $3,12:1,6$ (index lomu) = 1,95 cm.
- Nástrojem *Kružítka* vytvoříme kružnici s poloměrem 1,95 cm a se středem v patě kolmice.
- Čelo nové vlnoplochy nalezneme jako tečnu k uvedené kružnici z tohoto bodu,
- což je klasický geometrický úkol řešený pomocí Thaletovy kružnice. (Nástrojem *Střed úsečky* najdeme střed Thal. k. a určíme průsečíky Thal. k. s kružnicí o poloměru 1,95 cm.)
- Zajímá nás dolní průsečík těchto kružnic – spojíme jej s patou kolmice nástrojem *Polopřímka*. Máme výsledný lomený paprsek.
- Pomocné prvky skryjeme.

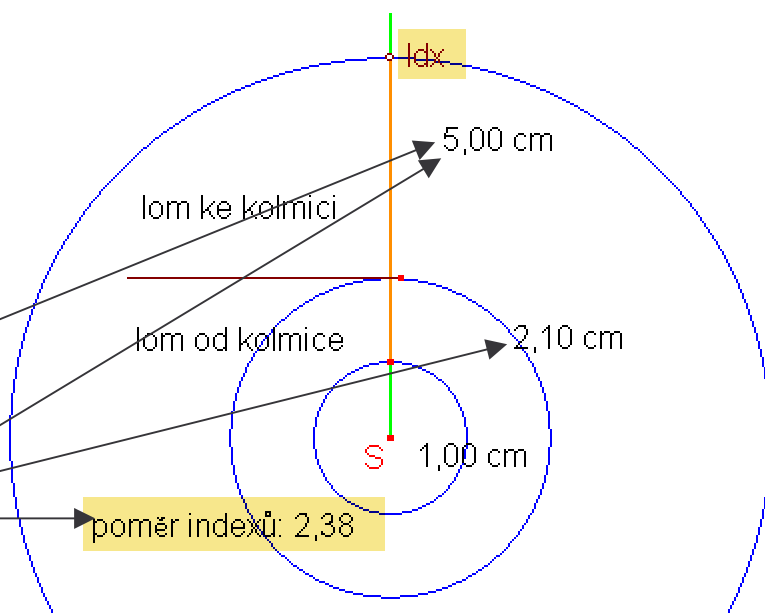


3. Odraz a lom

je spojením obou předchozích demonstrací: fialová polopřímka modeluje paprsek odražený, zelená paprsek lomený. Posouváním bodu ldx po svislé úsečce snadno nastavíme požadovaný poměr indexů lomu, abychom viděli *lom ke kolmici* nebo *lom od kolmice*. Studenti mají příležitost přemýšlet, za jakých podmínek nastane *totální reflexe*.

Kromě postupů použitých v obou předchozích úlohách je zde navíc možnost plynulé změny indexu lomu n_2 . Ukážeme si její konstrukci.

- Sestrojíme 3 soustředné kružnice (poloměry 1,0; 2,1 a 5,0 cm). Do jejich středu S umístíme počátek polopřímky.
- Na polopřímku umístíme úsečku spojující vnitřní a vnější kružnici (poloměry 1 a 5 cm), na ni bod ldx ; pohyb tohoto bodu tak bude omezen pouze na tuto úsečku.
- Nástrojem *Vzdálenost a délka* určíme vzdálenost bodu ldx od bodu S.
- Nástrojem *Výpočty* stanovíme poměr indexů lomu: klepneme myši na toto číslo, vydělíme poloměrem prostřední kružnice a vložíme do obrázku.
- Pohybem bodu ldx po úsečce dosáhneme hodnot od 2,38 (přibližně index lomu diamantu: 2,42) do 0,48 (převrácená hodnota indexu lomu diamantu je asi 0,41). Tím je vysvětlena volba hodnot poloměrů všech tří kružnic.
- Pomocné konstrukční prvky (kružnice s číselnými údaji) skryjeme.



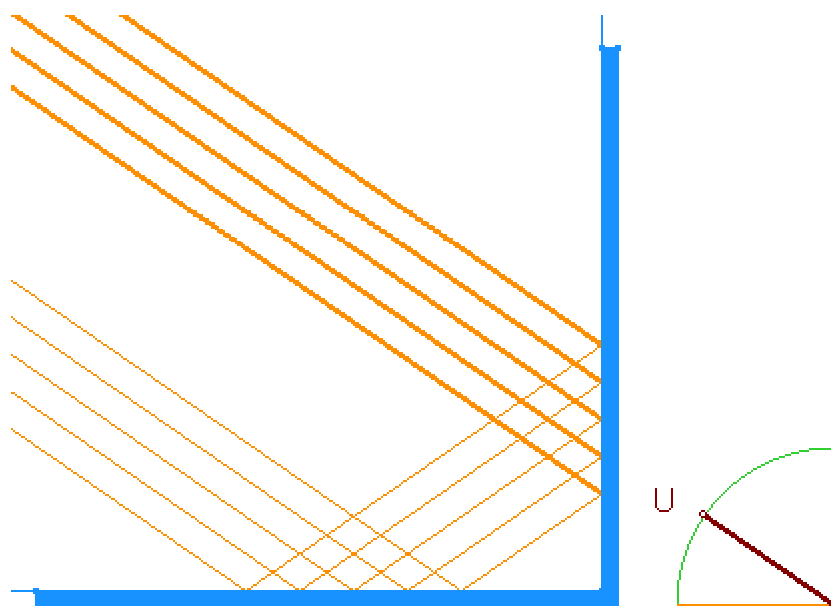
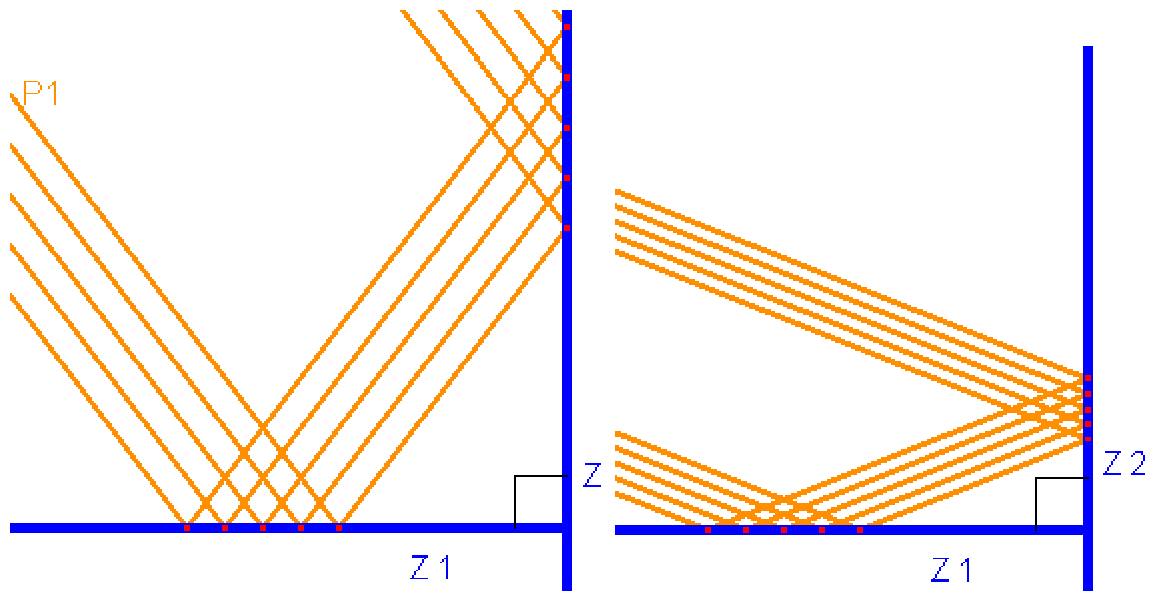
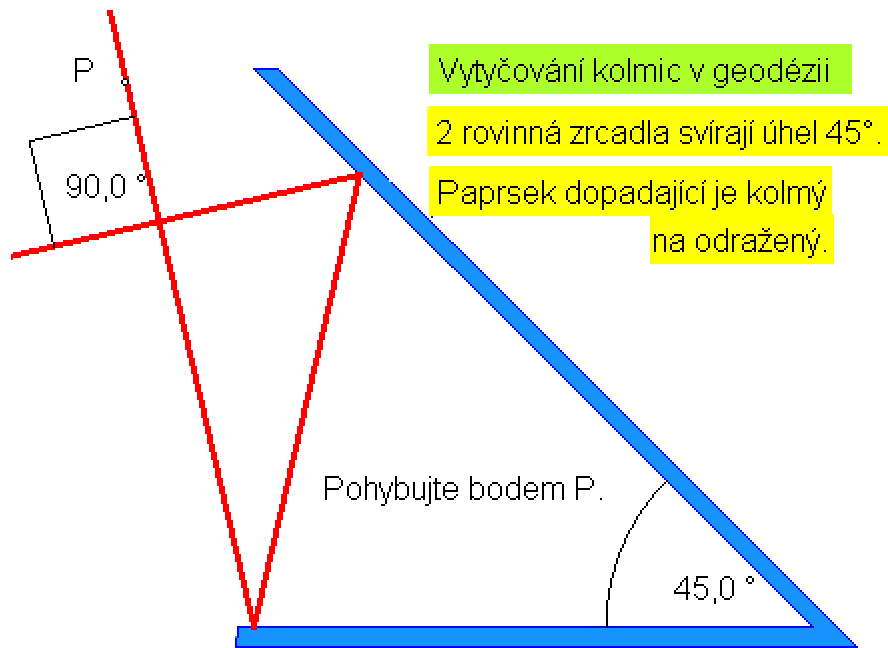
4. Vytyčování kolmic

Model odrazu světelného paprsku od dvou rovinných zrcátek, jež spolu svírají úhel 45° umožňuje pohybovat dopadajícím paprskem (bod P) a sledovat jeho kolmost na paprsek odražený (viz horní obrázek na straně 4).

5. Rovnoběžné svazky paprsků

„Dvě vertikální zrcadla svírají spolu úhel 90° . Ukažte, že horizontální svazek světla bude mít po odrazu na obou zrcadlech směr rovnoběžný s původním směrem.“ (úloha č. 4 z vysokoškolské učebnice *Fuka, J., Havelka, B.: Optika, SPN, 1961, str. 91*)

V Cabri Geometrii vyřešíme tento úkol názorně – konstrukcí modelu svazku paprsků. První variantu zachycuje dvojice obrázků uprostřed strany 4: sklon dopadajícího svazku nastavujeme tažením jeho horní polopřímky (P1), svazek dopadá do stále stejného místa.



Druhou variantu znázorňuje dolní obrázek na straně 4: princip je stejný, jen sklon dopadajícího svazku zde nastavujeme bodem U na pomocné úsečce. Mění se jak úhel dopadu tak i jeho místo.

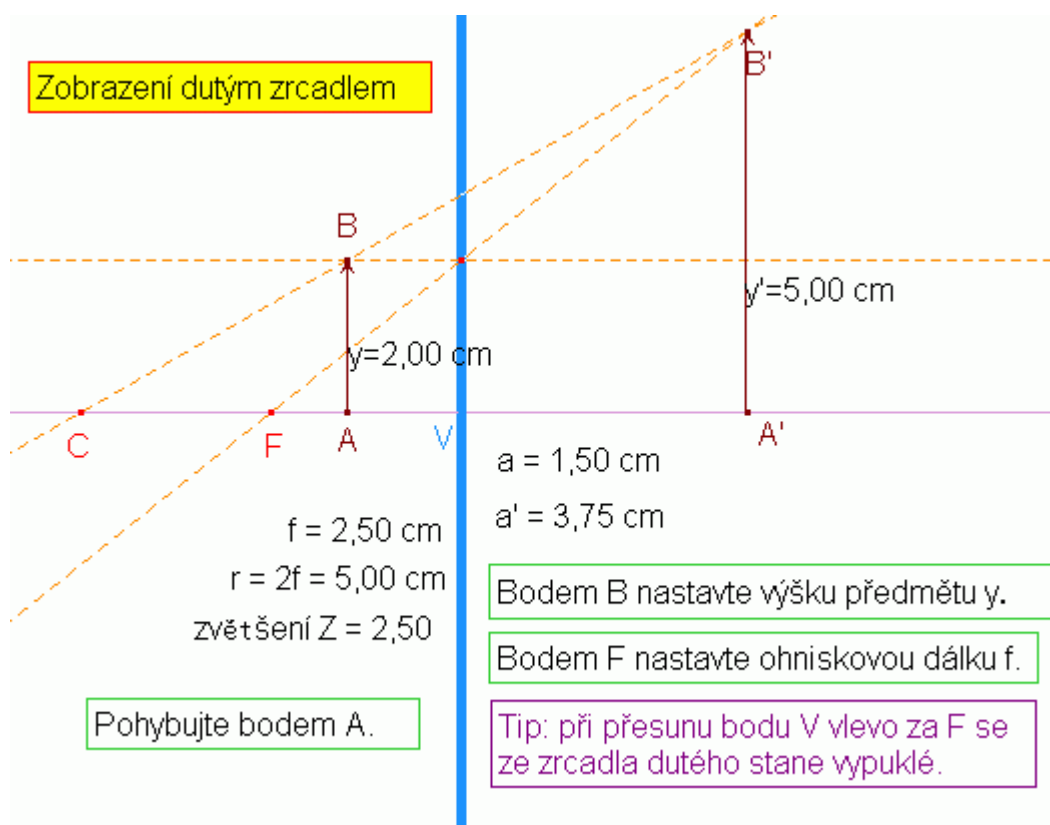
6. Zobrazení dutým zrcadlem

7. Zobrazení vypuklým zrcadlem

K sestrojení obrazu vytvořeného kulovým zrcadlem dutým a vypuklým se využívá tři význačných paprsků:

- (1) paprsku rovnoběžného s optickou osou, který po odrazu směřuje do ohniska,
- (2) paprsku jdoucího ohniskem, který je po odrazu od zrcadla rovnoběžný s optickou osou a
- (3) paprsku jdoucího středem křivosti zrcadla, který po odrazu nemění svůj směr.

V CG se pozice a velikost obrazu vytvořeného podle uvedených pravidel dynamicky mění v závislosti na poloze předmětu, jeho výšce a ohniskové vzdálenosti zrcadla.



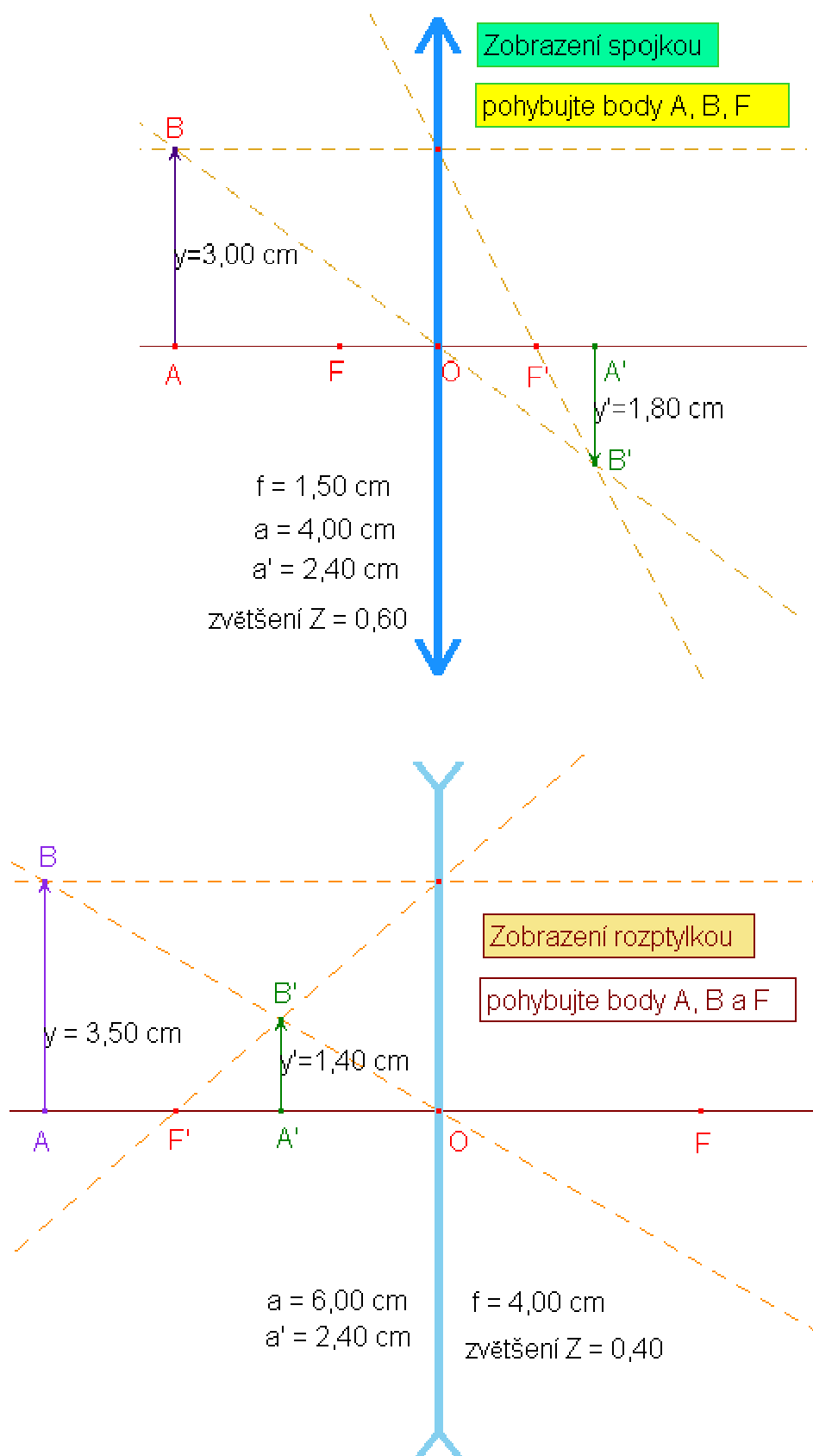
8. Zobrazení spojkou

9. Zobrazení rozptylkou

Tři význačných paprsků využijeme rovněž ke konstrukci obrazu, který vytvářejí čočky. Jsou to:

- (1) paprsek rovnoběžný s optickou osou, který se láme do obrazového ohniska,
- (2) paprsek jdoucí předměťovým ohniskem, který je po průchodu čočkou rovnoběžný s optickou osou a
- (3) paprsek jdoucí optickým středem čočky, který nemění svůj směr.

Pomocí těchto dynamických modelů zobrazování zrcadly a čočkami si mohou žáci lépe uvědomit zákonitosti, jimiž se paprsky jdoucí optickou soustavou řídí. Pro učitele jsou užitečnou pomůckou při demonstraci jevu anebo k rychlé přípravě úloh ke zkoušení a testům.

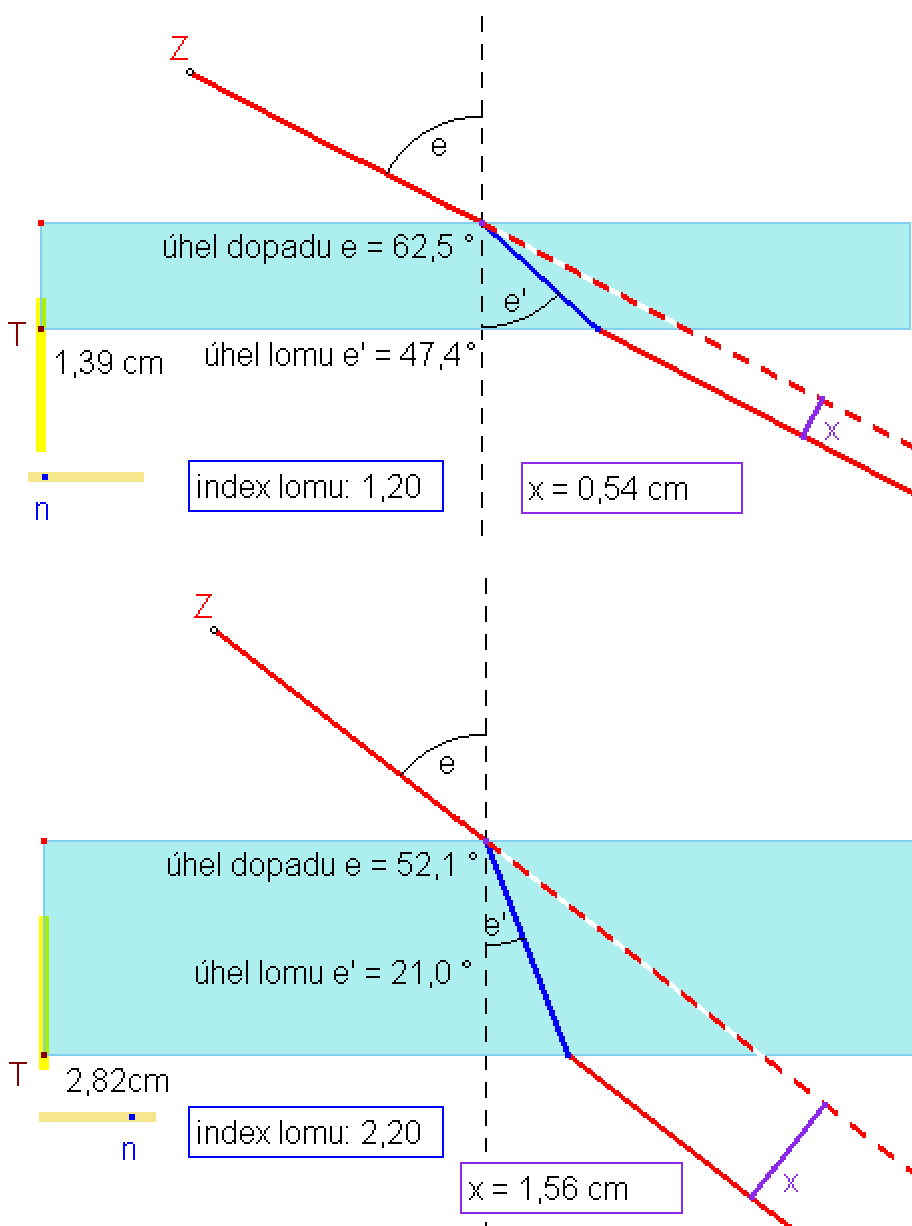


10. Průchod paprsku planparalelní deskou

Při průchodu paprsku skleněnou destičkou, která je velmi tenká a jejíž stěny jsou rovnoběžné (planparalelní deska), se světelný paprsek láme dvakrát: na prvním rozhraní *ke kolmici*, na druhém *od kolmice*. Paprsek prošlý je se svým původním směrem rovnoběžný avšak posunut o malý úsek x . Velikost tohoto posunutí závisí na tloušťce desky d , úhlu dopadu e a indexu lomu desky n , přičemž lze odvodit vztah:

$$x = d \cdot \frac{\sin(e - e')}{\cos e'}$$

Model popsané situace vytvořený v Cabri Geometrii se tak stává velmi názornou pomůckou: bodem **Z** nastavujeme úhel dopadu e , bodem **T** měníme tloušťku desky d , bodem **n** volíme index lomu a sledujeme výslednou hodnotu posunu x . (viz následující obrázky)



11. Průchod paprsku optickým klínem

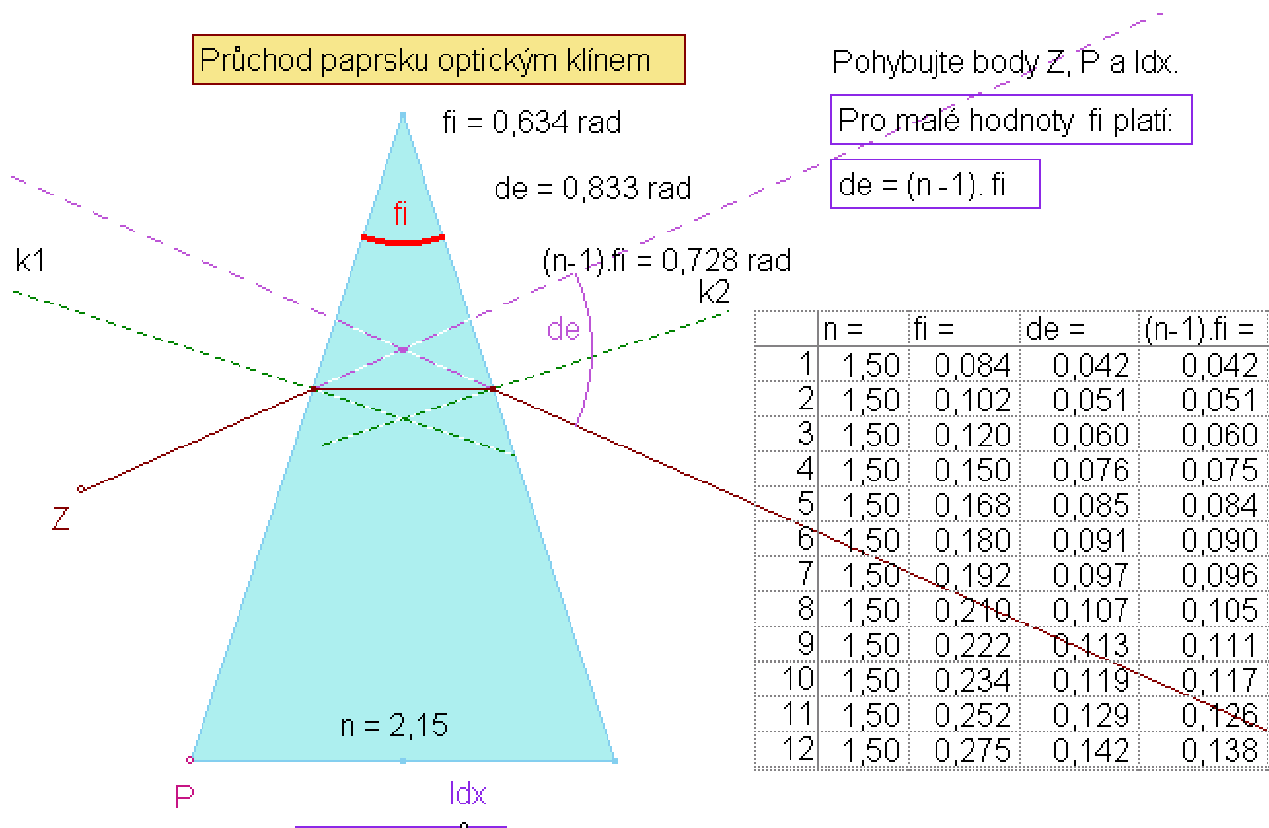
Uvažujme trojboký hranol z průhledného materiálu o indexu lomu n , jehož dvě boční stěny – lámavé plochy – spolu svírají úhel φ (tzv. lámavý úhel hranolu). Dopadající paprsek projde lomem na obou lámavých plochách a tento lomený paprsek svírá se svým původním směrem úhel δ (deviace, odchylka). Je-li úhel φ dostatečně malý ($\sin\varphi = \text{tg}\varphi = \varphi$ v radiánech), nazýváme hranol optickým klínem a pro jeho deviaci lze geometrickou cestou odvodit vztah:

$$\delta = (n - 1) \cdot \varphi \quad \star$$

Následující obrázek zachycuje model průchodu paprsku optickým hranolem vytvořený v Cabri Geometrii s možnostmi nastavování úhlu dopadu (bodem **Z**), velikosti lámavého úhlu hranolu φ (bodem **P**) a indexu lomu materiálu, z něhož je hranol vyroben (bodem **Idx**).

Provedeme „experimentální“ ověření platnosti vztahu \star tím, že pro určitou hodnotu indexu lomu (např. $n = 1,50 = \text{sklo}$) budeme měnit velikost lámavého úhlu φ (všechny úhly měřeny v radiánech) a do tabulky zaznamenávat hodnoty levé a pravé strany uvedené rovnice.

V tabulce „naměřených“ hodnot vidíme, že pro malé úhly φ platí \star docela přesně, zatímco s rostoucí hodnotou lámavého úhlu přesnost uvedeného vztahu postupně klesá (v předposledním a posledním sloupci tabulky se „naměřené“ hodnoty stále více a více rozcházejí). Podobnou tabulku „naměřených“ hodnot můžeme sestavit pro jiné hodnoty indexu lomu a modelově tak měnit materiál optického hranolu – od vzduchu ($n=1$) přes vodu a sklo až např. po diamant ($n=2,4$) – viz obrázek a tabulka na straně 9.

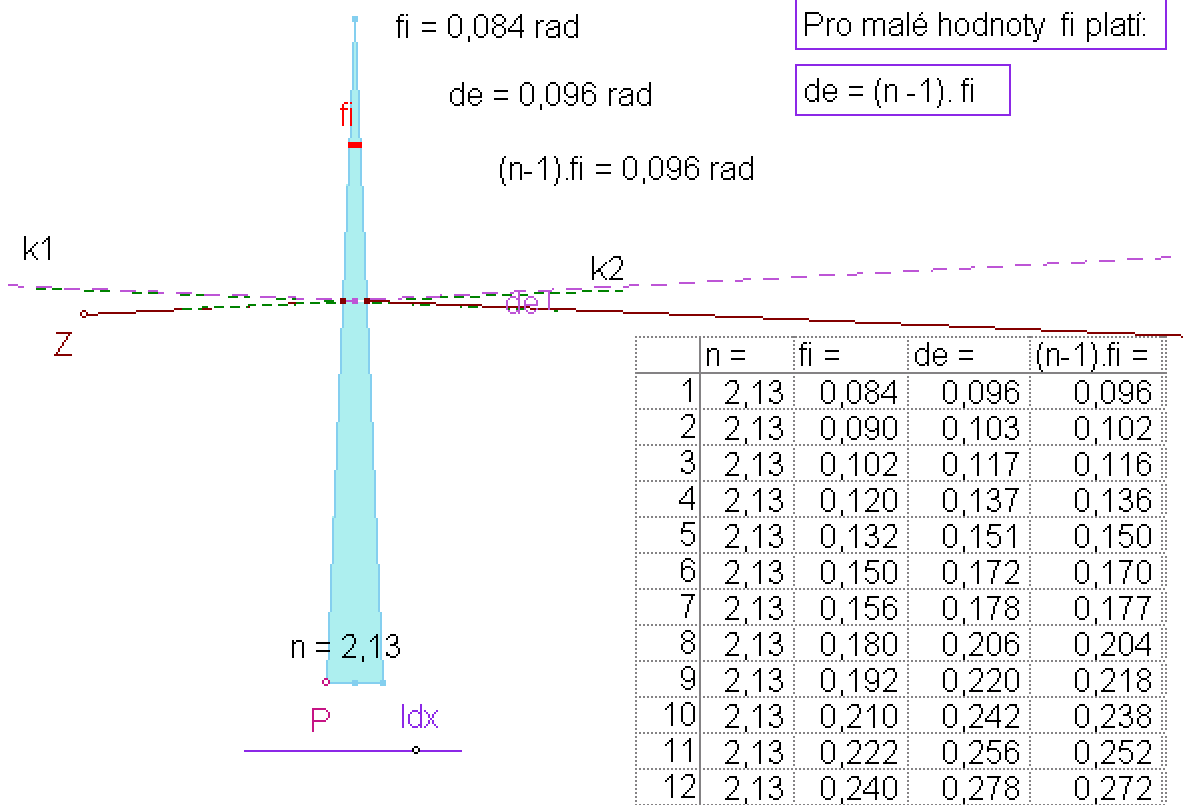


Průchod paprsku optickým klínem

Pohybuje body Z, P a I_{dx}.

Pro malé hodnoty f_i platí:

$$de = (n - 1) \cdot f_i$$



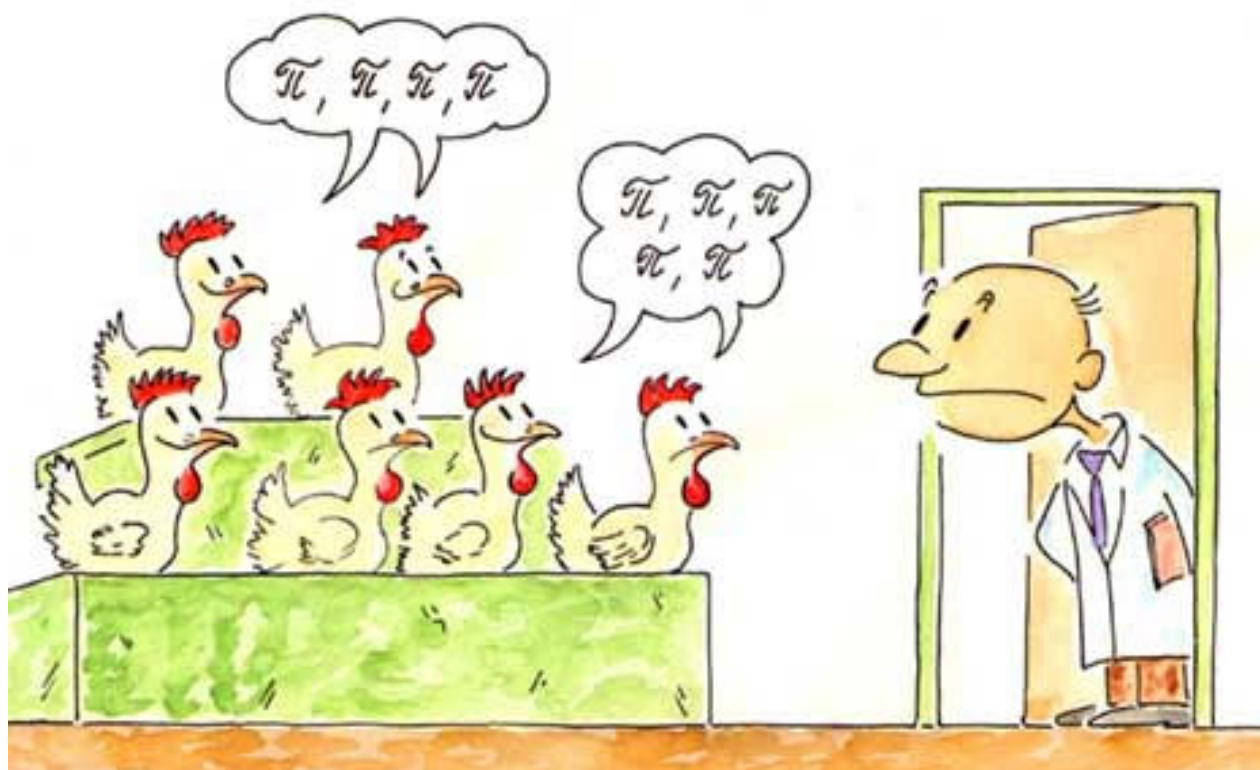
Příloha

Součástí tohoto dokumentu je následujících 12 souborů vytvořených v programu CG II Plus (soubory odpovídají názvům jednotlivých kapitol tohoto dokumentu):

1. Zákon odrazu..... odraz_svetla_2+.fig
2. Zákon lomu.....lom_svetla_2+.fig
3. Odraz a lom odraz a lom_2+.fig
4. Vytyčování kolmic kolmice_2+.fig
5. Rovnoběžné svazky paprsků svazek_A_2+.fig
svazek_B_2+.fig
6. Zobrazení dutým zrcadlem zrcadlo_dute_2+.fig
7. Zobrazení vypuklým zrcadlem zrcadlo_vypukle_2+.fig
8. Zobrazení spojkou zobr_spojku_2+.fig
9. Zobrazení rozptylkou zobr_rozptylkou_2+.fig
10. Průchod paprsku planoparalelní deskouplan_deska_2+.fig
11. Průchod paprsku optickým klínem..... opticky_klin_2+.fig

Závěr

Všem kolegům, kteří se obrnili trpělivostí a dostali se až k závěru, patří mé poděkování, přání mnoha originálních nápadů v Cabri Geometrii a malý bonus na následující stránce.



kresba: autor