Normas octaedrales en productos tensoriales de espacios de Banach

Abraham Rueda Zoca

XV Encuentros de Análisis Funcional

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Colaboradores

Preliminares I: normas octaedrales.

Norma octaedral (Godefroy, Maurey, 1987)

Sea X un espacio de Banach.

Preliminares I: normas octaedrales.

Norma octaedral (Godefroy, Maurey, 1987)

Sea X un espacio de Banach. Diremos que la norma de X es *octaedral* si, para cada subespacio finito dimensional Y de X y cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x \in S_X$ de manera que

$$\|y + \lambda x\| > (1 - \varepsilon)(\|y\| + |\lambda|)$$

se cumple para cada $y \in Y$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preliminares I: normas octaedrales.

Norma octaedral (Godefroy, Maurey, 1987)

Sea X un espacio de Banach. Diremos que la norma de X es *octaedral* si, para cada subespacio finito dimensional Y de X y cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x \in S_X$ de manera que

$$\|y + \lambda x\| > (1 - \varepsilon)(\|y\| + |\lambda|)$$

se cumple para cada $y \in Y$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de espacios con norma octaedral son $\ell_1, L_1([0,1]), L_\infty([0,1]), \mathcal{C}([0,1])$, $\mathrm{Lip}([0,1])\ldots$

Preliminares I: normas octaedrales.

Norma octaedral (Godefroy, Maurey, 1987)

Sea X un espacio de Banach. Diremos que la norma de X es *octaedral* si, para cada subespacio finito dimensional Y de X y cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x \in S_X$ de manera que

$$\|y + \lambda x\| > (1 - \varepsilon)(\|y\| + |\lambda|)$$

se cumple para cada $y \in Y$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de espacios con norma octaedral son $\ell_1, L_1([0,1]), L_\infty([0,1]), \mathcal{C}([0,1]), \mathrm{Lip}([0,1])\ldots$ Desde un punto de vista isomórfico, el prototipo de espacio de Banach con norma octaedral es ℓ_1, de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema (Godefroy, 1989)

Sea X un espacio de Banach.

Preliminares I: normas octaedrales.

Norma octaedral (Godefroy, Maurey, 1987)

Sea X un espacio de Banach. Diremos que la norma de X es *octaedral* si, para cada subespacio finito dimensional Y de X y cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x \in S_X$ de manera que

$$\|y + \lambda x\| > (1 - \varepsilon)(\|y\| + |\lambda|)$$

se cumple para cada $y \in Y$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de espacios con norma octaedral son $\ell_1, L_1([0,1]), L_\infty([0,1]), \mathcal{C}([0,1]), \mathrm{Lip}([0,1])\ldots$ Desde un punto de vista isomórfico, el prototipo de espacio de Banach con norma octaedral es ℓ_1, de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema (Godefroy, 1989)

Sea X un espacio de Banach. Entonces X admite una norma octaedral equivalente si, y sólamente si, X contiene una copia isomorfa de ℓ_1.

Preliminares II: productos tensoriales

Dados dos espacios de Banach X e Y, denotamos por $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ al tensor inyectivo de X e Y, que no es más que la completación de los operadores de rango finito de Y^* a X (que denotaremos por $F(Y^*, X)$) que son $w^* - w$ continuos.

Preliminares II: productos tensoriales

Dados dos espacios de Banach X e Y, denotamos por $X\widehat{\otimes}_{\varepsilon}Y$ al tensor inyectivo de X e Y, que no es más que la completación de los operadores de rango finito de Y^* a X (que denotaremos por $F(Y^*,X)$) que son w^*-w continuos.
Denotaremos por $X\widehat{\otimes}_{\pi}Y$ al tensor proyectivo de X e Y, que se define como la completación del espacio $X\otimes Y$ con la norma dada por

$$\|z\| := \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\| : z=\sum_{i=1}^{n}x_i\otimes y_i\right\}.$$

Preliminares II: productos tensoriales

Dados dos espacios de Banach X e Y, denotamos por $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ al tensor inyectivo de X e Y, que no es más que la completación de los operadores de rango finito de Y^* a X (que denotaremos por $F(Y^*, X)$) que son $w^* - w$ continuos.
Denotaremos por $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ al tensor proyectivo de X e Y, que se define como la completación del espacio $X \otimes Y$ con la norma dada por

$$\|z\| := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\|y_i\| : z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}.$$

Es conocido que $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)^* = X^*\widehat{\otimes}_\pi Y^*$ cuando X^* o Y^* tiene la propiedad de aproximación y X^* o Y^* tiene la RNP.

Octaedralidad en tensor inyectivo

Problema

¿Cómo preserva la octaedralidad el tensor inyectivo?

Octaedralidad en tensor inyectivo

Problema

¿Cómo preserva la octaedralidad el tensor inyectivo?

Este problema viene motivado por su problema "‘dual”, ya considerado en el contexto de tensores proyectivos:

Octaedralidad en tensor inyectivo

Problema

¿Cómo preserva la octaedralidad el tensor inyectivo?

Este problema viene motivado por su problema "‘dual", ya considerado en el contexto de tensores proyectivos:

1. Es conocido que un espacio de Banach X tiene norma octaedral si, y sólo si, toda combinación convexa de débil* slices de B_{X^*} tiene diámetro dos (X^* tiene la w^*-SD2P) (J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A.R.Z. (2014)).

Octaedralidad en tensor inyectivo

Problema

¿Cómo preserva la octaedralidad el tensor inyectivo?

Este problema viene motivado por su problema "'dual", ya considerado en el contexto de tensores proyectivos:

1. Es conocido que un espacio de Banach X tiene norma octaedral si, y sólo si, toda combinación convexa de débil* slices de B_{X^*} tiene diámetro dos (X^* tiene la w^*-SD2P) (J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A.R.Z. (2014)).
2. También es conocido que X^* tiene norma octaedral si, y sólo si, todas las combinaciones convexas de slices de B_X tienen diámetro dos (X tiene la SD2P).

Octaedralidad en tensor inyectivo

Problema

¿Cómo preserva la octaedralidad el tensor inyectivo?

Este problema viene motivado por su problema "'dual", ya considerado en el contexto de tensores proyectivos:

1. Es conocido que un espacio de Banach X tiene norma octaedral si, y sólo si, toda combinación convexa de débil* slices de B_{X^*} tiene diámetro dos (X^* tiene la w^*-SD2P) (J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A.R.Z. (2014)).
2. También es conocido que X^* tiene norma octaedral si, y sólo si, todas las combinaciones convexas de slices de B_X tienen diámetro dos (X tiene la SD2P).
3. Si X e Y tienen la SD2P, entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ también tiene la SD2P (J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A.R.Z. (2015)).

Octaedralidad en tensor inyectivo

Problema

¿Cómo preserva la octaedralidad el tensor inyectivo?

Este problema viene motivado por su problema "“dual”, ya considerado en el contexto de tensores proyectivos:

1. Es conocido que un espacio de Banach X tiene norma octaedral si, y sólo si, toda combinación convexa de débil* slices de B_{X^*} tiene diámetro dos (X^* tiene la w^*-SD2P) (J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A.R.Z. (2014)).
2. También es conocido que X^* tiene norma octaedral si, y sólo si, todas las combinaciones convexas de slices de B_X tienen diámetro dos (X tiene la SD2P).
3. Si X e Y tienen la SD2P, entonces $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ también tiene la SD2P (J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez y A.R.Z. (2015)).

Si consideramos **de manera informal** que $(X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y)^* = X^*\widehat{\otimes}_\pi Y^*$, esperaríamos que la octaedralidad se preserve por tensor inyectivo si se asume octaedralidad en ambos factores.

Octaedralidad en tensor inyectivo

Tal resultado de estabilidad resulta ser cierto.

Octaedralidad en tensor inyectivo

Tal resultado de estabilidad resulta ser cierto.

Teorema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X e Y tienen norma octaedral, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ también tiene norma octaedral.

Octaedralidad en tensor inyectivo

Tal resultado de estabilidad resulta ser cierto.

Teorema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X e Y tienen norma octaedral, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ también tiene norma octaedral.

Problema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X tiene norma octaedral e Y es un espacio de Banach no nulo, ¿tiene necesariamente $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ norma octaedral?

Octaedralidad en tensor inyectivo

Tal resultado de estabilidad resulta ser cierto.

Teorema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X e Y tienen norma octaedral, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ también tiene norma octaedral.

Problema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X tiene norma octaedral e Y es un espacio de Banach no nulo, ¿tiene necesariamente $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ norma octaedral?

Una respuesta a este problema podría dar respuesta al siguiente.

Octaedralidad en tensor inyectivo

Tal resultado de estabilidad resulta ser cierto.

Teorema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X e Y tienen norma octaedral, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ también tiene norma octaedral.

Problema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X tiene norma octaedral e Y es un espacio de Banach no nulo, ¿tiene necesariamente $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ norma octaedral?

Una respuesta a este problema podría dar respuesta al siguiente.

Problema (J. Becerra, G. López-Pérez y A.R.Z. (2015)

Si X tiene la SD2P e Y es no cero, ¿tiene $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ la SD2P?

Octaedralidad en tensor inyectivo

Tal resultado de estabilidad resulta ser cierto.

Teorema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X e Y tienen norma octaedral, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ también tiene norma octaedral.

Problema (J. Langemets, V. Lima and A. R.Z., 2017)

Si X tiene norma octaedral e Y es un espacio de Banach no nulo, ¿tiene necesariamente $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ norma octaedral?

Una respuesta a este problema podría dar respuesta al siguiente.

Problema (J. Becerra, G. López-Pérez y A.R.Z. (2015)

Si X tiene la SD2P e Y es no cero, ¿tiene $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ la SD2P?

Problema (T. Abrahamsen, V. Lima y O. Nygaard (2013))

¿Cómo se preserva la SD2P por productos tensoriales?

Octaedralidad en caso inyectivo. Condiciones necesarias

Problema (J. Langemets, V. Lima y A. R.Z., 2017)

Si X tiene norma octaedral e Y es no cero, ¿tiene $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ una norma octaedral?

Octaedralidad en caso inyectivo. Condiciones necesarias

Problema (J. Langemets, V. Lima y A. R.Z., 2017)

Si X tiene norma octaedral e Y es no cero, ¿tiene $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ una norma octaedral?

Teorema (J. Langemets, V. Lima y A. R. Z. (2017))

Sean X e Y dos espacios de Banach y supongamos que Y^* es uniformemente convexo.

Octaedralidad en caso inyectivo. Condiciones necesarias

Problema (J. Langemets, V. Lima y A. R.Z., 2017)

Si X tiene norma octaedral e Y es no cero, ¿tiene $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ una norma octaedral?

Teorema (J. Langemets, V. Lima y A. R. Z. (2017))

Sean X e Y dos espacios de Banach y supongamos que Y^* es uniformemente convexo. Si $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral entonces Y^* es finitamente representable en X.

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y$$

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\}$$

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Tomamos un subespacio finito dimensional $F \subseteq Y^*$, y consideramos $\{f_i\}_{i=1}^n$ una γ-red de S_F y puntos $y_i \in S_Y$ tales que $f_i(y_i) = 1$.

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Tomamos un subespacio finito dimensional $F \subseteq Y^*$, y consideramos $\{f_i\}_{i=1}^n$ una γ-red de S_F y puntos $y_i \in S_Y$ tales que $f_i(y_i) = 1$. Fijamos un punto $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$ y por la condición de octaedralidad de $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ encontramos $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ tal que

$$\|y_i \otimes x + T\| > 2 - \delta(\varepsilon) \ \forall i.$$

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Tomamos un subespacio finito dimensional $F \subseteq Y^*$, y consideramos $\{f_i\}_{i=1}^n$ una γ-red de S_F y puntos $y_i \in S_Y$ tales que $f_i(y_i) = 1$. Fijamos un punto $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$ y por la condición de octaedralidad de $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ encontramos $T \in S_{X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ tal que

$$\|y_i \otimes x + T\| > 2 - \delta(\varepsilon) \ \forall i.$$

$T \in X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y = F(Y^*, X)$ es un operador de norma uno, luego $\|T(f)\| \leq \|f\|$ se cumple para cada $f \in F$, por lo que probaremos una desigualdad por abajo.

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Tomamos un subespacio finito dimensional $F \subseteq Y^*$, y consideramos $\{f_i\}_{i=1}^n$ una γ-red de S_F y puntos $y_i \in S_Y$ tales que $f_i(y_i) = 1$. Fijamos un punto $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$ y por la condición de octaedralidad de $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ encontramos $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ tal que

$$\|y_i \otimes x + T\| > 2 - \delta(\varepsilon)\ \forall i.$$

$T \in X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y = F(Y^*, X)$ es un operador de norma uno, luego $\|T(f)\| \leq \|f\|$ se cumple para cada $f \in F$, por lo que probaremos una desigualdad por abajo. Para ello, para cada i, tomamos $\varphi_i \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \delta(\varepsilon) < \|\varphi_i(y_i)x + T(\varphi_i)\| \leq |\varphi_i(y_i)| + \|T(\varphi_i)\|.$$

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Tomamos un subespacio finito dimensional $F \subseteq Y^*$, y consideramos $\{f_i\}_{i=1}^n$ una γ-red de S_F y puntos $y_i \in S_Y$ tales que $f_i(y_i) = 1$. Fijamos un punto $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$ y por la condición de octaedralidad de $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ encontramos $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ tal que

$$\|y_i \otimes x + T\| > 2 - \delta(\varepsilon)\ \forall i.$$

$T \in X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y = F(Y^*, X)$ es un operador de norma uno, luego $\|T(f)\| \leq \|f\|$ se cumple para cada $f \in F$, por lo que probaremos una desigualdad por abajo. Para ello, para cada i, tomamos $\varphi_i \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \delta(\varepsilon) < \|\varphi_i(y_i)x + T(\varphi_i)\| \leq |\varphi_i(y_i)| + \|T(\varphi_i)\|.$$

Usando la convidad uniforme deducimos que $\|f_i - \varphi_i\| < \varepsilon$, en consecuencia $\|T(f_i)\| > 1 - \delta(\varepsilon) - \varepsilon$.

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Tomamos un subespacio finito dimensional $F \subseteq Y^*$, y consideramos $\{f_i\}_{i=1}^n$ una γ-red de S_F y puntos $y_i \in S_Y$ tales que $f_i(y_i) = 1$. Fijamos un punto $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$ y por la condición de octaedralidad de $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ encontramos $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ tal que

$$\|y_i \otimes x + T\| > 2 - \delta(\varepsilon)\ \forall i.$$

$T \in X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y = F(Y^*, X)$ es un operador de norma uno, luego $\|T(f)\| \leq \|f\|$ se cumple para cada $f \in F$, por lo que probaremos una desigualdad por abajo. Para ello, para cada i, tomamos $\varphi_i \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \delta(\varepsilon) < \|\varphi_i(y_i)x + T(\varphi_i)\| \leq |\varphi_i(y_i)| + \|T(\varphi_i)\|.$$

Usando la convidad uniforme deducimos que $\|f_i - \varphi_i\| < \varepsilon$, en consecuencia $\|T(f_i)\| > 1 - \delta(\varepsilon) - \varepsilon$. Como $\{f_i\}$ es una γ-red deducimos que $\|T(f)\| > 1 - \delta(\varepsilon) - \varepsilon - \gamma$ en toda la esfera

Esquema de demostración

Si llamamos $\delta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ al módulo de convexidad uniforme de Y^*, se cumple que

$$\left.\begin{array}{c} f, g \in B_{Y^*}, y \in B_Y \\ f(y) > 1 - \delta(\varepsilon), g(y) > 1 - \delta(\varepsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow \|f - g\| < \varepsilon.$$

Tomamos un subespacio finito dimensional $F \subseteq Y^*$, y consideramos $\{f_i\}_{i=1}^n$ una γ-red de S_F y puntos $y_i \in S_Y$ tales que $f_i(y_i) = 1$. Fijamos un punto $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$ y por la condición de octaedralidad de $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ encontramos $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ tal que

$$\|y_i \otimes x + T\| > 2 - \delta(\varepsilon) \ \forall i.$$

$T \in X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y = F(Y^*, X)$ es un operador de norma uno, luego $\|T(f)\| \leq \|f\|$ se cumple para cada $f \in F$, por lo que probaremos una desigualdad por abajo. Para ello, para cada i, tomamos $\varphi_i \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \delta(\varepsilon) < \|\varphi_i(y_i)x + T(\varphi_i)\| \leq |\varphi_i(y_i)| + \|T(\varphi_i)\|.$$

Usando la convidad uniforme deducimos que $\|f_i - \varphi_i\| < \varepsilon$, en consecuencia $\|T(f_i)\| > 1 - \delta(\varepsilon) - \varepsilon$. Como $\{f_i\}$ es una γ-red deducimos que $\|T(f)\| > 1 - \delta(\varepsilon) - \varepsilon - \gamma$ en toda la esfera, luego $T_{|F}$ es una $(1 + \delta(\varepsilon) + \varepsilon + \gamma)$-isometría.

Consecuencias

Usando teoría de representabilidad finita en L_1 deducimos lo siguiente.

Consecuencias

Usando teoría de representabilidad finita en L_1 deducimos lo siguiente.

Corolario

Sea X el espacio ℓ_1 o L_1 e Y igual a ℓ_p^n para $1 < p < 2$ y $n \geq 3$.

Consecuencias

Usando teoría de representabilidad finita en L_1 deducimos lo siguiente.

Corolario

Sea X el espacio ℓ_1 o L_1 e Y igual a ℓ_p^n para $1 < p < 2$ y $n \geq 3$. Entonces:

1. $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ no tiene norma octaedral aunque la norma de X sí lo es.

Consecuencias

Usando teoría de representabilidad finita en L_1 deducimos lo siguiente.

Corolario

Sea X el espacio ℓ_1 o L_1 e Y igual a ℓ_p^n para $1 < p < 2$ y $n \geq 3$. Entonces:

1. $X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ no tiene norma octaedral aunque la norma de X sí lo es.
2. $X^* \widehat{\otimes}_\pi Y^*$ no tiene la SD2P aunque X^* sí la tiene.

Octaedralidad en caso inyectivo. Condiciones suficientes

Hemos visto que, bajo ciertas hipótesis, la representación finita de Y^* en X es necesaria para que $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tenga norma octaedral.

Octaedralidad en caso inyectivo. Condiciones suficientes

Hemos visto que, bajo ciertas hipótesis, la representación finita de Y^* en X es necesaria para que $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tenga norma octaedral.¿Será suficiente?

Octaedralidad en caso inyectivo. Condiciones suficientes

Hemos visto que, bajo ciertas hipótesis, la representación finita de Y^* en X es necesaria para que $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tenga norma octaedral.¿Será suficiente?

Teorema (A.R.Z., 2019)

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que $Y^* \subseteq \ell_1$ y X un espacio de Banach con norma octaedral.

Octaedralidad en caso inyectivo. Condiciones suficientes

Hemos visto que, bajo ciertas hipótesis, la representación finita de Y^* en X es necesaria para que $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tenga norma octaedral.¿Será suficiente?

Teorema (A.R.Z., 2019)

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que $Y^* \subseteq \ell_1$ y X un espacio de Banach con norma octaedral. Entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral.

Esquema de demostración I

Esquema de demostración I

Basta demostrar, por un resultado de Haller-Langemets-Põldvere de 2015, que dados $T_1, \ldots, T_n \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ y $\varepsilon > 0$, existe $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ de manera que

$$\|T_i + T\| > 2 - \varepsilon \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esquema de demostración I

Basta demostrar, por un resultado de Haller-Langemets-Põldvere de 2015, que dados $T_1, \ldots, T_n \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ y $\varepsilon > 0$, existe $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ de manera que

$$\|T_i + T\| > 2 - \varepsilon \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esto es equivalente a encontrar, para cada i, un $y_i^* \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \varepsilon < \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\|$$

Esquema de demostración I

Basta demostrar, por un resultado de Haller-Langemets-Põldvere de 2015, que dados $T_1, \ldots, T_n \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ y $\varepsilon > 0$, existe $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ de manera que

$$\|T_i + T\| > 2 - \varepsilon \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esto es equivalente a encontrar, para cada i, un $y_i^* \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \varepsilon < \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\| \leq \|T_i(y_i^*)\| + \|T(y_i^*)\| \leq 2.$$

Esquema de demostración I

Basta demostrar, por un resultado de Haller-Langemets-Põldvere de 2015, que dados $T_1, \ldots, T_n \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ y $\varepsilon > 0$, existe $T \in S_{X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ de manera que

$$\|T_i + T\| > 2 - \varepsilon \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esto es equivalente a encontrar, para cada i, un $y_i^* \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \varepsilon < \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\| \leq \|T_i(y_i^*)\| + \|T(y_i^*)\| \leq 2.$$

Tomamos $y_i^* \in S_{Y^*}$ de manera que $\|T_i(y_i^*)\| \approx 1$.

Esquema de demostración I

Basta demostrar, por un resultado de Haller-Langemets-Põldvere de 2015, que dados $T_1, \ldots, T_n \in S_{X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ y $\varepsilon > 0$, existe $T \in S_{X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y}$ de manera que

$$\|T_i + T\| > 2 - \varepsilon \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esto es equivalente a encontrar, para cada i, un $y_i^* \in S_{Y^*}$ de manera que

$$2 - \varepsilon < \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\| \leq \|T_i(y_i^*)\| + \|T(y_i^*)\| \leq 2.$$

Tomamos $y_i^* \in S_{Y^*}$ de manera que $\|T_i(y_i^*)\| \approx 1$.Tomamos $\Phi : Y^* \hookrightarrow \ell_1$ una isometría. Ahora, como Y^* tiene dimensión finita, hay un K suficientemente grande de manera que $P_K \circ \Phi : Y^* \longrightarrow \ell_1^K$ es una $(1 + \varepsilon)$-isometría.

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \operatorname{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \operatorname{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z+s\| > (1-\delta)(\|z\| + \|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$.

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \text{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z+s\| > (1-\delta)(\|z\|+\|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural.

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \text{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z+s\| > (1-\delta)(\|z\| + \|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \text{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z+s\| > (1-\delta)(\|z\|+\|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

T es una cierta $(1+\gamma)$-isometría

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \text{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z+s\| > (1-\delta)(\|z\| + \|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

T es una cierta $(1+\gamma)$-isometría y $\|T\| \approx 1$.

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \text{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z+s\| > (1-\delta)(\|z\|+\|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

T es una cierta $(1+\gamma)$-isometría y $\|T\| \approx 1$. Además, como $T(Y^*) \subseteq S$, entonces

$$\|T_i + T\|$$

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \operatorname{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z+s\| > (1-\delta)(\|z\|+\|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

T es una cierta $(1+\gamma)$-isometría y $\|T\| \approx 1$. Además, como $T(Y^*) \subseteq S$, entonces

$$\|T_i + T\| \geq \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\|$$

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \operatorname{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z + s\| > (1-\delta)(\|z\| + \|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

T es una cierta $(1+\gamma)$-isometría y $\|T\| \approx 1$. Además, como $T(Y^*) \subseteq S$, entonces

$$\|T_i + T\| \geq \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\| \approx \|T_i(y_i^*)\| + \|T(y_i^*)\|$$

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \text{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z + s\| > (1-\delta)(\|z\| + \|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

T es una cierta $(1+\gamma)$-isometría y $\|T\| \approx 1$. Además, como $T(Y^*) \subseteq S$, entonces

$$\|T_i + T\| \geq \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\| \approx \|T_i(y_i^*)\| + \|T(y_i^*)\| \approx 1 + \|T(y_i^*)\|$$

Esquema de demostración II

Como X tiene norma octaedral, tomando $Z := \operatorname{span}\{T_i(y_i^*) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\delta > 0$,aplicando sucesivamente la hipótesis de octaedralidad encontramos un subespacio $S \subseteq X$ de manera que S es $(1+\delta)$-isométrico a ℓ_1^K y tal que

$$\|z + s\| > (1-\delta)(\|z\| + \|s\|)$$

para cada $z \in Z$ y cada $s \in S$. Tomamos $\Psi : \ell_1^K \longrightarrow S$ una $(1+\delta)$ isometría e $i : S \longrightarrow X$ la inclusión natural. Entonces, el operador T lo definiremos como

$$T : Y^* \xrightarrow{\Phi} \ell_1 \xrightarrow{P_K} \ell_1^K \xrightarrow{\Psi} S \xrightarrow{i} X$$

T es una cierta $(1+\gamma)$-isometría y $\|T\| \approx 1$. Además, como $T(Y^*) \subseteq S$, entonces

$$\|T_i + T\| \geq \|T_i(y_i^*) + T(y_i^*)\| \approx \|T_i(y_i^*)\| + \|T(y_i^*)\| \approx 1 + \|T(y_i^*)\| \approx 2,$$

como queríamos.

Consecuencias

Corolario

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que Y^* es uniformemente convexo.

Consecuencias

Corolario

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que Y^* es uniformemente convexo. Son equivalentes:

1. $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral para todo espacio X con norma octaedral.

Consecuencias

Corolario

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que Y^* es uniformemente convexo. Son equivalentes:

1. $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral para todo espacio X con norma octaedral.
2. $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral.

Consecuencias

Corolario

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que Y^* es uniformemente convexo. Son equivalentes:

1. $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral para todo espacio X con norma octaedral.
2. $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral.
3. $Y^* \subseteq \ell_1$.

Consecuencias

Corolario

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que Y^* es uniformemente convexo. Son equivalentes:

1. $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral para todo espacio X con norma octaedral.
2. $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral.
3. $Y^* \subseteq \ell_1$.

Como caso particular, del hecho de que todo espacio de Banach **real** de dimensión 2 es isométrico a un subespacio de $L_1([0,1])$ (Dor, 1976), se tiene que

Corolario

Consecuencias

Corolario

Sea Y un espacio finito dimensional de manera que Y^* es uniformemente convexo. Son equivalentes:

1. $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral para todo espacio X con norma octaedral.
2. $\ell_1\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral.
3. $Y^* \subseteq \ell_1$.

Como caso particular, del hecho de que todo espacio de Banach **real** de dimensión 2 es isométrico a un subespacio de $L_1([0,1])$ (Dor, 1976), se tiene que

Corolario

Si X tiene norma octaedral y $\dim(Y) = 2$, entonces $X\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ tiene norma octaedral.

Referencias

T. Abrahamsen, V. Lima, O. Nygaard, *Remarks on diameter 2 properties*, J. Convex Anal. **20** (2013) 439–452.

J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez and A. Rueda Zoca, *Octahedral norms in spaces of operators*, J. Math. Anal. Appl. **427** (2015), 171–184.

L. E. Dor, *Potentials and isometric embeddings in L_1*, Israel J. Math. **24** (1976), 260–268.

R. Haller, J. Langemets, and M. Poldvere, *On duality of diameter 2 properties*, J. Convex Anal. **22**, (2015), no. 2, 465–483.

J. Langemets, V. Lima and A. Rueda Zoca, *Octahedral norms in tensor products of Banach spaces*, Quarterly J. Math. **68**, 4 (2017), 1247–1260.

A. Rueda Zoca, *Stability results of octahedrality in tensor product spaces and finite representability in ℓ_1*, por aparecer en Quarterly J. Math.